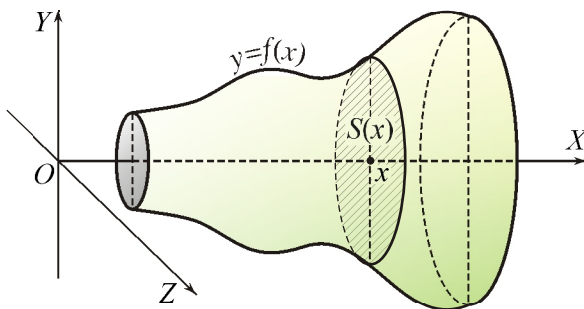


М. І. ЖАЛДАК,  
Г. О. МИХАЛІН,  
С. Я. ДЕКАНОВ

# МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

## ІНТЕГРАЛЬНЕ ЧИСЛЕННЯ ФУНКЦІЙ ОДНІЄЇ ЗМІННОЇ З ЕЛЕМЕНТАМИ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

*Навчальний посібник  
для студентів педагогічних університетів*



$$V = \int_a^b S(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx$$

*М. І. Жалдак, Г. О. Михалін, С. Я. Деканов.* Математичний аналіз. Інтегральне числення функцій однієї змінної з елементами інформаційних технологій: Навчальний посібник. – Київ, НПУ імені М. П. Драгоманова, 2011. – 268 с.

У посібнику здійснено оригінальне подання інтегрального числення функцій однієї змінної. Введено інтеграли Ньютона – Лейбніца, Рімана та Стілтєса, досліджено їхні властивості, взаємозв'язки та застосування.

Кожен підрозділ містить: 1) теоретичні відомості, ілюстровані достатньою кількістю прикладів та рисунків; 2) приклади застосування комп'ютерних засобів математики; 3) короткі історичні відомості, які сприятимуть розширенню кругозору майбутніх учителів математики; 4) розкриття важливості побудованих теорій для вчителя математики; 5) контрольні запитання і завдання, які можна використовувати на практичних заняттях, колокваумах, екзаменах, при написанні курсових та дипломних робіт.

Для студентів і викладачів математичних спеціальностей вищих педагогічних навчальних закладів.

Лл. 121. Бібліогр. 20 назв.

### **Рецензенти:**

*М. В. Працьовитий*, доктор фіз.-мат. наук, професор Нац. пед. ун-ту імені М. П. Драгоманова;

*Ю. В. Триус*, доктор пед. наук, професор Черкаського Нац. ун-ту імені Богдана Хмельницького

Рекомендовано до друку Вченою радою Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова (протокол № від 2011 року).

Адреса видавництва: Україна, 01601, м. Київ, вул. Пирогова, 9, Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова

© М. І. Жалдак,  
Г. О. Михалін,  
С. Я. Деканов, 2011

# Зміст

<b>Передмова</b> .....	<b>8</b>
<b>1. ІНТЕГРАЛ НЬЮТОНА – ЛЕЙБНІЦА І НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ</b> .....	<b>10</b>
<b>1.1. Поняття первісної, інтеграла Ньютона – Лейбніца і невизначеного інтеграла</b> .....	<b>10</b>
1.1.1. Поняття первісної.....	10
1.1.2. Теорема про множину первісних даної функції.....	11
1.1.3. Поняття $NL$ -інтегрованої функції та $NL$ -інтеграла .....	11
1.1.4. Формула Ньютона – Лейбніца .....	12
1.1.5. Найпростіші властивості $NL$ -інтеграла .....	13
1.1.6. Поняття невизначеного інтеграла. Таблиця основних інтегралів .....	15
1.1.7. Лінійність $NL$ -інтеграла та метод розкладу обчислення невизначеного інтеграла.....	18
1.1.8. Заміна змінної в $NL$ -інтегралі та у невизначеному інтегралі	19
1.1.9. Формули інтегрування частинами для $NL$ -інтеграла та невизначеного інтеграла.....	20
1.1.10. Використання комп'ютерних засобів математики.....	21
1.1.11. Історичні відомості .....	27
1.1.12. Зв'язок із шкільним курсом математики .....	27
1.1.13. Постановка проблем .....	27
1.1.14. Контрольні запитання і завдання .....	27
<b>1.2. Існування <math>NL</math>-інтеграла неперервної функції</b> .....	<b>30</b>
1.2.1. $NL$ -інтегровність ламаної функції .....	30
1.2.2. Зв'язок неперервних функцій з ламаними.....	32
1.2.3. $NL$ -інтегровність граничної функції.....	33
1.2.4. $NL$ -інтегровність неперервної функції. Площа криволінійної трапеції .....	36
1.2.5. Використання комп'ютерних засобів математики.....	36
1.2.6. Історичні відомості .....	43
1.2.7. Зв'язок із шкільним курсом математики .....	44
1.2.8. Постановка проблем .....	44
1.2.9. Контрольні запитання і завдання .....	44
<b>1.3. Обчислення невизначених інтегралів функцій деяких класів</b> .....	<b>45</b>

1.3.1. Інтегрування многочленів .....	45
1.3.2. Інтегрування елементарних дробів .....	46
1.3.3. Алгоритм відшукування невизначеного інтеграла раціональ- ної функції .....	47
1.3.4. Інтегрування комплексних дробово-раціональних функцій.	50
1.3.5. Інтегрування деяких ірраціональних алгебраїчних функцій	52
1.3.6. Інтегрування деяких трансцендентних функцій .....	54
1.3.7. Приклади неелементарних функцій .....	56
1.3.8. Використання комп'ютерних засобів математики .....	57
1.3.9. Історичні відомості .....	72
1.3.10. Зв'язок із шкільним курсом математики .....	73
1.3.11. Постановка проблем .....	73
1.3.12. Контрольні запитання і завдання .....	73
<b>2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ .....</b>	<b>75</b>
<b>2.1. Поняття визначеного інтеграла та його існування .....</b>	<b>75</b>
2.1.1. Розбиття відрізка та його дрібність .....	75
2.1.2. Поняття площі криволінійної трапеції .....	76
2.1.3. Поняття інтегральної суми та її границі .....	77
2.1.4. Поняття $R$ -інтегрованої функції та $R$ -інтеграла .....	77
2.1.5. Зв'язок між інтегралами Рімана і Ньютона – Лейбніца ....	78
2.1.6. $R$ -інтегровність неперервних функцій. Геометричний зміст $R$ -інтеграла .....	79
2.1.7. Необхідна умова $R$ -інтегровності .....	81
2.1.8. Суми Дарбу та їхні властивості. Верхній та нижній інтегра- ли Дарбу .....	82
2.1.9. Критерії $R$ -інтегровності .....	85
2.1.10. Достатні умови $R$ -інтегровності .....	88
2.1.11. Використання комп'ютерних засобів математики .....	91
2.1.12. Історичні відомості .....	102
2.1.13. Зв'язок із шкільним курсом математики .....	103
2.1.14. Постановка проблем .....	103
2.1.15. Контрольні запитання і завдання .....	103
<b>2.2. Основні властивості <math>R</math>-інтеграла .....</b>	<b>105</b>
2.2.1. $R$ -інтегровність сталої функції, лінійність та монотонність $R$ -інтеграла .....	105
2.2.2. $R$ -інтегровність модуля функції та добутку функцій .....	106
2.2.3. Теорема про середнє .....	109

2.2.4. Адитивність $R$ -інтеграла .....	111
2.2.5. Інтеграл із змінною межею інтегрування .....	113
2.2.6. Інтегрування функціонального ряду .....	115
2.2.7. Формули заміни змінної та інтегрування частинами для $R$ -інтеграла .....	117
2.2.8. Використання комп'ютерних засобів математики .....	119
2.2.9. Історичні відомості .....	145
2.2.10. Зв'язок із шкільним курсом математики .....	145
2.2.11. Постановка проблеми .....	145
2.2.12. Контрольні запитання і завдання .....	145
<b>2.3. Невласні інтеграли .....</b>	<b>147</b>
2.3.1. Поняття невластного інтеграла .....	147
2.3.2. Значення невластного інтеграла, його збіжність і розбіжність .....	149
2.3.3. Узагальнення поняття невластного інтеграла .....	150
2.3.4. Умови збіжності невластних інтегралів .....	151
2.3.5. Інтегральна ознака збіжності додатного ряду .....	153
2.3.6. Головні значення невластного інтеграла .....	154
2.3.7. Використання комп'ютерних засобів математики .....	155
2.3.8. Історичні відомості .....	171
2.3.9. Зв'язок із шкільним курсом математики .....	172
2.3.10. Постановка проблеми .....	172
2.3.11. Контрольні запитання і завдання .....	172
<b>2.4. Інтеграл Стільтєса .....</b>	<b>173</b>
2.4.1. Задача про статичний момент маси відносно точки .....	174
2.4.2. Поняття інтегральної суми Стільтєса та інтеграла Стільтєса .....	174
2.4.3. Формула інтегрування частинами для інтеграла Стільтєса .....	175
2.4.4. Суми Дарбу – Стільтєса та їхні властивості .....	176
2.4.5. Основні властивості інтеграла Стільтєса .....	178
2.4.6. Достатні умови інтегровності за Стільтєсом .....	180
2.4.7. Граничний перехід під знаком інтеграла Стільтєса .....	183
2.4.8. Використання комп'ютерних засобів математики .....	186
2.4.9. Історичні відомості .....	187
2.4.10. Зв'язок із шкільним курсом математики .....	187
2.4.11. Контрольні запитання і завдання .....	187

<b>3. ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ....</b>	<b>189</b>
<b>3.1. Обчислення довжини дуги кривої .....</b>	<b>189</b>
3.1.1. Поняття кривої. Приклади кривих .....	189
3.1.2. Поняття довжини дуги .....	193
3.1.3. Критерії спрямлюваності .....	195
3.1.4. Обчислення довжини дуги .....	198
3.1.5. Диференціал довжини дуги .....	201
3.1.6. Гладкі та кусково-гладкі дуги .....	201
3.1.7. Використання комп'ютерних засобів математики .....	202
3.1.8. Історичні відомості .....	216
3.1.9. Зв'язок із шкільним курсом математики .....	216
3.1.10. Контрольні запитання і завдання .....	216
<b>3.2. Обчислення площ плоских фігур .....</b>	<b>218</b>
3.2.1. Поняття плоскої фігури та її площі .....	218
3.2.2. Критерії квадровності .....	220
3.2.3. Основні та вивідні властивості квадровних фігур і площі .	223
3.2.4. Площа узагальненої криволінійної трапеції .....	224
3.2.5. Площа криволінійного сектора .....	227
3.2.6. Використання комп'ютерних засобів математики .....	229
3.2.7. Історичні відомості .....	229
3.2.8. Зв'язок із шкільним курсом математики .....	229
3.2.9. Постановка проблем .....	230
3.2.10. Контрольні запитання і завдання .....	230
<b>3.3. Обчислення об'єму просторової фігури .....</b>	<b>231</b>
3.3.1. Поняття просторової фігури та її об'єму .....	231
3.3.2. Властивості кубовних фігур та об'ємів .....	232
3.3.3. Приклади кубовних та некубовних просторових фігур ...	233
3.3.4. Принцип Кавальєрі .....	234
3.3.5. Об'єм тіла обертання .....	236
3.3.6. Використання комп'ютерних засобів математики .....	237
3.3.7. Історичні відомості .....	244
3.3.8. Зв'язок із шкільним курсом математики .....	245
3.3.9. Постановка проблем .....	245
3.3.10. Контрольні запитання і завдання .....	245

---

<b>3.4. Обчислення площі поверхні обертання і фізичні застосування визначеного інтеграла .....</b>	<b>246</b>
3.4.1. Поняття поверхні обертання та її площі .....	246
3.4.2. Обчислення площі поверхні обертання .....	247
3.4.3. Обчислення маси матеріальної дуги .....	251
3.4.4. Обчислення маси матеріальної пластини .....	252
3.4.5. Статичні моменти та центр маси матеріальної дуги .....	253
3.4.6. Статичні моменти та центр маси матеріальної пластини ...	254
3.4.7. Теореми Гульдїна .....	256
3.4.8. Використання комп'ютерних засобів математики .....	257
3.4.9. Історичні відомості .....	260
3.4.10. Зв'язок із шкільним курсом математики .....	260
3.4.11. Постановка проблеми .....	261
3.4.12. Контрольні запитання і завдання .....	261
<b>Література .....</b>	<b>263</b>
<b>Іменний та предметний покажчик .....</b>	<b>265</b>

## Передмова

Даний посібник створено на основі багаторічного досвіду роботи авторів у Національному педагогічному університеті імені М. П. Драгоманова. Призначений він насамперед для студентів і викладачів вищих педагогічних навчальних закладів, проте автори сподіваються, що цей посібник буде цікавим і корисним для всіх, хто вивчає математичний аналіз або навчає його своїх студентів.

Навчальний матеріал посібника подано на сучасному і водночас доступному для більшості студентів рівні. Спосіб подання навчального матеріалу дещо відмінний від традиційного для навчальної літератури.

Так, з поняттям первісної функції пов'язане не тільки поняття невизначеного інтеграла, а й поняття інтеграла Ньютона – Лейбніца, або  $NL$ -інтеграла, яке фактично введено засновниками диференціального та інтегрального числення І. Ньютоном та Г. Лейбніцом. Це поняття особливо корисне для вчителів математики, оскільки його означення і доведення властивостей значно простіші, ніж для традиційного визначеного інтеграла. Тому початки інтегрального числення у школі можна вивчати на основі поняття інтеграла Ньютона – Лейбніца. У зв'язку з цим перший розділ посібника присвячено  $NL$ -інтегралу та невизначеному інтегралу, хоча на практиці скрізь, де використовують невизначений інтеграл, можна обійтися  $NL$ -інтегралом.

Другий розділ посібника присвячено визначеному інтегралу, який може бути або інтегралом Рімана ( $R$ -інтегралом), або інтегралом Стілтєса ( $S$ -інтегралом), або невластним інтегралом (Ньютона – Лейбніца, Рімана або Стілтєса).

У третьому розділі посібника розглянуто геометричні та фізичні застосування інтегрального числення.

Навчальний матеріал посібника достатньо структурований. Кожен розділ складається з підрозділів, які поділено на невеликі пункти. Теоретичний матеріал, поданий у кожному пункті, проілюстровано достатньою кількістю прикладів і рисунків. П'ять останніх пунктів кожного підрозділу присвячено використанню ком-



п'ютерних засобів математики, історичним відомостям, зв'язкам із шкільним курсом математики, постановці проблем та контрольним запитанням і завданням.

У посібнику досить широко використовується логічна символіка та деякі інші скорочення, зміст яких розкривається у наступній таблиці.

Символ	Які слова замінює даний символ
$\forall$	“для будь-якого”, “для кожного”, “для всіх” тощо
$\exists$	“існує”, “знайдеться” тощо
$\exists!$	“існує єдиний”, “знайдеться єдиний” тощо
:	“такий, що”, “тих, кожен з яких”, “а саме” тощо
$:=, =:$	“дорівнює за означенням”, “надається значення” тощо
$\implies$	“впливає”, “якщо ..., то” тощо
$\iff$	“тоді й тільки тоді”, “необхідно й достатньо” тощо, а в означенні – слово “якщо”
$\square$	“Початок доведення”
$\blacksquare$	“Кінець доведення”
$\mathbb{N}$	Множина натуральних чисел
$\mathbb{Z}$	Множина цілих чисел
$\mathbb{Q}$	Множина раціональних чисел
$\mathbb{R}$	Множина дійсних чисел
$\mathbb{C}$	Множина комплексних чисел
$\overline{m, n}$	Цілочисельний відрізок: $\{x \in \mathbb{Z}: m \leq x \leq n\} = \{m, m + 1, m + 2, \dots, n\}$

# 1. ІНТЕГРАЛ НЬЮТОНА – ЛЕЙБНІЦА І НЕВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

У першому розділі вивчаються поняття, пов'язані з операцією, оберненою до операції диференціювання функції.

## 1.1. Поняття первісної, інтеграла Ньютона – Лейбніца та невизначеного інтеграла

У цьому підрозділі введено поняття первісної, інтеграла Ньютона – Лейбніца ( $NL$ -інтеграла) та невизначеного інтеграла; доведено теорему про множину первісних даної функції, формулу Ньютона – Лейбніца та властивості  $NL$ -інтеграла і невизначеного інтеграла, зокрема формули заміни змінної та інтегрування частинами.

**1.1.1. Поняття первісної.** Поняття похідної функції  $f$  дозволяє визначати такі властивості цієї функції, як монотонність, точки екстремуму, опуклість та інші. За допомогою похідної можна визначати швидкість руху матеріальної точки, якщо відомий закон її руху, знаходити дотичну до графіка функції та розв'язувати багато інших практичних задач.

Разом з тим на практиці досить часто зустрічаються задачі, в яких відомими є властивості функції, а потрібно знайти саму функцію. Наприклад, за відомою в довільний момент часу швидкістю руху матеріальної точки потрібно знайти закон її руху, за відомою дотичною до графіка функції в довільній його точці потрібно знайти саму функцію і т. ін. У загальному вигляді такі задачі зводяться до відшукування невідомої функції за відомою її похідною. У зв'язку з цим вводять наступне означення.

Функцію  $F$  називають *первісною функцією*  $f$  (дійсної або комплексної змінної) на множині  $E$ , якщо  $F'(z) = f(z) \forall z \in E$ . При цьому також кажуть, що *функція  $f$  має первісну на множині  $E$ .*

**Приклади. 1.** Функція  $F(z) = \sin z$  є первісною функції  $f(z) = \cos z$  на множині  $E = \mathbb{C}$ .

2. Функція  $F(x) = \ln|x|$  є первісною функції  $f(x) = \frac{1}{x}$  на множині  $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Зауважимо, що означення первісної вимагає, щоб кожна точка множини  $E \subset \mathbb{C}$  була внутрішньою, тобто  $\forall z_0 \in E \exists \delta = \delta(z_0): O_\delta(z_0) \subset E$ , а коли  $E \subset \mathbb{R}$ , то  $(z_0 - \delta; z_0] \subset E$  або  $[z_0; z_0 + \delta) \subset E$ .

**1.1.2. Теорема про множину первісних даної функції.** Нехай функція  $F$  є первісною функції  $f$  на множині  $E$ . Тоді для довільної сталої  $C$  функція  $F + C$  є первісною функції  $f$ , оскільки  $(F(z) + C)' = f(z) \forall z \in E$ . Природно виникає питання про те, чи існують первісні для функції  $f$  на множині  $E$ , відмінні від функцій вигляду  $\Phi = F + C$ .

Щоб відповісти на це питання, вважатимемо множину  $E$  лінійно зв'язною, тобто такою, яка разом з довільними двома своїми точками  $z_1$  та  $z_2$  містить і деяку ламану, що їх сполучає.

□ Отже, нехай  $F$  та  $\Phi$  є первісними функції  $f$  на лінійно зв'язній множині  $E$ , зокрема на  $E = \langle a; b \rangle$ . Розглянемо функцію  $\Psi(z) = \Phi(z) - F(z)$ ,  $z \in E$ . Маємо:

$$\Psi'(z) = \Phi'(z) - F'(z) = f(z) - f(z) = 0 \quad \forall z \in E,$$

і тому за критерієм сталості  $\Psi(z) = \text{const}$  на лінійно зв'язній множині  $E$ , тобто

$$\Phi = F + C,$$

де  $C = \text{const}$  – довільна стала. ■

Таким чином, доведена наступна теорема.

**Теорема 1** (про множину первісних функції). *Нехай функція  $F$  є первісною функції  $f$  на лінійно зв'язній множині  $E$ , зокрема на проміжку  $\langle a; b \rangle$ . Тоді множина всіх первісних функції  $f$  на  $E$  описується формулою  $\Phi = F + C$ , де  $C = \text{const}$  – довільна стала.*

**1.1.3. Поняття  $NL$ -інтегрованої функції та  $NL$ -інтеграла.** Якщо функція  $f$  має первісну на лінійно зв'язній множині  $E$ , то  $f$  називають інтегрованою за Ньютоном – Лейбніцом або  $NL$ -інтегрованою на  $E$  і записують  $f \in NL(E)$ . При цьому якщо  $F$  – первісна функції  $f$  на  $E$ , то для фіксованих точок  $a \in E$  і  $b \in E$  число

$$\int_a^b f(u) du := F(b) - F(a)$$

називають *інтегралом Ньютона – Лейбніца* або *NL-інтегралом функції  $f$  уздовж довільної ламаної  $L$ , що сполучає точки  $a$  та  $b$* . Ці точки називають відповідно *нижньою та верхньою межею інтегрування*; функцію  $f$  називають *підінтегральною функцією* а вираз  $\int_a^b f(u) du$  – *підінтегральним виразом*. Зокрема, якщо  $[a; b] \subset E$ , то  $\int_a^b f(u) du$  – це *NL-інтеграл функції  $f$  на орієнтованому відрізку  $[a; b]$* .

**Приклад 3.** Функція  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , є *NL-інтегрованою* на кожному з проміжків  $(-\infty; 0)$  і  $(0; +\infty)$ , але не є *NL-інтегрованою* на множині  $E = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ , оскільки ця множина не є лінійно зв'язною. При цьому

$$\int_1^x \frac{1}{u} du = \ln x \quad \forall x > 0 \quad \text{і} \quad \int_{-1}^x \frac{1}{u} du = \ln(-x) \quad \forall x < 0.$$

Для комплекснозначної функції дійсної змінної з відомої теореми про зв'язок між диференційовністю цієї функції і диференційовністю її дійсної та уявної частин одразу випливає наступна важлива теорема.

**Теорема 2** (про *NL-інтегровність комплекснозначної функції дійсної змінної*). Нехай  $f(x) = u(x) + iv(x)$  – *комплекснозначна функція дійсної змінної  $x \in \langle a; b \rangle$* . Тоді для того щоб  $f(x)$  була *NL-інтегрованою на проміжку  $\langle a; b \rangle$*  і мала *первісну  $F(x) = U(x) + iV(x)$* , необхідно і достатньо, щоб функції  $u(x)$  та  $v(x)$  були *NL-інтегровними на  $\langle a; b \rangle$*  і щоб  $U(x)$  та  $V(x)$  були їхніми *первісними*. При цьому  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} u(x) dx + i \int_{\alpha}^{\beta} v(x) dx \quad \forall \alpha, \beta \in \langle a; b \rangle$ .

**1.1.4. Формула Ньютона – Лейбніца.** Зауважимо, що *NL-інтеграл функції  $f$  за теоремою 1 не залежить від її первісної*, що фігурує в означенні цього інтеграла. Це випливає з рівності

$$\Phi(b) - \Phi(a) = (F(b) + C) - (F(a) + C) = F(b) - F(a),$$

де  $F$  і  $\Phi$  – довільні первісні функції  $f$  на  $E$ .

Отже, має місце наступна теорема.

**Теорема 3** (про *формулу Ньютона – Лейбніца*). Якщо функція  $f$  є *NL-інтегрованою на множині  $E$* , то для будь-якої первісної  $\Phi$

функції  $f$  на  $E$  є правильною **формула Ньютона – Лейбніца**:

$$\int_a^b f(u) du = \Phi(b) - \Phi(a) =: \Phi(z)|_a^b \quad \forall a, b \in E. \quad (1)$$

Якщо у формулі (1) вважати точку  $a$  фіксованою, а точку  $b = z \in E$  біжучою, то дістанемо  $NL$ -інтеграл з верхньою змінною межею інтегрування:

$$\int_a^z f(u) du =: \Phi(z) - \Phi(a) \Rightarrow \Phi(z) = \int_a^z f(u) du + \Phi(a).$$

**1.1.5. Найпростіші властивості  $NL$ -інтеграла.** У цьому пункті вважатимемо, що функція  $f(z) \in NL$ -інтегрованою на лінійно зв'язній множині  $E$  і що точки  $a, b \in E$ . Безпосередньо з формули Ньютона – Лейбніца та означення  $NL$ -інтеграла випливають його найпростіші властивості.

**Властивість 1** (правило перестановки меж інтегрування).

$$\int_a^b f(u) du = - \int_b^a f(u) du.$$

**Властивість 2** (про інтеграл з однаковими межами).

$$\int_a^a f(u) du = 0.$$

**Властивість 3** (адитивність  $NL$ -інтеграла).

$$\int_a^b f(u) du = \int_a^c f(u) du + \int_c^b f(u) du \quad \forall a, b, c \in E.$$

$$\square F(b) - F(a) = (F(c) - F(a)) + (F(b) - F(c)). \quad \blacksquare$$

**Властивість 4** (про похідну і диференціал  $NL$ -інтеграла).

$$\left( \int_a^z f(u) du \right)' = f(z), \quad \left( \int_z^a f(u) du \right)' = -f(z),$$

$$d \left( \int_a^z f(u) du \right) = f(z) dz \quad \text{і} \quad d \left( \int_z^a f(u) du \right) = -f(z) dz.$$

Таким чином, роль первісної функції  $f$  на множині  $E$  може відігравати інтеграл з верхньою змінною межею інтегрування, тобто

$F(z) = \int_a^z f(u) du$ , де  $a$  – фіксована, а  $z$  – біжуча точка множини  $E$ .

**Наслідок 1** (про невід’ємність  $NL$ -інтеграла). *Якщо  $a < b$  і  $f(x) \geq 0$  ( $f(x) > 0$ )  $\forall x \in [a; b]$ , то  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$  ( $\int_a^b f(x) dx > 0$ ).*

**Властивість 5** (про  $NL$ -інтеграл від похідної та диференціала).

$$\int_a^z f'(u) du = f(z) - f(a) \quad \text{і} \quad \int_a^z df(u) = f(z) - f(a).$$

**Властивість 6** (про оцінку модуля  $NL$ -інтеграла).

$$\left| \int_a^b f(u) du \right| \leq |f(z^*)| \cdot l,$$

де  $l$  – довжина ламаної  $L \subset E$ , що сполучає точки  $a$  та  $b$ , а  $z^*$  – певна точка цієї ламаної  $L$ .

□ Нехай ламана  $L = \bigcup_{k=0}^{n-1} [z_k; z_{k+1}] \subset E$ ,  $z_0 = a$ ,  $z_n = b$ , причому

$$l = \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|.$$

Тоді

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(u) du \right| &= |F(b) - F(a)| = \left| \sum_{k=0}^{n-1} (F(z_{k+1}) - F(z_k)) \right| \leq \\ &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |F(z_{k+1}) - F(z_k)|. \end{aligned}$$

Для оцінки кожного доданка останньої суми запишемо рівняння відрізка  $[z_k; z_{k+1}]$ :  $z(t) = (1 - t)z_k + tz_{k+1}$ ,  $t \in [0; 1]$ , і розглянемо функцію  $\Phi_k(t) = F(z(t))$ . Застосовуючи до неї нерівність Лагранжа, дістанемо:

$$\begin{aligned} |F(z_{k+1}) - F(z_k)| &= |\Phi_k(1) - \Phi_k(0)| \leq |\Phi_k'(\tau)| \cdot (1 - 0) = \\ &= |F'(z(\tau))| \cdot |z_{k+1} - z_k| = |f(z_k^*)| \cdot |z_{k+1} - z_k|, \end{aligned}$$

де  $\tau \in (0; 1)$ , а  $z(\tau) = (1 - \tau)z_k + \tau z_{k+1} = z_k^*$ .

Позначаючи тепер  $|f(z^*)| = \max_{0 \leq k \leq n-1} |f(z_k^*)|$ , дістанемо:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} |F(z_{k+1}) - F(z_k)| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(z_k^*)| \cdot |z_{k+1} - z_k| \leq \\ &\leq |f(z^*)| \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| = |f(z^*)| \cdot l. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**1.1.6. Поняття невизначеного інтеграла. Таблиця основних інтегралів.** Множину всіх первісних функцій  $f$  на лінійно зв'язній множині  $E$  називають *невизначеним інтегралом функції  $f$  на  $E$*  і позначають  $\int f(z) dz$  або  $\int f dz$ . Отже,

$$\int f(z) dz = \{ \Phi: \Phi - \text{первісна } f \text{ на лінійно зв'язній множині } E \}.$$

З теореми 1 зокрема випливає, що

$$\int f(z) dz = \left\{ \int_a^z f(u) du + C: C - \text{довільна стала} \right\}.$$

Тому часто записують

$$\int f(z) dz = \int_a^z f(u) du + C$$

або

$$\int f(z) dz = F(z) + C,$$

де  $C$  – довільна стала, а  $F$  – фіксована первісна функції  $f$  на  $E$ .

З формул для відшукування похідних основних елементарних функцій легко дістати формули для відшукування відповідних невизначених інтегралів. Ці формули наведено у таблиці 1.

**Таблиця 1**

1) $\int 0 dz = C$ і $\int 1 dz = z + C, z \in \mathbb{C};$
2) $\int \exp z dz = \exp z + C, z \in \mathbb{C};$
3) $\int a^z dz = \frac{a^z}{\ln a} + C, a \neq 0, a \neq 1, z \in \mathbb{C};$
4) $\int \frac{dz}{z} = \ln z + C, z \neq x \leq 0$ або
$\int \frac{dz}{z} = \ln(-z) + C, z \neq x \geq 0;$

$$5) \int z^\alpha dz = \frac{z^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1, \text{ причому}$$

$z \in \mathbb{C}$ , коли  $\alpha \in \mathbb{N}_0$ ,  
 $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , коли  $\alpha \in \{-2, -3, \dots\}$ ,  
 $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty; 0)$ , коли  $\alpha \notin \mathbb{Z}$  і  $\operatorname{Re} \alpha > 0$ ,  
 $z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty; 0]$ , коли  $\alpha \notin \mathbb{Z}$  і  $\operatorname{Re} \alpha \leq 0$ ;

$$6) \int \cos z dz = \sin z + C, z \in \mathbb{C};$$

$$7) \int \sin z dz = -\cos z + C, z \in \mathbb{C};$$

$$8) \int \frac{dz}{\cos^2 z} = \operatorname{tg} z + C, z \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$9) \int \frac{dz}{\sin^2 z} = -\operatorname{ctg} z + C, z \neq \pi k, k \in \mathbb{Z};$$

$$10) \int \frac{dz}{a^2 + z^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{z}{a} + C, a > 0,$$

$z \neq iy$ , де  $y \geq a$  або  $y \leq -a$ , зокрема

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C = -\operatorname{arctg} x + C^*, x \in (-\infty; +\infty);$$

$$11) \int \frac{dz}{\sqrt{a^2 - z^2}} = \operatorname{arcsin} \frac{z}{a} + C = -\operatorname{arccos} \frac{z}{a} + C^*,$$

$z \neq x$ , де  $x \geq a$  або  $x \leq -a$ , зокрема

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arcsin} x + C = -\operatorname{arccos} x + C^*, x \in (-1; 1);$$

$$12) \int \frac{dz}{z^2 - a^2} = \begin{cases} \frac{1}{2a} (\ln(z-a) - \ln(z+a)) + C, a > 0, \\ \quad \text{коли } z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty; a], \\ \frac{1}{2a} (\ln(a-z) - \ln(a+z)) + C, a > 0, \\ \quad \text{коли } z \in \mathbb{C} \setminus ((-\infty; -a] \cup [a; +\infty)), \\ \frac{1}{2a} (\ln(a-z) - \ln(-a-z)) + C, a > 0, \\ \quad \text{коли } z \in \mathbb{C} \setminus [-a; +\infty), \end{cases}$$

зокрема

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C, a > 0,$$

на кожному з проміжків  $(-\infty; -a)$ ,  $(-a; a)$ ,  $(a; +\infty)$ ;



$$13) \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 - a^2}} = \begin{cases} \ln(z + \sqrt{z^2 - a^2}) + C, & a > 0, \\ \text{коли } \operatorname{Re} z > 0 \text{ і } z \notin (-\infty; a], \\ \ln(-z - \sqrt{z^2 - a^2}) + C, & a > 0, \\ \text{коли } \operatorname{Re} z < 0 \text{ і } z \notin [-a; +\infty), \end{cases}$$

зокрема

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln|x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C, \quad a > 0,$$

на кожному з проміжків  $(-\infty; -a)$  і  $(a; +\infty)$ ;

$$14) \int \frac{dz}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \ln(z + \sqrt{z^2 + a^2}) + C, \quad a > 0,$$

$z \neq iy$ , де  $|y| \geq a$ , зокрема

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C, \quad a > 0,$$

$x \in (-\infty; +\infty)$ .

Для доведення кожної з формул 1) – 14) слід показати, що похідна від правої частини відповідної рівності дорівнює підінтегральній функції у вказаній області. При цьому використовують рівності:

$$(C)' = 0, (\exp z)' = \exp z, z \in \mathbb{C}; (\ln z)' = \frac{1}{z}, z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty; 0];$$

правила диференціювання і означення:

$$a^z = \exp(z \ln a), a \neq 0, a \neq 1, z^\alpha = \exp(\alpha \ln z);$$

$$\cos z = \frac{1}{2}(\exp iz + \exp(-iz)), \sin z = \frac{1}{2i}(\exp iz - \exp(-iz)),$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z};$$

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2i}(\ln(1 + iz) - \ln(1 - iz)),$$

$$\operatorname{arcsin} z = \frac{1}{i} \ln(iz + \sqrt{1 - z^2}) \text{ тощо.}$$

Наприклад, якщо  $F(z) = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{z}{a}$ , то для всіх  $z$ , де існує  $F'(z)$ , маємо:

$$F'(z) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 + \frac{z^2}{a^2}} \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a^2 + z^2}, \quad z \neq iy, \text{ де } |y| \geq a,$$

зокрема  $F'(x) = \frac{1}{a^2 + x^2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$ . Цим обґрунтовано формулу 10).

Доведення інших формул таблиці 1, по суті, не є складнішим за доведення формули 10).

**1.1.7. Лінійність  $NL$ -інтеграла та метод розкладу обчислення невизначеного інтеграла.** З означення невизначеного інтеграла випливає, що для його обчислення досить знайти інтеграл Ньютона – Лейбніца  $\int_a^z f(u) du$ . Тому розглянемо основні властивості інтеграла Ньютона – Лейбніца, з яких одночасно випливають і основні методи відшукування невизначених інтегралів. Надалі вважатимемо, що  $E$  – лінійно зв'язна множина.

□ Припустимо, що функції  $f$  та  $\varphi$  інтегровні за Ньютоном – Лейбніцом на  $E$ , а  $\alpha$  і  $\beta$  – довільні сталі. Тоді для функції

$$\Psi(z) = \alpha \int_a^z f(u) du + \beta \int_a^z \varphi(u) du, \quad z \in E,$$

маємо:

$$\Psi'(z) = \alpha \left( \int_a^z f(u) du \right)' + \beta \left( \int_a^z \varphi(u) du \right)' = \alpha f(z) + \beta \varphi(z) \quad \forall z \in E$$

і

$$\Psi(a) = \alpha \int_a^a f(u) du + \beta \int_a^a \varphi(u) du = 0.$$

Це означає, що функція  $\alpha f + \beta \varphi$  є  $NL$ -інтегрованою на  $E$  і

$$\begin{aligned} \int_a^z (\alpha f(u) + \beta \varphi(u)) du &= \Psi(z) - \Psi(a) = \\ &= \alpha \int_a^z f(u) du + \beta \int_a^z \varphi(u) du \quad \forall z \text{ і } a \in E. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Таким чином, доведена наступна теорема.

**Теорема 4** (про лінійність  $NL$ -інтеграла). *Нехай функції  $f$  та  $\varphi$  є  $NL$ -інтегровними на множині  $E$ . Тоді для будь-яких сталих  $\alpha$  і  $\beta$  функція  $\psi = \alpha f + \beta \varphi$  є  $NL$ -інтегрованою на  $E$  і*

$$\int_a^z (\alpha f(u) + \beta \varphi(u)) du = \alpha \int_a^z f(u) du + \beta \int_a^z \varphi(u) du \quad \forall a, z \in E.$$

На властивості лінійності  $NL$ -інтеграла ґрунтується *метод розкладу* обчислення невизначеного інтеграла:

$$\int (\alpha f + \beta \varphi) dz = \alpha \int f dz + \beta \int \varphi dz,$$

де  $\alpha$  і  $\beta$  – довільні сталі, такі що  $|\alpha| + |\beta| > 0$ . Останню рівність розуміють як рівність двох множин. При цьому

$$\alpha \int f dz = \alpha \{F: F - \text{первісна } f\} := \{\alpha F: F - \text{первісна } f\},$$

а

$$\alpha \int f dz + \beta \int \varphi dz = \{\alpha F + \beta \Phi: F - \text{первісна } f, \Phi - \text{первісна } \varphi\}.$$

**Приклад 4.**

$$\begin{aligned} & \int_a^z (2u - \sqrt[3]{u} + 3 \cos u) du = \\ & = 2 \int_a^z u du - \int_a^z u^{\frac{1}{3}} du + 3 \int_a^z \cos u du = (u^2 - \frac{3}{4}u^{\frac{4}{3}} + 3 \sin u)|_a^z = \\ & = z^2 - \frac{3}{4}z\sqrt[3]{z} + 3 \sin z - (a^2 - \frac{3}{4}a\sqrt[3]{a} + 3 \sin a), \end{aligned}$$

де  $a \in E$ ,  $z \in E$ , а  $E = \mathbb{C} \setminus (-\infty; 0)$ . Зокрема, для дійсних чисел  $a$  та  $z$  і дійсної змінної  $u$  множина  $E = (-\infty; +\infty)$ . Тому на даній множині  $E$

$$\int (2z - \sqrt[3]{z} + 3 \cos z) dz = z^2 - \frac{3}{4}z\sqrt[3]{z} + 3 \sin z + C,$$

де  $C$  – довільна стала.

### 1.1.8. Заміна змінної в $NL$ -інтегралі та у невизначеному інтегралі.

□ Припустимо, що функція  $f \in NL$ -інтегрованою на множині  $E_1$ , а функція  $\varphi \in$  диференційовною на лінійно зв'язній множині  $E$  і  $\varphi(z) \in E_1 \forall z \in E$ . Тоді якщо  $F$  – первісна функції  $f$  на  $E_1$ , то

$$(F(\varphi(z)))' = F'(u)\varphi'(z) = f(\varphi(z))\varphi'(z) \quad \forall z \in E.$$

Звідси випливає, що функція  $f(\varphi(z))\varphi'(z) \in NL$ -інтегрованою на множині  $E$  і для довільних  $a \in E$  та  $z \in E$

$$\int_a^z f(\varphi(t))\varphi'(t) dt := F(\varphi(z)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(z)} f(u) du. \quad \blacksquare$$

Цим самим доведена наступна теорема.

**Теорема 5** (про заміну змінної в  $NL$ -інтегралі). *Нехай функція  $f \in NL$ -інтегрованою на множині  $E_1$ , а функція  $\varphi \in$  диференційовною на лінійно зв'язній множині  $E$  і  $\varphi(E) \subset E_1$ . Тоді функція  $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$*

є  $NL$ -інтегрованою на  $E$  і має місце **формула заміни змінної**:

$$\int_a^z f(\varphi(z))\varphi'(z) dz = \int_a^z f(\varphi(z)) d\varphi(z) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(z)} f(u) du \quad \forall a \in E \text{ і } z \in E.$$

На теоремі 5 ґрунтується *метод заміни змінної* для обчислення невизначеного інтеграла:

$$\int f(\varphi(z))\varphi'(z) dz = \int f(\varphi(z)) d\varphi(z) = \int f(u) du, \quad u = \varphi(z).$$

**Приклад 5.** 
$$\int_1^z 2t \exp t^2 dt = \left| \begin{array}{l} u = t^2 \\ du = 2t dt \\ u(1) = 1 \\ u(z) = z^2 \end{array} \right| = \int_1^{z^2} \exp u du = \exp u \Big|_1^{z^2} =$$

$= \exp z^2 - e \quad \forall z \in \mathbb{C}$ . Звідси випливає, що  $\int 2z \exp z^2 dz = \exp z^2 + C$ , де  $C$  – довільна стала.

### 1.1.9. Формули інтегрування частинами для $NL$ -інтеграла та невизначеного інтеграла.

□ Розглянемо довільні функції  $f$  та  $\varphi$ , що є диференційовними на лінійно зв'язній множині  $E$ . Якщо позначити  $\psi = f\varphi$ , то

$$\psi'(z) = (f\varphi)'(z) = f'(z)\varphi(z) + f(z)\varphi'(z) \quad \forall z \in E,$$

тобто функція  $\psi$  є первісною функції  $f'\varphi + f\varphi'$  на множині  $E$ . Тому остання функція є  $NL$ -інтегрованою на  $E$ . Отже, якщо припустити  $NL$ -інтегровність на  $E$  однієї з функцій  $f'\varphi$  чи  $f\varphi'$ , то за лінійною властивістю  $NL$ -інтеграла дістанемо  $NL$ -інтегровність іншої з цих функцій і рівність

$$\int_a^z (f'(t)\varphi(t) + f(t)\varphi'(t)) dt = \int_a^z f'(t)\varphi(t) dt + \int_a^z f(t)\varphi'(t) dt.$$

З іншого боку,

$$\int_a^z (f'(t)\varphi(t) + f(t)\varphi'(t)) dt = \int_a^z (f(t)\varphi(t))' dt = f(t)\varphi(t) \Big|_a^z.$$

Тому

$$\int_a^z f'(t)\varphi(t) dt + \int_a^z f(t)\varphi'(t) dt = f(t)\varphi(t) \Big|_a^z \Leftrightarrow$$

$$\int_a^z f(t)\varphi'(t) dt = f(t)\varphi(t) \Big|_a^z - \int_a^z \varphi(t)f'(t) dt \quad \forall a, z \in E. \quad \blacksquare$$

Таким чином, має місце наступна теорема.

**Теорема 6** (про формулу інтегрування частинами для  $NL$ -інтеграла). Нехай функції  $f$  та  $\varphi$  є диференційовними на множині  $E$ , а функція  $f'\varphi$  є  $NL$ -інтегрованою на  $E$ . Тоді функція  $f\varphi$  є  $NL$ -інтегрованою на  $E$  і має місце **формула інтегрування частинами**:

$$\int_a^z f(t)\varphi'(t) dt = f(t)\varphi(t)\Big|_a^z - \int_a^z \varphi(t)f'(t) dt \quad \forall a \in E \text{ і } z \in E.$$

З теореми 6 випливає **метод інтегрування частинами** обчислення невизначеного інтеграла:

$$\int f(z)\varphi'(z) dz = f(z)\varphi(z) - \int \varphi(z)f'(z) dz,$$

або

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

де  $u = f(z)$ ,  $v = \varphi(z)$ ,  $du = f'(z) dz$ ,  $dv = \varphi'(z) dz$ .

**Приклад 6.**

$$\begin{aligned} & \int_a^z (1-t) \exp(-t) dt = \\ & = \left| \begin{array}{ll} u = 1-t & du = -dt \\ dv = \exp(-t) dt & v = -\exp(-t) \end{array} \right| = \\ & = -(1-t) \exp(-t) \Big|_a^z - \int_a^z \exp(-t) dt = \\ & = (1-a) \exp(-a) + (z-1) \exp(-z) + \exp(-t) \Big|_a^z = \\ & = (1-a) \exp(-a) + (z-1) \exp(-z) + \exp(-z) - \exp(-a) = \\ & = z \exp(-z) - a \exp(-a) \quad \forall a, z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Звідси випливає, що

$$\int (1-z) \exp(-z) dz = z \exp(-z) + C,$$

де  $C$  – довільна стала.

**1.1.10. Використання комп'ютерних засобів математики.** Серед різноманітних комп'ютерних засобів математики, які можна використовувати для обчислення інтегралів, розглянемо Gran1, Maxima і MathCAD.

Програмний засіб Gran1 було створено на кафедрі інформатики НПУ імені М. П. Драгоманова (автори – М. І. Жалдак та Ю. В. Горошко). Він призначений для графічного аналізу елементарних функцій дійсної змінної, наближеного розв'язування рівнянь графічним способом, чисельного інтегрування та диференціювання з геометричною інтерпретацією та

виконання деяких інших операцій. Цей засіб успішно використовується багатьма вчителями на уроках математики.

Програма *Maxima* є потужним сучасним засобом комп'ютерної математики, за допомогою якого можна знаходити розв'язки різноманітних задач з багатьох галузей математики і чисельно, і в символьному поданні. Вона проста у використанні, відзначається зручним введенням команд і зрозумілою формою подання результатів. Нею можуть користуватися як професійні математики, так і студенти. За допомогою програми *Maxima* зокрема з легкістю можна: виконувати операції з раціональними числами у вигляді точних звичайних (а не наближених десяткових) дробів; одержувати точні результати обчислень, які містять ірраціональні числа  $e$ ,  $\pi$ ,  $\ln 2$ ,  $\sqrt{3}$ ,  $\cos 1$ ,  $\arcsin \frac{1}{3}$  тощо, а потім за потреби наближено переобчислювати ці результати у вигляді десяткових дробів; проводити спрощування раціональних, показникових, логарифмічних і тригонометричних виразів; виконувати операції математичного аналізу (обчислення границь, диференціювання, відшукування первісних і визначених інтегралів); працювати з комплексними числами та функціями комплексної змінної і багато іншого.

За можливостями використання і характеристиками *Maxima* близька до найбільш потужних професійних систем комп'ютерної математики *Mathematica* і *Maple*, які є дорогими комерційними продуктами, тоді як *Maxima* розповсюджується через Інтернет безкоштовно.

Програма *MathCAD* хоч і поступається *Maxima* за широтою та універсальністю сфер застосування, проте вона також є досить потужним засобом для чисельного і символьного розв'язування багатьох математичних задач. Розрахована вона в основному на інженерів, нею часто користуються студенти технічних вузів для виконання різноманітних розрахунків і лабораторних робіт.

*MathCAD* є комерційною програмою, але слід відмітити, що деякі компоненти цієї програми (пов'язані з розв'язуванням рівнянь, побудовою 2- і 3-вимірних зображень та ін.) розроблені справді на дуже високому рівні. Для багатьох користувачів ця програма приваблива своїм особливо наочним способом введення формул шляхом заповнення готових шаблонів, як у редакторі формул відомого текстового процесора *Word*. Програму *MathCAD* іноді називають графічним калькулятором.

**1.1.10.1. Використання *Gran1*.** За допомогою програми *Gran1* можна обчислювати  $NL$ -інтеграли елементарних функцій дійсної змінної на заданих відрізках у чисельному поданні. Про це йтиметься у наступному підрозділі, в підпункті 1.2.5.1.

**1.1.10.2. Використання *Maxima*.** За допомогою програми *Maxima* можна обчислювати  $NL$ -інтеграли і первісні у символьному поданні. Для

цієї програми розроблено графічну оболонку wxMaxima 0.7.4, оснащену зручним українським інтерфейсом (рис. 1.1.1).

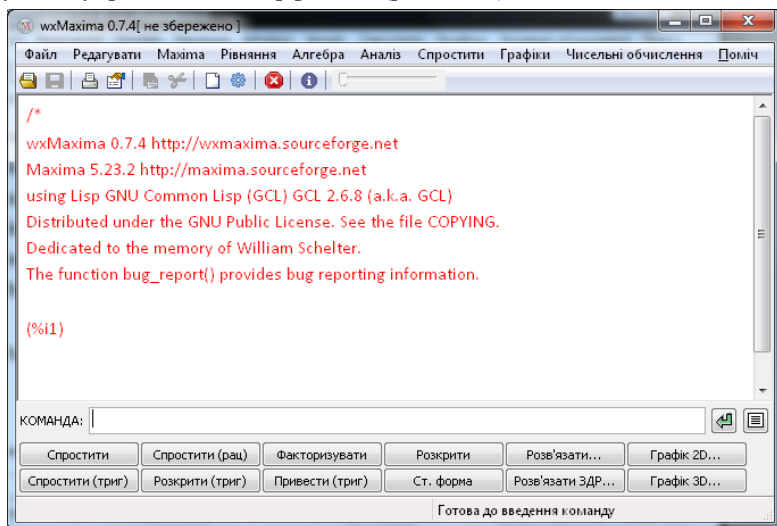


Рис. 1.1.1.

Вікно програми wxMaxima містить рядок меню, кнопки редагування, вікно виведення результатів, рядок введення команд і внизу додаткові кнопки для роботи з виразами.

У вікні виведення результатів кожен вираз, який вводиться, позначається (%iN), а відповідний йому результат позначається (%oN) (від англ. *input* – вхідні дані, *output* – результат), де N – номер формули. Особливо взятий символ % набуває значення останнього виведеного виразу. Команди вводяться у рядку введення і починають автоматично опрацьовуватися після натиснення клавіші .

Щоб кожного разу при старті програми не виводився заголовок, потрібно викликати вікно “Конфігурація wxMaxima” і на вкладці “Опції” зняти галочку з пункту “Показувати заголовок Maxima”. Змінити колір фону та шрифтів вікна виводу можна на вкладці “Стиль”.

У Maxima для обчислення інтегралів  $\int f(x) dx$  та  $\int_a^b f(x) dx$  служать відповідно команди `integrate(f(x), x)` та `integrate(f(x), x, a, b)`.

Обчислимо невизначений інтеграл  $\int (2z - \sqrt[3]{z} + 3 \cos z) dz$ .

Для цього у командному рядку вводимо `integrate(2*z-z^(1/3)+3*cos(z),z)`

і, натиснувши , дістаємо (рис. 1.1.2)

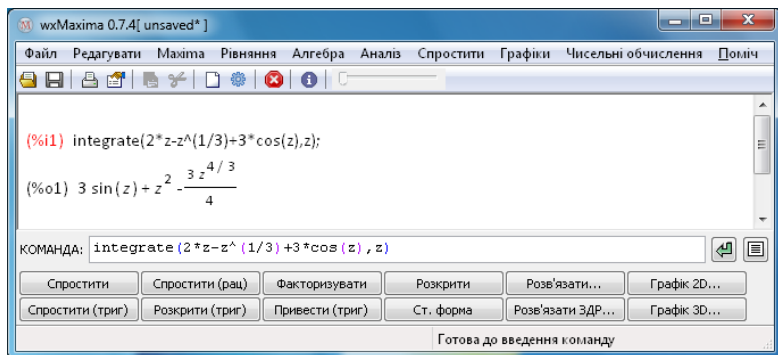


Рис. 1.1.2.

В результаті видається завжди тільки одна первісна. При цьому довільну стало завжди можна дописати при потребі.

Спробуємо знайти інтеграл з параметром  $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ .

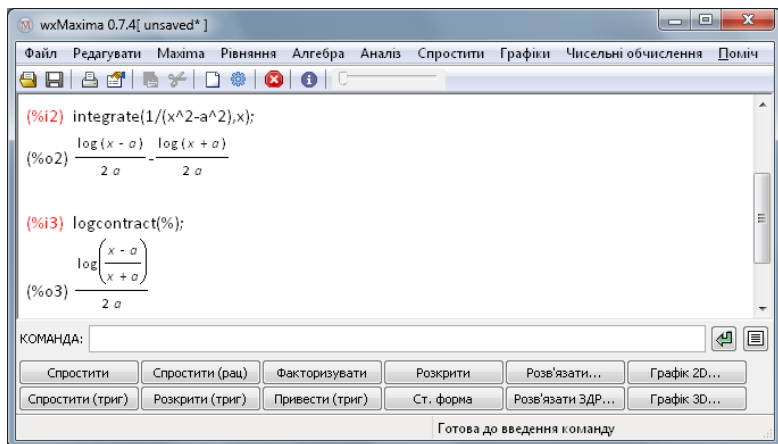


Рис. 1.1.3.

Спочатку шуканий інтеграл з'явився в рядку (%o2) у вигляді різниці двох логарифмів (рис. 1.1.3). Але за допомогою програми Maxima можна спростувати математичні вирази різними способами. Щоб відповідь стала компактнішою, у рядку (%o3) задано команду `logcontract(%)`. Її можна ввести з клавіатури або через меню **Спростити** > **Об'єднати логарифми**. Зауважимо, що через `log(x)` тут позначається натуральний логарифм.

Надалі при демонструванні роботи даної програми будемо наводити лише вміст вікна виведення результатів. При цьому команди можна задавати і з командного рядка, і через меню (можна вибирати, що зручніше).



При обчисленні інтегралів з параметрами за допомогою Махіма іноді з'являються уточнюючі запитання. Так, якщо спробувати обчислити  $\int x^a dx$  і ввести

```
(%i4) integrate(x^a,x);
```

то з'явиться запит:

```
Is a+1 zero or nonzero?
```

Давши відповідь n, дістанемо

```
(%o4)  $\frac{x^{a+1}}{a+1}$ 
```

Якщо дати відповідь z, то дістанемо

```
(%o4) log(x)
```

Обчислимо тепер кілька NL-інтегралів.

$$\int_{-\pi}^{2\pi} (\sin x + \cos x) dx = ?$$

```
(%i5) integrate(sin(x)+cos(x),x,-%pi,2*%pi);
```

```
(%o5) -2
```

$$\int_0^1 (\sin(ax) + \cos(bx)) dx = ?$$

```
(%i6) integrate(sin(a*x)+cos(b*x),x,0,1);
```

```
(%o6)  $\frac{a \sin(b) + (1 - \cos(a)) b}{a b}$ 
```

$$\int_{a-1}^{a+1} \frac{1-x}{1+x} dx = ?$$

Спочатку позначимо підінтегральну функцію через  $f$ :

```
(%i7) f:(1-x)/(1+x)$
```

(при вказування знака \$ після команди відключається виведення результату на екран).

Тепер проінтегруємо

```
(%i8) integrate(f,x,a-1,a+1);
```

```
Is a+2 positive, negative, or zero? p;
```

```
Is a positive, negative, or zero? p;
```

```
(%o8) 2 log(a + 2) - 2 log(a) - 2
```

В ході обчислень у відповідь на запити програми було зроблено припущення  $a + 2 > 0$  та  $a > 0$ . Якщо треба обчислити цей самий інтеграл при  $a = 1$ , то залишиться тільки обчислити вираз (%o8) при конкретному значенні змінної:

```
(%i9) %, a=1;
```

```
(%o9) 2 log(3) - 2
```

Однак, не кожен інтеграл можна у символічному поданні обчислити за допомогою програми Махіма. По-перше, часто інтеграли взагалі не

виражаються у скінченному вигляді (про це йтиметься у пункті 1.3.6). По-друге, навіть коли символічне подання інтеграла можна знайти, але його вираз занадто громіздкий (містить складні нагромадження дробів, радикалів тощо) то у таких випадках при зверненні до програми повертається необчислений інтеграл. Наприклад,

(%i10) integrate(1/(x^3+x+1),x);

$$(\%o10) \int \frac{1}{x^3+x+1} dx$$

**1.1.10.3. Використання MathCAD.** Робоче вікно програми MathCAD складається з головного меню, робочого аркуша (де проводяться всі операції), додаткових кнопок редагування виразів і додаткових панелей, які легко включаються при потребі.

Для того щоб приступити до інтегрування функцій, доцільно зайти в меню Вид > Панелі інструментів ► і підключити додаткові панелі “Калькулятор” та “Математичний аналіз”.

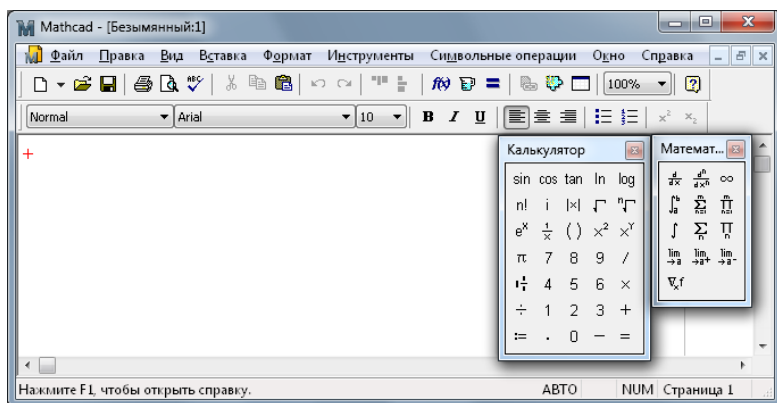


Рис. 1.1.4.

Для введення позначення невизначеного інтеграла натискаємо кнопку  $\int$  на панелі “Математичний аналіз”, а для інтеграла Ньютона – Лейбніца вибираємо  $\int_a^b$  (рис. 1.1.4). З’являється шаблон, у який потрібно просто ввести відповідну функцію, вказати змінну інтегрування і межі (якщо вони є).

Після введення інтеграла в кінці поточної формули вставляється команда “Обчислити символічно” за допомогою комбінації клавіш  $\text{Ctrl} + \square$  і натискається  $\text{Enter}$ .

Результати обчислення деяких інтегралів у середовищі MathCAD подано на рис. 1.1.5.

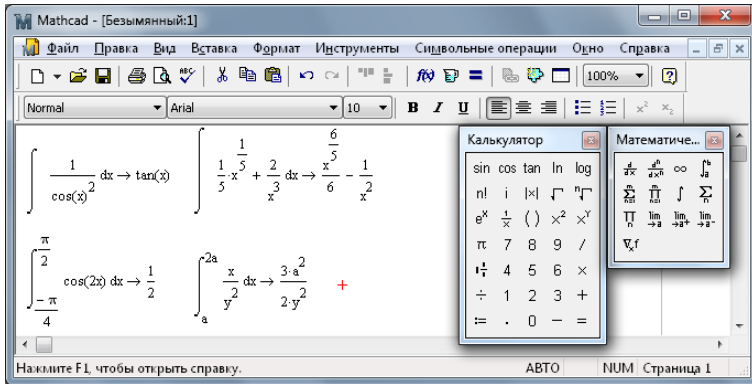


Рис. 1.1.5.

Ці формули можна редагувати або задавати значення параметрів і при цьому всі результати будуть автоматично переобчислюватися.

**1.1.11. Історичні відомості.** Взаємно обернені операції диференціювання та інтегрування було введено в математику видатним німецьким математиком Готфрідом Вільгельмом Лейбніцом (1646–1716) та незалежно від нього видатним англійським математиком Ісааком Ньютоном (1643–1727) у 70-х роках XVII століття.

Сучасне поняття невизначеного інтеграла і його позначення  $\int f dz$  ввів Г. Лейбніц, а поняття первісної функції ввів видатний французький математик Жозеф Луї Лагранж (1736–1813).

І Г. Лейбніц, і І. Ньютон користувалися формулою, названою пізніше на їх честь формулою Ньютона – Лейбніца, а також методами заміни змінної та інтегрування частинами.

**1.1.12. Зв'язок із шкільним курсом математики.** Поняття первісної та інтеграла Ньютона – Лейбніца вивчається в шкільному курсі математики. Тому для кваліфікованого учителя математики важливо володіти цими поняттями. Поняття невизначеного інтеграла не використовується в шкільному курсі математики. Фактично, без нього можна обійтися і в курсі математичного аналізу. Однак, це поняття та відповідне позначення досить зручне для використання на практиці. Сильніші учні можуть ознайомитися з ним самостійно за сприяння вчителя.

**1.1.13. Постановка проблем.** Основною проблемою є проблема існування  $NL$ -інтеграла функції  $f$  на  $E$ : які умови є необхідними, достатніми, необхідними і достатніми для  $NL$ -інтегровності функції  $f$  на  $E$ .

**1.1.14. Контрольні запитання і завдання.**

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Кожна основна елементарна функція є первісною деякої функції  $f$  на деякій множині  $E$ .

2. Функція  $F(x) = \ln |x - 1|$  є первісною функції  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  на множині  $E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .
3. Функція  $f(x) = \frac{1}{x-1}$  є  $NL$ -інтегрованою на множині  $E = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .
4.  $\int_{-2}^2 \frac{dx}{x-1} = \ln |x - 1| \Big|_{-2}^2 = \ln 1 - \ln 3 = -\ln 3$ .
5. Функція комплексної змінної  $f(z) = \frac{1}{\cos^2 z}$  є  $NL$ -інтегрованою в області її визначення  $D(f) \subset \mathbb{C}$ .
6. Функція дійсної змінної  $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$  є  $NL$ -інтегрованою в області її визначення  $D(f) \subset \mathbb{R}$ .
7. Комплекснозначна функція  $f$  дійсної змінної є  $NL$ -інтегрованою на лінійно зв'язній множині  $E$  тоді й тільки тоді, коли такою є спряжена до неї функція  $\bar{f}$ .
8. Попереднє твердження правильне у випадку, коли  $f$  – функція комплексної змінної.
9. Якщо  $f + \varphi \in NL(E)$ , то  $f$  і  $\varphi \in NL(E)$ .
10. Якщо  $\alpha f + \beta \varphi \in NL(E)$  для будь-яких сталих  $\alpha \neq 0$  і  $\beta \neq 0$ , то  $f$  і  $\varphi \in NL(E)$ .
11. Якщо  $f_k \in NL(E) \forall k \in \overline{1, n}$ , а  $\alpha_k$  – сталі  $\forall k \in \overline{1, n}$ , то  $\sum_{k=1}^n \alpha_k f_k \in NL(E)$  і  $\int_a^z \sum_{k=1}^n \alpha_k f_k(u) du = \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_a^z f_k(u) du \forall a, z \in E$ .
12. Якщо  $f$  є диференційовною функцією на множині  $E$ , то її похідна  $f' \in NL(E)$ .
13. Якщо  $f \in NL([a; b])$  і  $f(x) \geq 0$  на  $[a; b]$ , то  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ .
14. Якщо  $f \in NL[a; b]$  і  $g \in NL[a; b]$  і  $f(x) \geq g(x)$  на  $[a; b]$ , то  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$ .

## II. Довести дані твердження.

1. Нехай  $f$  – строго монотонна і диференційовна на  $(a; b)$  функція, а  $f^{-1}$  – обернена до неї функція. Тоді якщо  $F$  – первісна функції  $f$ , а  $\varphi(x) = x$ , то  $\Phi = \varphi \cdot f^{-1} - F \circ f^{-1}$  є первісною функції  $f^{-1}$ .
2. Якщо  $f \in NL([a; b])$ ,  $\varphi$  – диференційовна на  $\langle \alpha; \beta \rangle$  і  $\varphi(x) \in [a; b] \forall x \in \langle \alpha; \beta \rangle$ , то  $(\int_a^{\varphi(x)} f(u) du)' = f(\varphi(x))\varphi'(x) \forall x \in \langle \alpha; \beta \rangle$ .

3. Якщо  $f \in n$ -кратно диференційовною на лінійно зв'язній множині  $E$ , то  $\forall z \in E$  і  $z_0 \in E$  має місце **формула Тейлора**:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k + r_n(f, z),$$

де

$$r_n(f, z) = \int_{z_0}^z \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!} (z-t)^{n-1} dt$$

– залишковий (доповняльний) член формули Тейлора в **інтегральній формі**.

4. Якщо дійсна функція  $f \in NL([a; b])$ , то  $\exists x^* \in (a; b)$ :  $\int_a^b f(t) dt = f(x^*)(b-a)$  (теорема про середнє, або **формула Лагранжа** для  $NL$ -інтеграла). Зокрема, якщо  $\int_a^b f(t) dt = 0$ , то  $\exists x^* \in (a; b)$ :  $f(x^*) = 0$ .

5. Якщо  $g \in NL([a; b])$  і  $f \cdot g \in NL([a; b])$ , причому  $g(x) \neq 0 \forall x \in [a; b]$ , то  $\exists x^* \in (a; b)$ :  $\int_a^b f(x)g(x) dx = f(x^*) \int_a^b g(x) dx$ .

6. Якщо у твердженні П.3) функція  $f$  дійсна, а  $E = [a; b]$ , то

$$\exists x_1^* \in (a; b): r_n(f, z) = \frac{f^{(n)}(x_1^*)}{n!} (z - z_0)^n,$$

$$\exists x_2^* \in (a; b): r_n(f, z) = \frac{f^{(n)}(x_2^*)}{(n-1)!} (z - x_2^*)^{n-1} (z - z_0),$$

$$\exists x_3^* \in (a; b): r_n(f, x) = \frac{f^{(n)}(x_3^*)}{(n-1)!} (z - x_3^*)^{n-p} \frac{(z - z_0)^p}{p} \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

7. Якщо  $f$  та  $g \in NL([a; b])$  і  $|f(x)| \leq g(x) \forall x \in [a; b]$ , то

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b g(x) dx.$$

Зокрема, якщо  $|f'(x)| \leq g(x) \forall x \in [a; b]$ , то

$$|f(b) - f(a)| \leq \left| \int_a^b f'(x) dx \right| \leq \int_a^b g(x) dx.$$

III. Наступні задачі розв'язати за допомогою комп'ютерних засобів математики.

1. Для кожного табличного інтеграла зобразити область визначення підінтегральної функції.

2. Для кожного табличного інтеграла зобразити графік підінтегральної функції та графік її первісної.
3. Обчислити табличні інтеграли за допомогою комп'ютера.
4. Знайти табличні первісні у вигляді  $NL$ -інтегралів із змінною верхньою межею інтегрування.

## 1.2. Існування $NL$ -інтеграла неперервної функції

У попередньому підрозділі поставлена проблема про  $NL$ -інтегровність даної функції  $f$  на заданій множині  $E$ , зокрема на проміжку  $\langle a; b \rangle$ .

Якщо  $f \in NL$ -інтегрованою функцією на проміжку  $\langle a; b \rangle$ , то  $f \in$  похідною деякої функції  $F$  на  $\langle a; b \rangle$ . Відомо, що тоді функція  $f$  не може мати на проміжку  $\langle a; b \rangle$  точок розриву першого роду. Тому, наприклад, функція

$$f(x) = \text{sign } x = \begin{cases} 1, & \text{коли } x > 0, \\ 0, & \text{коли } x = 0, \\ -1, & \text{коли } x < 0, \end{cases}$$

не є  $NL$ -інтегрованою на будь-якому проміжку  $\langle a; b \rangle$ , який містить точку  $x = 0$ .

У зв'язку з цим природно шукати  $NL$ -інтегровні функції серед неперервних функцій.

### 1.2.1. $NL$ -інтегровність ламаної функції.

□ Припустимо спочатку, що  $f \in$  так званою *ламаною функцією* на  $[a; b]$ , тобто існують точки  $x_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , такі, що  $x_0 = a < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b$  і  $\forall k \in \overline{0, n-1}$

$$f(x) = f(x_k) \frac{x_{k+1} - x}{x_{k+1} - x_k} + f(x_{k+1}) \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k} \quad \forall x \in [x_k; x_{k+1}].$$

У загальному випадку значення  $f(x_k)$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , є комплексними, тобто  $f$  – комплекснозначна (зокрема, дійснозначна) функція дійсної змінної  $x \in [a; b]$ . На відрізку  $[x_k; x_{k+1}]$  графік дійсної ламаної функції збігається з відрізком, що сполучає точки  $(x_k, f(x_k))$  і  $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$ , а на відрізку  $[a; b]$  цей графік є ламаною  $L$  з вершинами в точках  $(x_k, f(x_k))$  (рис. 1.2.1). Цим і пояснюється назва ламаної функції.

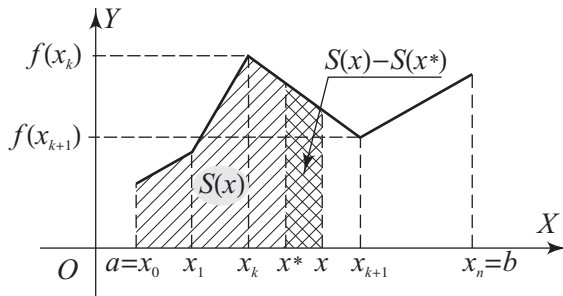


Рис. 1.2.1.

У випадку  $n = 1$  ламана функція набуває вигляду

$$f(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

і легко переконатися, що її первісною є функція

$$S(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(a))(x - a).$$

Тому виникає гіпотеза, що для довільної ламаної функції  $f(x)$  її первісною є функція

$$S(x) = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{1}{2}(f(x_i) + f(x_{i+1}))(x_{i+1} - x_i) + \frac{1}{2}(f(x) + f(x_k))(x - x_k),$$

$x \in [x_k; x_{k+1}]$ ,  $k \in \overline{0, n-1}$ .

Якщо  $f(x) \geq 0 \forall x \in [a; b]$ , то геометрично  $S(x)$  є площею заштрихованого многокутника, зображеного на рис. 1.2.1.

Візьмемо довільну точку  $x^* \in (a; b)$ . Для неї існує, причому єдиний, номер  $k \in \overline{0, n-1}$ :  $x_k \leq x^* < x_{k+1}$ . З геометричних міркувань легко бачити, що коли  $x \neq x^*$ , але досить близьке до  $x^*$ , то

$$S(x) - S(x^*) = \frac{1}{2}(f(x) + f(x^*))(x - x^*)$$

(як площа двічі заштрихованої трапеції, коли  $x > x^*$ ). Останню рівність легко довести і аналітично. Отже,

$$\frac{S(x) - S(x^*)}{x - x^*} = \frac{1}{2}(f(x) + f(x^*)).$$

Звідси, враховуючи неперервність ламаної функції, дістаємо:

$$\lim_{x \rightarrow x^*} \frac{S(x) - S(x^*)}{x - x^*} = \lim_{x \rightarrow x^*} \frac{1}{2}(f(x) + f(x^*)) = f(x^*),$$

тобто  $S'(x^*) = f(x^*) \forall x^* \in (a; b)$ .

Аналогічно розглядаємо і точки  $x^* = a$  та  $x^* = b$ .

Отже,  $S'(x) = f(x) \forall x \in [a; b]$ , тобто  $f \in NL[a; b]$ . ■

Цим самим доведена наступна теорема.

**Теорема 1** (про  $NL$ -інтегровність ламаної функції). *Кожна ламана функція  $f$  на відрізку  $[a; b]$  є  $NL$ -інтегрованою на цьому відрізку. При цьому інтеграл*

$$\int_a^c f(u) du = S(c) \forall c \in [a; b]$$

є площею фігури

$$\Phi = \{(x, y): a \leq x \leq c, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

коли  $f(x) \geq 0 \forall x \in [a; b]$ .

Отже, в теоремі 1 не тільки стверджується  $NL$ -інтегровність ламаної функції, але й розкривається геометричний зміст її  $NL$ -інтеграла.

### 1.2.2. Зв'язок неперервних функцій з ламаними.

□ Розглянемо функцію  $f$ , неперервну на відрізку  $[a; b]$ . За теоремою Кантора  $f$  є рівномірно неперервною функцією на  $[a; b]$ . Тому якщо  $0 < \alpha_n \rightarrow 0$ , коли  $n \rightarrow \infty$ , то  $\forall n \in \mathbb{N} \exists \delta_n > 0: |f(x') - f(x'')| < \alpha_n \forall x', x'' \in [a; b]$ , коли  $|x' - x''| < \delta_n$ .

Візьмемо на відрізку  $[a; b]$  точки  $x_k^{(n)}$ ,  $k \in \overline{0, m_n}$ , такі, щоб

$$a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \dots < x_k^{(n)} < x_{k+1}^{(n)} < \dots < x_{m_n}^{(n)} = b$$

і

$$x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)} < \delta_n \forall k \in \overline{0, m_n - 1}.$$

Визначимо ламану функцію  $f_n(x)$  рівністю

$$f_n(x) = f(x_k^{(n)}) \frac{x_{k+1}^{(n)} - x}{x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}} + f(x_{k+1}^{(n)}) \frac{x - x_k^{(n)}}{x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}},$$

коли  $x \in [x_k^{(n)}; x_{k+1}^{(n)})$ ,  $k \in \overline{0, m_n - 1}$ . Графік функції  $f_n(x)$  є ламаною, вписаною у графік функції  $f(x)$  (рис. 1.2.2).

Оскільки  $\frac{x_{k+1}^{(n)} - x}{x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}} + \frac{x - x_k^{(n)}}{x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}} = 1$ , то  $f(x) - f_n(x) =$

$$= (f(x) - f(x_k^{(n)})) \frac{x_{k+1}^{(n)} - x}{x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}} + (f(x) - f(x_{k+1}^{(n)})) \frac{x - x_k^{(n)}}{x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}}.$$



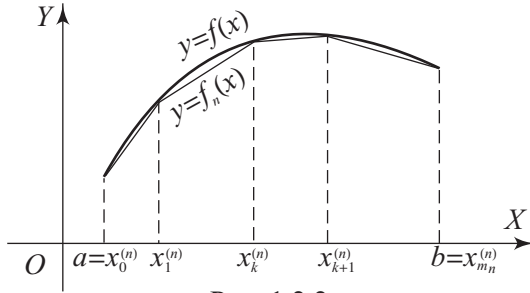


Рис. 1.2.2.

Звідси, вважаючи, що для числа  $x \in [a; b]$  знайдено номер  $k \in \overline{0, m_n - 1}$ , такий, що  $x \in [x_k^{(n)}; x_{k+1}^{(n)}]$ , дістаємо:

$$|x - x_k^{(n)}| \leq |x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}| < \delta_n \quad \text{і} \quad |x - x_{k+1}^{(n)}| \leq |x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}| \leq \delta_n.$$

Отже,

$$|f(x) - f(x_k^{(n)})| < \alpha_n \quad \text{і} \quad |f(x) - f(x_{k+1}^{(n)})| < \alpha_n \Rightarrow$$

$$|f(x) - f_n(x)| < \alpha_n \frac{x_{k+1}^{(n)} - x}{x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}} + \alpha_n \frac{x - x_k^{(n)}}{x_{k+1}^{(n)} - x_k^{(n)}} = \alpha_n \quad \forall x \in [a; b] \Rightarrow$$

$$\max_{[a; b]} |f(x) - f_n(x)| \leq \alpha_n \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

тобто  $f_n(x)$  рівномірно збігається до  $f(x)$  на  $[a; b]$ . ■

Таким чином доведена наступна теорема.

**Теорема 2** (про зв'язок неперервних функцій з ламаними). *Якщо функція  $f$  неперервна на відрізку  $[a; b]$ , то існує послідовність ламаних функцій  $(f_n(x))$  таких, що  $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$  на  $[a; b]$  (тобто  $f_n(x)$  рівномірно збігається до  $f(x)$  на відрізку  $[a; b]$ ).*

**1.2.3. NL-інтегровність граничної функції.** За теоремою 1 кожна ламана функція  $f_n \in NL[a; b]$  і тому у зв'язку з теоремою 2 природно виникає питання, чи правильне наступне твердження.

**Теорема 3** (про NL-інтегровність граничної функції). *Нехай функції  $f_n \in NL$ -інтегровними на множині  $E \forall n \in \mathbb{N}$  і  $f_n(z) \rightrightarrows f(z)$  на  $E$ . Тоді й функція  $f \in NL$ -інтегровною на  $E$ , причому*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^z f_n(u) du = \int_a^z \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(u) du = \int_a^z f(u) du \quad \forall a \text{ і } z \in E.$$

□ Позначимо  $F_n(z) = \int_a^z f_n(u) du$ , тобто  $F_n'(z) = f_n(z)$  і  $F_n(a) = 0$

$\forall n \in \mathbb{N}$ . При цьому вважаємо точку  $a$  фіксованою, а  $z$  – довільною точкою множини  $E$ . Зафіксуємо довільну точку  $z_0 \in E$ . За означенням похідної функції

$$\frac{F_n(z) - F_n(z_0)}{z - z_0} - f_n(z_0) = \alpha_n(z), \quad z \neq z_0,$$

де  $\alpha_n(z_0) = 0$  і  $\alpha_n(z) \rightarrow 0$ , коли  $z \rightarrow z_0$ .

Покажемо, що  $(\alpha_n(z))$  є рівномірно збіжною послідовністю в досить малому околі точки  $z_0$ . Для цього скористаємося критерієм Коші і розглянемо рівність

$$|\alpha_m(z) - \alpha_n(z)| = \left| \frac{F_m(z) - F_n(z) - F_m(z_0) + F_n(z_0)}{z - z_0} - f_m(z_0) + f_n(z_0) \right|, \quad (1)$$

де  $z \neq z_0$ .

За властивістю про оцінку модуля  $NL$ -інтеграла маємо:

$$|F_m(z) - F_n(z)| \leq |f_m(u^*) - f_n(u^*)| \sum_{k=0}^{n_0-1} |z_{k+1} - z_k|,$$

де  $u^* \in L = \bigcup_{k=0}^{n_0-1} [z_k; z_{k+1}] \subset E$ ,  $z_0 = a$ ,  $z_{n_0} = z$ , причому  $L$  – фіксована ламана, що сполучає точки  $z$  і  $a$ . Звідси, враховуючи рівномірну збіжність послідовності  $(f_n(z))$  на  $E$ , за критерієм Коші дістаємо збіжність послідовності  $(F_n(z))$  в кожній точці  $z \in E$ . Отже,

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z) = F(z) \quad \forall z \in E \text{ і } F(a) = 0.$$

Позначимо  $F_m(z) - F_n(z) = \int_a^z (f_m(u) - f_n(u)) du = \Phi_{mn}(z)$ . Тоді, враховуючи адитивність  $NL$ -інтеграла, дістанемо

$$\begin{aligned} |\Phi_{mn}(z) - \Phi_{mn}(z_0)| &= \left| \int_{z_0}^z (f_m(u) - f_n(u)) du \right| \leq \\ &\leq |f_m(u^{**}) - f_n(u^{**})| |z - z_0|, \end{aligned}$$

де  $u^{**} \in [z_0; z] \subset E$ , коли  $z \in O_\delta(z_0)$ , а  $\delta > 0$  досить мале. Звідси та з рівності (1) випливає, що

$$|\alpha_m(z) - \alpha_n(z)| \leq |f_m(u^{**}) - f_n(u^{**})| + |f_m(z_0) - f_n(z_0)|$$

$\forall m \in \mathbb{N}$  і  $n \in \mathbb{N}$  та  $\forall z \in O_\delta(z_0)$ , якщо  $\delta > 0$  досить мале.

Внаслідок рівномірної збіжності послідовності  $(f_n(z))$  на множині  $E$  права частина, а тому й ліва частина останньої нерівності

є як завгодно малою, коли  $m$  і  $n$  досить великі. Це означає, що  $\alpha_n(z) \rightrightarrows \alpha(z)$  на  $O_\delta(z_0)$ . Оскільки функції  $\alpha_n(z)$  неперервні в точці  $z_0$ , то за відомою теоремою і функція  $\alpha(z)$  неперервна в точці  $z_0$ , тобто  $\lim_{z \rightarrow z_0} \alpha(z) = \alpha(z_0)$ .

З іншого боку,  $\alpha_n(z_0) = 0 \rightarrow \alpha(z_0)$ , коли  $n \rightarrow \infty$ , і тому  $\lim_{z \rightarrow z_0} \alpha(z) = 0$ . Якщо в рівності

$$F_n(z) - F_n(z_0) = f_n(z_0)(z - z_0) + \alpha_n(z)(z - z_0)$$

перейти до границі, коли  $n \rightarrow \infty$ , то дістанемо

$$F(z) - F(z_0) = f(z_0)(z - z_0) + \alpha(z)(z - z_0),$$

де  $\alpha(z_0) = 0$  і  $\alpha(z) \rightarrow 0$ , коли  $z \rightarrow z_0$ .

Це означає, що  $F'(z_0) = f(z_0)$ , а оскільки  $z_0$  – довільна точка з  $E$ , то  $F'(z) = f(z) \forall z \in E$ . Отже,  $f \in NL(E)$ .

Враховуючи тепер, що  $F(a) - F_n(a) = 0$ , маємо:

$$\int_a^z f(u) du = F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^z f_n(u) du. \blacksquare$$

За допомогою теореми 3 легко дістати наступні два твердження.

**Теорема 4** (про почленне інтегрування функціонального ряду).

Нехай функції  $f_k \in NL(E) \forall k \in \mathbb{N}$ , причому ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$  рівномірно збігається до  $f(z)$  на множині  $E$ . Тоді  $f \in NL(E)$  і

$$\int_a^z f(u) du = \int_a^z \sum_{k=1}^{\infty} f_k(u) du = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^z f_k(u) du \quad \forall a \in E \text{ та } z \in E.$$

**Теорема 5** (про почленне диференціювання функціонального ряду). Нехай функції  $f_k$  є диференційовними на лінійно зв'язній множині  $E \forall k \in \mathbb{N}$ , причому ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f'_k(z)$  рівномірно збігається

до  $f(z)$  на множині  $E$ , а ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$  є збіжним у якійсь точці  $a \in E$ . Тоді останній ряд є збіжним на  $E$ , його сума  $F(z)$  є диференційовною функцією на  $E$  і

$$F'(z) = \left( \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f'_k(z) = f(z) \quad \forall z \in E.$$

**1.2.4.  $NL$ -інтегровність неперервної функції. Площа криволінійної трапеції.** З теорем 1, 2 і 3 випливає наступна теорема.

**Теорема 6** (про  $NL$ -інтегровність неперервної функції). *Якщо функція  $f$  є неперервною на проміжку  $\langle a; b \rangle$ , то вона є  $NL$ -інтегровною на цьому проміжку.*

□ Справді, якщо зафіксувати точку  $c \in \langle a; b \rangle$  і взяти довільну точку  $z \in \langle a; b \rangle$ , то за теоремами 1 – 3 та властивостями 1 і 4  $NL$ -інтеграла існуватиме інтеграл  $\int_c^z f(u) du = F(z)$  (див. пункт 1.1.5), причому  $F'(z) = f(z) \forall z \in \langle a; b \rangle$ . Це і означає, що  $f$  є  $NL$ -інтегровною на  $\langle a; b \rangle$ . ■

Припустимо тепер, що функція  $f$  неперервна і невід'ємна на відрізку  $[a; b]$ . Тоді ламані функції  $f_n(x)$ , побудовані при доведенні теореми 2, також невід'ємні. Тому за теоремою 1 кожен інтеграл  $\int_a^b f_n(x) dx = S_n$  є площею фігури

$$\Phi_n = \{(x; y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f_n(x)\} \text{ (рис. 1.2.3).}$$

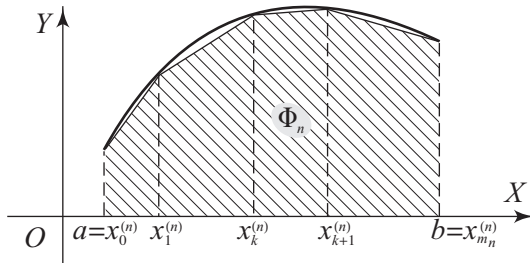


Рис. 1.2.3.

За теоремою 3  $S_n = \int_a^b f_n(x) dx \rightarrow \int_a^b f(x) dx$ , коли  $n \rightarrow \infty$ . Тому природно вважати число  $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  площею фігури

$$\Phi = \{(x; y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

яку називають *криволінійною трапецією*. Отже,  $S = \int_a^b f(x) dx$  – площа криволінійної трапеції  $\Phi$ . У цьому полягає *геометричний зміст  $NL$ -інтеграла*.

**1.2.5. Використання комп'ютерних засобів математики.** Оскільки у даному пункті розглядається питання про існування первісної не-

перервної функції та геометричний зміст інтеграла, то комп'ютер можна використати у першу чергу для графічних ілюстрацій. Це може бути побудова криволінійних трапецій, графіків потрібних функцій та їхніх первісних.

**1.2.5.1. Використання Gran1.** За допомогою програми Gran1 можна обчислювати тільки  $NL$ -інтеграли від елементарних функцій дійсної змінної, і тільки чисельно. Зрозуміло, що таке обчислення є наближеним. Точність обчислень встановлюється в меню

Виправлення > Налаштування параметрів програми. . .

від 0 до 6 десяткових знаків після коми. При цьому є можливість також переглянути на екрані фігуру, площу якої виражає даний інтеграл.

Так, для обчислення інтеграла  $\int_{-1}^2 3x^2 dx$  потрібно виконати такі дії.

1) Зайти в меню Об'єкт > Створити. . . З'явиться вікно, зображене на рис. 1.2.4.

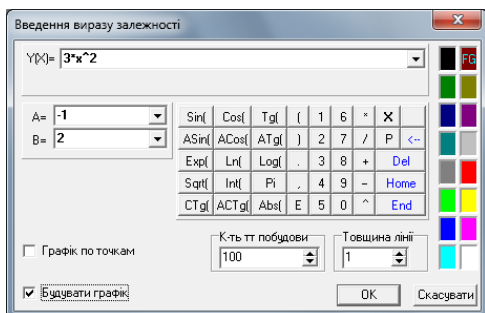


Рис. 1.2.4.

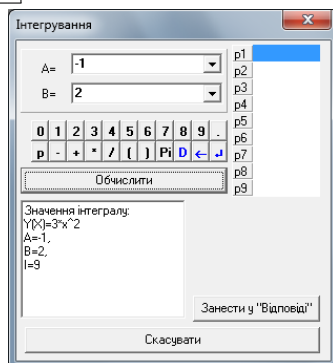


Рис. 1.2.5.

2) Ввести підінтегральну функцію  $y(x) = 3x^2$ , задати межі  $A = -1$ ,  $B = 2$  і натиснути **Ok**.

2.1) Щоб побачити фігуру, площу якої виражає шуканий інтеграл, потрібно спочатку побудувати графік даної функції. Це робиться через меню **Графік** > **Побудувати**. Якщо геометричний зміст інтеграла не потрібен, пункт 2.1) можна опустити.

3) Через меню **Операції** > **Інтеграл** > **Інтеграл. . .** викликати вікно, зображене на рис. 1.2.5.

4) Натиснувши **Обчислити**, в цьому ж вікні одержимо результат, який показує, що шуканий інтеграл  $I = 9$ . Одночасно з цим (якщо графік функції було побудовано) на екрані з'явиться заштрихована фігура, площа якої дорівнює обчисленому інтегралу (рис. 1.2.6).

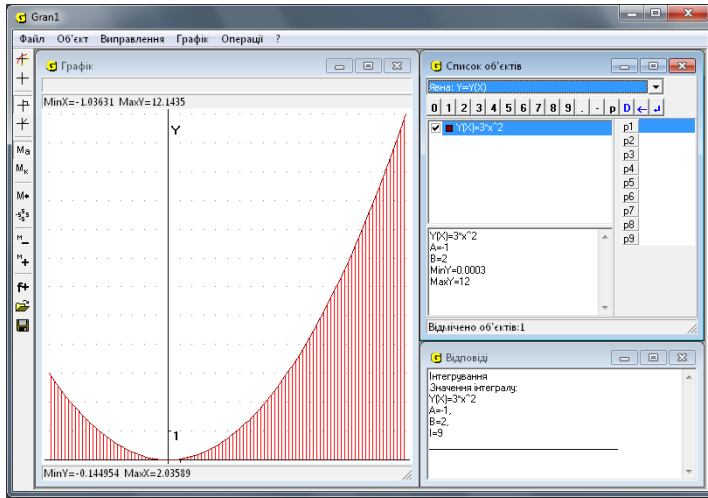


Рис. 1.2.6.

4.1) При натисненні кнопки Занести у “Відповіді” результат інтегрування запишеться ще й до окремого вікна відповідей. Далі можна продовжити обчислення інтеграла від цієї самої функції, але на інших відрізках.

5) Для закінчення інтегрування слід закрити вікно “Інтегрування”.

Щоб звернути увагу на деякі нюанси, обчислимо за допомогою програми Gran1 ще один інтеграл, а саме

$$I = \int_{\sqrt{\pi/4}}^{\sqrt{3\pi/2}} \sin(x^2) dx.$$

Задаємо функцію:  $Y(X)=\sin(X^2)$  та відрізок:  $A=\sqrt{\pi/4}$ ,  $B=\sqrt{3\pi/2}$ , а потім будуємо графік і обчислюємо інтеграл, як описано вище. При цьому на екрані комп'ютера видається результат інтегрування:  $I = 0,4264$  та зображується його геометричний зміст (рис. 1.2.7).

**Зауваження. 1.** Потрібно розуміти, що отримано наближене значення інтеграла з точністю до  $10^{-4}$ .

2. Геометричний зміст інтеграла полягає у тому, що він дорівнює різниці між площею частини фігури, яка лежить вище осі  $OX$ , і площею частини під віссю  $OX$ .

3. Відомо, що функція  $f(x) = \sin(x^2)$  має первісну  $F(x)$ , але в скінченному вигляді її подати неможливо (див. пункт 1.3.7), а тому обчи-

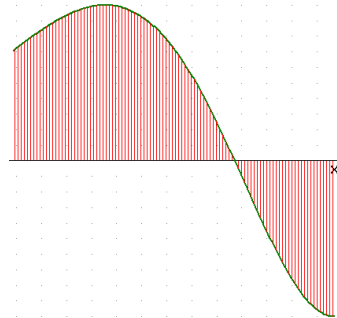


Рис. 1.2.7.

слити інтеграл за формулою Ньютона – Лейбніца також не можливо. У програмі *Gran1* інтеграл обчислюється одним з так званих чисельних методів інтегрування.

**1.2.5.2. Використання Maxima.** За допомогою програми *Maxima* також легко побудувати графік елементарної функції  $f(x)$  на відрізку  $[a; b]$ . Найпростішою командою для цього є `plot2d(f(x),[x,a,b])`.

У цій команді може бути кілька параметрів, що дозволяє будувати кілька графіків на одному рисунку, вказувати тип задання функції (явне,

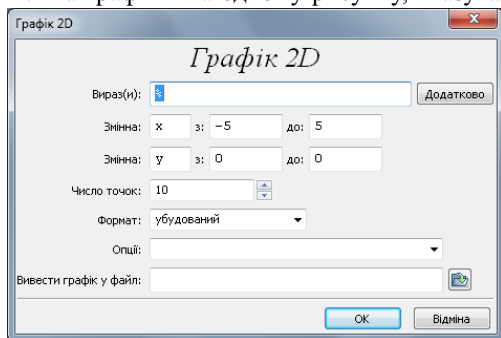


Рис. 1.2.8.

кнопку `Графік 2D...` (рис. 1.2.8).

Наприклад, для побудови графіка функції  $x \sin x$  на відрізку  $[-\pi; \pi]$  досить набрати з клавіатури

```
(%i1) plot2d(x*sin(x),[x,-%pi;%pi])
```

і у вікні *gnuplot* з'явиться такий графік (рис. 1.2.9).

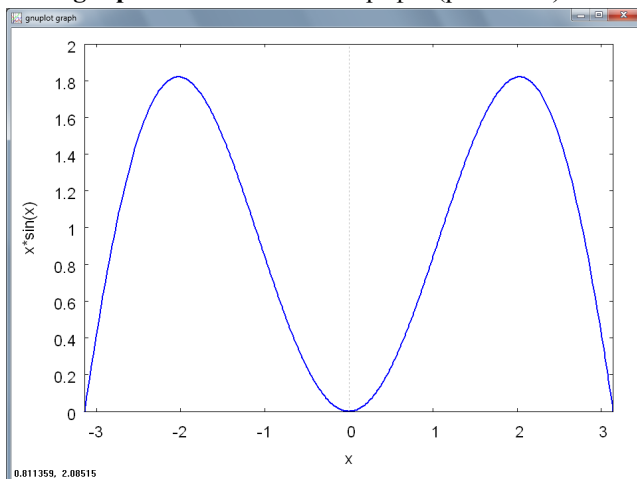


Рис. 1.2.9.

параметричне чи дискретне), задавати масштаб, визначати тип ліній, наносити написи на малюнок тощо. Крім того є можливість обирати графічну оболонку для побудови графіка: `wxMaxima` (вбудований формат), `openmath` та `gnuplot`. Це досить просто зробити через меню `Графіки` або натиснувши

Масштабування за змінною  $y$  при цьому здійснюється автоматично. У разі необхідності можна явно вказати діапазон значень змінної  $y$ . При виконанні графіків за допомогою шаблону `Графік 2D...` потрібно обов'язково задати вираз і відрізки зміни  $x$  та  $y$ . Також тут є можливість задати деякі (проте далеко не всі) опції команди `plot2d`.

Наступний рисунок 1.2.10 виконано за допомогою графічної оболонки `wxMaxima` після введення команд

```
(%i2) [F:x^2*sin(1/x), f:diff(F,x)]$
```

```
(%i3) wxplot2d([F,f],[x,1/20,1])
```

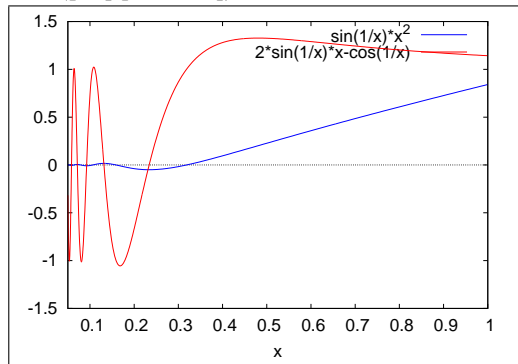


Рис. 1.2.10.

Пояснимо: 1) у рядку (%i2) визначено одразу дві функції  $F$  та її похідну  $f = F'$ , подавши їх списком; 2) у рядку (%i3) префікс `wx` вжито, щоб застосувати вбудований редактор `wxMaxima`; 3) якщо потрібно побудувати на одному малюнку графіки двох функцій, то ці функції подають списком: `[F,f]`.

Оскільки в системі `Maxima` є потужні інструменти для обчислення границь функцій, то цю програму також можна ефективно використати для дослідження функцій на неперервність (а відтак на інтегровність).

Наприклад, розв'яжемо за допомогою `Maxima` таку задачу.

**Задача 1.** Встановити, при яких  $M$  і  $N$  функцію

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^{Mx} - \cos(Nx)}{x}, & x < 0, \\ \frac{(1+x)^M - e^{Nx}}{x}, & x > 0 \end{cases}$$

можна до визначити у точці  $x = 0$ , щоб вона стала неперервною.

Розв'язання виглядає так.

```
(%i1) u:(exp(M*x)-cos(N*x))/x$
```

```
(%i2) v:((1+x)^M-exp(N*x))/x$
```



(%i3) limit(u,x,0);

(%o3) M

(%i4) limit(v,x,0);

(%o4) M - N

Звідси видно, що повинна виконуватися рівність  $M = M - N$ , тобто розв'язком задачі є пари чисел  $M \in \mathbb{R}$ ,  $N = 0$ .

**1.2.5.3. Використання MathCAD.** Використання програми MathCAD має багато переваг при графічному зображенні функцій. Це зумовлено простотою і наочністю оперування з різними даними, а також досить потужним апаратом символічних перетворень.

Так, наприклад, для зображення графіка функції

$$f(x) = \int_1^x \frac{\sin t}{t} dt$$

у MathCAD потрібно: 1) ввести вираз цієї функції; 2) натиснути @ або вибрати відповідну команду побудови графіка в меню Додати > Графіки ► (після чого на робочому аркуші з'явиться вікно побудови графіків (рис. 1.2.11) з квадратиками-маркерами по краях);

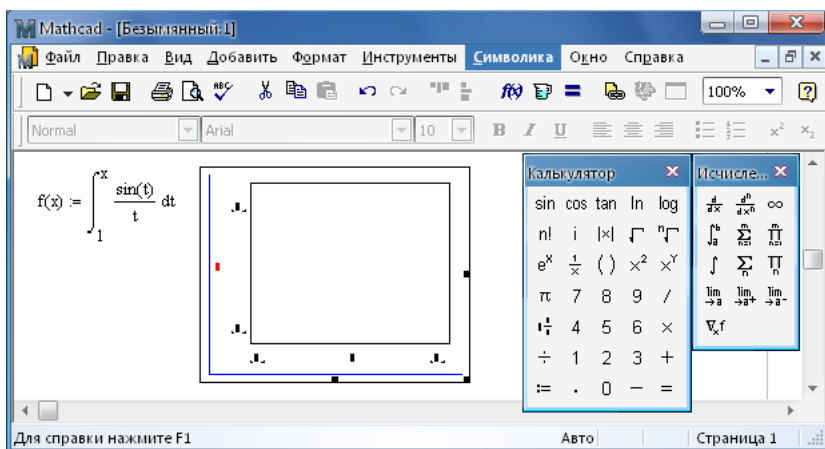


Рис. 1.2.11.

3) ввести в чорненькі квадратики посередині осей координат відповідно  $x$  та  $f(x)$ ; 4) задати межі зміни  $x$  у чорненьких квадратах під віссю абсцис; 5) натиснути Enter або вийти із зони зображення. І графік буде створено (рис. 1.2.12).

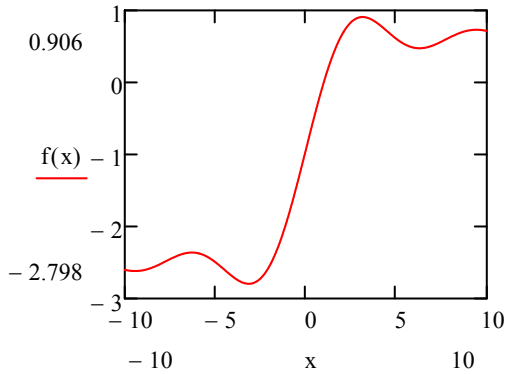


Рис. 1.2.12.

Після побудови графіка його вигляд можна легко перетворювати, вводячи нові межі зміни  $x$ , при потребі – і  $y$ , змінювати розміри вікна побудови, масштаби осей, товщину і колір ліній і багато іншого. Доступ до налаштувань малюнка можна дістати через його контекстне меню “Формат...” (нагадаємо, що контекстне меню викликається після натиснення правої клавіші мишки).

Зауважимо, що за допомогою MathCAD можна будувати навіть графіки деяких неелементарних функцій (як у розглянутому прикладі). Можливості використання програми Maxima в цьому відношенні дещо скромніші.

Щоб побудувати у середовищі MathCAD на одному малюнку графіки двох (чи більше) функцій, які можуть залежати від різних аргументів, потрібно спочатку визначити ці функції, побудувати графік першої функції, а потім на осях після уже введеного аргумента або функції поставити ко́му і ввести новий аргумент (нову функцію).

Наприклад, якщо треба вписати ламану у графік функції  $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$  на відрізку  $[a; b] = [\frac{\pi}{60}; \frac{\pi}{24}]$ , то можна задати розбиття відрізка на  $n = 10$  рівних частин у вигляді масиву  $x_i$  та визначити дискретну функцію  $y_i = f(x_i)$ ,  $i \in \overline{0, n}$ , теж за допомогою масиву.

Те, що  $i$  пробігає множину значень  $\overline{0, n}$ , вводиться як  $i := \overline{0..n}$  (причому символ  $..$  слід вводити натисненням клавіші  або кнопкою  на панелі “Матриця”). Індекс  $i$  елемента масиву  $x$  чи  $y$  задається за допомогою клавіші  або кнопки  на панелі “Матриця”).

Для побудови суміщених графіків функцій  $f(x)$  та  $(y_i, x_i)$  викликаємо вікно побудови графіків і вводимо спочатку аргумент  $t$ , кінці відрізка  $a$ ,  $b$  і вираз  $f(t)$  у відповідні квадратики. Потім через кому вводимо другий аргумент  $x$  і другу функцію  $y$ . Натискаємо  і на робочому аркуші з’явиться рисунок 1.2.13.

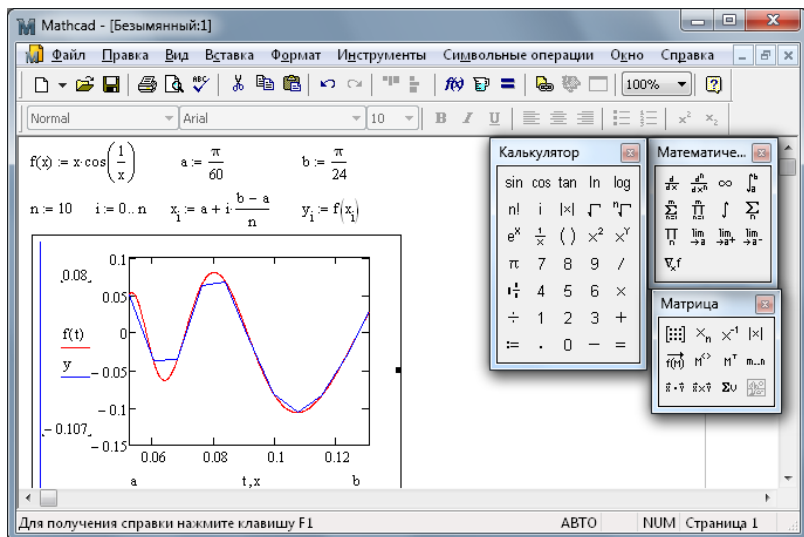


Рис. 1.2.13.

Далі можна експериментувати, збільшуючи  $n$  – кількість ланок ламаної, змінюючи відрізок  $[a; b]$  або ж саму функцію  $f(x)$ . При цьому будемо миттєво одержувати новий вигляд графіка та вписаної ламаної.

Програма MathCAD мабуть не поступається Maxima і в обчисленні границь функцій. Так, для розв'язання задачі 1 з підпункту 1.2.5.2 про неперервність функції досить обчислити дві границі і встановити, коли вони рівні одна одній. Для обчислення границь за допомогою MathCAD потрібно вставити у робочий аркуш шаблон границь (за допомогою кнопки  $\lim_{x \rightarrow a}$  з панелі “Математичний аналіз”), заповнити порожні маркери потрібними виразами і в кінці ввести оператор символічного обчислення за допомогою комбінації клавіш  $\text{Ctrl} + \square$  (рис. 1.2.14).

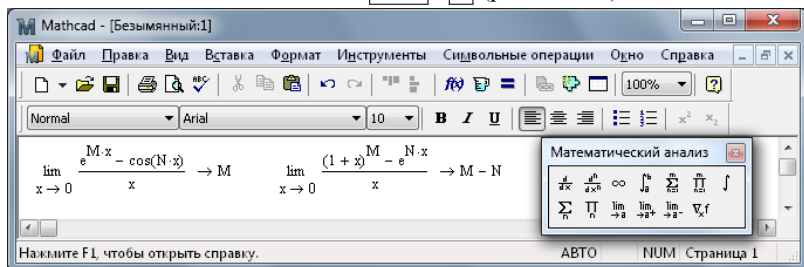


Рис. 1.2.14.

**1.2.6. Історичні відомості.** Теорема про  $NL$ -інтегровність ламаної функції та зв'язок  $NL$ -інтеграла з площею відповідної фігури були ві-

домі вже І. Ньютону та Г. Лейбніцу. Ідея відшукування  $NL$ -інтеграла за допомогою ламаних функцій належить видатному швейцарському математику Леонарду Ейлеру (1707–1783), але перше доведення  $NL$ -інтегровності неперервної функції запропонував видатний французький математик Огюстен Луї Коші (1789–1857).

**1.2.7. Зв'язок із шкільним курсом математики.** Доведені в цьому пункті теореми 1 – 4 у шкільному курсі математики не розглядаються, але саме вони пояснюють, чому площу криволінійної трапеції можна визначити як приріст первісної:

$$S = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Наведені твердження показують, як за допомогою граничного переходу можна дістати з об'єктів досить простої природи (ламаних функцій) об'єкти значно складнішої природи (неперервні функції). Зауважимо, що в теоремі 2 не тільки стверджується існування ламаних  $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$  на  $[a; b]$ , але й фактично дається метод побудови цих ламаних. Останнє дає метод наближеного обчислення значень функції та  $NL$ -інтеграла цієї функції, що є дуже важливим у практичних застосуваннях.

**1.2.8. Постановка проблем.** Залишається нерозв'язаною проблема про необхідні й достатні умови  $NL$ -інтегровності функції.

### 1.2.9. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Кожна монотонна на проміжку  $\langle a; b \rangle$  функція є  $NL$ -інтегрованою на  $\langle a; b \rangle$ .
2. Якщо  $f$  є ламаною на  $[a; b]$  функцією, то  $f$  є неперервною на  $[a; b]$ .
3. Твердження, обернене до 2, є правильним.
4. Якщо  $f$  є  $NL$ -інтегрованою на  $[a; b]$  функцією, то  $f$  неперервна на  $[a; b]$ .
5. Твердження, обернене до 4, є правильним.
6. Функція

$$F(x) = \begin{cases} \int_x^{x+x^2} \sin \frac{1}{u} du, & \text{коли } x > 0, \\ 0, & \text{коли } x = 0, \\ \int_x^{x-x^2} \sin \frac{1}{u} du, & \text{коли } x < 0, \end{cases}$$

має неперервну похідну  $f(x) = F'(x)$  на  $\mathbb{R}$ .

7. Якщо  $(f_n(x))$  – послідовність ламаних функцій, визначених на  $[a; b]$ , і  $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$  на  $[a; b]$ , то  $f$  – неперервна функція на  $[a; b]$ .

8. Якщо  $(f_n(x))$  – послідовність ламаних функцій, визначених на  $[a; b]$ , і  $f_n(x) \rightarrow f(x)$ , коли  $n \rightarrow \infty$ ,  $\forall x \in [a; b]$ , то  $f \in NL[a; b]$ .

9. Якщо

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & \text{коли } -1 \leq x \leq -\frac{1}{n}, \\ nx, & \text{коли } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1, & \text{коли } \frac{1}{n} \leq x \leq 1, \end{cases}$$

то  $f_n(x) \rightarrow \text{sign } x$ , коли  $n \rightarrow \infty$ ,  $\forall x \in [-1; 1]$ .

II. 1. Довести твердження теорем 4 та 5.

2. Знайти функцію  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , для якої первісною є функція

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{коли } x \neq 0, \\ 0, & \text{коли } x = 0. \end{cases}$$

Визначити, чи має функція  $f$  точки розриву, і якщо так, то якого роду вони.

III. Наступні задачі розв'язати за допомогою комп'ютерних засобів математики.

1. Зобразити графік ламаної функції, що у заданих точках  $x_k$ ,  $k \in \overline{1, n}$ , набуває значень  $f(x_k)$ , де  $f$  – задана функція.

2. Зобразити графіки даної неперервної функції  $f$  і послідовності ламаних функцій  $(f_n)$ , що рівномірно збігається до  $f$  на заданому відрізку  $[a; b]$ . Порівняти  $NL$ -інтеграли цих функцій.

3. Для функцій  $f_n(x)$  із завдання 1.9 зобразити графіки частинних сум  $S_n(x)$  функціонального ряду  $\sum_{k=0}^{\infty} (f_{k+1}(x) - f_k(x))$  та його суми  $f(x)$ . Встановити, чи є  $NL$ -інтегровними функції  $S_n(x)$  та  $f(x)$  на відрізку  $[-1; 1]$ .

### 1.3. Обчислення невизначених інтегралів функцій деяких класів

У цьому підрозділі розглянуто способи інтегрування довільної раціональної функції, а також деяких ірраціональних (алгебраїчних та трансцендентних) функцій.

**1.3.1. Інтегрування многочленів.** Якщо  $f(x) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ , то за властивістю лінійності інтеграла маємо:

$$\int f(z) dz = \sum_{k=0}^n a_k \int z^k dz = \sum_{k=0}^n a_k \frac{z^{k+1}}{k+1} + C, \quad z \in \mathbb{C},$$

тобто будь-яка первісна довільного многочлена також є многочленом, а тому і елементарною функцією.

**1.3.2. Інтегрування елементарних дробів.** Нехай  $f$  є дійсною дробово-раціональною функцією, тобто  $f(x) = P(x)/Q(x)$ , де  $P$  і  $Q$  – дійсні многочлени,  $Q \neq \text{const}$  і дріб  $P/Q$  є нескоротним.

Функцію  $f$  називають *елементарним дробом*, якщо вона має вигляд:

$$f(x) = \frac{1}{(x-a)^n} \quad \text{або} \quad f(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n},$$

де  $n \in \mathbb{N}$ , а числа  $a, p, q, A$  і  $B$  є дійсними, причому  $p^2 - 4q < 0$ . Виявляється, що кожен дробово-раціональний функцію можна подати у вигляді суми деякого многочлена та скінченної кількості деяких елементарних дробів [1, с. 166 – 176].

Отже, для знаходження інтеграла від дробово-раціональної функції треба вміти знаходити інтеграли від елементарних дробів.

Нехай  $f(x) = \frac{1}{(x-a)^n}$ , де  $n \in \mathbb{N}$ . Тоді

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n} = \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^n} = \begin{cases} \ln|x-a| + C, & \text{коли } n = 1, \\ \frac{(x-a)^{1-n}}{1-n} + C, & \text{коли } n > 1. \end{cases}$$

Розглянемо функцію

$$f(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n} = \frac{A(x+\frac{p}{2})+B-A\cdot\frac{p}{2}}{\left((x+\frac{p}{2})^2+(q-\frac{p^2}{4})\right)^n} = \frac{Ay+B_1}{(y^2+l^2)^n},$$

де  $y = x + \frac{p}{2}$ ,  $l^2 = q - \frac{p^2}{4} > 0$  і  $B_1 = B - A \cdot \frac{p}{2}$ .

Звідси випливає, що за методом заміни змінної обчислення невизначеного інтеграла від функції  $f(x) = \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$  зводиться до обчислення невизначеного інтеграла від функції  $\varphi(y) = \frac{Ay+B_1}{(y^2+l^2)^n}$ .

Оскільки

$$\int \frac{Ay+B_1}{(y^2+l^2)^n} dy = A \int \frac{y dy}{(y^2+l^2)^n} + B_1 \int \frac{dy}{(y^2+l^2)^n}$$

і

$$\int \frac{y dy}{(y^2+l^2)^n} = \frac{1}{2} \int \frac{d(y^2+l^2)}{(y^2+l^2)^n} = \begin{cases} \frac{1}{2} \ln(y^2+l^2) + C, & \text{коли } n = 1, \\ \frac{(y^2+l^2)^{1-n}}{2(1-n)} + C, & \text{коли } n > 1, \end{cases}$$

то залишилося навчитися обчислювати інтеграл

$$I_n = \int \frac{dy}{(y^2+l^2)^n},$$

де  $l > 0$ , а  $n \in \mathbb{N}$ .

Якщо  $n = 1$ , то

$$I_1 = \int \frac{dy}{y^2 + l^2} = \frac{1}{l} \operatorname{arctg} \frac{y}{l} + C.$$

Нехай  $n > 1$ . Тоді, використовуючи метод інтегрування частинами, матимемо

$$\begin{aligned} I_n &= \int \frac{dy}{(y^2 + l^2)^n} = \left| \begin{array}{l} u = \frac{1}{(y^2 + l^2)^n} \quad du = \frac{-2ny \, dy}{(y^2 + l^2)^{n+1}} \\ dv = dy \quad v = y \end{array} \right| = \\ &= \frac{y}{(y^2 + l^2)^n} + \int \frac{2ny^2 \, dy}{(y^2 + l^2)^{n+1}} = \\ &= \frac{y}{(y^2 + l^2)^n} + 2n \int \frac{(y^2 + l^2 - l^2) \, dy}{(y^2 + l^2)^{n+1}} = \\ &= \frac{y}{(y^2 + l^2)^n} + 2nI_n - 2nl^2 I_{n+1} \Rightarrow \\ I_{n+1} &= \frac{2n - 1}{2nl^2} I_n + \frac{1}{2nl^2} \frac{y}{(y^2 + l^2)^n}. \end{aligned} \quad (1)$$

Дістали так звану *рекурентну формулу* для обчислення невизначеного інтеграла  $I_n \forall n \in \mathbb{N}$ . Зокрема, з рівності (1) для  $n = 1$  дістаємо

$$I_2 = \frac{1}{2l^2} \frac{1}{l} \operatorname{arctg} \frac{y}{l} + \frac{1}{2l^2} \frac{y}{y^2 + l^2} + C.$$

Тепер, якщо в (1) покласти  $n = 2$ , можна дістати значення  $I_3$  і так далі. Отже будь-яка первісна будь-якого елементарного дробу є елементарною функцією, яку можна визначити через раціональні функції, логарифми та арктангенси. Тому, враховуючи сказане вище, можемо стверджувати, що *будь-яка первісна будь-якої раціональної функції є елементарною функцією*.

Кажуть, що *функція  $f$  інтегрується у скінченному вигляді або в елементарних функціях*, коли будь-яка первісна функції  $f$  є елементарною функцією. Таким чином, будь-яка дійсна раціональна функція інтегрується в скінченному вигляді.

**1.3.3. Алгоритм відшукування невизначеного інтеграла раціональної функції.** Для обчислення невизначеного інтеграла від довільної дійсної дробово-раціональної функції можна скори-

статися наступним алгоритмом.

1. Якщо дріб  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  неправильний, то шляхом ділення  $P(x)$  на  $Q(x)$  виділити з нього цілу частину, тобто записати цей дріб у вигляді

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)},$$

де  $R(x)$  – деякий многочлен, а дріб  $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$  є правильним.

2. Розкласти многочлен  $Q_1(x)$  на множники вигляду  $(x - a_k)^{\nu_k}$ ,  $k \in \overline{1, n}$ , та  $(x^2 + p_k x + q_k)^{\mu_k}$ ,  $k \in \overline{1, m}$ , де  $\nu_k$  і  $\mu_k \in \mathbb{N}$ ,  $a_k, p_k$  і  $q_k$  є дійсними числами і  $p_k^2 - 4q_k < 0$ .
3. Кожному множнику  $(x - a_k)^{\nu_k}$ ,  $k \in \overline{1, n}$ , поставити у відповідність суму  $\sum_{i=1}^{\nu_k} \frac{A_i^{(k)}}{(x - a_k)^i}$ , а кожному множнику  $(x^2 + p_k x + q_k)^{\mu_k}$ ,  $k \in \overline{1, m}$ , – суму  $\sum_{i=1}^{\mu_k} \frac{B_i^{(k)} x + C_i^{(k)}}{(x^2 + p_k x + q_k)^i}$ , де  $A_i^{(k)}$ ,  $B_i^{(k)}$ ,  $C_i^{(k)}$  – невизначені коефіцієнти.
4. Записати рівність  $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{\nu_k} \frac{A_i^{(k)}}{(x - a_k)^i} + \sum_{k=1}^m \sum_{i=1}^{\mu_k} \frac{B_i^{(k)} x + C_i^{(k)}}{(x^2 + p_k x + q_k)^i}$ .
5. Звести праву частину до спільного знаменника і прирівняти її чисельник до  $P_1(x)$ , діставши рівність двох многочленів.
6. Використовуючи умови рівності двох многочленів (відповідні коефіцієнти рівні або многочлени в однакових точках набувають однакових значень), знайти невизначені коефіцієнти  $A_i^{(k)}$ ,  $B_i^{(k)}$ ,  $C_i^{(k)}$ .
7. Підставити знайдені коефіцієнти  $A_i^{(k)}$ ,  $B_i^{(k)}$ ,  $C_i^{(k)}$  у рівність 4 та проінтегрувати рівність  $f(x) = R(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ .

Застосуємо вказаний алгоритм до обчислення інтеграла

$$\int \frac{x^4 - x - 1}{x^4 + x^2} dx.$$

1.  $f(x) = \frac{x^4 - x - 1}{x^4 + x^2}$  – неправильний дріб. Виділимо цілу частину:

$$f(x) = \frac{x^4 + x^2 - x^2 - x - 1}{x^4 + x^2} = 1 - \frac{x^2 + x + 1}{x^4 + x^2}.$$



Отже,  $R(x) = 1$  – ціла частина  $f(x)$ , а

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = -\frac{x^2 + x + 1}{x^4 + x^2}$$

– дробова частина  $f(x)$ .

2.  $Q_1(x) = x^2(x^2 + 1)$ .

3. Множнику  $x^2$  відповідає сума  $\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2}$ , а множнику  $x^2 + 1$  – один доданок:  $\frac{B_1x + C_1}{x^2 + 1}$ , де  $A_1, A_2, B_1, C_1$  – невизначені коефіцієнти.

4. Маємо:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + x + 1}{x^4 + x^2} &= \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \frac{B_1x + C_1}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{A_1x(x^2 + 1) + A_2(x^2 + 1) + B_1x^3 + C_1x^2}{x^4 + x^2}, \end{aligned}$$

а тому

$$x^2 + x + 1 = A_1x(x^2 + 1) + A_2(x^2 + 1) + B_1x^3 + C_1x^2.$$

### 5. Перший спосіб обчислення невизначених коефіцієнтів.

Привіряємо коефіцієнти при відповідних степенях  $x$ .

$$\left. \begin{array}{l} x^3 : 0 = A_1 + B_1, \\ x^2 : 1 = A_2 + C_1, \\ x : 1 = A_1, \\ 1 = x^0 : 1 = A_2 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_1 = 1, \\ A_2 = 1, \\ B_1 = -A_1 = -1, \\ C_1 = 1 - A_2 = 0. \end{array} \right.$$

**Другий спосіб обчислення невизначених коефіцієнтів.** Надаємо  $x$  різних значень.

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 : 1 = A_2, \\ x = -1 : 1 = -2A_1 + 2A_2 - B_1 + C_1, \\ x = 1 : 3 = 2A_1 + 2A_2 + B_1 + C_1, \\ x = -2 : 3 = -10A_1 + 5A_2 - 8B_1 + 4C_1 \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = 1, \\ 2C_1 + 4A_2 = 4, \\ 2A_1 + B_1 + C_1 = 1, \\ -10A_1 - 8B_1 + 4C_1 = -2 \end{array} \right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = 1, \\ C_1 = 0, \\ 2A_1 + B_1 = 1, \\ 5A_1 + 4B_1 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_2 = 1, \\ C_1 = 0, \\ 3A_1 = 3, \\ 2A_1 + B_1 = 1 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} A_2 = 1, \\ C_1 = 0, \\ A_1 = 1, \\ B_1 = -1. \end{array} \right.$$

Отже, в даному випадку перший спосіб більш раціональний. Зауважимо, що другий спосіб обчислення коефіцієнтів є зручнішим від першого у випадку, коли знаменник дробу розкладається на лінійні множники, тобто має дійсні корені. Тоді  $x$  надають значень цих коренів.

6. Таким чином,  $\frac{x^2+x+1}{x^4+x^2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{x}{x^2+1}$  і

$$f(x) = \frac{x^4 - x - 1}{x^4 + x^2} = 1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2 + 1} \Rightarrow$$

$$\int f(x) dx = \int dx - \int \frac{dx}{x} - \int \frac{dx}{x^2} + \int \frac{x dx}{x^2 + 1} =$$

$$= x - \ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} =$$

$$= x - \ln|x| + \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C, \quad x \in E,$$

де  $E = (0; +\infty)$  або  $E = (-\infty; 0)$ .

**1.3.4. Інтегрування комплексних дробово-раціональних функцій.** Розглянемо довільну комплексну дробово-раціональну функцію  $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ , де змінна  $z$  і коефіцієнти многочленів  $P$  та  $Q$  є комплексними (зокрема, й дійсними) числами. Тоді інтегрування таких функцій навіть спрощується, у порівнянні з функціями дійсної змінної.

По-перше, *елементарними дробами* називають лише функції вигляду  $\frac{1}{(z-a)^n}$ , де  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a \in \mathbb{C}$ .

По-друге, *алгоритм відшукування невизначеного інтеграла від комплексної раціональної функції* спроститься, у порівнянні з наведеним у пункті 1.3.3, і набуде вигляду:

1. Якщо дріб  $\frac{P(z)}{Q(z)}$  неправильний, то виділити цілу  $R(z)$  та дробову  $\frac{P_1(z)}{Q_1(z)}$  частини шляхом ділення  $P$  на  $Q$ :

$$\frac{P(z)}{Q(z)} = R(z) + \frac{P_1(z)}{Q_1(z)}.$$

2. Розкласти многочлен  $Q_1(z)$  на множники вигляду  $(z - c_k)^{\nu_k}$ , де  $\nu_k \in \mathbb{N}$ ,  $k \in \overline{1, n}$ .
3. Кожному множнику  $(z - c_k)^{\nu_k}$  поставити у відповідність суму

$$\sum_{l=1}^{v_k} \frac{A_l^{(k)}}{(z-c_k)^l}, \quad k \in \overline{1, n}.$$

4. Записати рівність  $\frac{P_1(z)}{Q_1(z)} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^{v_k} \frac{A_l^{(k)}}{(z-c_k)^l}$ .
5. Звести праву частину останньої рівності до спільного знаменника і прирівняти чисельник одержаного дробу до  $P_1(z)$ .
6. Використовуючи умови рівності многочленів, обчислити невизначені коефіцієнти  $A_l^{(k)}$ .
7. Підставити знайдені коефіцієнти  $A_l^{(k)}$  у рівність 4 та проінтегрувати рівність  $f(z) = R(z) + \frac{P_1(z)}{Q_1(z)}$ .

Обчислимо за допомогою наведеного алгоритму інтеграл

$$\int \frac{z^4 - z - 1}{z^4 + z^2} dz,$$

розглянутий у пункті 1.3.3 для дійсного  $z = x$ .

1.  $f(z) = \frac{z^4 - z - 1}{z^4 + z^2} = 1 - \frac{z^2 + z + 1}{z^4 + z^2}$ .
2.  $Q_1(z) = z^2(z^2 + 1) = z^2(z + i)(z - i)$ .
3. Множнику  $z^2$  відповідає сума  $\frac{A_1}{z^2} + \frac{A_2}{z}$ , множнику  $(z + i)$  – дріб  $\frac{A_3}{z+i}$ , а множнику  $(z - i)$  – дріб  $\frac{A_4}{z-i}$ .
4.  $\frac{z^2 + z + 1}{z^4 + z^2} = \frac{A_1}{z^2} + \frac{A_2}{z} + \frac{A_3}{z+i} + \frac{A_4}{z-i}$ .
5.  $\frac{z^2 + z + 1}{z^4 + z^2} = \frac{A_1(z+i)(z-i) + A_2z(z+i)(z-i) + A_3z^2(z-i) + A_4z^2(z+i)}{z^4 + z^2}$ .
6.  $z^2 + z + 1 = A_1(z + i)(z - i) + A_2z(z + i)(z - i) + A_3z^2(z - i) + A_4z^2(z + i) \Rightarrow$   
 $z = 0 : 1 = A_1$   
 $z = i : i = A_4 \cdot (-1) \cdot 2i \Leftrightarrow A_4 = -\frac{1}{2}$   
 $z = -i : -i = A_3 \cdot (-1) \cdot (-2i) \Leftrightarrow A_3 = -\frac{1}{2}$   
 $z = 1 : 3 = A_1 \cdot 2 + A_2 \cdot 2 + A_3(1 - i) + A_4(1 + i)$   
 $\Leftrightarrow 3 = 2 + 2A_2 - \frac{1}{2}(1 - i + 1 + i) \Leftrightarrow$   
 $3 = 2 + 2A_2 - 1 \Leftrightarrow A_2 = 1.$
7.  $\frac{z^4 - z - 1}{z^4 + z^2} = 1 - \frac{z^2 + z + 1}{z^4 + z^2} = 1 - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z+i} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z-i} \Rightarrow$   
 $\int \frac{z^4 - z - 1}{z^4 + z^2} dz = \int dz - \int \frac{dz}{z^2} - \int \frac{dz}{z} + \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z+i} + \frac{1}{2} \int \frac{dz}{z-i} =$   
 $= z + \frac{1}{z} - \ln z + \frac{1}{2} \ln(z + i) + \frac{1}{2} \ln(z - i) + C,$

$z \in \mathbb{C} \setminus (\{z = x: x \leq 0\} \cup \{z = x - i: x \leq 0\} \cup \{z = x + i: x \leq 0\}) = D$  (див. рис. 1.3.1).

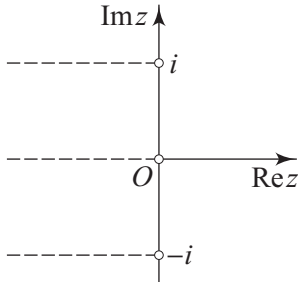


Рис. 1.3.1.

Зокрема, якщо  $z = x > 0$ , то  
 $\ln(z + i) = \ln(x + i) = \ln|x + i| +$   
 $+i \arg(x + i) = \ln|x + i| + i \operatorname{arctg} \frac{1}{x},$   
 $\ln(z - i) = \ln(x - i) = \ln|x - i| +$   
 $+i \arg(x - i) = \ln|x - i| +$   
 $+i \operatorname{arctg}(-\frac{1}{x}) = \ln|x - i| - i \operatorname{arctg} \frac{1}{x}.$

Тому  $\frac{1}{2}(\ln(z + i) + \ln(z - i)) =$   
 $= \frac{1}{2}(\ln|x + i| + \ln|x - i|) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) i$   
 $\int \frac{x^4 - x - 1}{x^4 + x^2} dx = x + \frac{1}{x} - \ln x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C, x > 0.$

Аналогічно переконуємося, що

$$\int \frac{x^4 - x - 1}{x^4 + x^2} dx = x + \frac{1}{x} - \ln(-x) + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C, x < 0.$$

**1.3.5. Інтегрування деяких ірраціональних алгебраїчних функцій.** Нехай  $f$  – деяка ірраціональна (тобто така, що не є раціональною) функція дійсної або комплексної змінної  $x$ . Якщо для обчислення значень  $f(x)$  цієї функції можна спочатку обчислити значення  $u_k = u_k(x), k \in \overline{1, n}$ , а з них та з деяких сталих за допомогою скінченної кількості арифметичних операцій дістати значення  $f(x)$ , то кажуть, що  $f$  є *раціональною функцією змінних*  $u_k, k \in \overline{1, n}$ , і записують  $f(x) = R(u_1, u_2, \dots, u_n)$ .

Наприклад,  $f(x) = \frac{x - \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}}{1 + x - 2\sqrt{x}}$  є ірраціональною функцією змінної  $x$ , але раціональною функцією змінних  $u_1 = x, u_2 = \sqrt{x}$  і  $u_3 = \sqrt[3]{x}$ , тобто  $f(x) = R(x, \sqrt{x}, \sqrt[3]{x})$ . Якщо врахувати, що  $x = (\sqrt[6]{x})^6, \sqrt{x} = (\sqrt[6]{x})^3$ , а  $\sqrt[3]{x} = (\sqrt[6]{x})^2$ , коли  $x \geq 0$  (для комплексного  $x$  ця умова набуває вигляду  $x \neq \operatorname{Re} x \leq 0$ ), то можна вважати  $f$  раціональною функцією однієї змінної  $u = \sqrt[6]{x}$ .

Зауважимо, що обчислення інтегралів від деяких ірраціональних функцій можна звести за допомогою певних підстановок до інтегрування раціональних функцій.

У таблиці 1 показано деякі класи таких ірраціональних функцій та методи їх інтегрування.

Зауважимо, що ірраціональні функції  $y = f(x), x \in \langle a; b \rangle$ , наве-

дені у таблиці 1, є водночас так званими алгебраїчними функціями, тобто такими, що є розв'язками (відносно  $y$ ) рівняння вигляду

$$a_0 + a_1y + \dots + a_ny^n = 0,$$

де  $n \in \mathbb{N}$  – фіксоване число, а коефіцієнти  $a_k = a_k(x)$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , є заданими многочленами.

Ірраціональні функції, що не є алгебраїчними, називають трансцендентними.

Таблиця 1

Функція	Додаткові умови	Можливий метод інтегрування
$f(x) = R(u_1, u_2, \dots, u_r),$ $u_k = \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}},$ $k \in \overline{1, r}$	$ad - bc \neq 0, m_k \in \mathbb{Z}, n_k \in \mathbb{N}$ $\forall k \in \overline{1, r}$	Підстановка: $\frac{ax+b}{cx+d} = t^p,$ де $p = \text{НСК}(n_1, n_2, \dots, n_r)$
$f(x) = x^m(a + bx^n)^p$	$ab \neq 0, m, n \text{ і } p \in \mathbb{Q}.$ $f$ інтегрується у скінченному вигляді тоді й тільки тоді, коли виконується хоча б одна з умов: 1) $p \in \mathbb{Z}$ , 2) $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ , або 3) $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$	Підстановки Чебишова: 1) $x = t^k$ , де $k$ – спільний знаменник $m$ і $n$ ; 2) $a+bx^n=t^s$ , де $s$ – знаменник $p$ ; 3) $a+bx^n = t^s x^n$ , де $s$ – знаменник $p$
$f(x)=R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})$	$a \neq 0, b^2 - 4ac \neq 0$ та існує інтервал $(\alpha; \beta)$ , для якого $ax^2 + bx + c > 0$ , коли $x \in (\alpha; \beta)$	Підстановки Ейлера: 1) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t - \sqrt{ax}$ , коли $a > 0$ ; 2) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt - \sqrt{c}$ , коли $a < 0$ і $c > 0$ ; 3) $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t(x - x_0)$ , коли $x_0$ – один з дійсних коренів тричлена $ax^2 + bx + c$

Кожна з указаних у таблиці 1 підстановок зводить обчислення інтеграла від заданої ірраціональної функції  $f$  до обчислення інтеграла від деякої раціональної функції.

Доведемо це для для інтеграла  $\int x^m(a + bx^n)^p dx$ , який називають інтегралом від диференціального бінома або від біноміального диференціала. Розглянемо лише випадок 3).

□ Отже, нехай  $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$  і  $a + bx^n = t^s x^n$ , або  $ax^{-n} + b = t^s$ , де  $s$  – знаменник  $p$ , тобто  $sp \in \mathbb{Z}$ . Тоді  $x = a^{\frac{1}{n}}(t^s - b)^{-\frac{1}{n}}$ ,  $dx = -\frac{s}{n}a^{\frac{1}{n}}(t^s - b)^{-\frac{1}{n}-1}t^{s-1} dt$  і

$$\begin{aligned} \int x^m(a + bx^n)^p dx &= \int x^{m+np}(ax^{-n} + b)^p dx = \\ &= \int a^{\frac{m+np}{n}+p}(t^s - b)^{-\frac{m}{n}-p}t^{sp}\left(-\frac{s}{n}\right)a^{\frac{1}{n}}(t^s - b)^{-\frac{1}{n}-1}t^{s-1} dt = \\ &= -\frac{s}{n}a^{\frac{m+1}{n}+p} \int (t^s - b)^{-\left(\frac{m+1}{n}+p+1\right)}t^{sp+s-1} dt, \end{aligned}$$

а це вже інтеграл від раціональної функції. ■

Міркування для інших підстановок таблиці 1 не є складнішими від наведених.

**1.3.6. Інтегрування деяких трансцендентних функцій.** У таблиці 2 наведено деякі класи трансцендентних функцій та вказано методи інтегрування цих функцій.

Таблиця 2

Функція	Додаткові умови	Можливий метод інтегрування
$f(x) = P(x)\varphi(x)$	$P(x)$ – многочлен, $\varphi(x)$ – це $e^{ax}$ або $\cos ax$ , або $\sin ax$	Інтегрування частинами: $u = P(x)$ , $dv = \varphi(x) dx$
	$P(x)$ – многочлен, $\varphi(x)$ – це $\ln x$ або $\arcsin ax$ , або $\arccos ax$ , або $\arctg ax$ , або $\operatorname{arctg} ax$	Інтегрування частинами: $u = \varphi(x)$ , $dv = P(x) dx$
$f(x) = R(e^{ax})$	$a \neq 0$	Підстановка: $e^{ax} = t$
$f(x) = R(\sin ax, \cos ax) = R_1(\operatorname{tg} \frac{ax}{2})$	$a \neq 0$	Універсальна підстановка: $\operatorname{tg} \frac{ax}{2} = t$
$f(x) = R(\sin ax, \cos ax)$	$R(-u, v) = -R(u, v)$ , $a \neq 0$	Підстановка: $\cos ax = t$
$f(x) = R(\sin ax, \cos ax)$	$R(u, -v) = -R(u, v)$ , $a \neq 0$	Підстановка: $\sin ax = t$
$f(x) = R(\sin ax, \cos ax)$	$R(-u, -v) = R(u, v)$ , $a \neq 0$	Підстановки: $\operatorname{tg} ax = t$ або $\operatorname{ctg} ax = t$
$f(x) = \sin^v x \cos^u x$	$v$ і $u$ раціональні, але не є одночасно цілими	Підстановка: $\sin^2 x = t$
$f(x) = \alpha(x)\beta(x)$	$\alpha(x)$ – це $\cos ax$ або $\sin ax$ $\beta(x)$ – це $\cos bx$ або $\sin bx$ , $a \neq 0$ , $b \neq 0$	Перетворити добуток $\alpha(x)\beta(x)$ на суму, наприклад: $\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x)$ і т. ін.
$f(x) = \alpha(x)\beta(x)$	$\alpha(x)$ – це $e^{ax}$ , $\beta(x)$ – це $\cos bx$ або $\sin bx$ , $a \neq 0$ , $b \neq 0$	Двічі застосувати інтегрування частинами, кожного разу позначаючи $u = e^{ax}$

За наведеними в таблиці 2 методами інтегрування зводять обчислення інтеграла від трансцендентної функції  $f$  до обчислення інтегралів розглянутих вище типів. Проілюструємо це на деяких прикладах.

1. Розглянемо інтеграл  $\int R(\sin ax, \cos ax) dx$ ,  $a \neq 0$ . Застосуємо до нього універсальну підстановку з таблиці 2:  $t = \operatorname{tg} \frac{ax}{2}$ . Звідси знаходимо  $\frac{ax}{2} = \operatorname{arctg} t$ ,  $x = \frac{2}{a} \operatorname{arctg} t$ ,  $dx = \frac{2}{a} \frac{dt}{1+t^2}$ .

Оскільки

$$\sin ax = \frac{2 \sin \frac{ax}{2} \cos \frac{ax}{2}}{\sin^2 \frac{ax}{2} + \cos^2 \frac{ax}{2}} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{ax}{2}}{\operatorname{tg}^2 \frac{ax}{2} + 1} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos ax = \frac{\cos^2 \frac{ax}{2} - \sin^2 \frac{ax}{2}}{\cos^2 \frac{ax}{2} + \sin^2 \frac{ax}{2}} = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{ax}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{ax}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2},$$

то

$$\int R(\sin ax, \cos ax) dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right) \frac{2}{a} \frac{dt}{1+t^2}.$$

Останній інтеграл є інтегралом від раціональної функції змінної  $t$ .

2. Розглянемо інтеграл  $I = \int e^{ax} \cos bx dx$ , де  $a \neq 0$  і  $b \neq 0$ .

Використовуючи метод інтегрування частинами, дістанемо:

$$\begin{aligned} I &= \left| \begin{array}{l} u = e^{ax} \quad du = ae^{ax} dx \\ dv = \cos bx dx \quad v = \frac{1}{b} \sin bx \end{array} \right| = \\ &= e^{ax} \frac{1}{b} \sin bx - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx dx = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = e^{ax} \quad du = ae^{ax} dx \\ dv = \sin bx dx \quad v = -\frac{1}{b} \cos bx \end{array} \right| = \\ &= e^{ax} \frac{1}{b} \sin bx - \frac{a}{b} \left( -e^{ax} \frac{1}{b} \cos bx + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx dx \right) = \\ &= e^{ax} \frac{1}{b} \sin bx + \frac{a}{b^2} e^{ax} \cos bx - \frac{a^2}{b^2} I \Rightarrow \\ (1 + \frac{a^2}{b^2}) \int e^{ax} \cos bx dx &= \frac{e^{ax}}{b^2} (b \sin bx + a \cos bx) \Rightarrow \\ \int e^{ax} \cos bx dx &= \frac{e^{ax}}{a^2 + b^2} (b \sin bx + a \cos bx) + C. \end{aligned}$$

Зауважимо, що наведені в таблицях 1 та 2 методи інтегрування можливі, але не єдині. На практиці може виявитися, що для обчислення того чи іншого інтеграла вказаний в таблицях 1 та 2 метод не є найкращим. Наприклад, для обчислення інтеграла  $\int \operatorname{tg}^2 x dx$  можна було б застосувати вказану в таблиці 2 підстановку  $\operatorname{tg} x = t$ . Але це не доцільно, оскільки

$$\operatorname{tg}^2 x = \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$$

і тому

$$\int \operatorname{tg}^2 x dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} - \int dx = \operatorname{tg} x - x + C.$$

**1.3.7. Приклади неелементарних функцій.** Зауважимо, що не кожна елементарна функція інтегрується в скінченному вигляді. Наприклад, кожен з наведених нижче інтегралів 1) – 5) не обчислюється у скінченному вигляді:

$$1) \int_0^z \frac{du}{\ln u} =: \operatorname{li} z - \text{інтегральний логарифм};$$

$$2) \int_0^z \frac{\sin u}{u} du =: \operatorname{si} z - \text{інтегральний синус};$$

$$3) \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx - \text{інтеграл ймовірності};$$

$$4) \int_0^z \sin x^2 dx \text{ і } \int_0^z \cos x^2 dx - \text{інтеграли Френеля};$$

$$5) \int_0^z \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, \int_0^z \frac{x^2 dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}} \text{ і } \int_0^z \frac{dx}{(1+hx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}},$$

$0 < k < 1$  – **еліптичні інтеграли** відповідно 1-го, 2-го та 3-го роду;

$$6) \int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}}, \int_0^\varphi \sqrt{1-k^2 \sin^2 t} dt \text{ і } \int_0^\varphi \frac{dt}{(1+h \sin^2 t)\sqrt{1-k^2 \sin^2 t}},$$

$0 < k < 1$  – **еліптичні інтеграли** відповідно 1-го, 2-го та 3-го роду у формі Лежандра.

Доведення неелементарності інтегралів 1) – 4) можна знайти у статті [13], а питання про неелементарність так званих гіпереліптичних інтегралів, зокрема еліптичного інтеграла 1-го роду, висвітлено, наприклад, у книзі [10, с. 366–384].

Разом з тим указані інтеграли та багато інших, що не обчислюються в скінченному вигляді, відіграють у математиці важливу роль. Тому важливими є й методи обчислення цих інтегралів. Один з таких методів – **метод розвинення функції у степеневий ряд**. Суть цього методу визначається формулою:

$$\int_{z_0}^z \sum_{k=0}^{\infty} a_k (u - z_0)^k du = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \int_{z_0}^z (u - z_0)^k du =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(z - z_0)^{k+1}}{k+1}, \quad z \in K = \{z: |z - z_0| < R\}, \quad (2)$$

коли радіус збіжності даного степеневого ряду  $R > 0$ . Формула (2) впливає з теореми 4 пункту 1.2.3, бо степеневий ряд є рівномірно



збіжним у кожному крузі  $K_1 = \{z: |z - z_0| < r\}$ , де  $0 < r < R$ .

Застосуємо формулу (2) до обчислення інтегрального синуса. Маємо:

$$\begin{aligned} \frac{\sin z}{z} &= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k+1)!} \Rightarrow \\ \operatorname{si} z &= \int_0^z \frac{\sin u}{u} du = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} \int_0^z u^{2k} du = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!(2k+1)} \quad \forall z \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

За цю формулою можна обчислити інтегральний синус в будь-якій точці  $z$  з будь-якою точністю.

**1.3.8. Використання комп'ютерних засобів математики.** У даному пункті розглянемо відшукування первісної в аналітичному вигляді.

**1.3.8.1. Використання Gran1.** Програма Gran1 не призначена для символьних перетворень, а лише для чисельних розрахунків і візуального зображення деяких математичних об'єктів.

**1.3.8.2. Використання Maxima.** Як показує практика, більшість невизначених інтегралів, які подані у вузівських задачниках, можна обчислити за допомогою команди `integrate(f(x),x)`, розглянутої раніше. Певною мірою це зумовлено тим, що ці інтеграли відносно нескладні. Проте іноді виникає потреба мати простіший результат, ніж отриманий за допомогою Maxima. При цьому спрощення виданої відповіді командами `ratsimp`, `radcan`, `factor`, `expand`, `trigsimp`, `trigexpand`, `trigreduce` тощо не завжди дає бажаний результат. У таких випадках більш ефективними є: перетворення підінтегральної функції, застосування тієї чи іншої підстановки або методу інтегрування частинами. Зупинимось далі саме на таких моментах.

Почнемо з інтегрування раціональних функцій  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ . Згідно з алгоритмом, наведеним у пункті 1.3.3, потрібно спочатку виділити цілу частину і правильний дріб. У Maxima є команда `divide(P(x),Q(x),x)`, яка дозволяє знайти частку  $R(x)$  і остачу  $P_1(x)$  від ділення многочлена  $P(x)$  на  $Q(x)$ .

Так, якщо  $P(x) = x^8 - x^7 + x^4 - 3x^2 - x + 1$ , а  $Q(x) = x^6 + x^2$ , то командою

```
(%i1) divide((x^8-x^7+x^4-3*x^2-x+1),(x^6+x^2),x);
```

буде знайдено частку і остачу від ділення  $P(x)$  на  $Q(x)$  у вигляді списку

```
(%o1) [x^2 - x, x^3 - 3x^2 - x + 1]
```

Крім того, у Maxima є команда `partfrac(f(x),x)`, якою дріб  $f(x)$  розкладається на суму нескоротних дробів, елементарних над полем  $\mathbb{Q}$ . При цьому також виділяється ціла частина.

Наприклад, узявши ті самі многочлени, що й раніше, розкладемо дріб  $P(x)/Q(x)$  на більш прості дробі:

$$(\%i2) \text{partfrac}((x^8-x^7+x^4-3*x^2-x+1)/(x^6+x^2),x);$$

$$(\%o2) \frac{x^3-x^2+x-3}{x^4+1} + x^2 - x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}$$

Часто після спрощення раціональної функції командою `partfrac` можна одразу переходити до інтегрування, навіть якщо одержані дробі не є елементарними над полем  $\mathbb{R}$ .

Припустимо, що треба обчислити інтеграл

$$I = \int \frac{x^{11} dx}{x^8 + 3x^4 + 2}.$$

Для цього спочатку виконаємо команду

$$(\%i3) \text{partfrac}(x^{11}/(x^8+3*x^4+2),x);$$

$$(\%o3) -\frac{4x^3}{x^4+2} + \frac{x^3}{x^4+1} + x^3$$

Як бачимо, такий розклад підінтегральної функції дозволяє знайти потрібний інтеграл майже усно:

$$I = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4} \ln(x^4 + 1) - \ln(x^4 + 2) + C.$$

Далі за алгоритмом інтегрування раціональної функції йде розкладання знаменника правильного дробу  $P_1(x)/Q_1(x)$  на незвідні над  $\mathbb{R}$  множники. З алгебри відомо, що ця задача у загальному випадку нерозв'язна. Її можна розв'язати лише у деяких простіших випадках. Зокрема, у Maxima є команда `factor(Q(x))`, яка дозволяє розкласти многочлен  $Q(x)$  на незвідні множники над полем  $\mathbb{Q}$ . Наприклад,

$$(\%i4) \text{factor}(10*x^4-39*x^3+80*x^2-108*x+63);$$

$$(\%o4) (2x - 3)(5x - 7)(x^2 - x + 3)$$

$$(\%i5) \text{factor}(x^4+5*x^3+6*x^2-x-3);$$

$$(\%o5) (x + 1)(x + 3)(x^2 + x - 1)$$

У рядку (%o4) одержали розклад многочлена  $10x^4 - 39x^3 + 80x^2 - 108x + 63$  і над  $\mathbb{Q}$ , і над  $\mathbb{R}$ . А для многочлена  $x^4 + 5x^3 + 6x^2 - x - 3$  розклад над  $\mathbb{Q}$  (див. рядок (%o5)) ще не є розкладом над  $\mathbb{R}$ , оскільки многочлен  $x^2 - x + 1$  у свою чергу розкладається на лінійні множники, тільки з іраціональними коефіцієнтами.

Коли командою `factor` не вдається розкласти многочлен над полем  $\mathbb{R}$ , то можна спробувати зробити це по-іншому. Одним із способів є використання команди `solve(Q(x))`, якою знаходять у точному вигляді усі комплексні корені  $Q(x)$ , коли це можливо. Як відомо, кожному дійсному кореню  $X_j$  відповідає лінійний множник  $x - X_j$ , а парі comple-

кських спряжених коренів  $X_k$  та  $X_l$  відповідає квадратичний множник  $x^2 + px + q = (x - X_k)(x - X_l)$ .

Наприклад, знайдемо незвідні множники многочлена  $x^4 + 2$ . Для цього знайдемо спочатку його корені:

(%i6) solve(x^4+2), rectform;

(додатковою командою rectform забезпечується виведення комплексних коренів в алгебраїчній формі)

(%o6)  $[x = \frac{i}{2^{3/4}} - \frac{1}{2^{3/4}}, x = -\frac{i}{2^{3/4}} - \frac{1}{2^{3/4}}, x = \frac{1}{2^{3/4}} - \frac{i}{2^{3/4}}, x = \frac{1}{2^{3/4}} + \frac{i}{2^{3/4}}]$

Виведені корені є попарно спряжені. Перемножимо відповідні пари виразів  $x - X_k$  та  $x - \bar{X}_k$  і розкриємо дужки. При введенні нових виразів можна копіювати фрагменти формул з вікна виведення.

(%i7) (x-%i/2^(1/4)-1/2^(1/4))\*(x-%i/2^(1/4)-1/2^(1/4)), expand;

(%o7)  $x^2 + 2^{3/4}x + \sqrt{2}$

(%i8) (x-(1/2^(1/4)-%i/2^(1/4))\*(x-%i/2^(1/4)+1/2^(1/4))), expand;

(%o8)  $x^2 - 2^{3/4}x + \sqrt{2}$

Таким чином,  $x^4 + 2 = (x^2 + 2^{3/4}x + \sqrt{2})(x^2 - 2^{3/4}x + \sqrt{2})$ .

Наступним кроком алгоритму інтегрування раціональної функції є розкладання правильного дробу  $P_1(x)/Q_1(x)$  на елементарні дроби. Як зазначалося вище, у випадку існування такого розкладу над полем  $\mathbb{Q}$  його можна знайти за допомогою команди partfrac( $P_1(x), Q_1(x), x$ ). При цьому многочлени можуть бути і з буквеними коефіцієнтами.

Розглянемо, для прикладу, таку задачу. Потрібно встановити, коли інтеграл

$$\int \frac{ax^2 + bx + c}{x^3(x-1)^2} dx$$

виражається через раціональну функцію.

Застосуємо до підінтегральної функції команду partfrac:

(%i9) partfrac((a\*x^2+b\*x+c)/(x-1)^2/x^3,x);

(%o9)  $\frac{3c+2b+a}{x} + \frac{2c+b}{x^2} + \frac{c}{x^3} + \frac{-3c-2b-a}{x-1} + \frac{c+b+a}{(x-1)^2}$

Після цього розв'язок задачі виглядає очевидним: шукана первісна буде раціональною тоді й тільки тоді, коли  $a + 2b + 3c = 0$ .

Однак, командою partfrac не завжди вдається розкласти дріб на елементарні дроби (див. рядок (%o2)). Крім того, часто необхідно наводити детальний хід розв'язування задачі, у тому числі процесу розкладання дробу на елементарні дроби. В цій ситуації Maxima також може бути ефективно застосована. Адже коли знаменник дробу розкладений на прості множники, неважко написати формальний розклад з невизначеними коефіцієнтами. Залишається лише знайти ці коефіцієнти за допомогою комп'ютера.

Повернемося до дробу

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 3}{x^4 + 1},$$

одержаного в рядку (%o2), і розкладемо його на елементарні дробу.

Оскільки  $x^4 + 1 = (x^2 + 1)^2 - 2x^2 = (x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$ , то згідно з п. 3 алгоритму інтегрування раціональної функції

$$\frac{x^3 - x^2 + x - 3}{x^4 + 1} = \frac{Ax + B}{x^2 - \sqrt{2}x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + \sqrt{2}x + 1}.$$

Отже, вводимо у комп'ютер

(%i10) (A\*x+B)/(x^2-sqrt(2)\*x+1)+(C\*x+D)/(x^2+sqrt(2)\*x+1);

(%o10)  $\frac{D+x C}{x^2+\sqrt{2} x+1} + \frac{B+x A}{x^2-\sqrt{2} x+1}$

Зведемо тепер цей вираз до спільного знаменника, згрупувавши при цьому в чисельнику коефіцієнти при  $x$ :

(%i11) ratsimp(%o,x);

(%o11)  $\frac{x(-\sqrt{2} D+C+\sqrt{2} B+A)+x^2(D-\sqrt{2} C+B+\sqrt{2} A)+D+x^3(C+A)+B}{x^4+1}$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях  $x$  у чисельнику даного дробу і початкового. З отриманих рівностей складемо систему (список) і розв'яжемо її командою solve. При цьому доцільно скопіювати потрібні вирази з рядка (%o8) і вставити у рядок введення.

(%i12) solve([C+A=1, D-sqrt(2)\*C+B+sqrt(2)\*A=-1, -sqrt(2)\*D+C+sqrt(2)\*B+A=1, B+D=-3]);

(%o12)  $[[D = -\frac{3}{2}, B = -\frac{3}{2}, C = -\frac{\sqrt{2}-1}{2}, A = \frac{\sqrt{2}+1}{2}]]$

Коефіцієнти знайдено, а отже, задачу розв'язано.

Розглянемо тепер інтегрування ірраціональних функцій.

В цілому за допомогою Maxima легко обчислюються інтеграли від найпростіших ірраціональностей і диференціальних біномів. При інтегруванні квадратичних ірраціональностей досить часто за допомогою Maxima не вдається отримати відповідь. Дробово-лінійні ірраціональності, які містять корені степеня  $n > 2$ , командою integrate проінтегрувати, скоріш за все, не вийде. Але одразу зазначимо, що в Maxima є засоби реалізації методів підстановки та інтегрування частинами, які дозволяють розв'язати більшість проблем з обчисленням інтегралів.

Для того щоб перейти в інтегралі  $\int f(x) dx$  до нової змінної  $t$ , яка задовольняє рівність  $G(x, t) = 0$ , зокрема  $x = g(t)$ , слід виконати команду changevar('integrate(f(x),x),G(x,t),t,x). Апостроф ставиться для того, щоб інтеграл спочатку не обчислювався. Для більшої наочності цю команду краще виконувати за кілька кроків:

- 1) ввести заданий інтеграл I:'integrate(f(x),x);
- 2) явно виразити попередню змінну через нову g(t):solve(G(x,t),x);
- 3) виконати заміну: changevar(I,x=g(t),t,x).

У результаті буде виведено новий інтеграл (скажімо, I1) від змінної  $t$  у необчисленій формі. Щоб обчислити його, потрібно задати команду I1, nouns – з клавіатури або через меню

Спростити > Обчислити необчислювані (noun) форми.

Після цього можна повернутися до попередньої змінної, знайшовши обернену підстановку  $t = h(x)$  командою `h(x):solve(G(x,t),t)`, і задавши команду `I1, t=h(x)` або `subst(h(x),t,I1)`.

Перезапустивши сеанс Maxima, обчислимо кілька інтегралів, які без спрощення не беруться.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^3(x-2)}} = ?$$

(%i1) `integrate(1/sqrt((x-1)^3*(x-2)),x);`

(%o1)  $\int \frac{1}{\sqrt{(x-2)(x-1)^3}} dx$

Спробуємо спростити підінтегральну функцію командою спрощування виразів з радикалами:

(%i2) `radcan(%);`

(%o2)  $\int \frac{1}{\sqrt{x-2}(x-1)^{\frac{3}{2}}} dx$

Обчислення цього інтеграла завершується успішно:

(%i3) `%,nouns;`

(%o3)  $\frac{2\sqrt{x^2-3x+2}}{x-1}$

Отже, даний інтеграл вдалося обчислити після деякого перетворення підінтегральної функції. З таким же успіхом можна було просто задати команду `integrate(1/sqrt((x-1)*(x-2))/(x-1),x)`, у якій  $(x-1)$  винесено з-під знаку кореня.

$$\int \sqrt[3]{\frac{(x+1)^2}{(x-1)^5}} dx = ?$$

(%i4) `integrate(((x+1)^2/(x-1)^5)^(1/3),x);`

(%o4)  $\int \frac{(x+1)^{\frac{2}{3}}}{(x-1)^{\frac{5}{3}}} dx$

Оскільки це дробово-лінійна ірраціональність, зробимо заміну змінної

(%i5) `changevar(%,(x+1)/(x-1)=t^3,t,x);`

(%o5)  $-3 \int \frac{t^4}{t^3-1} dt$

Отриманий інтеграл уже обчислюється:

(%i6) `%,nouns;`

(%o6)  $-3 \left( -\frac{\log(t^2+t+1)}{6} + \frac{\operatorname{atan}\left(\frac{2t+1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + \frac{\log(t-1)}{3} + \frac{t^2}{2} \right)$

Зрозуміло, що тут  $t = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}$ , але в такому складному виразі не доцільно

повертатися до попередньої змінної у явному вигляді.

$$\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}} = ?$$

(%i7) integrate(1/(x+sqrt(x^2+x+1)),x);

(%o7)  $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+x+1}+x} dx$

Виконаємо першу підстановку Ейлера, розкриваючи корінь, оскільки при наявності кореня Махіма не зможе виразити  $x$  через  $t$ :

(%i8) changevar(%x^2+x+1=(t-x)^2,t,x);

(%o8)  $\int \frac{2t^2+2t+2}{4t^3+4t^2+t} dt$

(%i9) %,nouns

(%o9)  $-\frac{3 \log(2t+1)}{2} + 2 \log(t) + \frac{3}{4t+2}$

Виконаємо обернену підстановку:

(%i10) %,t=x+sqrt(x^2+x+1);

(%o10)  $-\frac{3 \log(2(\sqrt{x^2+x+1}+x)+1)}{2} + 2 \log(\sqrt{x^2+x+1}+x) + \frac{3}{4(\sqrt{x^2+x+1}+x)+2}$

Це і є остаточна відповідь.

Цікаво поекспериментувати з даним інтегралом. Крім першої, до нього можна застосувати також другу підстановку Ейлера:  $\sqrt{x^2 + x + 1} = tx - 1$ . На цей раз за допомогою комп'ютера виразимо спочатку  $x$ , потім  $dx$  і підінтегральну функцію через нову змінну  $t$ .

(%i11) solve(x^2+x+1=(t\*x-1)^2,x);

(%o11)  $[x = \frac{2t+1}{t^2-1}, x = 0]$

Зрозуміло, що  $x = 0$  – сторонній корінь. Знайдемо  $dx$  за допомогою оператора диференціювання del, який можна застосовувати як до функцій, так і до рівнянь.

(%i12) del(x=(2\*t+1)/(t^2-1));

(%o12)  $del \left( x = \frac{2t+1}{t^2-1} \right)$

(%i13) %,nouns;

(%o13)  $del \left( x = \left( \frac{2}{t^2-1} - \frac{2t(2t+1)}{(t^2-1)^2} \right) del(t) \right)$

Дещо спростимо цей вираз:

(%i14) factor(%);

(%o14)  $del \left( x = -\frac{2(t^2+t+1) del(t)}{(t-1)^2 (t+1)^2} \right)$

Виразимо підінтегральну функцію  $f(x)$  через  $t$  і спростимо:

(%i15) subst((2\*t+1)/(t^2-1),x,1/(x+sqrt(x^2+x+1))),radcan;

(%o15)  $\frac{t-1}{t+2}$

Подивимось тепер на нову підінтегральну функцію відносно змінної  $t$ :

(%i16) -(t-1)/(t+2)\*(2\*(t^2+t+1))/((t-1)^2\*(t+1)^2);

(%o16)  $\frac{2(1-t)(t^2+t+1)}{(t-1)^2 (t+1)^2 (t+2)}$

```
(%i17) ratsimp(%);
```

```
(%o17)  $-\frac{2(t^2+t+1)}{(t-1)(t+1)^2(t+2)}$ 
```

Звідси вже видно, що друга підстановка Ейлера привела до складнішої раціональної функції, ніж перша. Дещо складнішим виглядає і результат інтегрування:

```
(%i18) integrate(%,t);
```

```
(%o18)  $-2 \left( -\log(t+2) + \frac{3 \log(t+1)}{4} + \frac{\log(t-1)}{4} + \frac{1}{2t+2} \right),$ 
```

де  $t = \frac{1}{x}(1 + \sqrt{x^2 + x + 1})$ .

Серед трансцендентних функцій теж достатньо часто трапляються такі, які неможливо проінтегрувати тільки за допомогою команди integrate. Для прикладу, спробуємо знайти ще кілька інтегралів.

$$\int \sqrt{1 + \sin x} dx = ?$$

```
(%i19) integrate(sqrt(1+sin(x)),x);
```

```
(%o19)  $\int \sqrt{\sin(x) + 1} dx$ 
```

Інтеграл повернуто у необчисленому вигляді. Тому зробимо у ньому заміну змінної  $\sin x = t$ :

```
(%i20) changevar(%,sin(x)=t,t,x);
```

```
solve: using arc-trig functions to get a solution.
```

```
Some solutions will be lost.
```

```
(%o20)  $\int \frac{1}{\sqrt{1-t}} dt$ 
```

Миттєво дістали досить простий інтеграл. При цьому було виведено попередження, що для обчислення невідомого  $x$  за відомим  $t$  використано обернену тригонометричну функцію і деякі розв'язки втрачено. Простіше кажучи, було взято  $x = \arcsin t$ . Завершимо розв'язання:

```
(%i21) %,nouns,t=sin(x);
```

```
(%o21)  $-2 \sqrt{1 - \sin(x)}$ 
```

$$\int \frac{2^x dx}{\sqrt{4^x + 1}} = ?$$

```
(%i22) integrate(2^x/sqrt(4^x+1),x);
```

```
(%o22)  $\int \frac{2^x}{\sqrt{4^x+1}} dx$ 
```

Перетворимо підінтегральну функцію:

```
(%i23) radcan(%);
```

```
(%o23)  $\int \frac{2^x}{\sqrt{2^{2x}+1}} dx$ 
```

і спробуємо проінтегрувати ще раз:

```
(%i24) %,nouns;
```

```
(%o24)  $\frac{\operatorname{asinh}(2^x)}{\log(2)}$ 
```

Тепер інтеграл обчислено. Щоб перейти від оберненої гіперболічної функції до логарифмічної, застосуємо функцію logarc:

```
(%i25) logarc(%);
(%o25)  $\frac{\log(\sqrt{2^{2^x}+1}+2^x)}{\log(2)}$ 
```

Нарешті, розглянемо деякі випадки, коли доцільно застосувати метод інтегрування частинами. У Maxima немає вбудованої команди для інтегрування частинами, але її легко створити самостійно і зберегти в окремому файлі для подальшого використання. У комплекті з Maxima розповсюджується багато додаткових пакетів, призначених для розв'язування тих чи інших задач. Зокрема, серед них є пакет `bypart.mac`, який містить всього одну команду – команду інтегрування частинами для невизначеного інтеграла  $\int f(x) dx = \int u(x)v'(x) dx$ . Вона має вигляд `byparts(f(x),x,u(x),v'(x))`, а результатом її виконання є  $F(x)$  – первісна функції  $f(x)$ . Для використання пакету його потрібно спочатку завантажити командою `load(bypart)`.

Наприклад, порівняємо результати безпосереднього інтегрування та інтегрування частинами при обчисленні інтеграла  $\int \frac{\ln \cos x}{\cos^2 x} dx$ :

```
(%i1) f:log(cos(x))/sin(x)^2$
(%i2) integrate(f,x);
```

Не будемо наводити ту громіздку відповідь, яка з'явиться у рядку (%o2). Натомість спростимо її за допомогою команд `trigsimp(%); logcontract(%); trigsimp(%)`, після чого дістанемо

```
(%o5)  $\frac{(\cos(2x)-1) \log(4 \sin(x)^2)+2x \sin(2x)}{2 \cos(2x)-2}$ 
```

Тепер візьмемо цей самий інтеграл частинами, завантаживши попередньо пакет `bypart`:

```
(%i6) load(bypart)$
(%i7) byparts(f,x,x,1/sin(x)^2);
(%o7)  $\log(\sin(x)) - \frac{x}{\tan(x)}$ 
```

Очевидно, що при інтегруванні частинами вийшов набагато простіший результат.

При застосуванні команди `byparts` інтеграл  $\int u dv$  автоматично обчислюється і немає змоги побачити самі частини формули. А іноді за допомогою цієї команди не вдається обчислити, здавалося б, досить нескладний інтеграл.

Наприклад, інтеграл  $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) dx$  командою `integrate` знайти не вдається. Неважко перевірити, що методом інтегрування частинами цей інтеграл обчислити легко. Але й командою `byparts` його обчислити не вдається. Виявляється, у файлі `bypart.mac` цю команду визначено так:

```
byparts(exp,x,u,dv):=(dv:integrate(dv,x),u*dv-integrate(dv*diff(u,x,1),x));
```

Аналізуючи це означення, можна зробити такі висновки: 1) перший аргумент `exp` ніяк не використовується; 2) команда `diff(u,x,1)`, призначена для обчислення похідної  $u'(x)$ , може приводити до складних виразів, що і є



причиною невдач при інтегруванні; 3) перед другою командою `integrate` доцільно поставити апостроф, щоб спочатку інтеграл  $\int v \, du$  не обчислювався.

У зв'язку з цим доцільно створити нову команду інтегрування частинами:

`byparts1(x,u,dv):=(dv:integrate(dv,x),u*dv-'integrate(dv*rat(diff(u,x)),x));`  
і зберегти її у файл `bypart1.mac`. Тут враховані відмічені вище зауваження, зокрема похідна  $u'(x)$  спрощується до канонічної раціональної форми командою `rat`, а задавати саму функцію  $f(x)$  не потрібно.

Застосуємо таку команду `byparts1` до поки що не взятого інтеграла

$$\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \, dx.$$

(%i8) `load(bypart1)$`

(%i9) `byparts1(x,log(x+sqrt(1+x^2)),1);`

(%o9)  $x \log(\sqrt{x^2 + 1} + x) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx$

(%i10) `%,nouns`

(%o10)  $x \log(\sqrt{x^2 + 1} + x) - \sqrt{x^2 + 1}$

На цей раз команду інтегрування частинами виконано успішно.

Виявляється, можна було б обчислити цей інтеграл і командою `integrate`, якби його задали у вигляді  $\int \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) \, dx = \int \operatorname{arsh}(x) \, dx$ :

(%i11) `integrate(asinh(x),x);`

(%o11)  $x \operatorname{asinh}(x) - \sqrt{x^2 + 1}$

З такою ж легкістю обчислиться й інтеграл

$$\int \ln^2(x + \sqrt{1 + x^2}) \, dx = \int \operatorname{arsh}^2(x) \, dx:$$

(%i12) `integrate(asinh(x)^2,x);`

(%o12)  $x \operatorname{asinh}(x)^2 - 2\sqrt{x^2 + 1} \operatorname{asinh}(x) + 2x$

Але далеко не кожен логарифм, схожий на попередній, можна виразити через обернену гіперболічну функцію і тоді цей спосіб виявиться непридатним. Наприклад, обчислимо інтеграл  $\int \ln(1 + \sqrt{x^2 + 1}) \, dx$ .

По-перше, почнемо з інтегрування частинами:

(%i13) `byparts1(x,log(1+sqrt(1+x^2)),1);`

(%o13)  $x \log(\sqrt{x^2 + 1} + 1) - \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1 + x^2 + 1}} dx$

Інтеграл у правій частині командою `nouns` не вдається обчислити. Тому обчислимо його окремо. Його можна раціоналізувати першою чи другою підстановкою Ейлера. Але найпростіше зробити гіперболічну підстановку  $x = \operatorname{sh} t$ . Отже,

(%i14) `integrate(x^2/(sqrt(x^2+1)+x^2+1),x);`

(%o14)  $\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1 + x^2 + 1}} dx$

(%i15) `changevar(%,x=sinh(t),t,x);`

(%o15)  $\int \frac{\cosh(t) \sinh(t)^2}{\sqrt{\sinh(t)^2 + 1 + \sinh(t)^2 + 1}} dt$

```
(%i16) trigsimp(%);
(%o16) ∫ cosh(t) - 1 dt
(%i17) %,nouns
(%o17) sinh(t) - t
```

Зробимо обернену підстановку:

```
(%i18) %,t=asinh(x);
(%o18) x - asinh(x)
(%i19) logarc(%);
(%o19) x - log(√x2 + 1 + x)
```

Запишемо відповідь, враховуючи (%o13) і (%o19):

```
(%i20) x*log(sqrt(x2+1)+1)-x+log(sqrt(x2+1)+x);
(%o20) log(√x2 + 1 + x) + x log(√x2 + 1 + 1) - x
```

Перевіримо результат диференціюванням:

```
(%i21) diff(%o,x);
(%o21) log(√x2 + 1 + 1) +  $\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+1}{\sqrt{x^2+1}+x} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1}+1)} - 1$ 
(%i22) ratsimp(%);
(%o22) log(√x2 + 1 + 1)
```

Перевірка пройшла успішно. Але необхідно зауважити, що так буває не завжди, оскільки похідну від первісної не завжди вдається спростити до її збігу з підінтегральною функцією. Слід зауважити, що проблема спрощування виразів досить складна і з цим поки що треба змиритися.

Метод інтегрування частинами можна також успішно застосовувати для виведення рекурентних формул. Покажемо, як це робиться, наприклад, для інтеграла

$$J_n = \int x^a \ln^n x \, dx, \quad n = 2, 3, \dots, a \neq -1.$$

```
(%i23) byparts1(x,log(x)^n,x^a);
Is a+1 zero or nonzero? n;
(%o23)  $\frac{x^{a+1} \log(x)^n}{a+1} - \frac{n \int x^a \log(x)^{n-1} dx}{a+1}$ 
```

Звідси випливає, що

$$J_n = \frac{x^{a+1}}{a+1} \ln^n x - \frac{n}{a+1} J_{n-1}.$$

**1.3.8.3. Використання MathCAD.** У програмі MathCAD немає такого досконалого апарату інтегрування, як у програмі Maxima. На відміну від Maxima, за її допомогою не вийде обчислити більшість інтегралів з вузівського задачника. У MathCAD немає вбудованої формули заміни змінної під знаком інтеграла, процес інтегрування здійснюється повільно, а відповіді іноді помилкові.

Наведемо деякі приклади некоректного інтегрування в середовищі MathCAD.

$$1) \text{ а) } \int \frac{1}{x^4+1} dx \rightarrow x \cdot \text{hypergeom} \left( \frac{1}{4}, 1, \frac{5}{4}, -x^4 \right),$$

$$\text{б) } \int \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}} dx \rightarrow x \cdot \text{hypergeom} \left( 1, 3, 4, -x^{\frac{1}{3}} \right),$$

– інтеграли виражені не в елементарних функціях, а через складну гіпергеометричну функцію;

$$2) \int \frac{1}{\sqrt{1+2x-x^2}} dx \rightarrow \text{asin} \left[ \frac{\sqrt{5} \cdot (x-2)}{5} \right]$$

– це неправильна відповідь. Перевіримо її диференціюванням:

$$\frac{d}{dx} \text{asin} \left[ \frac{\sqrt{5} \cdot (x-2)}{5} \right] \rightarrow \frac{\sqrt{5}}{5 \cdot \sqrt{1 - \frac{(x-2)^2}{5}}} \text{ simplify} \rightarrow (4 \cdot x - x^2 + 1)^{-\frac{1}{2}},$$

тобто в алгоритмі відшукування подібних інтегралів десь допущена механічна помилка;

$$3) \int \frac{\cos(x)}{1-\sin(x)} dx \rightarrow -\ln(\sin(x) - 1),$$

що не коректно, оскільки під знаком логарифма недодатний вираз і тому всі значення такого логарифма комплексні.

У цьому контексті цікаво проаналізувати, у якому вигляді за допомогою MathCAD обчислюється табличний інтеграл:

$$4) \int \frac{1}{x^2-1} dx = -\text{atan}(-x \cdot i) \cdot i.$$

За відомою формулою обчислення арктангенса  $-i \arctg(-ix) = -\frac{1}{2} \ln \frac{1+ix}{1-ix}$ , звідки випливає, що ця функція набуває дійсних значень лише на проміжку  $(-1; 1)$ . Отже, слід мати на увазі, що при інтегуванні за допомогою MathCAD можуть використовуватися функції комплексної змінної.

Що стосується помилок при обчисленнях, то вони можуть виникати в усіх системах символічної математики. Проте при використанні більш досконалих систем не трапляється таких очевидних помилок у простих прикладах. Сказане зовсім не означає, що слід відмовитися від використання системи MathCAD. Але варто уважніше і критичніше ставитися до отриманих результатів, виділяти у складних задачах простіші підзадачі, з якими за допомогою цієї системи впоратися легше.

Проілюструємо можливості використання системи MathCAD при вивченні теми “Інтегрування раціональних, ірраціональних і тригонометричних функцій”.

Припустимо, що треба проінтегрувати раціональну функцію

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^{10} - 2x^9 - x^4 + 8x^2 - 6}{x^7 - x}$$

згідно з алгоритмом, наведеним у пункті 1.3.3.

Яким чином у MathCAD можна виконати ділення многочленів з остачею? Спеціальної команди для цього немає, проте є операція `parfrac` – розкладання раціональної функції на елементарні дроби над полем  $\mathbb{Q}$ . При виконанні цієї операції виділяється ціла частина і сума дробів, еле-

ментарних та нескоротних над полем  $\mathbb{Q}$ . Отже, набираємо заданий дріб і вставляємо одразу за ним команду `parfrac` з панелі “Символьна”:

$$\frac{x^{10} - 2x^9 - x^4 + 8x^2 - 6}{x^7 - x} \text{ parfrac} \rightarrow \frac{6}{x} - \frac{\frac{8 \cdot x}{3} + \frac{2}{3}}{x^2 - x + 1} - 2 \cdot x^2 + x^3 - \frac{4 \cdot x}{x^2 + x + 1} + \frac{2}{3 \cdot (x + 1)}$$

Незважаючи на те, що командою `parfrac` уже отримано шуканий розклад на елементарні дроби, розглянемо всі пункти алгоритму. Тим більше, що цією командою дроби розкладаються до кінця далеко не завжди. Наприклад, такий дріб, як  $\frac{1}{x^4+1}$ , залишиться без змін, оскільки у його розкладі на елементарні дроби міститимуться ірраціональні коефіцієнти.

Згідно з першим пунктом, потрібно виділити цілу частину і правильний дріб. Цілу частину, тобто частку від ділення многочленів, вже визначено:  $R(x) = x^3 - 2x^2$ . Остачу знаходимо з рівності  $\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{P^*(x)}{Q(x)}$  за формулою  $P^*(x) = P(x) - R(x)Q(x)$ . Доцільно окремо перемножити  $R(x)$  та  $Q(x)$  і розкрити дужки командою `expand`:

$$(x^3 - 2x^2)(x^7 - x) \text{ expand} \rightarrow x^{10} - 2 \cdot x^9 - x^4 + 2 \cdot x^3$$

Тепер знаходимо різницю між початковим чисельником та цим виразом і розкриваємо дужки. При цьому можна копіювати окремі фрагменти однієї формули і вставляти їх в іншу. Зведення подібних доданків здійснюється командою `expand` або `simplify`:

$$x^{10} - 2x^9 - x^4 + 8x^2 - 6 - (x^{10} - 2 \cdot x^9 - x^4 + 2 \cdot x^3) \text{ expand} \rightarrow 8 \cdot x^2 - 2 \cdot x^3 - 6$$

Цим знайдено чисельник правильного дроби  $\frac{P^*(x)}{Q(x)}$ . Бажано ще скоротити цей дріб, якщо він скоротний. У простіших випадках це можна зробити командою `factor`, якою многочлен розкладається на множники:

$$\frac{8x^2 - 2x^3 - 6}{x^7 - x} \text{ factor} \rightarrow -\frac{2 \cdot (x^2 - 3x - 3)}{x \cdot (x + 1) \cdot (x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - 2 + 1)}$$

Отже, дістали правильний нескоротний дріб  $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ , про який ідеться в 1-му пункті алгоритму. Оскільки у нього знаменник розкладений на незвідні множники, то виконано також і 2-ий пункт алгоритму.

Зауважимо, що командою `factor` многочлен  $a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$  розкладається на незвідні множники над полем  $\mathbb{Q}[a_0, a_1, \dots, a_n]$ , яке є раціональним розширенням множини коефіцієнтів многочлена. Якщо команду `factor` застосувати до дроби, буде знайдено розклад на множники чисельника і знаменника та виконано скорочення дроби. Поле розкладу многочлена можна розширити якимось ірраціональним числом (скажімо,  $\sqrt{2}$ ,  $\pi$  чи  $e$ ), поставивши після `factor` ко́му і ввівши в утворений квадра-

тик це число. Наприклад,

$$x^2 - 3 \cdot x - 3 \text{ factor, } \sqrt{21} \rightarrow \left(x + \frac{\sqrt{21}}{2} - \frac{3}{2}\right) \cdot \left(x - \frac{\sqrt{21}}{2} - \frac{3}{2}\right)$$

(число  $\sqrt{21}$  було отримане при аналізі дискримінанта даного тричлена).

Здійснимо тепер формальний розклад многочлена  $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$  на елементарні дроби (згідно з пунктами 3, 4 алгоритму) і знайдемо у ньому невизначені коефіцієнти. Отже, на робочому аркуші MathCAD утворимо суму елементарних дроби́в, зведемо їх до спільного знаменника і зведемо подібні доданки відносно  $x$  командою collect,x:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c \cdot x + d}{x^2 + x + 1} + \frac{m \cdot x + n}{x^2 - x + 1} \text{ collect, } x \rightarrow$$

$$\frac{(a + b + c + m) \cdot x^5 + (a + d + 2 \cdot m + n) \cdot x^4 + (a + b + 2 \cdot m + 2 \cdot n) \cdot x^3 + (a + c + m + 2 \cdot n) \cdot x^2 + (a + b + d + n) \cdot x + a}{x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x}$$

Цим виконано 5-ий пункт алгоритму.

Тепер, згідно з 6-им пунктом алгоритму, складемо систему лінійних рівнянь для відшукування коефіцієнтів (ставлячи знак логічної рівності натисненням  $\boxed{\text{Ctrl}} + \boxed{=}$ ) і розв'яжемо її за допомогою блоку Given ... Find.

Given

$$\begin{aligned} a + b + c + m &= 0 \\ a + d + 2 \cdot m + n &= 0 \\ a + b + 2 \cdot m + 2 \cdot n &= 0 \\ a + c + m + 2 \cdot n &= -2 \\ a + b + d + n &= 6 \\ a &= 6 \end{aligned}$$

$$\text{Find}(a, b, c, m, n) \rightarrow \left(6 \frac{2}{3} \quad -4 \quad 0 \quad -\frac{8}{3} \quad -\frac{2}{3}\right)$$

При зверненні до функції  $\text{Find}(a, b, c, m, n)$  повертається вектор-розв'язок системи у вигляді стовпчика. Для того щоб цей вектор записався у рядок, після функції було задано команду  $M^T \rightarrow$  транспонувати матрицю (з панелі "Символьна"). Методом невизначених коефіцієнтів дістали такий самий розклад, який раніше було знайдено командою parfrac.

Після цього залишається тільки виконати 7-ий пункт алгоритму, тобто проінтегрувати окремо цілу частину та всі елементарні дроби і отримані інтеграли додати. Цілу частину і перші два елементарні дроби легко проінтегрувати. Два останні дроби проінтегруємо за допомогою MathCAD.

$$c := -4 \quad d := 0 \quad m := -\frac{8}{3} \quad n := -\frac{2}{3}$$

$$\int \frac{c \cdot x + d}{x^2 + x + 1} dx \text{ simplify} \rightarrow \frac{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \text{atan}\left[\frac{\sqrt{3} \cdot \left(\frac{2 \cdot x}{3} + \frac{1}{3}\right)}{1}\right]}{3} - 2 \cdot \ln(x^2 + x + 1) - \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}}{3}$$

$$\int \frac{m \cdot x + n}{x^2 - x + 1} dx \text{ simplify} \rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}}{3} - \frac{4 \cdot \sqrt{3} \cdot \text{atan}\left[\frac{\sqrt{3} \cdot \left(\frac{2 \cdot x}{3} - \frac{1}{3}\right)}{1}\right]}{3} - \frac{4 \cdot \ln(x^2 - x + 1)}{3}$$

Завдяки зручному поданню даних і принципу автоматичного перерахунку формул у MathCAD можна досить швидко розв'язати цілий ряд однотипних задач. Також можна швидко проаналізувати залежність результатів від вхідних даних або підібрати певні параметри потрібним чином.

Наприклад, нехай потрібно підготувати кілька варіантів розв'язаної вище задачі, причому однакового рівня складності і без громіздких обчислень. Тоді можна у чисельнику дроби  $\frac{P(x)}{Q(x)}$  замінити вільний член на параметр і розкласти такий дріб на елементарні дроби командою `parfrac`, x:

$$\frac{x^{10} - 2x^9 - x^4 + 8x^2 + a}{x^7 - x} \text{ parfrac, } x \rightarrow x^3 - \frac{a}{x} - 2 \cdot x^2 -$$

$$- \frac{\frac{a}{6} - x \cdot \left(\frac{a}{3} - \frac{2}{3}\right) + \frac{5}{3}}{x^2 - x + 1} + \frac{\frac{a}{6} + 1}{x - 1} + \frac{\frac{a}{6} + \frac{5}{3}}{x + 1} + \frac{\frac{a}{6} + x \cdot \left(\frac{a}{3} - 2\right) + 1}{x^2 + x + 1}$$

Тепер неважко бачити, що потрібними значеннями вільного члена можуть бути числа, кратні трьом або шести.

Стосовно інтегрування раціональних функцій зауважимо, що коли за допомогою MathCAD не вдається отримати результат інтегрування раціонального дроби, то доцільно розкласти цей дріб на елементарні дроби або спробувати штучно знайти якесь інше подання.

Наприклад, для обчислення інтеграла  $\int \frac{dx}{x^4+1}$ , наведеного на початку підпункту 1.3.8.3, запишемо підінтегральну функцію у вигляді  $\frac{1}{x^4+1} = \frac{x+1}{x^4+1} - \frac{x}{x^4+1}$  і проінтегруємо кожен дріб окремо:

$$\int \frac{x+1}{x^4+1} dx \rightarrow \frac{\text{atan}(\sqrt{2} \cdot x+1) \cdot (2 \cdot \sqrt{2}-4)}{8} -$$

$$- \frac{\text{atan}(1-\sqrt{2} \cdot x) \cdot (\sqrt{2}+2)}{4} + \frac{\sqrt{2} \cdot \ln\left(\frac{x^2+\sqrt{2} \cdot x+1}{x^2-\sqrt{2} \cdot x+1}\right)}{8}$$

$$\int \frac{x}{x^4+1} dx \rightarrow \frac{\text{atan}(x^2)}{2}$$

Шуканий інтеграл дорівнюватиме різниці двох знайдених інтегралів.

При інтегруванні ірраціональних або тригонометричних функцій, як правило, доводиться виконувати заміну змінної. Наведемо послідовність кроків, які доцільно виконати у MathCAD, щоб реалізувати метод заміни змінної, на прикладі обчислення інтеграла  $\int \sqrt{x} \operatorname{atan} \sqrt{x} dx$ .

1. Задаємо функцію, яку потрібно проінтегрувати:

$$f(x) := \sqrt{x} \cdot \operatorname{atan}(\sqrt{x})$$

2. Задаємо функцію  $x = g(t)$ , якою вводиться нова змінна, та обернену до неї функцію  $t = h(x)$ . При відшуванні цих функцій може знадобитися на окремому робочому аркуші звернення до команди `solve`.

$$g(t) := t^2 \quad h(x) = \sqrt{x}$$

3. Окремо обчислюємо нову підінтегральну функцію  $f1(t)$ . Це робиться для того, щоб побачити її, а основне – щоб спростити перед ін-

тегруванням. Без спрощування інтеграл зазвичай не обчислиться. Крім команди `simplify` для більшого спрощення доцільно задавати певні обмеження на змінну за допомогою команди `assume`. Для того щоб одночасно задати дві команди, їх вводять одну за одною, вибираючи з символічної панелі, або комбінацією клавіш `Ctrl+Shift+.` і вписуючи в порожні квадратики потрібні слова.

$$f1(t) := f(g(t)) \cdot \frac{d}{dt}g(t) \Big|_{\text{simplify}}^{\text{assume, } t > 0} \rightarrow 2 \cdot t^2 \cdot \text{atan}(t)$$

4. Знаходимо первісну  $G(t)$  відносно нової змінної  $t$  і спрощуємо її:

$$G(t) := \int f1(t) dt \Big|_{\text{simplify}}^{\text{assume, } t > 0} \rightarrow \frac{\ln(t^2+1)}{3} - \frac{t^2}{3} + \frac{2 \cdot t^3 \cdot \text{atan}(t)}{3}$$

5. Повертаємось до попередньої змінної  $x$  і знаходимо шукану первісну  $F(x)$ :

$$F(x) := G(h(x)) \text{ simplify} \rightarrow \frac{\ln(x+1)}{3} - \frac{x}{3} + \frac{2 \cdot x^{\frac{3}{2}} \cdot \text{atan}(\sqrt{x})}{3}$$

6. Виконуємо перевірку правильності відшукування первісної. Часто за допомогою комп'ютерної системи неможливо на етапі перевірки автоматично звести вираз до вигляду, ідентичного початковій функції  $f(x)$ . Це не означає, що задачу розв'язано неправильно, так само, як і успішна перевірка ще не гарантує 100%-ї правильності розв'язання.

$$\frac{d}{dx}F(x) \text{ simplify} \rightarrow \sqrt{x} \cdot \text{atan} \sqrt{x}$$

Цей робочий аркуш є своєрідною “програмою”, завдяки якій можна інтегрувати методом заміни змінної довільну функцію. Для інтегрування іншої функції потрібно лише задати нові вирази для  $f(x)$ ,  $g(t)$  та  $h(x)$ . Щоб у середовищі MathCAD не виконувалися обчислення формул, поки повністю все не буде задано, потрібно відключити автоматичні обчислення робочого аркуша, зайшовши до меню `Інструменти`

> `Обчислити ►` і знявши відповідну відмітку. Запустити обчислення після введення всіх даних можна клавішею `F9`. Цю програму можна зберегти у файл `zamina_zmin.xmcd` для подальшого використання. Під час розв'язування того чи іншого прикладу можливо доведеться змінювати, додавати або вилучати команди спрощування або припущення.

Обчислимо цим методом інтеграл  $\int \frac{1}{(x+3)^2} \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+3}} dx$ .

1. Вводимо функцію  $f(x)$ :

$$f(x) := \frac{1}{(x+3)^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+3}}$$

2. На новому робочому аркуші розв'язуємо рівняння

$$\frac{x-2}{x+3} = t^3 \text{ solve, } x \rightarrow -\frac{3 \cdot t^3 + 2}{t^3 - 1}$$

3. Розв'язок рівняння копіюємо і вставляємо в якості значення функції  $g(t)$ . Поряд з нею вписуємо обернену функцію  $h(x)$ :

$$g(t) := -\frac{3 \cdot t^3 + 2}{t^3 - 1} \quad h(x) := \sqrt[3]{\frac{x-2}{x+3}}$$

4. Натискуємо F9 для запуску обчислень і через деякий час одержуємо результати, аналізуємо чи спрощуємо їх.

$$f1(t) := f(g(t)) \cdot \frac{d}{dt}g(t) \Big|_{\text{simplify}}^{\text{assume, } t > 0} \rightarrow \frac{3 \cdot t^3}{5}$$

$$G(t) := \int f1(t) dt \Big|_{\text{simplify}}^{\text{assume, } t > 0} \rightarrow \frac{3 \cdot t^4}{20}$$

$$F(x) := G(h(x)) \text{simplify} \rightarrow \frac{3 \cdot \left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{\frac{4}{3}}}{20}$$

$$\frac{d}{dx}F(x) \text{simplify} \rightarrow \frac{\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^{\frac{1}{3}}}{(x+3)^2}$$

За допомогою даного шаблону заміни змінної можна обчислити багато інтегралів, які безпосередньо не обчислюються. Наведемо ще одне розв'язання саме такого інтеграла:  $\int \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x}}$ .

$$f(x) := \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}} \quad g(t) := t^3 \quad h(x) := \sqrt[3]{x}$$

$$f1(t) := f(g(t)) \cdot \frac{d}{dt}g(t) \Big|_{\text{parfrac}}^{\text{assume, } t > 0} \rightarrow 3 \cdot t + \frac{3}{t+1} - 3$$

Зауважимо, що при спрощенні  $f1(x)$  довелося задати команду `parfrac` замість `assume`, звернення до якої не давало бажаного результату. А в наступних двох формулах всі команди спрощення і припущень відкинута, бо вони не потрібні.

$$G(t) := \int f1(t) dt \rightarrow 3 \cdot \ln(t+1) - 3 \cdot t + \frac{3 \cdot t^2}{2}$$

$$F(x) := G(h(x)) \rightarrow 3 \cdot \ln(x^{\frac{1}{3}}+1) - 3 \cdot x^{\frac{1}{3}} + \frac{3 \cdot x^{\frac{2}{3}}}{2}$$

Перевірку опускаємо, хоч вона теж проходить успішно.

Аналогічно можна скласти програму для реалізації методу інтегрування частинами. Наведемо можливий вигляд цієї програми на прикладі обчислення інтеграла  $\int \frac{\ln(x^2-1)}{(x+1)^2} dx$ .

$$u(x) := \ln(x^2+1) \quad dv(x) := \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$du(x) := \frac{d}{dx}u(x) \text{ simplify} \rightarrow \frac{2 \cdot x}{x^2-1}$$

$$v(x) := \int dv(x) dx \text{ simplify} \rightarrow -\frac{1}{x+1}$$

$$g(x) := v(x) \cdot du(x) \text{ simplify} \rightarrow -\frac{2 \cdot x}{(x-1) \cdot (x+1)^2}$$

$$F(x) := u(x)v(x) - \int g(x) dx \rightarrow -\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{2} - \frac{\ln(x^2-1)}{x+1} - \frac{1}{x+1}$$

Порівняно з Maxima, у програмі MathCAD обчислення виконуються повільніше, частіше не отримується відповідь або належним чином не спрощується. Досить часто процес обчислень у MathCAD затягується занадто довго і його краще перервати, натиснувши клавішу Esc, з тим щоб внести якісь корективи у хід розв'язування.

**1.3.9. Історичні відомості.** Достатність умов  $p \in \mathbb{Z}$  або  $\frac{m+1}{n} \in \mathbb{Z}$ , або  $\frac{m+1}{n} + p \in \mathbb{Z}$  для інтегровності в скінченному вигляді функції  $f(x) =$



$= x^m(a + bx^n)^p$  була відома вже І. Ньютону. Російський математик Пафнутій Львович Чебишов (1821–1894) довів необхідність цих умов (це доведення можна знайти у книзі [18]).

Всі методи обчислення інтегралів, наведені в цьому пункті, можна знайти в трактаті Л. Ейлера «Інтегральне числення», опублікованому в 1768–1770 рр.

Еліптичні інтеграли дістали свою назву від того, що довжина дуги еліпса обчислюється через еліптичний інтеграл 1-го роду. Такі обчислення зустрічалися вже в роботах математиків XVII століття. Повну теорію еліптичних інтегралів створив французький математик Адрієн Марі Лежандр (1752–1833).

У 1833 році французький математик Жозеф Ліувіль (1809–1882) довів критерій елементарності інтеграла  $\int f(x)e^{g(x)} dx$ , де  $f$  і  $g$  – раціональні функції, з якого випливає неелементарність інтегралів 1) – 4) пункту 1.3.7.

Алгоритм інтегрування довільної елементарної функції у скінченному вигляді було побудовано у 1968 році американським математиком Робертом Річем. Початкові відомості з цього складного питання можна знайти на сайті [http://en.wikipedia.org/wiki/Risch\\_algorithm](http://en.wikipedia.org/wiki/Risch_algorithm).

**1.3.10. Зв'язок із шкільним курсом математики.** У шкільному курсі математики розглядаються в основному функції, первісні від яких обчислюються за допомогою формул для обчислення основних інтегралів. Але робота в класах з поглибленим вивченням математики може вимагати знання методів обчислення інтегралів, наведених у цьому пункті.

**1.3.11. Постановка проблем.** Основною проблемою, що виникла в цьому пункті, є подання дробово-раціональної функції у вигляді суми деякого многочлена та скінченної кількості елементарних дробів.

### 1.3.12. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Для того, щоб функція  $f$  була многочленом, необхідно й досить, щоб будь-яка первісна  $f$  була многочленом.
2. Похідна від раціональної функції є раціональною функцією.
3. Первісна раціональної функції є раціональною функцією.
4. Якщо функція  $f$  інтегрується в скінченному вигляді, то вона є елементарною функцією.
5. Твердження, обернене до 4, є правильним.
6. Інтеграл від диференціального бінома завжди обчислюється в скінченному вигляді.
7. Інтеграл  $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$  можна обчислити тільки за допомогою підстановок Ейлера.

8. Функція  $f(x) = a^x x^3$  інтегрується в скінченному вигляді.
9. Інтеграл від будь-якої неперервної функції можна обчислити за допомогою степеневого ряду.

II. Довести дані твердження.

1. Якщо  $x_0$  – нуль многочлена  $Q(x)$  степеня  $n > 1$ , то існує  $m \in \mathbb{N}$  таке, що  $Q(x) = (x - x_0)^m Q_1(x)$ , де  $Q_1(x)$  – многочлен степеня  $n - m$  і  $Q_1(x_0) \neq 0$ .
2. Якщо дріб  $\frac{P(x)}{(x-x_0)^m Q_1(x)}$  правильний і  $Q_1(x_0) \neq 0$ , то для числа  $A_1 = \frac{P(x_0)}{Q_1(x_0)}$  і многочлена  $P_1(x) = \frac{P(x) - A_1 Q_1(x)}{x - x_0}$  правильна рівність

$$\frac{P(x)}{(x - x_0)^m} = \frac{A_1}{(x - x_0)^m} + \frac{P_1(x)}{(x - x_0)^{m-1} Q_1(x)}.$$

3. Якщо дріб  $\frac{P_1(x)}{(x-x_0)^m Q_1(x)}$  правильний і  $Q_1(x_0) \neq 0$ , то існують числа  $A_k, k \in \overline{1, m}$ , і многочлен  $P^*(x)$  такі, що

$$\frac{P_1(x)}{(x - x_0)^m Q_1(x)} = \sum_{k=1}^m \frac{A_k}{(x - x_0)^k} + \frac{P^*(x)}{Q_1(x)}.$$

III. Наступні задачі розв'язати за допомогою комп'ютерних засобів математики.

1. Знайти область визначення кожного елементарного дробу та його невизначеного інтеграла у випадку дійсної та комплексної змінної.
2. Зобразити графік кожної неелементарної функції з пункту 1.3.7 і обчислити значення цих функцій для деяких дійсних та комплексних  $z$ .
3. Зобразити графік функції  $f(x) = \int_0^x \sqrt[3]{1+t^2} dt$ . З'ясувати, чи є ця функція елементарною.

## 2. ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

Другий розділ присвячено принципово іншому підходу до введення поняття інтеграла. З цим підходом пов'язані інтеграли Рімана і Стілтєса та невластні інтеграли.

### 2.1. Поняття визначеного інтеграла та його існування

У даному підрозділі розглядаються поняття  $R$ -інтеграла та  $R$ -інтегрованої функції, зв'язок  $R$ -інтегралів з  $NL$ -інтегралами, розкривається геометричний зміст  $R$ -інтеграла, знаходяться необхідні умови  $R$ -інтегрованості, а також необхідні і достатні умови  $R$ -інтегрованості.

**2.1.1. Розбиття відрізка та його дрібність.** У підрозділі 1.2 було введено поняття площі криволінійної трапеції за допомогою поняття площі звичайної трапеції. Але досить часто поняття площі довільної фігури  $\Phi \subset \mathbb{R}^2$  вводиться за допомогою поняття площі прямокутника. Проілюструємо, як це можна зробити, коли  $\Phi$  – криволінійна трапеція, тобто

$$\Phi = \{(x; y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

де  $f$  – задана функція, що є неперервною і невід'ємною на відрізку  $[a; b]$  (рис. 2.1.1).

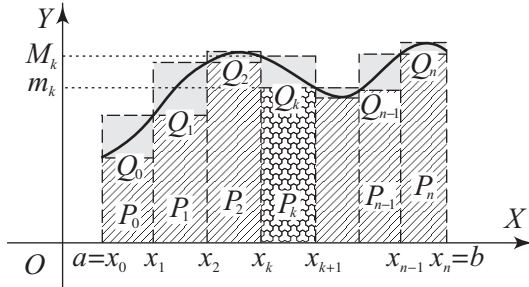


Рис. 2.1.1.

Множину  $T$  точок  $x_k \in [a; b]$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , називають *розбиттям* відрізка  $[a; b]$ , якщо  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k < x_{k+1} < \dots < x_n = b$ . При цьому число  $\lambda(T) = \max_{0 \leq k \leq n-1} (x_{k+1} - x_k)$  називають *дрібністю розбиття*  $T$ .

**2.1.2. Поняття площі криволінійної трапеції.** Нехай  $\Phi$  – криволінійна трапеція, визначена в пункті 2.1.1 (рис. 2.1.1). Розглянемо довільне розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$  точками  $x_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ . Оскільки  $f$  є неперервною функцією на  $[a; b]$ , то вона є неперервною і на кожному відрізку  $[x_k; x_{k+1}]$ ,  $k \in \overline{0, n-1}$ , а тому за другою теоремою Вейерштрасса існують  $m_k = \min_{[x_k; x_{k+1}]} f(x) = f(x_k^*)$  і  $M_k = \max_{[x_k; x_{k+1}]} f(x) = f(x_k^{**})$ .

Визначимо прямокутники  $P_k = \{(x, y): x_k \leq x \leq x_{k+1}, 0 \leq y \leq m_k\}$ ,  $k \in \overline{0, n-1}$  (рис. 2.1.1). Тоді *східчаста фігура*  $\Phi_* = \bigcup_{k=0}^{n-1} P_k$  цілком лежатиме у  $\Phi$ , причому, коли дрібність розбиття  $T$  почне зменшуватися, то фігура  $\Phi_*$  почне “розширюватися”, наближаючись до фігури  $\Phi$  зсередини.

Якщо визначити прямокутники  $Q_k = \{(x, y): x_k \leq x \leq x_{k+1}, 0 \leq y \leq M_k\}$ ,  $k \in \overline{0, n-1}$  (рис. 2.1.1), то *східчаста фігура*  $\Phi^* = \bigcup_{k=0}^{n-1} Q_k$  міститиме у собі  $\Phi$ . При цьому, коли дрібність  $\lambda(T)$  розбиття  $T$  почне зменшуватися, то фігура  $\Phi^*$  почне “звужуватися”, наближаючись до фігури  $\Phi$  ззовні.

У зв'язку з цим природно визначити площу фігури  $\Phi$  як спільну границю площ фігур  $\Phi_*$  і  $\Phi^*$ , коли  $\lambda(T) \rightarrow 0$ :

$$S(\Phi) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(\Phi_*) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(\Phi^*).$$

Оскільки

$$S(\Phi_*) = \sum_{k=0}^{n-1} S(P_k) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*)(x_{k+1} - x_k),$$

а

$$S(\Phi^*) = \sum_{k=0}^{n-1} S(Q_k) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^{**})(x_{k+1} - x_k),$$

то поняття площі криволінійної трапеції приводить до поняття границі вигляду

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k)(x_{k+1} - x_k).$$

До таких само границь приводять багато інших практичних за-

дач і тому ці границі розглянемо детальніше.

**2.1.3. Поняття інтегральної суми та її границі.** Нехай  $f$  – довільна числова функція, визначена на відрізку  $[a; b] \subset \mathbb{R}$ . Для довільного розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$  точками  $x_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , виберемо довільним чином так звані *проміжні точки*  $x_k^* \in [x_k; x_{k+1}]$ ,  $k \in \overline{0, n-1}$ , позначимо через  $X^*$  множину всіх цих проміжних точок і складемо суму

$$S(T, X^*, f) = S(T, X^*) = S(T) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*) \Delta x_k,$$

де  $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$ . Цю суму називають *інтегральною сумою*, складеною для заданої функції  $f$ , заданого розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$  і заданої множини проміжних точок  $X^*$ .

Число  $I$  називають *границею інтегральної суми*  $S(T)$ , коли  $\lambda(T) \rightarrow 0$ , і записують  $I = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(T)$ , якщо  $\forall \epsilon > 0 \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$ :  $|S(T) - I| < \epsilon$ , коли  $\lambda(T) < \delta$ , для довільного розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$  і довільної множини  $X^*$  проміжних точок  $x_k^*$ .

Суть поняття *границі інтегральної суми* полягає в тому, що при достатньо малій дрібності  $\lambda(T)$  довільна інтегральна сума  $S(T)$  як завгодно близька до числа  $I$ .

За своєю формою поняття *границі інтегральної суми* схоже на поняття *границі функції в точці*. Тому природно чекати, що й властивості *границі інтегральної суми* нагадують відповідні властивості *границі функції в точці*. Зокрема, мають місце властивості про єдиність *границі*, про *границю суми*, *різниць*, *добутку й частки*, про *перехід до границі під знаком модуля та в нерівності*, про *границю проміжної змінної та інші*. У цьому можна легко переконатися.

**2.1.4. Поняття  $R$ -інтегрованої функції та  $R$ -інтеграла.** Функцію  $f$  називають  *$R$ -інтегрованою* або *інтегрованою за Ріманом на відрізку  $[a; b]$*  і записують  $f \in R[a; b]$ , якщо існує скінченна границя  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(T) = I$ . При цьому число  $I$  називають *інтегралом* або  *$R$ -інтегралом*, або *інтегралом Рімана*, або *визначеним інтегралом функції  $f$  на відрізку  $[a; b]$*  і позначають його  $(R) \int_a^b f(x) dx$

або  $\int_a^b f(x) dx$ , коли зрозуміло, про який інтеграл іде мова. Отже,

$$(R) \int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*) \Delta x_k. \quad (1)$$

Легко бачити, що  $f \in R[a; b] \Leftrightarrow \operatorname{Re} f \in R[a; b]$  та  $\operatorname{Im} f \in R[a; b]$ , причому

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x) dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) dx.$$

Тому надалі вважатимемо, що  $f(x) \in \mathbb{R} \forall x \in [a; b]$ , тобто усі значення  $f(x)$  є дійсними числами.

**2.1.5. Зв'язок між інтегралами Рімана і Ньютона – Лейбніца.** Дослідимо питання про інтегровність функції за Ріманом. Спочатку визначимо, чому позначення інтеграла Рімана збігається з позначенням інтеграла Ньютона – Лейбніца.

□ Нехай  $f \in NL[a; b]$ , тобто  $f$  є інтегровою функцією за Ньютоном – Лейбніцом на відрізку  $[a; b]$ . Тоді для будь-якого розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$  точками  $x_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , за адитивною властивістю  $NL$ -інтеграла маємо

$$(NL) \int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx,$$

а за формулою Лагранжа про скінченні прирости

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx = F(x_{k+1}) - F(x_k) = F'(x_k^*)(x_{k+1} - x_k) = f(x_k^*) \Delta x_k$$

$\forall k \in \overline{0, n-1}$ , де  $F$  – первісна функції  $f$  на  $[a; b]$ . Отже,

$$(NL) \int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*) \Delta x_k = S(T, X^*). \quad \blacksquare$$

Цим самим доведено наступне твердження.

**Теорема 1** (про зв'язок  $NL$ -інтеграла з інтегральними сумами).

Якщо дійсна функція  $f \in NL[a; b]$  і  $(NL) \int_a^b f(x) dx$  – її  $NL$ -інтеграл на  $[a; b]$ , то для будь-якого розбиття  $T = \{x_k: k \in \overline{0, n}\}$  відрізка  $[a; b]$  існує набір  $X^* = \{x_k^*: k \in \overline{0, n-1}\}$  проміжних точок,

такий що

$$(NL) \int_a^b f(x) dx = S(T, X^*).$$

З теореми 1 випливає наступне твердження.

**Теорема 2** (про зв'язок *NL*-інтеграла з *R*-інтегралом). *Якщо функція  $f$  одночасно інтегровна за Ріманом і за Ньютоном – Лейбніцом, то її  $R$ -інтеграл і  $NL$ -інтеграл на відрізку  $[a; b]$  збігаються. Тому*

$$(NL) \int_a^b f(x) dx = (R) \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (2)$$

де  $F$  – довільна первісна функції  $f$  на відрізку  $[a; b]$ .

□ Дійсно, за означенням

$$(R) \int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*) \Delta x_k,$$

причому остання границя не залежить від розбиття  $T$  і від способу вибору проміжних точок  $x_k^*$ . Тому можна їх вибрати, як у теоремі 1. Тоді

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*) \Delta x_k &= (NL) \int_a^b f(x) dx \Rightarrow \\ (R) \int_a^b f(x) dx &= \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (NL) \int_a^b f(x) dx = (NL) \int_a^b f(x) dx, \end{aligned}$$

тобто *R*- і *NL*-інтеграли збігаються, якщо вони існують. ■

Формулу (2) називають *формулою Ньютона – Лейбніца для R-інтеграла*.

**2.1.6. *R*-інтегровність неперервних функцій. Геометричний зміст *R*-інтеграла.** Відомо, що коли  $f \in$  неперервною функцією на  $[a; b]$ , то  $f \in$  *NL*-інтегровною на  $[a; b]$ . Виникає питання: чи є неперервна функція  $f$  *R*-інтегровною на  $[a; b]$ ?

□ Для відповіді на поставлене питання позначимо *NL*-інтеграл неперервної функції  $f$  на відрізку  $[a; b]$  через  $I$ , тобто

$$I = (NL) \int_a^b f(x) dx.$$

За теоремою 1 для будь-якого розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$  існує набір проміжних точок  $X^* = \{x_k^*: k \in \overline{0, n-1}\}$ , для якого  $S(T, X^*) = I$ . Нехай  $M = \{c_k: k \in \overline{0, n-1}\}$  – довільний набір проміжних точок для даного розбиття  $T$ . Оскільки  $f$  є неперервною функцією на  $[a; b]$ , то за теоремою Кантора  $f$  є рівномірно неперервною функцією на  $[a; b]$ . Отже,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0: |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a} \forall x', x'' \in [a; b]: |x - x''| < \delta$ .

Вважатимемо, що  $\lambda(T) < \delta$ , тобто  $|x_{k+1} - x_k| = x_{k+1} - x_k < \delta \forall k \in \overline{0, n-1} \Rightarrow |x_k^* - c_k| \leq |x_{k+1} - x_k| < \delta \forall k \in \overline{0, n-1}$ , а тому

$$|f(x_k^*) - f(c_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \forall k \in \overline{0, n-1}.$$

Звідси випливає, що  $|S(T, M) - I| = |S(T, M) - S(T, X^*)| =$

$$\begin{aligned} &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} (f(c_k) - f(x_k^*)) \Delta x_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(c_k) - f(x_k^*)| \Delta x_k < \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Отже,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta: |S(T, M) - I| < \varepsilon$ , коли  $\lambda(T) < \delta$ , а це означає, що  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(T, M) = I$ , тобто  $f \in R[a; b]$  і

$$(R) \int_a^b f(x) dx = (NL) \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

де  $F$  – довільна первісна функції  $f$  на  $[a; b]$ . ■

Таким чином, доведена наступна теорема.

**Теорема 3** (про  $R$ -інтегровність неперервної функції). *Якщо  $f$  є неперервною функцією на  $[a; b]$ , то вона інтегровна за Ріманом на  $[a; b]$  і для неї правильна формула Ньютона – Лейбніца (2).*

З теореми 3 зокрема випливає, що криволінійна трапеція  $\Phi$  має площу  $S(\Phi)$  у наведеному вище розумінні, оскільки

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(\Phi_*) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*) \Delta x_k = (R) \int_a^b f(x) dx,$$

а

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(\Phi^*) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^{**}) \Delta x_k = (R) \int_a^b f(x) dx,$$



причому

$$S(\Phi) = (R) \int_a^b f(x) dx = (NL) \int_a^b f(x) dx.$$

У цьому полягає геометричний зміст  $R$ -інтеграла.

### 2.1.7. Необхідна умова $R$ -інтегровності.

□ Припустимо, що  $f$  – необмежена функція на  $[a; b]$ . Тоді для будь-якого розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$  точками  $x_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , функція  $f$  є необмеженою принаймні на одному з відрізків  $[x_k; x_{k+1}]$ . Нехай це буде відрізок  $[x_{k_0}; x_{k_0+1}]$ . Виберемо проміжні точки  $x_k^* \in [x_k; x_{k+1}]$  довільним чином, коли  $k \neq k_0$ , а точку  $x_{k_0}^*$  виберемо такою, щоб

$$|f(x_{k_0}^*)| \Delta x_{k_0} > \left| \sum_{0 \leq k \leq n-1; k \neq k_0} f(x_k^*) \Delta x_k \right| + \frac{1}{\lambda(T)}.$$

Тоді для такого набору  $X^*$  проміжних точок

$$\begin{aligned} |S(T, X^*)| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*) \Delta x_k \right| \geq |f(x_{k_0}^*)| \Delta x_{k_0} - \\ &- \left| \sum_{0 \leq k \leq n-1; k \neq k_0} f(x_k^*) \Delta x_k \right| > \frac{1}{\lambda(T)} \rightarrow \infty, \text{ коли } \lambda(T) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Тому необмежена на відрізку  $[a; b]$  функція  $f$  не може бути інтегрованою за Ріманом на  $[a; b]$ .

Отже, кожна функція  $f$ , інтегровна за Ріманом на даному відрізку, повинна бути обмеженою на цьому відрізку.

Виникає питання: чи обов'язково кожна обмежена на  $[a; b]$  функція  $f$  є інтегрованою за Ріманом на  $[a; b]$ ?

Відповідь на це питання негативна. Дійсно, розглянемо так звану функцію Діріхле:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{коли } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{коли } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Нехай  $[a; b]$  – довільний фіксований відрізок, де  $a < b$ . Тоді для будь-якого розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$  точками  $x_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , маємо:

$$S(T, X^*) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*) \Delta x_k =$$

$$= \begin{cases} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = b - a, & \text{коли } x_k^* \in \mathbb{Q} \forall k, \\ 0, & \text{коли } x_k^* \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \forall k. \end{cases}$$

Тому, коли припустити, що  $f(x) \in R[a; b]$ , то  $\int_a^b f(x) dx = b - a \neq 0$

і  $\int_a^b f(x) dx = 0$ , а це неможливо. Отже,  $f \notin R[a; b]$ , тобто обмежена функція Діріхле не є  $R$ -інтегрованою на будь-якому відрізку  $[a; b]$ ,  $a < b$ . ■

Таким чином, правильне наступне твердження.

**Теорема 4** (необхідна умова  $R$ -інтегровності). *Якщо функція  $f$  інтегровна за Ріманом на відрізку  $[a; b]$ , то вона є обмеженою на  $[a; b]$ , але не кожна обмежена на  $[a; b]$  функція  $f$  є інтегрованою за Ріманом на  $[a; b]$ .*

**2.1.8. Суми Дарбу та їхні властивості. Верхній та нижній інтеграли Дарбу.** У теоремі 4 стверджується, що  $R$ -інтегровні функції слід шукати серед обмежених функцій. З'ясуємо, які саме обмежені функції є  $R$ -інтегровними.

□ Нехай  $f$  – обмежена дійсна функція на  $[a; b]$ . Зафіксуємо розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$  точками  $x_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ . Тоді  $f$  є обмеженою функцією на кожному відрізку  $[x_k; x_{k+1}]$ , а тому існують скінченні числа

$$m_k = \inf_{[x_k; x_{k+1}]} f(x) \text{ і } M_k = \sup_{[x_k; x_{k+1}]} f(x).$$

Складемо суми

$$S_*(T) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k \text{ і } S^*(T) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k.$$

Їх називають відповідно *нижньою і верхньою сумами Дарбу, складеними для даної функції  $f$  і даного розбиття  $T$ .*

Дослідимо властивості сум Дарбу функції  $f$ .

Оскільки  $m_k \leq f(x_k^*) \leq M_k \forall x_k^* \in [x_k; x_{k+1}]$  і  $\forall k \in \overline{0, n-1}$ , то

$$S_*(T) \leq S(T, X^*) \leq S^*(T).$$

З іншого боку, за властивостями супремуму та інфімуму  $\forall \varepsilon > 0$   $\exists x_k^* \in [x_k; x_{k+1}]$  і  $x_k^{**} \in [x_k; x_{k+1}]$ :  $f(x_k^*) < m_k + \frac{\varepsilon}{b-a}$ , а  $f(x_k^{**}) > M_k - \frac{\varepsilon}{b-a}$ ,  $k \in \overline{0, n-1}$ . Тому, позначаючи через  $X^*$  і  $X^{**}$  відпо-

відно набори проміжних точок  $x_k^*$  і  $x_k^{**}$ , матимемо

$$S(T, X^*) < S_*(T) + \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta x_k = S_*(T) + \varepsilon,$$

і аналогічно  $S(T, X^{**}) > S^*(T) - \varepsilon$ . ■

Отже, доведено першу властивість сум Дарбу.

**Властивість 1** (про зв'язок сум Дарбу з інтегральними сумами).  
Довільна інтегральна сума  $S(T, X^*)$  задовольняє нерівність

$$S_*(T) \leq S(T, X^*) \leq S^*(T), \quad (3)$$

а за рахунок вибору проміжних точок інтегральну суму можна як завгодно близько наблизити до нижньої (верхньої) суми Дарбу, тобто  $\forall \varepsilon > 0 \exists X^*, X^{**}$ :

$$S(T, X^*) - \varepsilon < S_*(T) \leq S^*(T) < S(T, X^{**}) + \varepsilon. \quad (4)$$

Із властивості 1 зокрема випливає, що  $S_*(T) \leq S^*(T)$ . Виникає питання: чи правильна нерівність  $S_*(T) \leq S^*(T')$ , коли розбиття  $T$  і  $T'$  відрізка  $[a; b]$  довільні, не обов'язково рівні?

□ Припустимо спочатку, що розбиття  $T' = T^{(1)}$  можна дістати з розбиття  $T$  шляхом введення однієї нової точки:  $T^{(1)} = T \cup \{x_1^*\}$ . Нехай  $x_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , – точки розбиття  $T$  і  $x_1^* \in (x_{k_0}; x_{k_0+1})$ . Тоді  $[x_{k_0}; x_{k_0+1}] = [x_{k_0}; x_1^*] \cup [x_1^*; x_{k_0+1}]$ ,

$$m_{k_0} = \inf_{[x_{k_0}; x_{k_0+1}]} f(x) \leq \inf_{[x_{k_0}; x_1^*]} f(x) = m'_{k_0}$$

і

$$m_{k_0} \leq \inf_{[x_1^*; x_{k_0+1}]} f(x) = m''_{k_0},$$

звідки

$$\begin{aligned} S_*(T) &= \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = \sum_{0 \leq k \leq n-1, k \neq k_0} m_k \Delta x_k + m_{k_0} (x_{k_0+1} - x_{k_0}) = \\ &= \sum_{0 \leq k \leq n-1, k \neq k_0} m_k \Delta x_k + m_{k_0} (x_{k_0+1} - x_1^*) + m_{k_0} (x_1^* - x_{k_0}) \leq \\ &\leq \sum_{0 \leq k \leq n-1, k \neq k_0} m_k \Delta x_k + m''_{k_0} (x_{k_0+1} - x_1^*) + m'_{k_0} (x_1^* - x_{k_0}) = S_*(T^{(1)}) \Rightarrow \\ 0 &\leq S_*(T^{(1)}) - S_*(T) = (m''_{k_0} - m_{k_0}) (x_{k_0+1} - x_1^*) + (m'_{k_0} - m_{k_0}) (x_1^* - x_{k_0}) \leq \end{aligned}$$

$\leq 2H(x_{k_0+1} - x_1^*) + 2H(x_1^* - x_{k_0}) = 2H\Delta x_{k_0} \leq 2H \cdot \lambda(T)$ ,  
де  $H > 0$  – таке число, що  $|f(x)| \leq H \forall x \in [a; b]$ .

Аналогічно, враховуючи нерівності

$$M_{k_0} = \sup_{[x_{k_0}; x_{k_0+1}]} f(x) \geq \sup_{[x_{k_0}; x_1^*]} f(x) = M'_{k_0}$$

i

$$M_{k_0} \geq \sup_{[x_1^*; x_{k_0+1}]} f(x) = M''_{k_0},$$

можна показати, що

$$0 \leq S^*(T) - S^*(T^{(1)}) \leq 2H \cdot \lambda(T).$$

Далі методом математичної індукції легко дістати, що коли розбиття  $T^{(m)}$  отримується з розбиття  $T$  шляхом введення  $m$  нових точок, тобто  $T^{(m)} = T \cup \{x_k^*: 1 \leq k \leq m\}$ , то  $S_*(T) \leq S_*(T^{(m)})$ ,  $S^*(T) \geq S^*(T^{(m)})$ , а

$$0 \leq S_*(T^{(m)}) - S_*(T) \leq 2mH\lambda(T)$$

i

$$0 \leq S^*(T) - S^*(T^{(m)}) \leq 2mH\lambda(T). \quad \blacksquare$$

Отже доведено наступну властивість.

**Властивість 2** (про монотонність сум Дарбу). *Якщо розбиття  $T^{(m)}$  отримується з розбиття  $T$  шляхом введення  $m$  нових точок, то правильні нерівності*

$$S_*(T) \leq S_*(T^{(m)}) \leq S^*(T^{(m)}) \leq S^*(T), \quad (5)$$

i

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq S_*(T^{(m)}) - S_*(T) \leq 2mH\lambda(T), \\ 0 \leq S^*(T) - S^*(T^{(m)}) \leq 2mH\lambda(T). \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Тепер легко дістати відповідь на поставлене вище запитання про нерівність  $S_*(T) \leq S^*(T')$ .

□ Нехай розбиття  $T$  і  $T'$  довільні, а  $T^* = T \cup T'$ . Тоді за властивістю 2

$$S_*(T) \leq S_*(T^*) \leq S^*(T^*) \leq S^*(T'),$$

тобто  $S_*(T) \leq S^*(T')$ . Звідси, зафіксувавши довільне розбиття  $T'$ ,

дістанемо існування  $\sup_{(T)} S_*(T) = I_* = I_*(f)$ , причому

$$S_*(T) \leq I_* \leq S^*(T') \quad \forall T \text{ і } T'.$$

З останньої нерівності випливає існування  $\inf_{(T')} S^*(T') = I^* = I^*(f)$  та нерівність

$$S_*(T) \leq I_* \leq I^* \leq S^*(T') \quad \forall T \text{ і } T'. \quad \blacksquare$$

Числа  $I_*$  та  $I^*$  називають відповідно *нижнім* і *верхнім інтегралами Дарбу функції*  $f$ .

Таким чином, доведено наступну властивість.

**Властивість 3** (про існування нижнього і верхнього інтегралів Дарбу). *Довільна функція  $f$ , обмежена на відрізку  $[a; b]$ , має на цьому відрізку нижній  $I_*$  та верхній  $I^*$  інтеграли Дарбу. При цьому які б не взяли розбиття  $T$  і  $T'$  відрізка  $[a; b]$ , виконуватиметься нерівність*

$$S_*(T) \leq I_* \leq I^* \leq S^*(T'). \quad (7)$$

**2.1.9. Критерії  $R$ -інтегровності.** Знайдемо тепер умови, необхідні й достатні для  $R$ -інтегровності обмеженої функції  $f$ .

□ Нехай  $f$  – довільна обмежена функція, що є  $R$ -інтегрованою на відрізку  $[a; b]$ . Тоді існує  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(T, X^*) = I$ , тобто  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ :  $|S(T, X^*) - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ , коли  $\lambda(T) < \delta$ . За властивістю 1 сум Дарбу проміжні точки  $x_k^*$  можна вибрати так, щоб  $|S_*(T) - S(T, X^*)| < \frac{\varepsilon}{2}$ . Тоді

$$\begin{aligned} |S_*(T) - I| &= |S_*(T) - S(T, X^*) + S(T, X^*) - I| \leq \\ &\leq |S_*(T) - S(T, X^*)| + |S(T, X^*) - I| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

$\forall T: \lambda(T) < \delta$ . Це означає, що  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S_*(T) = I$ . Так само можна показати, що й  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S^*(T) = I$ . Отже, якщо  $f \in R[a; b]$ , то

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S_*(T) &= \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S^*(T) \Rightarrow \\ \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (S_*(T) - S^*(T)) &= 0 \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k = 0,$$

де  $\omega_k(f) = M_k - m_k = \sup_{[x_k; x_{k+1}]} f(x) - \inf_{[x_k; x_{k+1}]} f(x)$  – коливання функції  $f$  на відрізку  $[x_k; x_{k+1}]$ .

Припустимо тепер, що функція  $f$  обмежена на  $[a; b]$  і

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k = 0,$$

тобто

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (S^*(T) - S_*(T)) = 0.$$

Тоді з нерівності (7) випливає, що

$$0 \leq I - I_* \leq S^*(T) - S_*(T) \rightarrow 0, \text{ коли } \lambda(T) \rightarrow 0,$$

тобто  $I_* = I^* = I$ . Також

$$|S_*(T) - I| \leq S^*(T) - S_*(T) \rightarrow 0, \text{ коли } \lambda(T) \rightarrow 0,$$

і

$$|S^*(T) - I| \leq S^*(T) - S_*(T) \rightarrow 0, \text{ коли } \lambda(T) \rightarrow 0,$$

тобто

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S_*(T) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S^*(T) = I.$$

Тому, враховуючи нерівність (3), дістаємо:  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(T, X^*) = I$ , тобто  $f \in R$ -інтегрованою функцією на відрізку  $[a; b]$ . ■

Таким чином, має місце наступна теорема.

**Теорема 5** (перший критерій  $R$ -інтегрованості). *Нехай дійсна функція  $f$  є обмеженою на відрізку  $[a; b]$ . Тоді наступні твердження 1) – 4) еквівалентні між собою:*

- 1)  $f \in R[a; b]$ , тобто існує  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(T, X^*) = I$ ;
- 2)  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S^*(T) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S_*(T) = I$ ;
- 3)  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (S^*(T) - S_*(T)) = 0$ ;
- 4)  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k = 0$ .

На практиці часто виникає питання про  $R$ -інтегрованість обмеженої функції  $f$ , коли відома поведінка інтегральних сум для де-

якої послідовності  $(T_n)$  розбиттів відрізка  $[a; b]$ , для якої  $\lambda(T_n) \rightarrow 0$ , коли  $n \rightarrow \infty$ .

□ Зрозуміло, що коли  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(T, X^*) = I$ , то для довільної послідовності розбиттів  $T_n = \{x_k^{(n)}: k \in \overline{0, k_n}\}$  такої, що  $\lambda(T_n) \rightarrow 0$ , і довільної послідовності  $X_n^* = \{x_{k,n}^*: k \in \overline{0, k_n - 1}\}$  відповідних наборів проміжних точок маємо

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(T_n, X_n^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k_n-1} f(x_{k,n}^*) \Delta x_k^{(n)} = I.$$

Нехай остання рівність має місце, а  $f$  – обмежена функція на  $[a; b]$ . Тоді, як і при доведенні теореми 5, дістаємо:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} S_*(T_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} S^*(T_n) = I \Rightarrow \\ \lim_{n \rightarrow \infty} (S^*(T_n) - S_*(T_n)) &= 0 \Rightarrow I_* = I^* = I. \end{aligned}$$

Доведемо тепер  $R$ -інтегровність функції  $f$ , якщо для неї  $I_* = I^* = I$ .

За властивостями інфімуму для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує розбиття  $T_0$  відрізка  $[a; b]$  точками  $x_k^{(0)}$ ,  $k \in \overline{0, m}$ , таке, що  $I = I_* \geq S_*(T_0) > I - \frac{\varepsilon}{2}$ .

Нехай числа  $H > 0$  і  $\delta = \delta(\varepsilon)$  такі, що  $|f(x)| \leq H \forall x \in [a; b]$ ,  $2mH\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ , а  $T$  – довільне розбиття відрізка  $[a; b]$  точками  $x_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , для якого  $\lambda(T) < \delta$ . Тоді для розбиття  $T' = T \cup T_0$  за властивістю 2 сум Дарбу маємо:  $I = I_* \geq S_*(T') \geq S_*(T_0) > I - \frac{\varepsilon}{2}$ , тобто  $|S_*(T') - I| < \frac{\varepsilon}{2}$ , а  $|S_*(T') - S_*(T)| \leq 2mH\lambda(T) < 2mH\delta < \frac{\varepsilon}{2}$ . Тому

$$\begin{aligned} |S_*(T) - I| &= |S_*(T) - S_*(T') + S_*(T') - I| \leq \\ &\leq |S_*(T') - S_*(T)| + |S_*(T') - I| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$\forall T: \lambda(T) < \delta$ , а це означає, що  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S_*(T) = I$ .

Аналогічно переконуємося, що й  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S^*(T) = I$ . Отже, має місце твердження 2) теореми 5, а тому і всі інші твердження цієї теореми. ■

Цим самим доведена наступна теорема.

**Теорема 6** (другий критерій  $R$ -інтегровності). *Нехай дійсна функція  $f$  є обмеженою на відрізку  $[a; b]$ . Тоді наступні тверджен-*

ння 1) – 5) еквівалентні між собою:

- 1)  $f \in R[a; b]$ , тобто існує  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(T, X^*) = I$ ;
- 2) існує  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(T_n, X_n^*) = I$  для деякої послідовності розбиттів  $(T_n)$  такої, що  $\lambda(T_n) \rightarrow 0$ , коли  $n \rightarrow \infty$ , та довільної послідовності  $(M_n)$  відповідних наборів проміжних точок;
- 3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_*(T_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} S^*(T_n)$  для деякої послідовності розбиттів  $(T_n)$ , для якої  $\lambda(T_n) \rightarrow 0$ , коли  $n \rightarrow \infty$ ;
- 4)  $\lim_{n \rightarrow \infty} (S^*(T_n) - S_*(T_n)) = 0$  для деякої послідовності розбиттів  $(T_n)$ , для якої  $\lambda(T_n) \rightarrow 0$ , коли  $n \rightarrow \infty$ ;
- 5)  $I_* = I^* = I$ .

**2.1.10. Достатні умови  $R$ -інтегровності.** Застосуємо критерії  $R$ -інтегровності до деяких функцій.

□ Нехай  $f$  – монотонна, наприклад, неспадна функція на відріжку  $[a; b]$ . Тоді для будь-якого розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$  точками  $x_k, k \in \overline{0, n}$ , маємо  $m_k = \inf_{[x_k; x_{k+1}]} f(x) = f(x_k)$ , а  $M_k = \sup_{[x_k; x_{k+1}]} f(x) = f(x_{k+1})$ , і тому

$$\begin{aligned} S^*(T) - S_*(T) &= \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) \Delta x_k \leq \\ &\leq \lambda(T) (f(x_1) - f(x_0) + f(x_2) - f(x_1) + \dots + f(x_n) - f(x_{n-1})) = \\ &= \lambda(T) (f(x_n) - f(x_0)) = \lambda(T) (f(b) - f(a)) \rightarrow 0, \text{ коли } \lambda(T) \rightarrow 0. \blacksquare \end{aligned}$$

Отже, за першим критерієм  $R$ -інтегровності кожна монотонна на  $[a; b]$  функція  $f \in R$ -інтегровною на  $[a; b]$ .

У пункті 2.1.6 доведено, що кожна неперервна на  $[a; b]$  функція  $f \in R$ -інтегровною на  $[a; b]$ .

Якщо функція  $f$  має на відріжку  $[a; b]$  тільки одну точку розриву  $c_1$ , то множину  $E = \{c_1\}$  можна покрити відрізком  $[\alpha_1; \beta_1]$ , довжина якого є як завгодно малою.

Припустимо, що  $f$  має на  $[a; b]$  скінченну кількість точок розриву  $c_k, k \in \overline{1, m}$ . Тоді множину  $E = \{c_k: k \in \overline{1, m}\}$  можна покрити скінченною кількістю відрізків  $[\alpha_k; \beta_k], k \in \overline{1, m}$ , як завгодно



малой сумарної довжини. У зв'язку зі сказаним ведемо наступне поняття.

Множину  $E \subset \mathbb{R}$  називають *множиною з нульовою довжиною*, якщо  $\forall \varepsilon > 0 \exists [\alpha_k; \beta_k], k \in \overline{1, m}: E \subset \bigcup_{k=1}^m [\alpha_k; \beta_k]$  і  $\sum_{k=1}^m (\beta_k - \alpha_k) < \varepsilon$ .

Прикладами множин з нульовою довжиною є порожня множина, довільна скінченна множина  $E \subset \mathbb{R}$ , множина  $E = \{c_n: n \in \mathbb{N}\}$ , де  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = x_0$  – скінченна точка, та інші. Будь-який невірроджений проміжок  $\langle a; b \rangle$  не є множиною з нульовою довжиною.

□◀ Припустимо, що множина  $E$  точок розриву функції  $f$  на відрізку  $[a; b]$  є множиною з нульовою довжиною, тобто  $\forall \varepsilon > 0 \exists [\alpha_k; \beta_k], k \in \overline{1, m}: E \subset \bigcup_{k=1}^m [\alpha_k; \beta_k]$  і  $\sum_{k=1}^m (\beta_k - \alpha_k) < \varepsilon$ .

Можна вважати (рис. 2.1.2), що

$$a \leq \alpha_1 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \dots < \alpha_m < \beta_m \leq b.$$

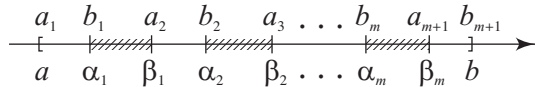


Рис. 2.1.2.

Тоді, позначаючи  $a_1 = a, b_1 = \alpha_1, a_2 = \beta_1, b_2 = \alpha_2, \dots, a_{m+1} = \beta_m, b_{m+1} = b$ , дістаємо, що  $f \in R[a_k; b_k] \forall k \in \overline{1, m+1}$  і  $\sum_{k=1}^{m+1} (a_k - b_{k-1}) < \varepsilon$ , де  $b_0 = a$ . У зв'язку з цим, введемо наступне поняття.

Функцію  $f$  назвемо *майже  $R$ -інтегрованою на відрізку  $[a; b]$* , якщо  $\forall \varepsilon > 0 \exists [a_k; b_k], k \in \overline{1, m}: a \leq a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_m < b_m \leq b, f \in R[a_k; b_k] \forall k \in \overline{1, m}$  і  $\sum_{k=1}^{m+1} (a_k - b_{k-1}) < \varepsilon$ , де  $b_0 = a, a_{m+1} = b$ . ▶

З наведених міркувань випливає, що коли множина  $E$  точок розриву функції  $f$  на відрізку  $[a; b]$  є множиною з нульовою довжиною, то  $f$  є майже  $R$ -інтегрованою на  $[a; b]$ .

Зрозуміло, що кожна  $R$ -інтегровна на  $[a; b]$  функція  $f$  є майже  $R$ -інтегрованою на  $[a; b]$ , але не навпаки. Наприклад, функція

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & \text{коли } x \neq 0, \\ 0, & \text{коли } x = 0, \end{cases}$$

є майже  $R$ -інтегрованою на відрізку  $[0; 1]$ , але  $f \notin R[0; 1]$ , оскільки  $f$  необмежена на  $[0; 1]$ .

Однак, якщо  $f$  є майже  $R$ -інтегрованою і обмеженою на  $[a; b]$  функцією, то вона є також  $R$ -інтегрованою на  $[a; b]$ . Доведемо це.

◀ Оскільки  $f$  є майже  $R$ -інтегрованою функцією на  $[a; b]$ , то  $\forall \varepsilon = \frac{1}{n} \exists [a_k^{(n)}; b_k^{(n)}]$ ,  $k \in \overline{1, m_n}$ :  $f \in R[a_k^{(n)}; b_k^{(n)}] \forall k \in \overline{1, m_n}$ ,  $\sum_{k=1}^{m_n+1} (a_k^{(n)} - b_{k-1}^{(n)}) < \varepsilon = \frac{1}{n}$ , причому  $b_0^{(n)} = a \leq a_1^{(n)} < b_1^{(n)} < \dots < a_{m_n}^{(n)} < b_{m_n}^{(n)} \leq b = a_{m_{n+1}}^{(n)}$ .

За першим критерієм  $R$ -інтегровності для довільних  $n \in \mathbb{N}$  і  $k \in \overline{1, m_n}$  існує розбиття  $T_n^{(k)}$  відрізка  $[a_k^{(n)}; b_k^{(n)}]$  таке, що

$$\lambda(T_n^{(k)}) < \frac{1}{n} \text{ і } S^*(T_n^{(k)}) - S_*(T_n^{(k)}) < \frac{1}{n \cdot m_n}.$$

Утворимо розбиття  $T_n$  відрізка  $[a; b]$ , поклавши  $T_n = \bigcup_{k=1}^{m_n} T_n^{(k)}$ . Тоді

$$\begin{aligned} 0 \leq S^*(T_n) - S_*(T_n) &= \sum_{k=1}^{m_n} (S^*(T_n^{(k)}) - S_*(T_n^{(k)})) + \\ &+ \sum_{k=1}^{m_{n+1}} \left( \sup_{[b_{k-1}^{(n)}; a_k^{(n)}]} f(x) - \inf_{[b_{k-1}^{(n)}; a_k^{(n)}]} f(x) \right) (a_k^{(n)} - b_{k-1}^{(n)}) \leq \\ &\leq m_n \cdot \frac{1}{n \cdot m_n} + 2H \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n} (2H + 1), \end{aligned}$$

$H > 0$  – таке число, що  $|f(x)| \leq H \forall x \in [a; b]$ . Таким чином,  $0 \leq S^*(T_n) - S_*(T_n) \leq \frac{1}{n} (2H + 1)$ , а тому  $S^*(T_n) - S_*(T_n) \rightarrow 0$ , коли  $n \rightarrow \infty$ , і  $\lambda(T_n) \rightarrow 0$ , коли  $n \rightarrow \infty$ . Звідси за другим критерієм  $R$ -інтегровності дістаємо  $R$ -інтегровність функції  $f$  на  $[a; b]$ . ▶■

Таким чином, доведена наступна теорема.

**Теорема 7** (про достатні умови  $R$ -інтегровності). *Нехай функція  $f$  є обмеженою на відрізку  $[a; b]$ . Тоді ця функція є  $R$ -інтегрованою на  $[a; b]$ , якщо вона задовольняє принаймні одну з умов 1) – 5):*

- 1)  $f$  – монотонна на  $[a; b]$ ;
- 2)  $f$  – неперервна на  $[a; b]$ ;
- 3)  $f$  має на  $[a; b]$  скінченну кількість точок розриву;

- 4) множина точок розриву функції  $f$  на  $[a; b]$  є множиною з нульовою довжиною;
- 5)  $f$  є майже  $R$ -інтегрованою на  $[a; b]$ .

З теореми 7 випливає, що зміна значень функції  $f$  на множині  $E$  з нульовою довжиною (зокрема, на скінченній множині  $E$ ) не впливає ані на  $R$ -інтегровність цієї функції, ані на величину її  $R$ -інтеграла.

**2.1.11. Використання комп'ютерних засобів математики.** За допомогою комп'ютера можна: 1) побудувати і обчислити інтегральні суми елементарної функції, 2) проілюструвати суть поняття визначеного інтеграла як границі інтегральних сум, 3) обчислити визначений інтеграл у символічному або чисельному вигляді, 4) проілюструвати геометричний зміст визначеного інтеграла.

**2.1.11.1. Використання Gran1.** За допомогою програми Gran1 можна чисельно обчислити визначений інтеграл (який фактично є  $NL$ -інтегралом) від елементарної функції на заданому відрізку і продемонструвати геометричний зміст інтеграла шляхом заштриховування фігури між графіком функції та віссю  $OX$  (див. підпункт 1.2.5.1).

**2.1.11.2. Використання Maxima.** Проілюструємо можливі застосування програми Maxima на прикладі розв'язування деяких типів задач.

**Задача 1.** Для заданої функції  $f(x)$  і довільного заданого розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$  обчислити інтегральну суму  $S(T, X^*)$  з машинною точністю. За проміжні точки узяти ліві (праві) кінці відрізків розбиття.

□ Спершу задаємо функцію, наприклад,  $f(x) = e^{-x^2}$ .

(%i1) f(x):=exp(-x^2)\$

Розбиття  $T$  задаємо у вигляді упорядкованого списку. Зауважимо, що цим самим автоматично задається і відрізок  $[a; b]$ .

(%i2) T:[-2,-1.7,-1.3,-1,-0.5,0,0.25,0.5,0.8,1,1.2,1.6,1.8,2]\$

Підрозуміємо, скільки елементарних відрізків у даному розбитті:

(%i3) N:length(T)-1\$

Складемо інтегральну суму  $S(T, X^*) = \sum_{k=1}^n f(x_k) \Delta x_k$ , узявши ліві кінці в якості проміжних точок. У комп'ютерному поданні  $x_k = T[k]$  – це  $k$ -тий елемент списку  $T$ , причому нумерація повинна починатися від  $k = 1$ .

(%i4) S:sum(f(T[k])\*(T[k+1]-T[k]),k,1,N)\$

Обчислюємо дану інтегральну суму  $S$ :

(%i5) float(S);

(%o5) 1.672013850279529

Для того щоб проміжними точками слугували праві кінці, у рядку (%i4) потрібно було б записати  $f(T[k+1])$ . ■

Проміжні точки можна теж задати довільно. Для цього після задання розбиття  $T$  потрібно задати ще один список  $X^*$ , до якого включити всі бажані проміжні точки. При цьому потрібно слідкувати, щоб проміжні точки належали відповідним відріzkам розбиття.

**Задача 2.** Для заданої функції  $f(x)$  і заданого розбиття  $T$  обчислити верхню й нижню суми Дарбу  $S^*(T)$  і  $S_*(T)$ .

□ Порівняно з попередньою, ця задача набагато складніша, тому що при її розв'язуванні потрібно шукати інфімуми та супремуми функції на відрізках розбиття.

У комплекті з Maxima включено пакет riemsum.mac, призначений для чисельного обчислення сум Дарбу функції  $f(x)$ , яка є раціональною функцією, зокрема многочленом. Після завантаження цього пакету стає доступною команда `upper_and_lower_sums(f(x),x,T)`, де  $T$  – розбиття відрізка  $[a; b]$  у вигляді списку, не обов'язково упорядкованого. В якості результату при зверненні до цієї команди повертається список з трьох чисел:  $[S^*(T), S_*(T), S^*(T) - S_*(T)]$ .

Продемонструємо відшукування сум Дарбу за допомогою пакету riemsum на прикладі функції  $f(x) := \frac{x^3 - 2x - 1}{x^2 + 4}$ .

```
(%i1) load(riemsum)$
```

```
(%i2) f(x):=(x^3-2*x-1)/(x^2+4)$
```

Розбиття візьмемо з розв'язання попередньої задачі:

```
(%i3) T:[-2,-1.7,-1.3,-1,-0.5,0,0.25,0.5,0.8,1,1.2,1.6,1.8,2]$
```

Знайти суми Дарбу й різницю між ними для заданої функції і заданого розбиття можна за допомогою команди:

```
(%i4) upper_and_lower_sums(f(x),x,T);
```

Дістанемо відповідь:

```
(%o4) [-0.48156168761106, -1.10581480373927, 0.62425311612821]
```

Точність цих значень не більша за  $10^{-7}$ , оскільки саме з такою точністю запрограмоване відшукування коренів многочленів у пакеті riemsum.mac.

Вручну вводити розбиття  $T$  досить незручно. Для випадку розбиття відрізка  $[a; b]$  на  $n$  рівних частин у пакеті riemsum.mac є команда `make_partition(a,b,n)`, якою виконується таке розбиття і повертаються його точки у вигляді списку. Наприклад, продовжуючи відкриту сесію Maxima, утворимо розбиття відрізка  $[-2; 2]$  на 50 частин:

```
(%i5) T:make_partition(-2,2,50)$
```

Обчислимо тепер суми Дарбу для цього розбиття:

```
(%i6) upper_and_lower_sums(f(x),x,T);
```

```
(%o6) [-0.70720147773207, -0.86352100977965, 0.15631953204758]
```

Помічаємо закономірність, що при подрібненні розбиття різниця між верхньою й нижньою сумами Дарбу все ближче наближається до нуля.

Оскільки інтеграл Рімана міститься між сумами Дарбу, то за його наближене значення можна взяти середнє значення сум Дарбу:

$$(\%i7) (\%[1]+\%[2])/2;$$

$$(\%o7) -0.78536124375586$$

Отже,  $\int_{-2}^2 \frac{x^3-2x-1}{x^2+4} dx \approx -0.78536$ . Зауважимо, що точне значення цього

інтеграла дорівнює  $-\frac{\pi}{4} \approx -0.78539816339745$ , а обчислення за допомогою `Gran1` дає число  $I = -0.7854$ . ■

**Задача 3.** Для заданої функції  $f(x) \geq 0$  та заданого відрізка  $[a; b]$  обчислити інтегральну суму, яка відповідає розбиттю відрізка на  $N$  рівних частин і конкретному способу вибору проміжних точок (наприклад, як середин елементарних відрізків). Проілюструвати геометричний зміст інтегральної суми.

□ Розглянемо розв'язання цієї задачі на двох прикладах. При цьому до першого прикладу наведемо детальні пояснення, а другий подамо у вигляді готового шаблону-розв'язання.

**Приклад 1.**  $f(x) = \cos x$ ,  $[a; b] = [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}]$ ,  $N = 20$ .

Спочатку задамо функцію, відрізок і кількість точок розбиття.

$$(\%i1) f(x):=\cos(x) \quad a:-\%pi/2 \quad b:\%pi/4 \quad N:20$$

Визначимо послідовність розбиттів  $T_n = \{x(k, n)\}$  і відповідну послідовність наборів  $X_n^* = \{c(k, n)\}$  проміжних точок:

$$(\%i2) x(k,n):=a+k*(b-a)/n \quad c(k,n):=(x(k,n)+x(k+1,n))/2$$

Визначимо послідовність інтегральних сум  $S(n)$ :

$$(\%i3) S(n):=\sum(f(c(k,n))*(b-a)/n, k, 0, n-1)$$

Знайдемо точне значення інтеграла:

$$(\%i4) I:\text{integrate}(f(x), x, a, b)$$

Виведемо на екран значення інтегральної суми при  $n = N = 20$ :

$$(\%i5) \text{print}("S(", N, ")=", \text{float}(S(N)))$$

$$(\%o5) S(20) = 1.708094395922389$$

Для уявлення про ступінь наближення інтегральної суми до інтеграла виведемо ще й точне значення інтеграла.

$$(\%i6) \text{print}("I=", I, "=", \text{float}(I))$$

$$(\%o6) I = 1/\sqrt{2} + 1 = 1.707106781186548$$

Аналітичну частину завершено. Перейдемо до графічного зображення. Можливостей використання команди `plot2d` для побудови фігур із заповненням недостатньо. Тому скористаємося допоміжним пакетом `draw.lisp`, який служить інтерфейсом між `Maxima` і графічним редактором `gnuplot`. Перевагами цього пакету є зручне управління опціями зображень; можливість побудови графіків неявних функцій, багатокутників, прямокутників, еліпсів та векторів; зручна можливість заповнення кольором фігур.

Основною командою пакету draw для зображення плоских кривих і фігур є draw2d(параметри, фігури). Скористаємося цією командою для зображення геометричного змісту інтегральної суми.

Задамо графічні об'єкти, які треба зобразити. Спочатку визначимо графік функції  $f(x)$  на відрізку  $[a - 0, 2; b + 0, 2]$  з товщиною лінії 2 тч:

```
(%i7) graph:[line_width=2,explicit(f(x),x,a-0.2,b+0.2)]$
```

Далі опишемо серію прямокутників, поставлених на відрізки розбиття:

```
(%i8) pp(n):=makelist(rectangle([x(k,n),0],[x(k+1,n),f(c(k,n))]),k,0,n-1)$
```

Визначимо параметри рисунка, а саме, в даному випадку, колір заповнення фігур (прямокутників pp(n)) і пропорційні осі, тобто однакові масштаби по осях.

```
(%i9) options:[fill_color=light-blue,proportional_axes=xy]$
```

Визначимо тепер весь малюнок як один об'єкт. Він описується списком, який складається з фігур та параметрів зображення.

```
(%i10) mal(n):=append(options,pp(n),graph)$
```

(Командою append декілька списків об'єднуються в один.)

Завантажимо пакет draw:

```
(%i11) load(draw)$
```

і виконаємо побудову зображення командою draw2d, застосовану до об'єкта mal(n) при  $n = N = 20$ :

```
(%i12) apply(draw2d,mal(N))$
```

Після цього у вікні gnuplot з'явиться рисунок 2.1.3, яким ілюструється геометричний зміст інтегральної суми.

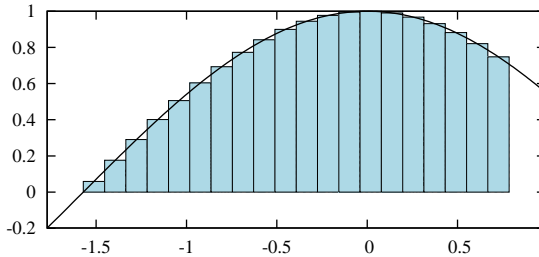



Рис. 2.1.3.

**Приклад 2.**  $f(x) = x \cos x$ ,  $[a; b] = [0; \frac{\pi}{2}]$ ,  $N = 25$ .

Розв'язання задачі 3 для прикладу 2 подамо у вигляді готового набору команд. Вони такі самі, як і в попередньому прикладі, тільки доповнені ширшим набором опцій регулювання вигляду зображення. Їх доцільно ввести всі разом через вікно введення багаторядкових команд, натиснувши кнопку  біля командного рядка. Попередньо можна перезапустити сесію Maxima.

```
f(x):=x*cos(x)$ a:0$ b:%pi/2$ N:25$
```

```
x(k,n):=a+k*(b-a)/n$ c(k,n):=(x(k,n)+x(k+1,n))/2$
```

```

S(n):=sum(f(c(k,n))*(b-a)/n,k,0,n-1)$
I:=integrate(f(x),x,a,b)$
print("S(",N,")=",float(S(N))$)
print("I=",I,"=",float(I))$
pp(n):=makelist(
    rectangle([x(k,n),0],[x(k+1,n),f(c(k,n))]),k,0,n-1)$
graph:[line_width=2,key="x cos (x)",
explicit(f(x),x,a-0.1,b+0.1)]$
options:[title="",user_preamble=["set key right top"],
xtics=None, ytics=None,
label(["a",0.05,-0.05]), label(["b",b,-0.05]),
xrange=auto, yrange=auto,
xaxis=true, yaxis=true,
axis_bottom=false, axis_top=false,
axis_right=false, axis_left=false,
xtics_axis=true, ytics_axis=true,
proportional_axes=xy, transparent=false,
fill_color=light-green, terminal=screen ]$
mal(n):=append(options,pp(n),graph)$
load(draw)$
apply(draw2d,mal(N))$

```

Після виконання цього набору команд на екрані з'являться числа

$$S(25) = 0.57121929242742$$

$$I = \frac{\pi}{2} - 1 = 0.5707963267949$$

Одночасно у вікні gnuplot виводиться потрібний рисунок 2.1.4.

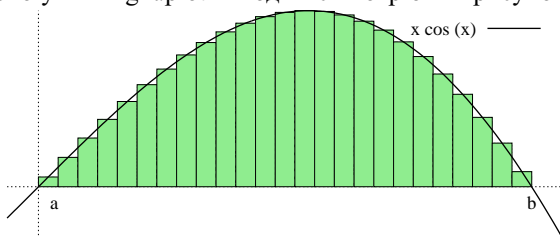


Рис. 2.1.4.

Доцільно зберегти цей набір команд у файл `geom_zmist_integr_sum.wxm`. Потім його можна знову завантажити для подальшого використання. Зауважимо, що цей шаблон придатний для довільної функції  $f(x)$ , відрізка  $[a; b]$  і кількості  $N$  точок розбиття. Достатньо прямо у вікні виведення задати нові значення цих об'єктів і заново запустити даний набір команд на виконання, натиснувши **Ctrl** + **Enter**. ■

**Задача 4.** Обчислити визначений інтеграл заданої функції на заданому відрізку як границю певної послідовності інтегральних сум.

□ Послідовність  $(T_n)$  розбиттів відрізка  $[a; b]$  природно отримується шляхом його поділу на  $n$  рівних частин. А природним способом вибору проміжних точок є вибір лівих, правих чи середніх точок відрізків розбиття. Саме такі послідовності було побудовано при розв'язуванні задачі

3. Тому можна переписати звідти перші три рядки введення:

```
(%i1) f(x):=x^2$ a:-1$ b:2$
```

```
x(k,n):=a+k*(b-a)/n$ c(k,n):=(x(k,n)+x(k+1,n))/2$
```

```
S(n):=sum(f(c(k,n))*(b-a)/n,k,0,n-1)$
```

Тепер залишається знайти  $\lim_{n \rightarrow \infty} S(n)$ . Але командою `limit(S(n),n,inf)` неможливо обчислити границю такого складного об'єкта, як сума. Тому перш ніж обчислювати границю послідовності  $S(n)$ , потрібно цю послідовність спростити. Стандартною опцією у Maxima, якою виконується спрощення сум, є опція `simpsum`, яку потрібно вводити через кому після суми.

Застосуємо опцію `simpsum` до нашої суми  $S(n)$ , причому для одержання менш громіздкої відповіді поєднаємо її з опцією `ratsimp`:

```
(%i7) S(n),simpsum,ratsimp;
```

```
(%o7)  $\frac{12n^2-9}{4n^2}$ 
```

Після такого спрощення знаходження границі стає елементарним:

```
(%i8) limit(%n,inf);
```

```
(%o8) 3
```

Команди спрощення суми  $S(n)$  та обчислення її границі можна об'єднати в одну команду:

```
(%i9) limit(ev(S(n),simpsum),n,inf);
```

```
(%o9) 3
```

Але при такому способі втрачається можливість побачити спрощений вираз суми. Так само за допомогою Maxima можна знайти границю інтегральної суми і у випадку, коли  $f(x)$  є довільним многочленом.

Наприклад, знайдемо  $\int_{-2}^3 (x^3 - x - 1) dx$  як границю інтегральної суми.

Для цього повернемося до команди (%i1), перезадамо в її першому рядку функцію і відрізок:

```
(%i1) f(x):=x^3-x-1$ a:-2$ b:3$
```

```
x(k,n):=a+k*(b-a)/n$ c(k,n):=(x(k,n)+x(k+1,n))/2$
```

```
S(n):=sum(f(c(k,n))*(b-a)/n,k,0,n-1)$
```

і виконаємо знову цю команду. У результаті буде визначено нову послідовність  $S(n)$  інтегральних сум. Знайдемо її границю командою

```
(%i16) limit(ev(S(n),simpsum),n,inf);
```

```
(%o16)  $\frac{35}{4}$ 
```

Можливості використання опції `simpsum`, по суті, вичерпуються спрощенням сум вигляду  $\sum_k a^k$  і  $\sum_{k=m}^n p(k)$ , де  $p(k)$  – многочлен відносно  $k$ .

На даний момент у комплекті з Maxima є додатковий пакет `simplify_sum.mac`, у якому є значно потужніша за опцію `simpsum` команда `si-`



simplify\_sum. За допомогою неї можна спрощувати суми, які містять факторіали (чи біноміальні коефіцієнти), а також суми вигляду

$$\sum_{k=m}^n p(k) \exp(ak), \quad \sum_{k=m}^n p(k) \cos(ak), \quad \sum_{k=m}^n p(k) \sin(ak),$$

де  $p(k)$  – многочлен відносно  $k$ .

Наведемо кілька прикладів застосування команди simplify\_sum.

```
(%i17) load(simplify_sum)$
```

```
(%i18) sum(k*3^k,k,1,n);
```

```
(%o18)  $\sum_{k=1}^n k 3^k$ 
```

```
(%i19) simplify_sum(%);
```

```
(%o19)  $\frac{(2n-1)3^{n+1}}{4} + \frac{3}{4}$ 
```

```
(%i20) sum(k^2*4^k,k,1,n);
```

```
(%o20)  $\sum_{k=1}^n k^2 4^k$ 
```

```
(%i21) simplify_sum(%);
```

```
(%o21)  $\frac{(9n^2-6n+5)4^{n+1}}{27} - \frac{20}{27}$ 
```

```
(%i22) sum(k!/(n+k!),k,1,n);
```

```
(%o22)  $\sum_{k=1}^n \frac{k!}{(n+k)!}$ 
```

```
(%i23) simplify_sum(%);
```

```
(%o23)  $\frac{n+1}{(n-1)(n+1)!} - \frac{(n+1)!}{(n-1)(2n)!}$ 
```

```
(%i24) sum(cos(k*x),k,0,n);
```

```
(%o24)  $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ 
```

```
(%i25) simplify_sum(%);
```

```
(%o25)  $\frac{e^{i(n+1)x}-1}{e^{ix}-1} + \frac{e^{-i(n+1)x}-1}{e^{-ix}-1}$ 
```

```
(%i26) trigrat(%)
```

```
(%o26)  $\frac{\sin\left(\frac{(2n+1)x}{2}\right) + \sin\left(\frac{x}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2}\right)}$ 
```

```
(%i27) sum(k*cos(k*x),k,1,n);
```

```
(%o27)  $\sum_{k=1}^n k \cos(kx)$ 
```

```
(%i28) trigrat(simplify_sum(%));
```

```
(%o28)  $\frac{n \cos((n+1)x) + (-n-1) \cos(nx) + 1}{2 \cos(x) - 2}$ 
```

На жаль, за допомогою команди simplify\_sum не завжди можна розкласти суму на дві суми, щоб потім спростити кожен з них окремо. Наприклад, сума  $\sum_{k=0}^n k^2 + 5^k$  спрощується одразу, а сума  $\sum_{k=1}^n k 2^k + k 3^k$  – ні.

Повернемося до задачі про обчислення границі послідовності інтегральних сум за допомогою системи Maxima. Наведемо ще кілька прикладів використання даної системи. При цьому розпочнемо новий сеанс роботи.

$$\int_0^1 2^x dx = ?$$

(%i1) f(x):=2^x\$ a:0\$ b:1\$

x(k,n):=a+k\*(b-a)/n\$ c(k,n):=(x(k,n)+x(k+1,n))/2\$

S(n):=sum(f(c(k,n))\*(b-a)/n,k,0,n-1)\$

(%i7) S(n),factor;

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^{\frac{k}{n} + \frac{1}{2n}}$$

(%o7)  $\frac{\sum_{k=0}^{n-1} 2^{\frac{k}{n} + \frac{1}{2n}}}{n}$

(%i8) %,simpsum;

(%o8)  $\frac{2^{\frac{1}{2n}}}{n(2^{\frac{1}{n}} - 1)}$

(%i9) limit(%o,n,inf);

(%o9)  $\frac{1}{\log(2)}$

$$\int_{-\pi/4}^{3\pi/2} \cos x dx = ?$$

(%i1) f(x):=cos(x)\$ a:-%pi/4\$ b:3\*%pi/2\$

x(k,n):=a+k\*(b-a)/n\$ c(k,n):=(x(k,n)+x(k+1,n))/2\$

S(n):=sum(f(c(k,n))\*(b-a)/n,k,0,n-1)\$

(%i6) S(n),factor;

$$7\pi \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi(2n-14k-7)}{8n}\right)$$

(%o16)  $\frac{7\pi \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{\pi(2n-14k-7)}{8n}\right)}{4n}$

(%i7) load(simplify\_sum)\$

(%i8) simplify\_sum(%o16),rectform,trigreduce;

(%o18)  $\frac{7\sqrt{2}\pi \sin\left(\frac{7\pi}{8n}\right) - 7\pi \sin\left(\frac{7\pi}{4n}\right)}{\left(2^{\frac{5}{2}} \cos\left(\frac{7\pi}{4n}\right) - 2^{\frac{5}{2}}\right)n}$

(%i9) limit(%o,n,inf),expand;

(%o19)  $\frac{1}{\sqrt{2}} - 1$

$$\int_1^3 \frac{dx}{x} = ?$$

(%i1) f(x):=1/x\$ a:1\$ b:3\$

x(k,n):=a+k\*(b-a)/n\$ c(k,n):=(x(k,n)+x(k+1,n))/2\$

S(n):=sum(f(c(k,n))\*(b-a)/n,k,0,n-1)\$

(%i26) S(n),factor;

$$2 \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+2k+1}$$

simplify\_sum(%),factor;

$$\text{harmonic\_number}\left(\frac{3n-1}{2}\right) - \text{harmonic\_number}\left(\frac{n-1}{2}\right)$$

Знайти границю останньої послідовності за допомогою Maxima неможливо, оскільки в команді `limit` не передбачено правила оперування зі спеціальною функцією  $H(\alpha) = \text{harmonic\_number}(\alpha)$  (гармонічне число від числа  $\alpha$ ).

Проте якщо згадати властивості цієї функції, то з'ясується, що  $H(\alpha) - \ln(\alpha) \rightarrow \gamma$  ( $\alpha \rightarrow +\infty$ ), де  $\gamma \approx 0,58$  – так звана стала Ейлера. Це підтверджується і графічно (рис. 2.1.5):

wxplot2d([harmonic\_number(x),log(x)+%gamma],[x,1,50]);

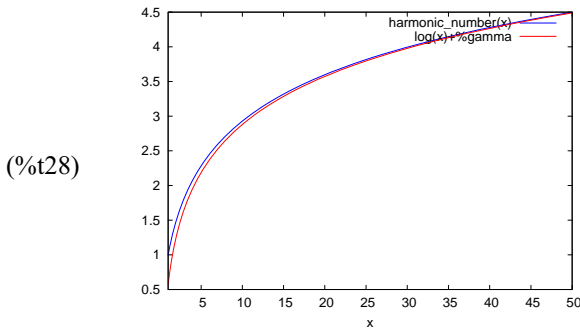


Рис. 2.1.5.

Отже, для знаходження границі послідовності  $S(n)$  можна у її поданні замінити `harmonic_number` на `ln`:

limit(log((3\*n-1)/2)-log((n-1)/2),n,inf),radcan;

log(3)

Розв'язування задачі 4 підтверджує, що обчислення границь інтегральних сум тісно пов'язане з проблемою спрощення сум, яка є набагато складнішою, ніж обчислення визначених і невизначених інтегралів. ■

**Задача 5.** *Продемонструвати у середовищі Maxima геометричний зміст інтеграла Рімана функції  $f(x)$ , неперервної і невід'ємної на відрізьку  $[a; b]$ .*

□ Згідно з пунктом 2.1.6, якщо  $f$  – неперервна і невід'ємна функція на  $[a; b]$ , то інтеграл Рімана  $\int_a^b f(x) dx$ , як і  $NL$ -інтеграл, виражає собою площу криволінійної трапеції, тобто фігури, обмеженої графіком функції  $f$ , віссю  $OX$  і прямими  $x = a$  та  $x = b$ .

Покажемо, як зобразити у програмі Maxima заповнену кольором криволінійну трапецію. Це робиться за допомогою пакету `draw`. Наприклад, для зображення криволінійної трапеції, обмеженої графіком фун-

кції  $x \sin x$ ,  $x \in [0; \pi]$ , досить ввести набір команд

```
(%i1) load(draw)$
      draw2d(fill_color=magenta,
            filled_func=true,
            explicit(x*sin(x),x,0,%pi),
            line_width=5,
            filled_func=false,
            explicit(x*sin(x),x,0,%pi));
```

У результаті буде побудовано рисунок 2.1.6:

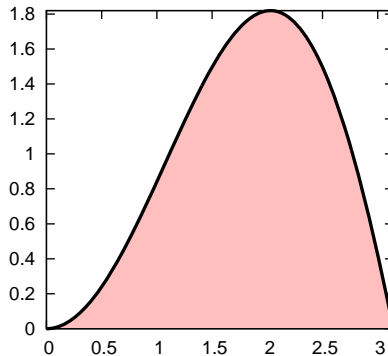


Рис. 2.1.6.

Існує ще багато налаштувань зображень, про які можна дізнатися у довідці системи Maxima. ■

**2.1.11.3. Використання MathCAD.** Створимо робочий аркуш, на якому проілюструємо суть поняття інтеграла Рімана і геометричний зміст інтегральних сум та інтеграла. Для прикладу розглянемо функцію  $f(x) = x(1 + \sin x)$  на відрізку  $[a; b] = [0; 3\pi]$ . Цей відрізок розбиватимемо на  $n$  рівних частин точками  $x_k$ , а в якості проміжних точок  $c_k$  вибиратимемо серединні точки відрізків розбиття.

$$f(x) := x \cdot (1 + \sin(x)) \quad a := 0 \quad b := 3 \cdot \pi \quad n := 6 \quad k := 0..n$$

$$x(k) := a + k \cdot \frac{b-a}{n} \quad c(k) := \frac{x(k) + x(k+1)}{2} \quad \Delta x(k) := x(k+1) - x(k)$$

$$S(n) := \sum_{k=0}^{n-1} (f(c(k)) \cdot \Delta x(k)) \quad I := \int_a^b f(x) dx \quad \delta := \frac{|S(n) - I|}{I} \cdot 100$$

Побудувавши інтегральну суму  $S_n$ , обчислимо її значення і порівняємо з точним (у межах заданої точності) значенням інтеграла  $I$  та обчислимо відносну похибку  $\delta$  (%) наближеної рівності  $S(n) \approx I$ .

$$S(n) = 54.882 \quad I = 53.838 \quad \delta = 1.938$$

Побудуємо рисунок, ввівши по осі ординат  $f(c(k))$ ,  $f(t)$ , а по осі абсцис  $c(k)$ ,  $t$  і задавши у чорних квадратах межі  $a$  та  $b$  для змінної  $t$  (рис. 2.1.7).

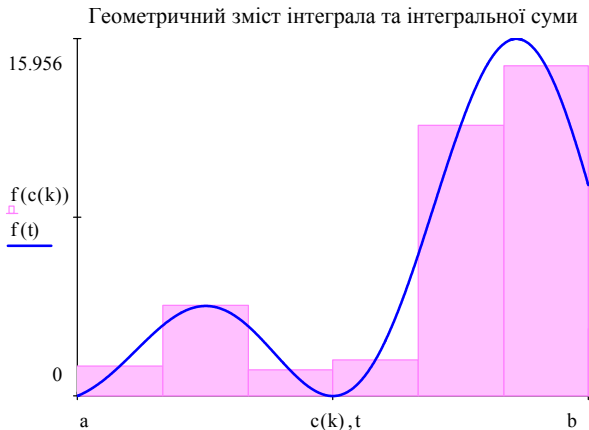


Рис. 2.1.7.

Для того щоб графік став таким, як на рис. 2.1.7, потрібно: 1) увійти до його контекстного меню, 2) вибрати Форматування..., 3) на вкладці “Осі X-Y” познімати всі галочки й вибрати стиль осей “що перетинаються”, 4) на вкладці “Графіки” задати тип першої лінії “панель заповнень”, а також вибрати бажані колір і товщину ліній; 5) на вкладці “Підписи” задати заголовок рисунка.

За допомогою створеного робочого аркуша можна проілюструвати, як зростає точність наближення  $S(n)$  до  $I$  при збільшенні  $n$ . Так, поклавши  $n := 20$ , дістанемо

$$S(n) = 53.926 \quad I = 53.838 \quad \delta = 0.163$$

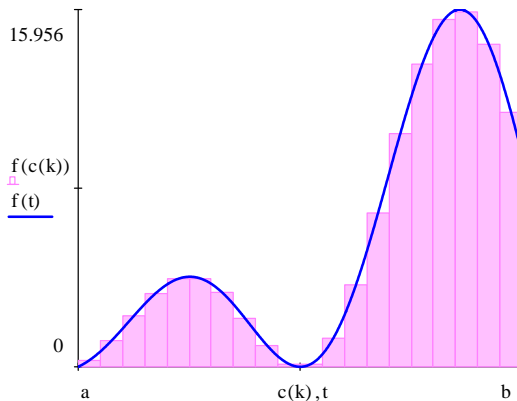


Рис. 2.1.8.

З рис. 2.1.8 видно, наскільки точнішим стало наближення при дрібнішому розбитті. Так само легко можна змінити відрізок  $[a; b]$  чи навіть функцію  $f(x)$  і миттєво побачити результати.

Наведемо ще одну ілюстрацію, яку можна виконати в MathCAD, – це обчислення інтеграла Рімана як границі послідовності інтегральних сум та порівняння її з точним значенням.

Щоб номер  $n$  можна було спрямовувати до нескінченності, треба його зробити вільною змінною. Тому внесемо потрібні зміни у попередні формули і створимо новий аркуш.

$$\begin{aligned} f(x) &:= x \cdot (1 + \sin(x)) & a &:= 0 & b &:= 3 \cdot \pi \\ x(k, n) &:= a + k \cdot \frac{b-a}{n} & c(k, n) &:= \frac{x(k, n) + x(k+1, n)}{2} \\ \Delta x(k, n) &:= x(k+1, n) - x(k, n) \\ S(n) &:= \sum_{k=0}^{n-1} (f(c(k, n)) \cdot \Delta x(k, n)) \\ \lim_{n \rightarrow \infty} S(n) \text{ simplify} &\rightarrow \frac{3 \cdot \pi \cdot (3 \cdot \pi + 2)}{2} & \int_a^b f(x) dx &\rightarrow \frac{3 \cdot \pi \cdot (3 \cdot \pi + 2)}{2} \end{aligned}$$

**2.1.12. Історичні відомості.** Поняття визначеного інтеграла виникло у зв'язку з практичними потребами вимірювання площ та об'ємів. Вже за 2000 років до н. е. єгипетські та вавилонські вчені вмiли наближено обчислювати площі та об'єми деяких фігур.

Задачу теоретичного обґрунтування правил вимірювання площ та об'ємів вперше сформулювали давньогрецькі вчені. Великий вклад у розв'язання цієї задачі внесли Демокріт з Абдер (460–370 рр. до н. е.), Гіппократ Хіоський (друга половина 5 сторіччя до н. е.), Антифонт (друга половина 5 сторіччя до н. е.), Евдокс Кнідський (біля 408–355 до н. е.) і особливо Архімед (біля 287–212 до н. е.), який фактично першим розглянув інтегральні суми.

Ідеї Архімеда відродили та розвинули математики в XVII сторіччі і серед них Йоган Кеплер (1571–1630), Бонавентуро Кавальєрі (1598–1647), Еванджеліста Торрічеллі (1608–1847), Джон Валліс (1616–1703), Блез Паскаль (1626–1662), П'єр Ферма (1601–1665), П'єтро Менголі (1625–1686), Джеймс Грегорі (1638–1675) та інші.

Г. Лейбніц та І. Ньютон завершили ці дослідження, створивши диференціальне та інтегральне числення.

Перше означення інтеграла як границі інтегральної суми ввів О. Коші. Йому належить також теорема про інтегровність неперервної функції.

Інтегральні суми Коші мають вигляд  $S_n(f) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(a + \frac{b-a}{n} \cdot k)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Узагальнення інтегральних сум Коші та інтеграла Коші належать німецькому математику Георгу Фрідріху Бернгарду Ріману (1826–1866). Йому, а також французьким математикам Жану Дарбу (1842–1917), Паулю Дюбуа-Реймону (1831–1889) і Анрі Лебегу (1875–1941) належать

різні форми необхідних і достатніх умов  $R$ -інтегровності функції на відрізьку.

**2.1.13. Зв'язок із шкільним курсом математики.** Поняття визначеного інтеграла може вивчатися в класах з поглибленим вивченням математики, оскільки воно є одним з найважливіших математичних понять і має численні застосування.

**2.1.14. Постановка проблем.** Припустимо, що множину  $E$  точок розриву функції  $f$  на відрізьку  $[a; b]$  можна покрити зчисленною множиною відрізьків  $[a_k; b_k]$ ,  $k \in \mathbb{N}$ :  $E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} [a_k; b_k]$ , суму довжин яких можна зробити як завгодно малою. Чи можна при цьому стверджувати про  $R$ -інтегровність функції  $f$  на  $[a; b]$ ? Наскільки багатою може бути множина точок розриву функції  $f$ , що є  $R$ -інтегровою на  $[a; b]$ ?

**2.1.15. Контрольні запитання і завдання.**

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Будь-яка інтегральна сума залежить від розбиття  $T$  і від способу вибору проміжних точок.
2. Існує функція  $f$ , для якої інтегральна сума  $S(T, X^*)$  не залежить ні від розбиття  $T$ , ні від способу вибору проміжних точок  $x_k^*$ .
3. Границя інтегральної суми  $S(T, X^*)$  залежить від способу розбиття  $T$  і від способу вибору проміжних точок  $x_k^*$ .
4. Число  $I$  є визначеним інтегралом функції  $f$  на відрізьку  $[a; b]$ , якщо для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує розбиття  $T$  відрізька  $[a; b]$  таке, що  $|S(T, X^*) - I| < \varepsilon$  для будь-якого способу вибору проміжних точок  $x_k^*$ .
5. Якщо  $f \in R[a; b]$ , то  $f \in NL[a; b]$ .
6. Якщо  $f \in R[a; b] \cap NL[a; b]$ , то  $(R) \int_a^b f(x) dx = (NL) \int_a^b f(x) dx$ .
7. Кожна  $R$ -інтегровна на  $[a; b]$  функція  $f$  є неперервною на  $[a; b]$ .
8. Якщо  $f \in R[a; b]$  і  $F$  – первісна  $f$  на  $[a; b]$ , то  $(R) \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .
9. Кожна обмежена на  $[a; b]$  функція є  $R$ -інтегровою на  $[a; b]$  і навпаки.
10. Будь-яка сума Дарбу функції  $f$  є інтегральною сумою цієї функції.
11. Твердження 10 є правильним, коли  $f$  – монотонна або неперервна на  $[a; b]$ .

12. Будь-яка нижня сума Дарбу функції  $f$  є меншою за будь-яку верхню суму Дарбу цієї функції.
13. Якщо для деяких розбиття  $T$  та розбиття  $T'$  відрізка  $[a; b]$  суми Дарбу функції  $f$  рівні між собою:  $S_*(T) = S^*(T')$ , то й інтеграли Дарбу рівні між собою:  $I_* = I^*$  і  $f \in R[a; b]$ .
14. Якщо  $f \in R[a; b]$ , то  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \max_{0 \leq k \leq n-1} \omega_k(f) = 0$ .
15. Твердження, обернене до 14, є правильним.
16. Якщо послідовність  $(x_n)$  є строго монотонною, то множина  $E = \{x_n: n \in \mathbb{N}\}$  є множиною з нульовою довжиною.
17. Кожна зчисленна обмежена множина є множиною з нульовою довжиною.
18. Якщо  $f \in R[a; b]$ , то  $f$  є або монотонною функцією на  $[a; b]$ , або кількість її точок розриву на  $[a; b]$  скінченна.
19. Якщо  $f \in R[a; b]$ , то  $\operatorname{Re} f$  та  $\operatorname{Im} f \in R[a; b]$ , а
 
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x) dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) dx.$$
20. Якщо функція  $f$  є  $R$ -інтегрованою на  $[a; b]$ , то вона і  $NL$ -інтегровна на  $[a; b]$ .
21. Твердження, обернене до попереднього, є правильним.

## II. Довести дані твердження.

1. Якщо  $f$  – дійсна функція, обмежена на  $[a; b]$ , то  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S_*(T) = I_*$  і  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S^*(T) = I^*$  (**теорема Дарбу**).
2. Якщо  $f \in R[a; b]$ , а  $\varphi(x) = f(x) \forall x \in (a; b)$ , то  $\varphi \in R[a; b]$  і
 
$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b f(x) dx.$$
3. Якщо  $f$  монотонна на  $[0; 1]$ , то  $\exists H > 0$ :

$$\left| \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \frac{H}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

4. Функція Рімана

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n}, & \text{коли } x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, \end{cases}$$

є  $R$ -інтегрованою на довільному відрізку  $[a; b]$ . Знайти множину точок розриву цієї функції на відрізку  $[a; b]$  і визначити, чи буде вона множиною з нульовою довжиною.



III. Наступні задачі розв'язати за допомогою комп'ютерних засобів математики.

1. Зобразити криволінійну трапецію для заданої функції  $f$  і відповідні східчасті фігури  $\Phi_*$  та  $\Phi^*$  і проілюструвати поведінку цих фігур при збільшенні кількості точок розбиття.
2. Для заданої функції обчислити її інтегральну суму і проілюструвати зміну цієї суми при зміні проміжних точок.
3. Для заданої функції обчислити її верхню і нижню суми Дарбу і проілюструвати зміну цих сум при зменшенні дрібності розбиття.

## 2.2. Основні властивості $R$ -інтеграла

У даному підрозділі доведено властивості  $R$ -інтеграла, одні з яких такі самі за формою, як і відповідні властивості  $NL$ -інтеграла, а інші виявляються відмінними від відповідних властивостей  $NL$ -інтеграла.

**2.2.1.  $R$ -інтегровність сталої функції, лінійність та монотонність  $R$ -інтеграла.** Розглянемо спочатку властивості визначеного інтеграла ( $R$ -інтеграла), які досить легко випливають з його означення. Деякі з них нагадують відповідні властивості  $NL$ -інтеграла, що природно внаслідок теореми 2 пункту 2.1.5.

Враховуючи, що  $f \in R[a; b] \Leftrightarrow \operatorname{Re} f \in R[a; b]$  та  $\operatorname{Im} f \in R[a; b]$ , причому

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \operatorname{Re} f(x) dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) dx,$$

вважатимемо надалі, що  $f$  – дійсна функція.

**Властивість 1** (про  $R$ -інтеграл сталої функції). *Якщо  $f(x) = c$   $\forall x \in [a; b]$ , то  $\int_a^b f(x) dx = c(b-a)$ . Зокрема,  $\int_a^b 0 dx = 0$ ,  $a \int_a^b 1 dx = b - a$ .*

**Властивість 2** (про лінійність  $R$ -інтеграла). *Якщо  $f \in R[a; b]$  і  $\varphi \in R[a; b]$ , то для будь-яких чисел  $\alpha$  і  $\beta$  функція  $\alpha f + \beta \varphi \in R[a; b]$  і має місце рівність*

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta \varphi(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b \varphi(x) dx. \quad (1)$$

**Властивість 3** (про монотонність  $R$ -інтеграла). Якщо  $f \in R[a; b]$  і  $\varphi \in R[a; b]$ , причому  $f(x) \geq \varphi(x) \forall x \in [a; b]$ , то  $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b \varphi(x) dx$ . Зокрема, якщо  $f(x) \geq 0$ , то  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ , коли  $f \in R[a; b]$ .

Метод доведення сформульованих властивостей проілюструємо на прикладі властивості лінійності  $R$ -інтеграла.

□ Розглянемо довільне розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$ . Тоді

$$\begin{aligned} S(\alpha f + \beta \varphi, T) &= \sum_{k=0}^{n-1} (\alpha f(c_k) + \beta \varphi(c_k)) \Delta x_k = \\ &= \alpha \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \Delta x_k + \beta \sum_{k=0}^{n-1} \varphi(c_k) \Delta x_k = \alpha S(f, T) + \beta S(\varphi, T). \end{aligned}$$

Оскільки  $f$  і  $\varphi \in R[a; b]$ , то права, а отже і ліва, частина останньої рівності прямує до числа  $I = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b \varphi(x) dx$ , коли  $\lambda(T) \rightarrow 0$ . Отже існує границя

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(\alpha f + \beta \varphi, T) = I = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b \varphi(x) dx,$$

а тому за означенням  $R$ -інтеграла  $\alpha f + \beta \varphi \in R[a; b]$  і має місце рівність (1). ■

Властивості 1 та 3 доводяться аналогічно.

### 2.2.2. $R$ -інтегровність модуля функції та добутку функцій.

Доведення наступних властивостей вимагатиме використання не тільки означення  $R$ -інтеграла, але й деяких інших тверджень, зокрема критеріїв  $R$ -інтегровності.

Нехай функція  $f \in R$ -інтегровою на  $[a; b]$ . Виникає питання: чи є  $R$ -інтегровою на  $[a; b]$  і функція  $|f|$ ?

□ Щоб відповісти на це питання, застосуємо перший критерій  $R$ -інтегровності.

Зрозуміло, що  $|f|$  є обмеженою функцією на  $[a; b]$ , оскільки  $f$  є такою функцією. За першим критерієм  $R$ -інтегровності

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k = 0.$$

Оцінимо суму  $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(|f|) \Delta x_k$ . Маємо:

$$\begin{aligned} \omega_k(|f|) &= \sup_{[x_k; x_{k+1}]} |f(x)| - \inf_{[x_k; x_{k+1}]} |f(x)| \leq \\ &\leq |f(x_k^*)| + \frac{\varepsilon}{2} - |f(x_k^{**})| + \frac{\varepsilon}{2} \leq \\ &\leq \left| |f(x_k^*)| - |f(x_k^{**})| \right| + \varepsilon \leq |f(x_k^*) - f(x_k^{**})| + \varepsilon, \end{aligned}$$

де точки  $x_k^*$  та  $x_k^{**} \in [x_k; x_{k+1}]$  знайдуться для довільного фіксованого числа  $\varepsilon > 0$  за властивостями супремуму та інфімуму.

Далі, якщо  $f(x_k^*) - f(x_k^{**}) \geq 0$ , то

$$\begin{aligned} |f(x_k^*) - f(x_k^{**})| &= f(x_k^*) - f(x_k^{**}) \leq \\ &\leq \sup_{[x_k; x_{k+1}]} f(x) - \inf_{[x_k; x_{k+1}]} f(x) = \omega_k(f) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\omega_k(|f|) \leq \omega_k(f) + \varepsilon.$$

Те саме дістаємо, коли  $f(x_k^*) - f(x_k^{**}) < 0$ . Отже,

$$\omega_k(|f|) \leq \omega_k(f) + \varepsilon$$

і внаслідок довільності  $\varepsilon > 0$  звідси випливає, що

$$\omega_k(|f|) \leq \omega_k(f) \quad \forall k \in \overline{0, n-1}.$$

Тому

$$0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(|f|) \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k \rightarrow 0,$$

коли  $\lambda(T) \rightarrow 0$ , тобто  $|f| \in R[a; b]$ .

Тепер, якщо в нерівності

$$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \Delta x_k \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(c_k)| \Delta x_k$$

перейти до границі, коли  $\lambda(T) \rightarrow 0$ , то дістанемо нерівність

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx. \quad \blacksquare \quad (2)$$

Отже, доведено наступну властивість.

**Властивість 4** (про  $R$ -інтегровність  $|f|$ ). Якщо функція  $f \in R[a; b]$ , то  $|f| \in R[a; b]$  і правильна нерівність (2).

З властивості лінійності  $R$ -інтеграла випливає, що сума й різни-

ця двох  $R$ -інтегровних функцій також є  $R$ -інтегровоною функцією. Природно виникає питання про  $R$ -інтегровність добутку двох  $R$ -інтегровних функцій.

□ Нехай  $f \in R[a; b]$  і  $\varphi \in R[a; b]$ . Тоді  $\exists H > 0$ :  $|f(x)| \leq H$  і  $|\varphi(x)| \leq H \forall x \in [a; b]$ . За першим критерієм  $R$ -інтегровності

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(\varphi) \Delta x_k = 0.$$

Розглянемо  $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f\varphi) \Delta x_k$ . Маємо:

$$\begin{aligned} \omega_k(f\varphi) &= \sup_{[x_k; x_{k+1}]} f(x)\varphi(x) - \inf_{[x_k; x_{k+1}]} f(x)\varphi(x) \leq \\ &\leq f(x_k^*)\varphi(x_k^*) + \frac{\varepsilon}{2} - f(x_k^{**})\varphi(x_k^{**}) + \frac{\varepsilon}{2} = \\ &= f(x_k^*)(\varphi(x_k^*) - \varphi(x_k^{**})) + \varphi(x_k^{**})(f(x_k^*) - f(x_k^{**})) + \varepsilon \leq \\ &\leq H\omega_k(\varphi) + H\omega_k(f) + \varepsilon, \end{aligned}$$

де  $\varepsilon > 0$  – довільне фіксоване число, а точки  $x_k^* \in [x_k; x_{k+1}]$  та  $x_k^{**} \in [x_k; x_{k+1}]$  існують за властивостями супремуму та інфімуму. Отже,

$$\omega_k(f\varphi) \leq H(\omega_k(f) + \omega_k(\varphi)) + \varepsilon$$

і внаслідок довільності  $\varepsilon > 0$  маємо

$$\begin{aligned} \omega_k(f\varphi) &\leq H(\omega_k(f) + \omega_k(\varphi)) \quad \forall k \in \overline{0, n-1} \Rightarrow \\ 0 &\leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f\varphi) \Delta x_k \leq H \left( \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k + \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(\varphi) \Delta x_k \right) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

коли  $\lambda(T) \rightarrow 0$ . Таким чином,  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f\varphi) \Delta x_k = 0$  і за першим критерієм  $R$ -інтегровності функція  $f\varphi \in R[a; b]$ . Зокрема, функції  $f^2$  та  $\varphi^2 \in R[a; b]$ , коли  $f$  і  $\varphi \in R[a; b]$ .

Скористаємось тепер нерівністю Коші – Буняковського для сум:

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| |b_k| \leq \left( \sum_{k=0}^{n-1} a_k^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=0}^{n-1} b_k^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

і дістанемо:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{n-1} f(c_k) \varphi(c_k) \Delta x_k \right| &\leq \sum_{k=0}^{n-1} |f(c_k) \sqrt{\Delta x_k}| |\varphi(c_k) \sqrt{\Delta x_k}| \leq \\ &\leq \left( \sum_{k=0}^{n-1} f^2(c_k) \Delta x_k \right)^{\frac{1}{2}} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \varphi^2(c_k) \Delta x_k \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Якщо в останній нерівності спрямувати  $\lambda(T)$  до нуля, то дістанемо:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \right| &\leq \int_a^b |f(x) \varphi(x)| dx \leq \\ &\leq \left( \int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b \varphi^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3) \end{aligned}$$

– інтегральну нерівність Коші – Буняковського. ■

Таким чином, доведено наступну властивість.

**Властивість 5** (про  $R$ -інтегровність добутку функцій). *Якщо функції  $f$  та  $\varphi \in R[a; b]$ , то  $f\varphi \in R[a; b]$  і має місце нерівність (3). Зокрема, якщо  $\varphi(x) = 1 \forall x \in [a; b]$ , то*

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx \leq (b-a)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b f^2(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Аналогічно можна дослідити твердження властивостей 4 і 5 для комплекснозначних функцій та для  $NL$ -інтеграла.

**2.2.3. Теорема про середнє.** Розглянемо ще одну властивість, пов'язану з  $R$ -інтегралом від добутку двох функцій.

□ Нехай  $f$  і  $g \in R[a; b]$ ,  $g(x) \geq 0$ , а  $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a; b]$ . Тоді  $mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x) \forall x \in [a; b]$  і за властивостями монотонності та лінійності  $R$ -інтеграла маємо:

$$m \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq M \int_a^b g(x) dx.$$

Припустимо, що  $\int_a^b g(x) dx > 0$ . Тоді

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} \leq M \Rightarrow \exists m^* \in [m; M]: \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx} = m^*.$$

Число  $m^*$  називають *середньозваженим функції  $f$  на відрізьку  $[a; b]$* , а функцію  $g$  при цьому називають *ваговою функцією*. Зокрема, якщо функція  $f \in C[a; b]$ , то за теоремою про проміжні значення неперервної функції  $\exists x^* \in [a; b]: m^* = f(x^*)$ .

Тому  $f(x^*) = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}$ . Якщо при цьому  $g(x) = 1 \forall x \in [a; b]$ , то  $f(x^*) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$  – так зване *середнє значення неперервної функції  $f$  на відрізьку  $[a; b]$* . ■

Отже, доведено наступну властивість.

**Властивість 6** (теорема про середнє). Нехай  $f \in R[a; b]$  і  $g \in R[a; b]$ ,  $g(x) \geq 0$  і  $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a; b]$ . Тоді якщо  $\int_a^b g(x) dx > 0$ , то  $\exists m^* \in [m; M]$ :

$$m^* = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}.$$

Зокрема, якщо функція  $f \in C[a; b]$ , то  $\exists x^* \in [a; b]$ :

$$f(x^*) = \frac{\int_a^b f(x)g(x) dx}{\int_a^b g(x) dx}.$$

Якщо, крім того,  $g(x) = 1 \forall x \in [a; b]$ , то

$$f(x^*) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Теорема про середнє має простий геометричний зміст: площа

криволінійної трапеції  $\Phi = \{(x; y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$  дорівнює площі прямокутника  $P$ , основою якого є відрізок  $[a; b]$ , а висота дорівнює  $f(x^*)$ , тобто  $P = \{(x; y): a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x^*)\}$  і  $S(P) = \int_a^b f(x) dx = f(x^*)(b - a)$  (рис. 2.2.1).

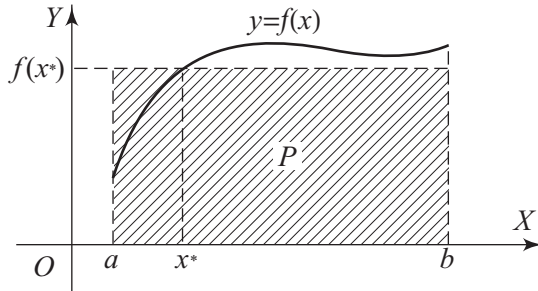


Рис. 2.2.1.

**2.2.4. Адитивність  $R$ -інтеграла.** Припустимо, що функція  $f$  є  $R$ -інтегрованою на відрізку  $[a; b]$ . Зафіксуємо довільну точку  $c \in (a; b)$  і встановимо, чи є функція  $f$   $R$ -інтегрованою на відрізках  $[a; c]$  і  $[c; b]$ .

□ Зрозуміло, що  $f$  обмежена на  $[a; c]$  і  $[c; b]$ , оскільки вона обмежена на  $[a; b]$ . Розглянемо розбиття  $T'_n$  відрізка  $[a; c]$  і  $T''_n$  відрізка  $[c; b]$  такі, що  $\lambda(T'_n) \rightarrow 0$  і  $\lambda(T''_n) \rightarrow 0$ , коли  $n \rightarrow \infty$ . Тоді  $T_n = T'_n \cup T''_n$  є розбиттям відрізка  $[a; b]$  і

$$\lambda(T_n) = \max\{\lambda(T'_n), \lambda(T''_n)\} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Тому за другим критерієм  $R$ -інтегровності

$$S^*(T_n) - S_*(T_n) = \sum_{k=0}^{m_n-1} \omega_k \Delta x_k \rightarrow 0, \quad \text{коли } n \rightarrow \infty.$$

Оскільки

$$S^*(T'_n) - S_*(T'_n) = \sum_{k=0}^{m'_n-1} \omega_k \Delta x_k \leq \sum_{k=0}^{m_n-1} \omega_k \Delta x_k,$$

де  $m'_n$  – номер точки  $c$  в розбитті  $T_n$ , то  $S^*(T'_n) - S_*(T'_n) \rightarrow 0$ , коли  $n \rightarrow \infty$ . Тому за другим критерієм  $R$ -інтегровності функція  $f \in R[a, c]$ . Аналогічно переконаємося, що  $f \in R[c, b]$ .

Нехай тепер  $f \in R[a, c]$  і  $f \in R[c, b]$ . Тоді введені вище розбиття  $T'_n$  і  $T''_n$  визначають розбиття  $T_n = T'_n \cup T''_n$  відрізка  $[a; b]$ , для

якого

$$S^*(T'_n) - S_*(T'_n) = \sum_{k=0}^{m'_n-1} \omega_k \Delta x_k = \sum_{k=0}^{m'_n-1} \omega_k \Delta x_k + \sum_{k=m'_n}^{m_n-1} \omega_k \Delta x_k =$$

$$= (S^*(T'_n) - S_*(T'_n)) + (S^*(T''_n) - S_*(T''_n)) \rightarrow 0, \text{ коли } n \rightarrow \infty,$$

оскільки  $S^*(T'_n) - S_*(T'_n) \rightarrow 0$  і  $S^*(T''_n) - S_*(T''_n) \rightarrow 0$ . Звідси за другим критерієм  $R$ -інтегровності функція  $f \in R[a; b]$ .

Отже,  $f \in R[a; b] \Leftrightarrow f \in R[a; c]$  і  $f \in R[c; b]$ .

Якщо тепер для заданого розбиття  $T_n = T'_n \cup T''_n$  скласти інтегральну суму

$$S(T_n) = \sum_{k=0}^{m_n-1} f(c_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{m'_n-1} f(c_k) \Delta x_k +$$

$$+ \sum_{k=m'_n}^{m_n-1} f(c_k) \Delta x_k = S(T'_n, M'_n) + S(T''_n, M''_n),$$

то останні два доданки є інтегральними сумами, складеними для функції  $f$  та розбиттів  $T'_n$  і  $T''_n$  відрізків  $[a; c]$  і  $[c; b]$ . Тому, якщо в останній рівності перейти до границі, коли  $n \rightarrow \infty$ , то дістанемо

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad \blacksquare$$

Таким чином, доведено наступну властивість.

**Властивість 7** (адитивність  $R$ -інтеграла). *Нехай  $c$  – довільна фіксована точка з інтервалу  $(a; b)$ . Тоді для того, щоб  $f \in R[a; b]$ , необхідно й досить, щоб  $f \in R[a; c]$  і  $f \in R[c; b]$ . При цьому*

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

Адитивну властивість  $R$ -інтеграла можна дещо узагальнити. Для цього введемо два означення:

$$\int_a^a f(x) dx := 0 \quad \text{і} \quad \int_b^a f(x) dx := - \int_a^b f(x) dx, \quad \text{коли } b < a.$$

Тепер легко довести наступну властивість.

**Властивість 7\*** (узагальнена адитивність  $R$ -інтеграла). *Якщо  $f \in R[a; b]$ , то для будь-яких точок  $\alpha, \beta$  і  $\gamma$  з відрізка  $[a; b]$  має*



місце рівність

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x) dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x) dx. \quad (4)$$

При цьому

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| dx \right| \leq H|\beta - \alpha|,$$

де  $H = \sup_{[a;b]} |f(x)|$ .

Методом математичної індукції можна легко узагальнити рівність (4) на випадок довільної кількості точок  $x_k \in [a; b]$ ,  $k \in \overline{0, m}$ :

$$\int_{x_0}^{x_m} f(x) dx = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx.$$

**2.2.5. Інтеграл із змінною межею інтегрування.** Розглянемо функцію  $f$ ,  $R$ -інтегровну на відрізку  $[a; b]$ . Зафіксуємо точку  $c \in [a; b]$ . Тоді за властивістю узагальненої адитивності  $R$ -інтеграла  $\forall x \in [a; b]$  існують інтеграли (які є функціями від  $x$ )

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt \quad \text{і} \quad \Phi(x) = \int_x^c f(t) dt.$$

При цьому функції  $F$  та  $\Phi$  називають відповідно *інтегралами з верхньою та нижньою змінними межами інтегрування*.

Дослідимо властивості цих функцій. Оскільки  $\Phi(x) = -F(x)$ , то досить розглянути тільки функцію  $F$ .

□ За необхідною умовою  $R$ -інтегровності  $|f(x)| \leq H \quad \forall x \in [a; b]$ . Тому за властивістю 7\* маємо:

$$\begin{aligned} |F(x') - F(x'')| &= \left| \int_c^{x'} f(t) dt - \int_c^{x''} f(t) dt \right| = \\ &= \left| \int_c^{x'} f(t) dt - \int_c^{x'} f(t) dt - \int_{x'}^{x''} f(t) dt \right| = \\ &= \left| \int_{x'}^{x''} f(t) dt \right| \leq H|x' - x''| \quad \forall x', x'' \in [a; b]. \end{aligned}$$

Таким чином, функція  $F$  задовольняє умову Ліпшица на  $[a; b]$ , а отже є функцією обмеженої варіації на  $[a; b]$  та рівномірно неперервною, а тому і неперервною на відрізку  $[a; b]$ .

Припустимо тепер, що в точці  $x_0 \in [a; b]$  функція  $f$  є неперервною. Тоді якщо  $\Delta x \neq 0$  і  $x_0 + \Delta x \in [a; b]$ , то

$$\begin{aligned} F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) &= \int_c^{x_0 + \Delta x} f(t) dt - \int_c^{x_0} f(t) dt = \\ &= \int_c^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt - \int_c^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt \Rightarrow \\ \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t) dt - \\ - \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(x_0) dt &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} (f(t) - f(x_0)) dt. \end{aligned}$$

Оскільки функція  $f$  є неперервною в точці  $x_0$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon)$ :  $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ , коли  $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ . Звідси, вважаючи  $|\Delta x| < \delta(\varepsilon)$ , дістанемо  $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$ , коли  $|t - x_0| \leq |\Delta x| < \delta$ . Тому

$$\begin{aligned} &\left| \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} - f(x_0) \right| = \\ &= \left| \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} (f(t) - f(x_0)) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{|\Delta x|} |\Delta x| = \varepsilon, \\ \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x_0 + \Delta x) - F(x_0)}{\Delta x} &= f(x_0), \text{ тобто } F'(x_0) = f(x_0). \blacksquare \end{aligned}$$

Отже, доведено наступну властивість.

**Властивість 8** (про інтеграл із змінною верхньою межею).

Нехай  $f \in R[a; b]$ ,  $c \in [a; b]$  і  $F(x) = \int_c^x f(t) dt \forall x \in [a; b]$ . Тоді функція  $F$ :

- 1) задовольняє умову Ліпшица на  $[a; b]$ ;
- 2) є функцією обмеженої варіації на  $[a; b]$ ;
- 3) є неперервною на  $[a; b]$ ;
- 4) диференційовна в кожній точці  $x_0 \in [a; b]$ , в якій функція  $f$  є неперервною, і при цьому  $F'(x_0) = f(x_0)$ . Зокрема, якщо  $f$

неперервна на всьому відріжку  $[a; b]$ , то

$$\left( \int_c^x f(t) dt \right)' = f(x) \quad \forall x \in [a; b].$$

З властивості 8 зокрема впливає твердження про те, що коли  $f$  є неперервною функцією на проміжку  $\langle a; b \rangle$ , то вона має первісну на цьому проміжку, причому однією з первісних функцій  $f$  на  $\langle a; b \rangle$  є функція  $F(x) = \int_c^x f(t) dt$ , де  $c$  – фіксована точка з  $\langle a; b \rangle$ , а  $x$  – біжуча точка з  $\langle a; b \rangle$ .

Нагадаємо, що в пункті 1.2.4 це твердження доведено для випадку відрізка іншим методом.

**2.2.6. Інтегрування функціонального ряду.** На основі властивості лінійності  $R$ -інтеграла методом математичної індукції легко довести, що коли  $f_k \in R[a; b] \quad \forall k \in \overline{1, n}$ , то  $i f = \sum_{k=1}^n f_k \in R[a; b]$ , причому

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sum_{k=1}^n f_k(x) dx = \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x) dx.$$

Після цього природно виникає питання про почленне  $R$ -інтегрування функціонального ряду: коли

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx?$$

Якщо функції  $f_k$  не тільки  $R$ -інтегровні, але й мають первісні, тобто є  $NL$ -інтегровними на  $[a; b]$ , то відповідь на поставлене питання впливає з теореми 5 пункту 1.2.3. Природно чекати, що має місце наступна властивість.

**Властивість 9** (про почленне  $R$ -інтегрування функціонального ряду). Якщо функції  $f_k \in R[a; b]$  і  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx \stackrel{P}{=} f(x)$  (тобто ряд збігається рівномірно) на  $[a; b]$ , то й функція  $f \in R[a; b]$  і

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx.$$

□ Нехай  $F_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ , а число  $\varepsilon > 0$  довільне фіксоване.

Оскільки  $F_n(x) \rightrightarrows f(x)$  на  $[a; b]$ , то  $\exists n_0 = n_0(\varepsilon)$ :

$$|F_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \forall x \in [a; b], \text{ коли } n \geq n_0.$$

Зокрема  $|F_{n_0}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \forall x \in [a; b] \Leftrightarrow$

$$F_{n_0}(x) - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < f(x) < F_{n_0}(x) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \forall x \in [a; b].$$

Звідси випливає обмеженість функції  $f$  на  $[a; b]$ , а також нерівність

$$m - \frac{\varepsilon}{2(b-a)} < f(x) < M + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \forall x \in [\alpha; \beta] \subset [a; b],$$

де  $m = \inf_{[\alpha; \beta]} F_{n_0}(x)$ , а  $M = \sup_{[\alpha; \beta]} F_{n_0}(x)$ . З останньої нерівності дістаємо, що

$$\sup_{[\alpha; \beta]} f(x) - \inf_{[\alpha; \beta]} f(x) < M - m + \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Тому для розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$  точками  $x_i, i \in \overline{0, m}$ , матимемо  $\omega_i(f) \leq \omega_i(F_{n_0}) + \frac{\varepsilon}{b-a} \quad \forall i \in \overline{0, m-1} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} S^*(f, T) - S_*(f, T) &= \sum_{i=0}^{m-1} \omega_i(f) \Delta x_i \leq \\ &\leq \sum_{i=0}^{m-1} \left( \omega_i(F_{n_0}) + \frac{\varepsilon}{b-a} \right) \Delta x_i = \sum_{i=0}^{m-1} \omega_i(F_{n_0}) \Delta x_i + \varepsilon. \end{aligned}$$

Оскільки  $F_{n_0} \in R[a; b]$ , то розбиття  $T = T_p$  можна можна вибрати таким, що і  $\sum_{i=0}^{m-1} \omega_i(F_{n_0}) \Delta x_i < \varepsilon$ . Отже,  $\forall \varepsilon = \frac{1}{p}, p \in \mathbb{N}$ , існує розбиття  $T_p$  відрізка  $[a; b]$  таке, що  $S^*(T_p) - S_*(T_p) \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = \frac{2}{p}$  і  $\lambda(T_p) < \frac{1}{p}$ . Таким чином, існує послідовність  $(T_p)$  розбиттів відрізка  $[a; b]$ , для якої  $\lambda(T_p) \rightarrow 0$  і  $(S^*(T_p) - S_*(T_p)) \rightarrow 0$ , коли  $p \rightarrow \infty$ , а тому за другим критерієм  $R$ -інтегровності  $f \in R[a; b]$ .

Далі маємо:

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b F_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b (F_n(x) - f(x)) dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |F_n(x) - f(x)| dx \leq \sup_{[a; b]} |F_n(x) - f(x)| (b-a) \rightarrow 0, \end{aligned}$$

коли  $n \rightarrow \infty$ . Це означає, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b F_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ , тобто

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \sum_{k=1}^n f_k(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x) dx = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**2.2.7. Формули заміни змінної та інтегрування частинами для  $R$ -інтеграла.** На завершення даного підрозділу розглянемо формули заміни змінної та інтегрування частинами для  $R$ -інтеграла.

□ Нехай функція  $f$  неперервна на проміжку  $\langle A; B \rangle$ , а функція  $\varphi$  має на відрізку  $[\alpha; \beta]$   $R$ -інтегровну похідну  $\varphi'$ , причому  $\varphi(t) \in \langle A; B \rangle \forall t \in [\alpha; \beta]$ ,  $\varphi(\alpha) = a$  і  $\varphi(\beta) = b$ .

Тоді функція  $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$  є  $R$ -інтегровною на відрізку  $[\alpha; \beta]$  як добуток інтегровних функцій. При цьому, якщо  $F$  є первісною функції  $f$  на проміжку  $\langle A; B \rangle$ , то  $F \circ \varphi$  є первісною функції  $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$  на  $[\alpha; \beta]$ . Тому

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt &= F(\varphi(t)) \Big|_{\alpha}^{\beta} = \\ &= F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Отже, для визначеного інтеграла ( $R$ -інтеграла)  $\int_a^b f(x) dx$  має місце *формула заміни змінної*:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a=\varphi(\alpha)}^{b=\varphi(\beta)} f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Ця формула є правильною і тоді, коли  $f \in R[a; b]$  (і не обов'язково є неперервною на  $[a; b]$ ), але при цьому  $\varphi$  має на  $[\alpha; \beta]$  неперервну і невід'ємну (неодатну) похідну  $\varphi'$ . ■

□ Нехай функції  $u$  і  $v$  диференційовні на  $[a; b]$ , причому  $u'v$  і  $uv'$  є  $R$ -інтегровними функціями на  $[a; b]$ .

Тоді функція  $(uv)' = u'v + uv' \in R$ -інтегрованою і  $NL$ -інтегрованою на  $[a; b]$ , а тому за формулою Ньютона – Лейбніца та за властивістю лінійності маємо:

$$\begin{aligned} \int_a^b u(x)v'(x) dx + \int_a^b v(x)u'(x) dx &= \\ &= \int_a^b (u(x)v(x))' dx = u(x)v(x)|_a^b. \end{aligned}$$

Звідси випливає *формула інтегрування частинами для  $R$ -інтеграла*:

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx. \quad \blacksquare$$

**Приклад.** Розглянемо інтеграл  $I = \int_0^a (a^2 - x^2)^n dx$ . Використовуючи формулу заміни змінної, матимемо:

$$\begin{aligned} I &= \left| \begin{array}{l} x = a \sin t \Rightarrow dx = a \cos t dt \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = a \Rightarrow t = \frac{\pi}{2} \end{array} \right| = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (a^2 - a^2 \sin^2 t)^n a \cos t dt = a^{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt. \end{aligned}$$

Обчислимо окремо інтеграл  $I_m = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t dt \quad \forall m \in \mathbb{N}$ . Застосуємо до нього формулу інтегрування частинами:

$$\begin{aligned} I_m &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-1} t \cos t dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = \cos^{m-1} t, \quad du = (m-1) \cos^{m-2} t \sin t dt \\ dv = \cos t dt, \quad v = \sin t \end{array} \right| = \\ &= \cos^{m-1} t \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (m-1) \cos^{m-2} t \sin^2 t dt = \\ &= (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-2} t (1 - \cos^2 t) dt = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -(m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t + (m-1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{m-2} t dt = \\
 &= -(m-1)I_m + (m-1)I_{m-2}.
 \end{aligned}$$

Отже,

$$\begin{aligned}
 I_m &= -(m-1)I_m + (m-1)I_{m-2} \Rightarrow \\
 mI_m &= (m-1)I_{m-2} \Rightarrow I_m = \frac{m-1}{m}I_{m-2}.
 \end{aligned}$$

Тому

$$I_m = \begin{cases} \frac{2k-1}{2k} \cdot \frac{2k-3}{2k-2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2} \cdot I_0, & \text{коли } m = 2k, \\ \frac{2k}{2k+1} \cdot \frac{2k-2}{2k-1} \cdot \dots \cdot \frac{2}{3} \cdot I_1, & \text{коли } m = 2k+1. \end{cases}$$

Оскільки  $I_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 dt = \frac{\pi}{2}$ , а  $I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t dt = \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$ , то

$$I_m = \begin{cases} \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, & \text{коли } m = 2k, \\ \frac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & \text{коли } m = 2k+1. \end{cases}$$

Аналогічно можна обчислити інтеграл  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t dt$ .

Повертаючись до інтеграла  $I = \int_0^a (a^2 - x^2)^n dx$ , дістаємо

$$I = a^{2n+1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n+1} t dt = a^{2n+1} \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}.$$

**2.2.8. Використання комп'ютерних засобів математики.** У даній темі СКМ можна використати для ілюстрування основних властивостей інтеграла Рімана, а також для обчислення визначених інтегралів методами заміни змінної та інтегрування частинами.

**2.2.8.1. Використання Gran1.** Програму Gran1 можна використати для ілюстрування основних властивостей інтеграла Рімана. Розглянемо приклади розв'язування задач такого типу.

1. Дано фігури  $\Phi_1 = \{(x, y): x \in [-1; 2], 0 \leq y \leq 2^{-|x|}\}$  і  $\Phi_2 = \{(x, y): x \in [-1; 2], 0 \leq y \leq 3 \cdot 2^{-|x|}\}$ . Потрібно зобразити ці фігури на одному рисунку, знайти площі  $S_1$  та  $S_2$  цих фігур і відношення  $S_2 : S_1$ .

Спочатку задаємо функції та будуємо їхні графіки (рис. 2.2.2).

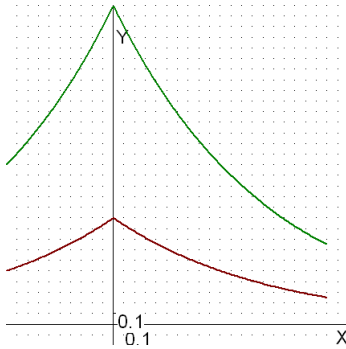


Рис. 2.2.2.

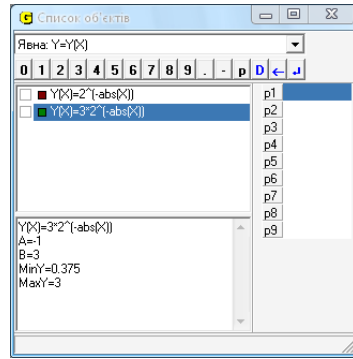


Рис. 2.2.3.

Далі у вікні “Список об’єктів” (рис. 2.2.3) по черзі ставимо мітки проти першої, а потім проти другої функції та обчислюємо їхні інтеграли із занесенням до відповідей. У результаті буде заштриховано фігури  $\Phi_1$  (рис. 2.2.4) і  $\Phi_2$  (рис. 2.2.5) та обчислено їхні площі (рис. 2.2.6).

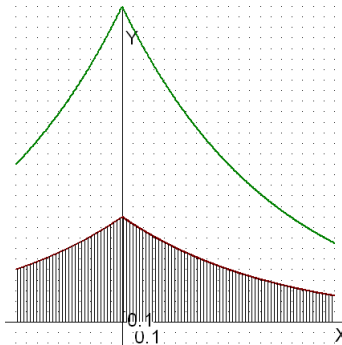


Рис. 2.2.4.

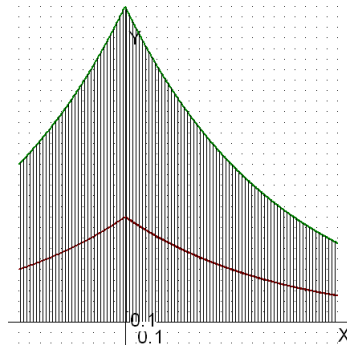


Рис. 2.2.5.

Після цього за допомогою калькулятора ділимо другий інтеграл на перший і цим самим знаходимо відношення площ  $S_2 : S_1 = 5.95112/1.98371 = 2.99999$ . Робимо висновок, що при розтягненні фігури у 3 рази її площа теж збільшується утричі. Похибка в  $10^{-6}$  пов’язана з тим, що при обчисленнях за допомогою комп’ютера використовуються не точні дійсні числа, а їхні десяткові наближення.

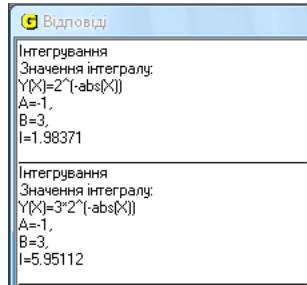


Рис. 2.2.6.

2. Дано фігури  $\Phi_1 = \{(x, y): x \in [0; \pi], 0 \leq y \leq \sin x\}$  та  $\Phi_2 = \{(x, y): x \in [0; \pi], 0 \leq y \leq x^2\}$ . Зобразити ці фігури і знайти площі  $S_1$  та  $S_2$  цих фігур, а також зобразити фігуру, яка має площу  $S_1 + S_2$ .



За лінійною властивістю інтеграла фігура з площею  $S_1 + S_2$  може лежати під графіком функції  $\sin x + x^2$ ,  $x \in [0; \pi]$ . Тому спочатку можна просто ввести 3 функції і побудувати їхні графіки, а потім, відмічаючи мітками кожен з цих функцій окремо, обчислити їхні інтеграли. При цьому автоматично будуть штрихуватися відповідні фігури (рис. 2.2.7).

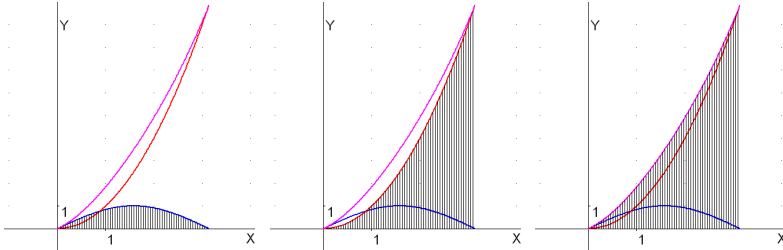


Рис. 2.2.7.

При цьому можна ще й проаналізувати відповіді на предмет того, чи дорівнює площа третьої фігури сумі двох перших.

**3.** Дано фігури  $\Phi_1 = \{(x, y): x \in [-1; 1], 0 \leq y \leq x^2\}$  та  $\Phi_2 = \{(x, y): x \in [1; 2], 0 \leq y \leq 2 - x\}$ . Зобразити ці фігури і знайти їх площі  $S_1$  та  $S_2$ , а також зобразити фігуру, яка має площу  $S_1 + S_2$ .

Оскільки в умові задано функції на різних відрізках (які мають спільну точку дотику), то за адитивною властивістю інтеграла фігура з площею  $S_1 + S_2$  може лежати під графіками обох функцій.

Тому спочатку задамо дві потрібні функції і побудуємо їхні графіки, а потім по черзі обчислимо інтеграли від кожної з цих функцій окремо та від обох одночасно (рис. 2.2.8). Цим якраз і буде проілюстровано адитивну властивість інтеграла.

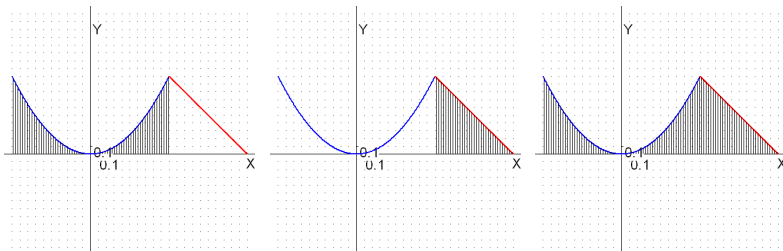


Рис. 2.2.8.

За відповідями переконуємося, що обчислено площі саме заштрихованих фігур.

Аналогічно за допомогою програми Gran1 зручно ілюструвати і такі властивості інтеграла, як монотонність, інтеграл від модуля, від парної (непарної) чи періодичної функції.

**2.2.8.2. Використання Maxima.** У програмі Maxima є вбудована команда  $\text{changevar}(I, x=g(t), t, x)$ , використання якої дозволяє зробити заміну  $x = g(t)$  в інтегралі  $I = \int_a^b f(x) dx$ , попередньо заданому командою  $I:\text{integrate}(f(x), x, a, b)$ . При цьому спочатку на екран буде виведено новий інтеграл за новою змінною та з новими межами інтегрування, а потім його можна буде обчислити командою  $\text{nouns}$ . Як і при невизначеному інтегруванні, цю формулу доцільно застосовувати, коли потрібно перевірити ефективність різних підстановок, а також тоді, коли за допомогою Maxima знайти інтеграл безпосередньо не вдається.

Розглянемо кілька прикладів.

**Приклад 1.** Обчислити задані інтеграли за допомогою вказаних підстановок: 1)  $\int_0^4 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$ ,  $\sqrt{x} = t$ ; 2)  $\int_0^a \sqrt{\frac{a+x}{a-x}} dx$ ,  $\frac{a+x}{a-x} = t^2$ ; 3)  $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx$ ,  $e^x - 1 = t^2$ ; 4)  $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\cos x}$ ,  $t = \text{tg} \frac{x}{2}$ .

□ Введемо перший інтеграл:

```
(%i1) 'integrate(1/(sqrt(x)+1),x,0,4);
```

```
(%o1)  $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{x}+1} dx$ 
```

```
(%i2) changevar(%o23,sqrt(x)=t,t,x);
```

На запит, що з'являється,

Is t positive, negative, or zero?

дамо відповідь р, тобто  $t > 0$ . В результаті дістаємо

```
(%o2)  $2 \int_0^2 \frac{t}{t+1} dt$ 
```

Обчислюємо одержаний інтеграл командою

```
(%i3) %,nouns;
```

```
(%o3)  $2(2 - \log(3))$ 
```

Зауважимо, що інтеграл (%o1) командою  $\text{integrate}$  обчислити не вдається.

Переходимо до другого інтеграла.

```
(%i4) 'integrate(sqrt((a+x)/(a-x)),x,0,a/2);
```

```
(%o4)  $\int_0^{\frac{a}{2}} \sqrt{\frac{x+a}{a-x}} dx$ 
```

```
(%i5) changevar(%o2,(a+x)/(a-x)=t^2,t,x);
```

```
(%o5)  $-4a \int_{-\sqrt{3}}^{-1} \frac{t|t|}{t^4+2t^2+1} dt$ 
```

Для подальшого обчислення цього інтеграла потрібно спростити підінтегральну функцію, розкривши модуль. Модуль буде розкрито, якщо зро-

бити припущення про знак  $t$ . У даному випадку, аналізуючи межі інтегрування, робимо припущення

```
(%i6) assume(t<0);
```

```
(%o6) [t < 0]
```

Виведемо інтеграл (%o5) на екран ще раз, тепер уже в спрощеному вигляді:

```
(%i7) %o5,simp;
```

```
(%o7) 4 a ∫-√3-1  $\frac{t^2}{t^4+2t^2+1}$  dt
```

```
(%i8) %,nouns;
```

```
(%o8) 4  $\left(\frac{4\pi-3^{\frac{3}{2}}}{24} - \frac{\pi-2}{8}\right) a$ 
```

Така сама відповідь отримується і при безпосередньому обчисленні інтеграла (%o4) командою integrate.

Перейдемо до третього інтеграла, вилучивши попередньо припущення  $t < 0$ :

```
(%i9) forget(t<0)$
```

```
(%i10) 'integrate(sqrt(%e^x-1),x,0,log(2));
```

```
(%o10) ∫0log(2)  $\sqrt{e^x - 1}$  dx
```

```
(%i11) changevar(%,%e^x-1=t^2,t,x);
```

```
(%o11) -2 ∫-10  $\frac{t|t|}{t^2+1}$  dt
```

```
(%i12) assume(t<0)$
```

```
(%i13) %o11,simp;
```

```
(%o13) 2 ∫-10  $\frac{t^2}{t^2+1}$  dt
```

```
(%i14) %,nouns;
```

```
(%o14)  $-\frac{\pi-4}{2}$ 
```

Цю відповідь можна перевірити і за допомогою команди integrate, застосованої до інтеграла (%o10).

Вилучимо всі факти про змінну  $t$  з оперативної пам'яті командою

```
(%i15) kill(t)$
```

Нарешті, обчислимо четвертий інтеграл, застосовуючи універсальну тригонометричну підстановку:

```
(%i16) 'integrate(1/(3+2*cos(x)),x,0,%pi/2);
```

```
(%o16) ∫0π/2  $\frac{1}{2 \cos(x)+3}$  dx
```

```
(%i17) changevar(%,tan(x/2)=t,t,x);
```

$$2 \int_0^1 \frac{1}{(2t^2+2) \cos(2 \operatorname{atan}(t))+3t^2+3} dt$$

`(%i18) %trigexpand,ratsimp;`

$$2 \int_0^1 \frac{1}{t^2+5} dt$$

`(%i19) %nouns;`

$$\frac{2 \operatorname{atan}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5}}$$

Зробимо перевірку:

`(%i20) %o16,nouns;`

$$\frac{2 \operatorname{atan}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{\sqrt{5}}$$

Приклад 1 розв'язано повністю. ■

**Приклад 2.** Обчислити задані інтеграли за допомогою вказаних підстановок і проілюструвати ці підстановки графічно: 1)  $\int_1^2 x^2 dx$ ,  $x^2 = t$ ; 2)  $\int_1^2 x^3 dx$ ,  $x^3 = t$ ; 3)  $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$ ,  $4-x^2 = (tx-2)^2$ ; 4)  $\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$ ,  $x = 2 \sin t$ .

□ Заміну змінної будемо виконувати, як і в попередньому прикладі, але крім цього зображатимемо графіки функцій, що задаються вказаними підстановками.

`(%i1) I1:=integrate(x^2,x,1,2)$`

`(%i2) changevar(I1,x^2=t,t,x);`

$$\int_1^4 \sqrt{t} dt$$

$$\frac{1}{2}$$

Очевидно, ця відповідь неправильна, оскільки початковий інтеграл був невід'ємним, а отримали інтеграл від'ємний. Розглянемо графічне зображення зробленої підстановки (рис. 2.2.9).

`(%i3) load(draw)$`

`(%i4) draw2d(xaxis=true,yaxis=true,  
xlabel="Ot",ylabel="Ox",  
xaxis_width=2,yaxis_width=2,  
line_width=4,color=blue,  
proportional_axes=xy,  
xtics=1,ytics=1,  
implicit(x^2=t,t,0,4,x,-2,2));`

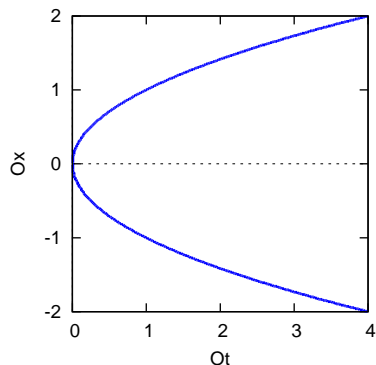


Рис. 2.2.9.

Рівняння  $x^2 = t$  задає дві функції  $x(t)$ , а саме  $x = -\sqrt{t}$  і  $x = \sqrt{t}$  (нижню й верхню вітки параболи). При переході до нової змінної необхідно

вибрати якусь одну з цих функцій. За програмою автоматично вибирається нижня вітка, бо вона є першим розв'язком при виконанні команди  $\text{solve}(x^2=t,x)$ . А нові межі знаходяться простою підстановкою старих меж у функцію  $t = x^2$ .

Перейдемо до інтеграла 2).  
 (%i5) I2:=integrate(x^3,x,1,2)\$  
 (%i6) changevar(I2,x^3=t,t,x);

$$(\%o6) \frac{(\sqrt{3}i-1) \int_1^8 t^{\frac{1}{3}} dt}{6}$$

Цей результат неправильний, тому що він є уявним комплексним числом. Подивимось на графіку (рис. 2.2.10), чи обгрунтовано була підстановка  $x^3 = t$  для даного інтеграла.

(%i7) draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xlabel="Ot",ylabel="Ox",xtics=1, ytics=1,xaxis\_width=2,yaxis\_width=2,proportional\_axes=xy, line\_width=4,color=blue,implicit(x^3=t,t,-8,8,x,-2,2));

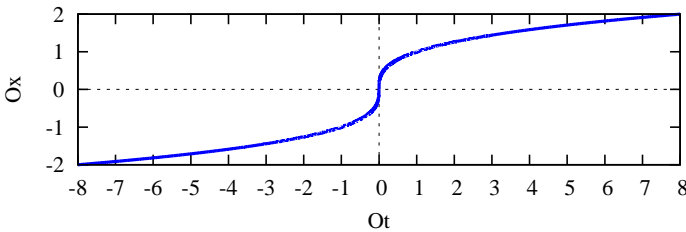


Рис. 2.2.10.

З геометричної точки зору все виглядає бездоганно. Лінія  $t = x^3$  має рівносильне задання  $x = t^{1/3}$ , причому для відрізка  $[1; 2]$  на осі  $Ox$  очевидно існує відрізок на осі  $Ot$ , який відображається на нього. Проте потрібно ще з'ясувати, як відшукується функція  $x = x(t)$  з рівності  $x^3 = t$ . Швидше за все, знову береться перший розв'язок, одержаний за допомогою команди:

(%i8) solve(x^3=t,x);  
 (%o8)  $[x = \frac{(\sqrt{3}i-1)t^{\frac{1}{3}}}{2}, x = -\frac{(\sqrt{3}i+1)t^{\frac{1}{3}}}{2}, x = t^{\frac{1}{3}}]$

Справді, бачимо, що першими йдуть уявні розв'язки, а потрібний дійсний розв'язок розташований останнім. Таким чином, при застосуванні команди *changevar* завжди можуть виникати помилки, коли рівняння  $G(t, x) = 0$ , через яке задається підстановка, має комплексні розв'язки відносно  $x$  (що можна перевірити командою  $\text{solve}(G(t,x),x)$ ).

Так, якщо для обчислення інтеграла 1) замість підстановки  $x^2 = t$  зробити підстановку  $x = \sqrt{t}$ , то дістанемо цілком коректне розв'язання:

(%i9) changevar(I1,x=sqrt(t),t,x);  
 Is x positive, negative, or zero? p;

$$\int \sqrt{t} dt$$

(%o9)  $\frac{1}{2}$

Аналогічно, коректне обчислення інтеграла 2) здійснюється підстановкою  $x = t^{1/3}$ .

Далі розглянемо інтеграл 3) і виконаємо для нього запропоновану другу підстановку Ейлера.

(%i10) I3:=integrate(sqrt(4-x^2),x,0,1)\$

(%i11) changevar(I3,4-x^2=(t\*x-2)^2,t,x);

(%o11)  $-\int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{8t^4-16t^2+8}{t^6+3t^4+3t^2+1} dt$

Обчислимо тепер початковий інтеграл і поряд з ним новий інтеграл:

(%i12) [ev(I3,nouns),ev(%o11,nouns)];

(%o12)  $\left[ \frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6}, \frac{8 \operatorname{atan}(\sqrt{3}-2)-\sqrt{3}}{2} \right]$

Щоб з'ясувати, наскільки відрізняються обидві відповіді, переобчислимо їх ще раз, вже чисельно:

(%i13) %o12,numer;

(%o13) [1.913222954981036, -1.913222954981037]

Нарешті з'ясується, що новий інтеграл відрізняється від початкового знаком. Побудуємо графік застосованої тут підстановки (рис. 2.2.11).

(%i14) draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xlabel="Ot",ylabel="Ox",  
xaxis\_width=2,yaxis\_width=2,line\_width=4,color=blue,  
proportional\_axes=xy,xtics=2,ytics=1,  
implicit(4-x^2=(t\*x-2)^2,t,-6,6,x,-3,3));

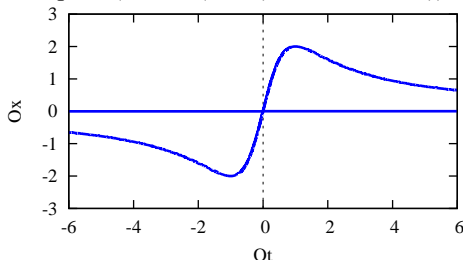


Рис. 2.2.11.

Дослідимо, яка функція  $x(t)$  могла бути використана в якості розв'язку рівняння  $4-x^2=(tx-2)^2$ :

(%i15) solve(4-x^2=(t\*x-2)^2,x);

(%o15)  $\left[ x = \frac{4t}{t^2+1}, x = 0 \right]$

Отже, за програмою знаходяться два розв'язки (що відповідає геометричній ілюстрації), причому для переходу до нової змінної за командою changevar може бути вибрана тільки функція  $x(t) = \frac{4t}{t^2+1}$ , і це правильний вибір. Неважко перевірити шляхом підстановки, що й нові межі знайдено правильно. Чому ж тоді в кінцевому результаті неправильний знак?

Звернемо увагу, що за командою заміни змінної повертається результат у вигляді спрощеного інтеграла. У заданому інтегралі 3) був наявний корінь квадратний, а у відповідному йому інтегралі (%o11) ніяких радикалів уже немає. Це наводить на думку, що неправильний знак може виникати при спрощенні радикалів. Підставимо “вручну” вираз  $\frac{4t}{t^2+1}$  в підінтегральну функцію  $\sqrt{4-x^2}$  і проаналізуємо, як за допомогою Maxima буде спрощено отриманий вираз.

```
(%i16) sqrt(4-x^2),x=(4*t)/(t^2+1);
```

```
(%o16)  $\sqrt{4 - \frac{16t^2}{(t^2+1)^2}}$ 
```

Серед основних команд спрощування (ratsimp, factor, radcan) розкрити корінь можна тільки останньою командою. Тому застосуємо її для спрощення розглядуваного виразу:

```
(%i17) radcan(%o16);
```

```
(%o17)  $\frac{2t^2-2}{t^2+1}$ 
```

Легко бачити, що в заданих межах інтегрування, тобто при  $t \in [0; 2-\sqrt{3}]$ , вираз (%o17) від’ємний, і він непридатний для подання виразу (%o16). Це і є причиною помилкового знаку в інтегралі (%o11).

Отже, при спрощенні виразів потрібно обережно користуватися командою radcan. А якщо робиться заміна змінної у визначеному інтегралі командою changevar і при цьому зникають знаки коренів, то дуже вірогідно, що може виникнути помилка. На результат, що отримується за командою changevar, користувачеві вплинути практично неможливо.

Перейдемо до розв’язування пункту 4) прикладу 2. Оскільки інтеграл I3 вже задано, то одразу зробимо в ньому тригонометричну заміну:

```
(%i18) changevar(I3,x=2*sin(t),t,x);
```

```
solve: using arc-trig functions to get a solution.
```

```
Some solutions will be lost.
```

```
(%o18)  $4i \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(t) \sqrt{\sin(t)-1} \sqrt{\sin(t)+1} dt$ 
```

Зобразимо графічну ілюстрацію даної підстановки (рис. 2.2.12).

```
(%i19) draw2d(xaxis=true,yaxis=true,xlabel="Ot",ylabel="Ox",
xaxis_width=2,yaxis_width=2,line_width=4,color=blue,
proportional_axes=xy,xtics=2,ytics=1,explicit(2*sin(t),t,-6,6));
```

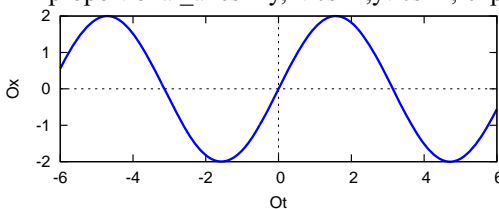


Рис. 2.2.12.

З рис. 2.2.12 видно, що дана підстановка придатна для переходу до нової змінної, тільки потрібно правильно вибрати нові межі. Скоріш за все, за командою `changevar` спочатку відшукується обернена функція  $t(x)$  до заданої функції  $x(t)$ , а потім визначаються нові межі, як значення функції  $t(x)$  при відповідних попередніх межах. При відшуванні оберненої функції якраз і виникла неоднозначна ситуація, про яку говорилося в супровідному повідомленні. Неважко пересвідчитися, що межі в новому інтегралі вибрані правильно. А от підінтегральна функція за формою не виглядає прийнятно, бо містить уявний множник  $i$  та від'ємний вираз  $\sin t - 1$  під знаком одного з коренів. Перевіримо, чи дорівнює вираз (%o18) шуканому інтегралу. Спростимо його, а потім обчислимо:

```
(%i20) rootscontract(%o18);
```

$$(\%o20) 4i \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(t) \sqrt{\sin(t)^2 - 1} dt$$

```
(%i21) trigsimp(%);
```

$$(\%o21) -4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(t) |\cos(t)| dt$$

Далі треба вказати, який знак має вираз під знаком модуля. Оскільки відрізок інтегрування  $[0; \pi/6]$  лежить у першій чверті, то задаємо припущення

```
(%i22) assume(cos(t)>0)$
```

```
(%i23) %o21,simp;
```

$$(\%o23) -4 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(t)^2 dt$$

Обчислимо тепер початковий інтеграл 4) і поряд його значення після заміни змінної:

```
(%i24) [ev(I3,nouns),ev(%o23,nouns)];
```

$$(\%o24) \left[ \frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6}, -\frac{2\pi+3\sqrt{3}}{6} \right]$$

Отже, при заміні змінної в інтегралі поставлено неправильний знак мінус. Виокремимо чіткіше причину цієї помилки. До проведення усіляких спрощень інтеграл (%o18) повинен був мати вигляд

```
(%i25) `integrate(sqrt(4-4*sin(t)^2)*2*cos(t),t,0,%pi/6);
```

$$(\%o25) 2 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(t) \sqrt{4 - 4 \sin(t)^2} dt$$

Оскільки в інтегралі (%o18) один корінь розпався на два, то швидше за все за алгоритмом команди `changevar` до підінтегральної функції було застосовано команду `radcan`. Справді,

```
(%i26) radcan(%o25);
```



$$(\%o26) 4i \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(t) \sqrt{\sin(t)-1} \sqrt{\sin(t)+1} dt$$

Маємо підтвердження результату (%o18), що є опосередкованим підтвердженням застосування команди `radcan` в алгоритмі команди `changevar`, а в даному випадку її застосування було недоцільне. Щоб повернутися до початкового вигляду інтеграла, тобто до (%o25), необхідно виконувати обернену операцію `rootscontract`, якою групуються корені. При цьому якщо уявний множник  $i$  стоїть безпосередньо біля кореня, то він вноситься під корінь. А якщо цей множник винесений за знак інтеграла, то такого внесення не відбувається. Порівняємо результат (%o20) застосування `rootscontract` до інтеграла (%o18) (де  $i$  так і залишилося за знаком інтеграла) і окремо до його підінтегральної функції:

$$(\%i26) 4*i*\cos(t)*\sqrt{\sin(t)-1}*\sqrt{\sin(t)+1};$$

$$(\%o26) 4i \cos(t) \sqrt{\sin(t)-1} \sqrt{\sin(t)+1}$$

$$(\%i27) \text{rootscontract}(\%);$$

$$(\%o27) 4 \cos(t) \sqrt{1 - \sin(t)^2}$$

Отже, при обчисленні інтеграла 4) з прикладу 2 було виявлено *недоречності в алгоритмі процедури `changevar`, пов'язані з наслідками застосування в ній команди `radcan`, автоматично усунути які певною командою в Maxima неможливо.* ■

Для усунення виявлених недоліків у вбудованій у Maxima команді заміни змінної `changevar`, а також для отримання більшого контролю над процесом заміни змінної визначимо нову команду `chv(expr,G,t,x)`. За своїм призначенням вона еквівалентна команді `changevar(expr,G,t,x)`, тільки будувється на іншому алгоритмі. При визначенні цієї команди використовуються оператори програмування та деякі нові функції системи Maxima, про які раніше не згадувалось, але їхній опис можна знайти в довідці Maxima. Доцільно зберегти означення команди `chv` у файл

Maxima-5.23.2\share\maxima\5.23.2\share\integration\changevar1.mac, після чого вона стане доступною через `load(changevar1)`.

```
chv(expr,G,t,x):=(block([f,g,h,a,b,a1,b1,G1,G2,n1,n2,i0,gpr,ghpr,apr,bpr],
if string(part(expr,0))="integrate" and part(expr,2)=x
then (f:part(expr,1),
if length(expr)=2
then (G1:sort(solve(G,x)),n1:length(G1),i0:0,
for i:1 step 1 while (i<=n1 and is(scalarp(part(G1[i],2)))) do i0:i0+1,
if i0<n1
then (for i:i0+1 step 1
while (i<=n1 and is (part(G1[i],1)#x or not(freeof(x,part(G1[i],2))))
do i0:i0+1,
if i0<n1
then (g:part(G1[i0+1],2),
if freeof(%i,g)
then 'integrate(subst(g,x,f)*diff(g,t),t)
else (print("-- Function",x,"(",t,")", "=",g,"is complex!.."),
expr))
else (print("-- It is impossible to express",x,"(",t,")."),expr))
else (print("-- All solutions",x,"(",t,")", "are constant!.."),expr))
```

```

else (a:part(expr,3),b:part(expr,4),G1:sort(solve(G,x)),
n1:length(G1),G2:sort(solve(G,t)),n2:length(G2),
a1:%gamma,b1:%gamma,g:l,i0:0,gpr:false,ghpr:false,
for i:l step 1 while (i<=n1 and is(scalarp(part(G1[i],2)))) do i0:i0+1,
if i0<n1
then (i0:i0+1,apr:plus,bpr:minus,
for i:i0 step 1 unless (i>n1 or ghpr)
do (if part(G1[i],1)=x and freeof(x,part(G1[i],2))
then (g:part(G1[i],2),gpr:true)
else g:l,
for j:l step 1 unless (j>n2 or ghpr)
do (h:part(G2[j],2),a1:limit(h,x,a,plus),
b1:limit(h,x,b,minus),
if a1<=b1
then (apr:plus,bpr:minus)
else (apr:minus,bpr:plus),
if string(float(a))=string(float(limit(g,t,a1,apr)))
and string(float(b))=string(float(limit(g,t,b1,bpr)))
then ghpr:true)),
if ghpr
then (if not(freeof(i,g))
then print("-- Function",x,(",t, ")","=","g,"is complex!.."),
if imagpart(a1)#0 or imagpart(b1)#0
then print("-- New bounds are complex!.."),
'integrate(subst(g,x,f)*diff(g,t),t,a1,b1)
else (if not(gpr)
then print("-- It is impossible to express",x,(",t,")..")
else print("-- Substitution is not correct!"),expr))
else (print("-- All solutions",x,(",t,")", "are constant!.."),expr))
else (if string(part(expr,0))#"integrate"
then (print("-- Expression must be a single integral
without any coefficients!.."),return(expr)),
if part(expr,2)#x
then print("-- The 4-th argument must be marked as",part(expr,2),"!.."),expr)))$

```

Описану вище процедуру-команду `chv(expr,G,t,x)` можна застосовувати як до визначених, так і до невизначених інтегралів. Вираз `expr` повинен являти собою тільки один інтеграл, причому без коефіцієнтів.

Обчислимо всі інтеграли з прикладу 2 за допомогою нової команди заміни змінної `chv`.

```
(%i1) load(changevar1)$
```

```
(%i2) I:'integrate(x^2,x,1,2)$
```

```
(%i3) I1:chv(I,x^2=t,t,x)$ I1=ev(I1,nouns);
```

$$\int_1^2 \sqrt{t} dt$$

```
(%o4)  $\frac{1}{2} = \frac{7}{3}$ 
```

```
(%i5) I:'integrate(x^3,x,1,2)$
```

```
(%i6) I1:chv(I,x^3=t,t,x)$ I1=ev(I1,nouns);
```

$$\int_1^8 t^{1/3} dt$$

```
(%o7)  $\frac{1}{3} = \frac{15}{4}$ 
```

```
(%i8) I:'integrate(sqrt(4-x^2),x,0,1);
```

$$\int_0^1 \sqrt{4-x^2} dx$$

```
(%i9) chv(I,4-x^2=(t*x-2)^2,t,x);
```

```
(%o9)  $\int_0^{2-\sqrt{3}} \sqrt{4 - \frac{16t^2}{(t^2+1)^2}} \left( \frac{4}{t^2+1} - \frac{8t^2}{(t^2+1)^2} \right) dt$ 
```

Щоб здійснити спрощування підінтегрального виразу, у тому числі під знаком кореня, використаємо команду `scanmap(f,expr)`, за якою функція або команда `f` застосовується до всіх складових частин виразу `expr`:

```
(%i10) scanmap(factor,%);
```

```
(%o10) -8 ∫02-√3  $\frac{(t-1)(t+1)|t-1||t+1|}{(t^2+1)^3} dt$ 
```

```
(%i11) assume(t-1<0,t+1>0)$
```

```
(%i12) %o10,factor
```

```
(%o12) 8 ∫02-√3  $\frac{(t-1)^2(t+1)^2}{(t^2+1)^3} dt$ 
```

```
(%i13) %,nouns;
```

```
(%o13)  $-\frac{8 \operatorname{atan}(\sqrt{3}-2)-\sqrt{3}}{2}$ 
```

Щоб спростити спростити вираз (%o13), позначимо  $a = \operatorname{arctg}(2 - \sqrt{3})$ :

```
(%i14) a:atan(2-sqrt(3))$
```

і обчислимо  $\operatorname{tg} 3a$ :

```
(%i15) tan(3*a),trigexpand,radcan;
```

```
(%o15) 1
```

Отже,  $3a = \frac{\pi}{4} \Rightarrow a = \frac{\pi}{12}$ . Враховуючи це, спростимо (%o13):

```
(%i16) (8*%pi/12+sqrt(3))/2,radcan;
```

```
(%o16)  $\frac{2\pi+3^{\frac{3}{2}}}{6}$ 
```

Обчислення інтеграла 3) прикладу 2 завершено. Перейдемо до інтеграла 4). Застосуємо до інтеграла (%o8) тригонометричну підстановку:

```
(%i17) chv(%o8,x=2*sin(t),t,x);
```

```
solve: using arc-trig functions to get a solution.
```

```
Some solutions will be lost.
```

```
(%o17) 2 ∫0 $\frac{\pi}{6}$   $\cos(t) \sqrt{4 - 4 \sin(t)^2} dt$ 
```

```
(%i18) trigsimp(%);
```

```
(%o18) 4 ∫0 $\frac{\pi}{6}$   $\cos(t) |\cos(t)| dt$ 
```

```
(%i19) assume(cos(t)>0)$
```

```
(%i20) %o19,simp;
```

```
(%o20) 4 ∫0 $\frac{\pi}{6}$   $\cos(t)^2 dt$ 
```

```
(%i21) %,nouns;
```

```
(%o21)  $\frac{2\pi+3^{\frac{3}{2}}}{6}$ 
```

Таким чином, на відміну від штатної команди `changevar`, за допомогою нової команди `chv` вдалося безпомилково розв'язати усі завдання з

прикладу 2.

Розглянемо ще кілька цікавих інтегралів.

**Приклад 3.** Обчислити наступні інтеграли методом підстановки:

$$1) \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx; \quad 2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x} \quad (a > 0, b > 0);$$

$$3) \int_{-a}^a \sqrt[3]{\frac{x-2a}{x+2a}} dx \quad (a > 0); \quad 4) \int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}} dx; \quad 5) \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{\cos x} \sin(x) dx.$$

□ 1) Щоб позбутися кореня, використаємо формулу  $\operatorname{tg}^2 t = \frac{1}{\cos^2 t} - 1$  і зробимо заміну  $x = \frac{2}{\cos t} = 2 \sec t$ :

(%i1) load(changevar1)\$

(%i2) 'integrate(sqrt(x^2-4)/x^4,x,2,4);

$$(\%o2) \int_2^4 \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^4} dx$$

(%i3) chv(%o2,x=2\*sec(t),t,x);

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

$$(\%o3) \frac{\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{4 \sec(t)^2 - 4} \tan(t)}{\sec(t)^3} dt}{8}$$

(%i4) trigsimp(%o3);

$$(\%o4) \frac{\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin(t) |\cos(t)| |\sin(t)| dt}{4}$$

(%i5) apply(assume,[cos(t)>0,sin(t)>0]);

(%o5) [cos(t) > 0, sin(t) > 0]

(%i6) %o4,simp;

$$(\%o6) \frac{\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) \sin(t)^2 dt}{4}$$

(%i7) %,nouns;

$$(\%o7) \frac{\sqrt{3}}{32}$$

Спробуємо ще застосувати до інтеграла 1) третю підстановку Чебишова:

(%i8) chv(%o2,x^2-4=t^2\*x^2,t,x);

- Function x ( t ) =  $\frac{2i}{\sqrt{t^2-1}}$  is complex!..

$$(\%o8) \frac{i \int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 t \sqrt{t^2-1} \sqrt{-\frac{4}{t^2-1}-4} dt}{8}$$

Попередження про комплексну функцію (точніше, про її можливі уявні значення) не означає помилку, адже з урахуванням меж інтегрування,  $|t| < 1$ , в силу чого значення виразу  $\frac{2i}{\sqrt{t^2-1}} = \frac{2}{\sqrt{1-t^2}}$  є дійсними. Тому продовжимо розв'язування:

```
(%i9) factor(%o8);
```

$$\int_{-\frac{\sqrt{3}}{2}}^0 t^2 dt$$

```
(%o9) -\frac{\sqrt{3}}{4}
```

```
(%i10) %,nouns;
```

```
(%o10) \frac{\sqrt{3}}{32}
```

Після спрощення стало зрозуміло, наскільки ефективною є підстановка Чебишова для даного інтеграла, і що за допомогою комп'ютера її виконано правильно.

Обчислимо ще інтеграл 1) за допомогою першої підстановки Ейлера.

```
(%i11) chv(%o2,x^2-4=(x-t)^2,t,x);
```

$$-16 \int_{4-2\sqrt{3}}^2 \frac{t^4 \left(1 - \frac{t^2+4}{2t^2}\right) \sqrt{\frac{(t^2+4)^2}{4t^2} - 4}}{(t^2+4)^4} dt$$

Далі застосуємо команду `sqfr`, яка аналогічна до команди `factor`, проте за її допомогою здійснюється лише часткове розкладання на множники:

```
(%i12) scanmap(sqfr,%);
```

$$-4 \int_{-2(\sqrt{3}-2)}^2 \frac{(t^2-4) |t| |t^2-4|}{(t^2+4)^4} dt$$

Знайдемо наближене значення нижньої межі:

```
(%i13) -2*(sqrt(3)-2),numer;
```

```
(%o13) 0.53589838486225
```

Звідси стає зрозумілим, що для розкриття модулів у інтегралі (%o12) слід зробити припущення:

```
(%i14) assume(t>0,t<2)$
```

```
(%i15) %o12,simp;
```

$$-4 \int_{-2(\sqrt{3}-2)}^2 \frac{t(4-t^2)(t^2-4)}{(t^2+4)^4} dt$$

Останній інтеграл також спростимо за допомогою підстановки  $u = t^2$ . Оскільки при застосуванні команди `chv` вимагається, щоб перед інтегралом не було ніяких коефіцієнтів, то інтеграл (%o15) спочатку поділимо, а потім помножимо на  $-4$ :

```
(%i16) -4*chv(%o15/(-4),t^2=u,u,t);
```

$$2 \int_{4(4\sqrt{3}-7)}^4 \frac{(u-4)^2}{(u+4)^4} du$$

```
(%i17) %o16,nouns,ratsimp;
```

```
(%o17) \frac{\sqrt{3}}{32}
```

Обчисливши інтеграл 1) різними способами, можна зробити висновок про те, яка з виконаних підстановок виявилась найефективнішою.

Перед обчисленням кожного наступного інтеграла з прикладу 3 перезапускаємо сеанс Maxima.

2) У цьому інтегралі наявні параметри  $a$ ,  $b$ . За теорією рекомендується робити заміну  $t = \operatorname{tg} x$ , хоч можна спробувати і такі підстановки, як  $t = \operatorname{ctg} x$  або  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ . Зупинимось на першій підстановці.

```
(%i1) load(changevar1)$
```

```
(%i2) 'integrate(1/(a^2*cos(x)^2+b^2*sin(x)^2),x,0,%pi/4);
```

```
(%o2)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{b^2 \sin(x)^2 + a^2 \cos(x)^2} dx$ 
```

```
(%i3) chv(%o2,t=tan(x),t,x);
```

solve: using arc-trig functions to get a solution.

Some solutions will be lost.

```
(%o3)  $\int_0^1 \frac{1}{(t^2+1) \left( \frac{b^2}{t^2+1} + \frac{a^2}{t^2+1} \right)} dt$ 
```

```
(%i4) ratsimp(%);
```

```
(%o4)  $\int_0^1 \frac{1}{b^2 t^2 + a^2} dt$ 
```

```
(%i5) %, nouns;
```

```
(%o5)  $\frac{\operatorname{atan}\left(\frac{t}{a}\right)}{a b}$ 
```

Інтеграл 2) обчислено.

Якщо аналогічно спробувати зробити підстановку  $t = \operatorname{ctg} x$ , то дістанемо так званий невластий інтеграл  $\int_1^{\infty} \frac{1}{a^2 t^2 + b^2} dt = \frac{\pi}{2 a b} - \frac{\operatorname{atan}\left(\frac{t}{b}\right)}{a b}$ , а це не дорівнює інтегралу 2). Помилка виникла тому, що порушено умови, за яких є правильною формула заміни змінної (межі  $a = 0$  відповідає нескінченна межа  $\alpha = \infty$ , що некоректно).

Універсальна тригонометрична підстановка  $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$  (як це часто буває) приводить до громіздкого інтеграла  $2 \int_0^{\operatorname{tan}\left(\frac{\pi}{8}\right)} \frac{t^2+1}{a^2 t^4 + (4 b^2 - 2 a^2) t^2 + a^2} dt$ , при обчисленні якого за програмою видається багато додаткових запитів щодо знаків серії громіздких виразів, що зрештою заводять у тупик.

3) Даний інтеграл містить параметр і в підінтегральній функції, і в межах інтегрування. За допомогою Maxima безпосереднім інтегруванням його обчислити неможливо. Разом з тим, використовуючи команду chv для заміни змінної, матимемо:

```
(%i1) load(changevar1)$
```

```
(%i2) 'integrate(((x-2*a)/(x+2*a))^(1/3),x,-a,a);
```

```
(%o2)  $\int_{-a}^a \frac{(x-2a)^{\frac{1}{3}}}{(x+2a)^{\frac{1}{3}}} dx$ 
```

```
(%i3) chv(%o2,(x-2*a)/(x+2*a)=t^3,t,x);
```

$$(\%o3) \int_{-3^{\frac{1}{3}}}^{-\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}} \frac{\left(-\frac{2a}{t^3+2a}-2a\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{3t^2(2at^3+2a)}{(t^3-1)^2} - \frac{6at^2}{t^3-1}\right)}{\left(2a - \frac{2a}{t^3+2a}\right)^{\frac{1}{3}}} dt$$

(%i4) factor(%);

$$(\%o4) 12 a \int_{-3^{\frac{1}{3}}}^{-\frac{1}{3^{\frac{1}{3}}}} \frac{t^3}{(t^3-1)^2} dt$$

(%i5) %,nouns,logcontract,ratsimp;

$$(\%o5) \frac{\left(4\sqrt{3} \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{3}-2\sqrt[3]{6}}{3}\right) - 4\sqrt{3} \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{3}-2\sqrt[3]{6}}{3}\right) - 3^{\frac{5}{3}} + 3^{\frac{4}{3}}\right) a}{3}$$

Інтеграл 3) обчислено точно, у символному вигляді. Щоб підтвердити правильність результату (%o5), можна скористатися іншим засобом комп'ютерної математики, наприклад, програмою Gran1.

Переобчислимо чисельно вираз (%o5):

(%i6) %o5,numer;

(%o6)  $-2.041614878242466 a$

Тепер обчислимо значення інтеграла 3) у випадку  $a = 1$  за допомогою програми Gran1:  $I = -2.04161$ . Це вже є вагомим підтвердженням правильності результатів обох програм. Крім того, оцінити приблизно правильність і законність інтегрування допомагає зображення (за програмою Gran1) геометричного змісту даного інтеграла (рис. 2.2.13):

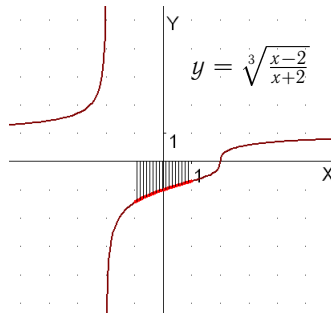


Рис. 2.2.13.

До речі, за штатною командою системи Maxima

(%i7) changevar(%o5,(x-2\*a)/(x+2\*a)=t^3,t,x);

отримується інтеграл з уявними межами:

$$(\%o7) 12 a \int_{-\frac{\sqrt{3}i-1}{2}}^{\frac{1}{2\sqrt[3]{3}}} \frac{t^3}{t^6-2t^3+1} dt$$

Зрозуміло, що за допомогою цього інтеграла коректно обчислити інтеграл 3) неможливо.

4) Даний інтеграл цікавий тим, що безпосереднім інтегруванням у програмі Maxima він не береться:

```
(%i1) integrate(sqrt(x)/(sqrt(x)+1),x,0,1);
```

```
(%o1)  $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} dx$ 
```

Проте відповідний невизначений інтеграл береться:

```
(%i2) integrate(sqrt(x)/(sqrt(x)+1),x);
```

```
(%o2)  $-4(\sqrt{x} + 1) + (\sqrt{x} + 1)^2 + 2 \log(\sqrt{x} + 1)$ 
```

Маючи первісну, досить просто скористатися формулою Ньютона – Лейбніца:

```
(%i3) ev(%o2,x=1)-ev(%o2,x=0);
```

```
(%o3)  $2 \log(2) - 1$ 
```

Другим способом обчислення інтеграла 4) є спосіб заміни змінної:

```
(%i4) changevar(%o1,t=sqrt(x),t,x);
```

```
Is t positive, negative, or zero?p;
```

```
(%o4)  $2 \int_0^1 \frac{t^2}{t+1} dt$ 
```

```
(%i5) %o4;
```

```
(%o5)  $2 \log(2) - 1$ 
```

5) Спробуємо обчислити даний інтеграл безпосередньо:

```
(%i1) 'integrate(sqrt(cos(x))*sin(x),x,%pi/2,3*%pi/2);
```

```
(%o1)  $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sqrt{\cos(x)} \sin(x) dx$ 
```

```
(%i2) %o1;
```

```
(%o2) 0
```

Тепер спробуємо обчислити інтеграл 5) за допомогою вбудованої команди заміни змінної:

```
(%i3) changevar(%o1,cos(x)=t,t,x);
```

```
(%o3) 0
```

Обома способами за допомогою Maxima отримано однакові результати.

Зауважимо, що у прикладі 3, 5) підінтегральна функція як дійсна функція не визначена в жодній точці всередині проміжку інтегрування. Графік цієї функції, побудований за програмою Gran1, є таким (рис. 2.2.14):

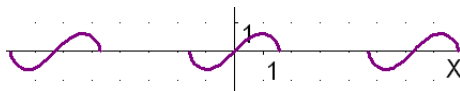


Рис. 2.2.14.

Проте ця функція визначена і неперервна на заданому відрізку як комплекснозначна функція дійсної змінної. За допомогою системи Maxima



можна обчислювати інтеграли і від таких функцій. Так, якщо  $a < 0$ , то в якості кореня  $\sqrt[n]{a}$  береться його головне значення, а саме  $i\sqrt[n]{-a}$ . Тому й отримуємо

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{\cos x} \sin x \, dx = i \int_{\pi/2}^{3\pi/2} \sqrt{-\cos x} \, d(-\cos x) = i \int_0^0 \sqrt{t} \, dt = 0.$$

Взагалі, при інтегруванні функції  $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$  по відрізку  $[a; b] \subset (-\infty; 0]$  у випадку непарного  $n$  в якості значень  $\sqrt[n]{x}$  беруться дійсні значення, а у випадку парного  $n$  – головні значення:  $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{|x|} (\cos \frac{\arg x}{n} + i \sin \frac{\arg x}{n})$ . Наприклад,

(%i4) integrate(x^(1/5),x,-32,0);

(%o4)  $-\frac{160}{3}$

(%i5) integrate(x^(1/4),x,-16,0);

(%o5)  $\frac{128(-1)^{\frac{1}{4}}}{5}$

(%i6) rectform(%);

(%o6)  $\frac{2^{\frac{13}{2}} i}{5} + \frac{2^{\frac{13}{2}}}{5}$

Цю особливість системи Maxima слід також мати на увазі під час обчислення інтегралів. ■

Таким чином, при обчисленні інтегралів методом заміни змінної з використанням програми Maxima необхідно враховувати:

- 1) операція заміни змінної складна для комп'ютерної реалізації і далеко не в кожній елементарній функції  $f(x)$  можна за допомогою комп'ютера автоматично замінити незалежну змінну на довільну елементарну функцію  $x(t)$ , навіть якщо така заміна буде теоретично обґрунтованою;
- 2) при виконанні цієї операції потрібно контролювати ситуацію на предмет законності обраної заміни та можливих дій комп'ютерної системи у неоднозначних ситуаціях;
- 3) доцільно впевнитися, чи існує заданий інтеграл; зобразити графік функції  $G(t, x) = 0$ , якою задається підстановка; виразити явно функції  $x(t)$  і  $t(x)$  за допомогою команди solve тощо;
- 4) за вбудованою командою changevar досить часто отримуються некоректні результати, тому краще користуватися наведеною вище користувацькою процедурою chv;
- 5) бажано перевіряти результати, отримані за допомогою системи Maxima, застосовуючи інші системи комп'ютерної математики або письмові викладки;
- 6) слід взагалі розглядати отримані за допомогою комп'ютера результати як гіпотези, що вимагають перевірки.

Формули інтегрування частинами для визначеного інтеграла в системі Maxima немає, але реалізувати її доволі просто. Для цього досить додати у файл `bypart1.mac` (про який ішла мова в підпункті 1.3.7.2) такий рядок:

```
byparts2(x,u,dv,a,b):=(block([v],v:integrate(dv,x),subst(b,x,u*v)-
    subst(a,x,u*v)-integrate(v*rat(diff(u,x)),x,a,b)))$
```

В аргументах цієї команди задається ліва частина формули інтегрування частинами (змінна інтегрування, вирази, які позначаються через  $u$ ,  $v'$ , та межі інтегрування). Результатом виконання наведеної вище команди є права частина формули інтегрування частинами (причому вираз  $uv|_a^b$  буде одразу обчислено, а інтеграл  $\int_a^b v du$  буде виведено у необчисленій формі, щоб можна було його проаналізувати).

**Приклад 4.** Обчислити наступні інтеграли методом інтегрування частинами: 1)  $\int_{-1}^1 x 2^x dx$ ; 2)  $\int_0^1 \ln(1+x^2) dx$ ; 3)  $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x dx}{\sin^2 x}$ ; 4)  $\int_0^{1/2} \arcsin^2 x dx$ ;

5)  $\int_0^{\pi/2} \sin 2x \operatorname{arctg}(\sin x) dx$ .

□ Інтегралі 1) – 3) обчислюються методом інтегрування частинами як звичайно. Тому просто проілюструємо обчислення їх з використанням системи Maxima.

```
(%i1) load(bypart1)$
```

```
(%i2) byparts2(x,x,2^x,-1,1);
```

```
(%o2)  $\frac{5}{2} \frac{\int_0^1 2^x dx}{\log(2)} - \frac{-1}{\log(2)}$ 
```

```
(%i3) %,nouns;
```

```
(%o3)  $\frac{5}{2} \frac{1}{\log(2)} - \frac{3}{2 \log(2)^2}$ 
```

```
(%i4) byparts2(x,log(1+x^2),1,0,1);
```

```
(%o4)  $\log(2) - 2 \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx$ 
```

```
(%i5) %,nouns;
```

```
(%o5)  $\log(2) + \frac{\pi-4}{2}$ 
```

```
(%i6) byparts2(x,x,1/sin(x)^2,%pi/4,%pi/3);
```

```
(%o6)  $\int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{1}{\tan(x)} dx - \frac{\pi}{3^{3/2}} + \frac{\pi}{4}$ 
```

```
(%i7) %,nouns;
```

```
(%o7)  $\log\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{\log(2)}{2} - \frac{\pi}{3^{3/2}} + \frac{\pi}{4}$ 
```

4) Для обчислення даного інтеграла потрібно двічі застосувати формулу інтегрування частинами.

```
(%i8) byparts2(x,asin(x)^2,1,0,1/2);
(%o8)  $\frac{\pi^2}{72} - 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{x \operatorname{asin}(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx$ 
(%i9) byparts2(x,asin(x),-2*x/sqrt(1-x^2),0,1/2);
(%o9)  $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} - 1$ 
(%i10) %pi^2/72+%o;
(%o10)  $\frac{\pi^2}{72} + \frac{\pi}{2\sqrt{3}} - 1$ 
```

5) Обчислення цього інтеграла доцільно розпочати із заміни змінної  $\sin x = t$ , а потім продовжити інтегрувати частинами.

```
(%i11) load(changevar1)$
(%i12) 'integrate(sin(2*x)*atan(sin(x)),x,0,%pi/2);
(%o12)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2x) \operatorname{atan}(\sin(x)) dx$ 
(%i13) chv(%o12,sin(x)=t,t,x);
solve: using arc-trig functions to get a solution.
Some solutions will be lost.
(%o13)  $\int_0^1 \frac{\operatorname{atan}(t) \sin(2 \operatorname{asin}(t))}{\sqrt{1-t^2}} dt$ 
(%i14) trigexpand(%);
(%o14)  $2 \int_0^1 t \operatorname{atan}(t) dt$ 
(%i15) byparts2(t,atan(t),2*t,0,1);
(%o15)  $\frac{\pi}{4} - \int_0^1 \frac{t^2}{t^2+1} dt$ 
(%i16) %,nouns,expand;
(%o16)  $\frac{\pi}{2} - 1$ 
```

Виконаємо перевірку правильності обчислення інтеграла 5) за допомогою програми Gran1. Знайдемо спочатку наближене десяткове подання цього інтеграла програмою Maxima:

```
(%i17) %o16,numer;
(%o17) 0.5707963267949
```

Тепер обчислимо значення інтеграла 5) за допомогою програми Gran1:  $I = 0.570796$ . Перевірка пройшла успішно. Крім того, легко бачити, що підінтегральна функція на проміжку інтегрування додатна. Поглянемо на фігуру, площу якої виражає знайдений інтеграл (рис. 2.2.15).

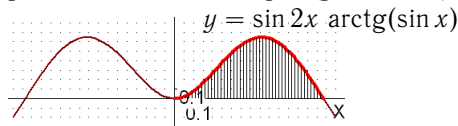


Рис. 2.2.15.

Тепер повернемося до Maxima і виконаємо безпосереднє обчислення інтеграла 5):

```
(%i18) %o12,nouns;
```

```
(%o18)  $-\frac{\pi}{2} - 1$ 
```

Дістали помилковий результат. Це ще раз свідчить про те, що далеко не все, що видається системами комп'ютерної математики, є вірогідним.

Проаналізуємо можливі причини виникнення останньої помилки. Обчислимо відповідний невизначений інтеграл:

```
(%i19) integrate(sin(2*x)*atan(sin(x)),x);
```

```
(%o19)  $-\frac{1}{4} \left( (\cos 2x - 3) \operatorname{atan} 2(\sin 2x + 2 \sin x, \cos 2x + 2 \cos x - 1) \right. \\ \left. + (\cos 2x - 3) \operatorname{atan} 2(\sin 2x - 2 \sin x, -\cos 2x + 2 \cos x + 1) + 4 \sin x \right)$ 
```

Нагадаємо, що  $\operatorname{atan} 2(y, x) = \arg(x + iy)$ . Можна припустити, що помилка зумовлена переходом до функцій комплексної змінної. При цьому вираз

```
(%i20) 2*sin(x)*cos(x)*atan(sin(x));
```

```
(%o20) 2 cos(x) sin(x) atan(sin(x))
```

інтегрується коректно:

```
(%i21) integrate(%o20,x),expand;
```

```
(%o21)  $\sin(x)^2 \operatorname{atan}(\sin(x)) + \operatorname{atan}(\sin(x)) - \sin(x)$  ■
```

Метод інтегрування частинами часто застосовують до виведення рекурентних формул для обчислення інтегралів.

**Приклад 5.** Обчислити інтеграл  $I = \int_0^{\pi/b} e^{ax} \sin bx \, dx$  ( $a > 0, b > 0$ ).

□ Застосуємо формулу інтегрування частинами:

```
(%i1) load(bypart1)$
```

```
(%i2) byparts2(x,%e^(a*x),sin(b*x),0,%pi/b);
```

```
(%o2)  $\frac{a \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \cos(bx) \, dx}{b} + \frac{e^{\frac{\pi a}{b}}}{b} + \frac{1}{b}$ 
```

Далі застосуємо формулу інтегрування частинами до інтеграла, який утворився, причому за  $u$  знову позначимо  $e^{ax}$ :

```
(%i3) byparts2(x,%e^(a*x),cos(b*x),0,%pi/b);
```

```
(%o3)  $-\frac{a \int_0^{\frac{\pi}{b}} e^{ax} \sin(bx) \, dx}{b}$ 
```

Отже,  $I = \%o2$ , де інтеграл в  $\%o2$  дорівнює  $\%o3 = -\frac{a}{b}I$ . Складемо рівняння:

```
(%i4) (a*(-a)/b*I)/b+%e^((%pi*a)/b)/b+1/b=I;
```

```
(%o4)  $-\frac{a^2 I}{b^2} + \frac{e^{\frac{\pi a}{b}}}{b} + \frac{1}{b} = I$ 
```

Розв'язавши це рівняння, тим самим знайдемо шуканий інтеграл:

```
(%i5) solve(%I),factor;
```

$$(\%o5) [I = \frac{b \left( e^{\frac{\pi a}{b}} + 1 \right)}{b^2 + a^2}] \blacksquare$$

На розглянутих прикладах продемонстровано особливості застосування програми Maxima до обчислення визначених інтегралів методами заміни змінної та інтегрування частинами.

Серед багатьох інших застосувань розглянемо ще лише одне – це можливість оперування з визначеними інтегралами, які мають змінні межі інтегрування.

**Приклад 6.** Продиференціювати наступні функції: 1)  $\int_0^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt$ ;

2)  $\int_{-\sqrt{\arccos x}}^0 \cos t^2 dt$ ; 3)  $\int_{-x^2}^{\ln x} \arctg t dt$ .

□ Розв'язання цих прикладів за допомогою системи Maxima наочне і не потребує коментарів.

(%i1) 'integrate(cos(t^2),t,0,sqrt(x));

$$(\%o1) \int_0^{\sqrt{x}} \cos(t^2) dt$$

(%i2) diff(%o1,x);

$$(\%o2) \frac{\cos(x)}{2\sqrt{x}}$$

(%i3) 'integrate(cos(t^2),t,-sqrt(acos(x)),0);

$$(\%o3) \int_{-\sqrt{\arccos(x)}}^0 \cos(t^2) dt$$

(%i4) diff(%o3,x);

$$(\%o4) -\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}\sqrt{\arccos(x)}}$$

(%i5) 'integrate(atan(t),t,-x^2,log(x));

$$(\%o5) \int_{-x^2}^{\log(x)} \operatorname{atan}(t) dt$$

(%i6) diff(%o5,x);

$$(\%o6) \frac{\operatorname{atan}(\log(x))}{x} - 2x \operatorname{atan}(x^2) \blacksquare$$

**2.2.8.3. Використання MathCAD.** У темі “Основні властивості R-інтеграла” дану програму найдоцільніше використовувати для обчислення визначених інтегралів методами заміни змінної та інтегрування частинами. Також за її допомогою зручно будувати графіки функцій, що задаються через інтеграли із змінними межами інтегрування.

Реалізація названих методів інтегрування в середовищі MathCAD здійснюється у вигляді послідовності формул, аналогічно до того, як це робилося для невизначеного інтеграла в підпункті 1.3.8.3.

Обчислимо, наприклад, інтеграл  $\int_1^3 \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4} dx$ , виконуючи кілька різ-

них підстановок.

І спосіб (підстановка Чебишова)

1. Задаємо підінтегральну функцію та межі інтегрування.

$$f(x) := \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4} \quad a := 1 \quad b := 3$$

2. Знаходимо розв'язки відносно змінної  $x$  з підстановки Чебишова.

$$9 - x^2 = t^2 x^2, \text{ solve, } x \rightarrow \left( \begin{array}{c} \frac{3}{\sqrt{t^2+1}} \\ -\frac{3}{\sqrt{t^2+1}} \end{array} \right)$$

3. Оскільки відрізок інтегрування лежить правіше нуля, то в якості функції  $g(t)$  для заміни змінної вибираємо додатний розв'язок останнього рівняння. Визначаємо її, копіюючи потрібний вираз, і будуємо графік (рис. 2.2.16).

$$g(t) := \frac{3}{\sqrt{t^2+1}}$$

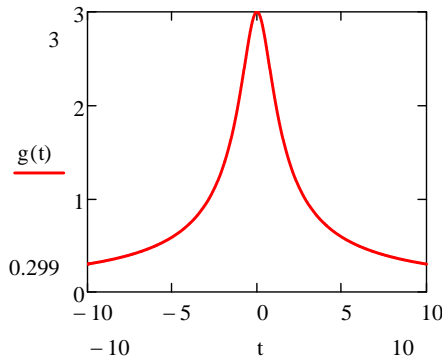


Рис. 2.2.16.

4. Розв'язуємо рівняння  $g(t) = a$  та  $g(t) = b$  і, користуючись рисунком, визначаємо нові межі інтегрування, вибираючи потрібні розв'язки:

$$g(t)=a \text{ solve} \rightarrow \left( \begin{array}{c} -2\cdot\sqrt{2} \\ 2\cdot\sqrt{2} \end{array} \right) \quad g(t)=b \text{ solve} \rightarrow 0 \quad a1 := -2\sqrt{2} \quad b1 := 0$$

5. Знаходимо похідну  $g'(t)$ , при необхідності спростуємо її і результат позначимо  $dg(t)$ :

$$dg(t) := \frac{d}{dt}g(t) \rightarrow -\frac{3\cdot t}{(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}$$

6. Вводимо позначення  $f1(t)$  для суперпозиції  $f(g(t))$ , при необхідності задаючи додаткові команди для спрощування:

$$f1(t) := f(g(t)) \left| \begin{array}{l} \text{assume, } t < 0 \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow -\frac{t\cdot(t^2+1)^{\frac{3}{2}}}{27}$$

7. Задаємо весь підінтегральний вираз нового інтеграла (при потребі спростуємо і його):

$$f2(t) := f1(t)\cdot dg(t) \rightarrow \frac{t^2}{9}$$

8. Будуємо формулу інтеграла відносно нової змінної та обчислюємо цей інтеграл:

$$I := \int_{a1}^{b1} f2(t) dt \quad I \rightarrow \frac{16\sqrt{2}}{27}$$

II спосіб (підстановка Ейлера)

$$f(x) := \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4} \quad a := 1 \quad b := 3$$

$$9 - x^2 = (t \cdot x - 3)^2, \text{ solve, } x \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{6 \cdot t}{t^2+1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$g(t) := \frac{6 \cdot t}{t^2+1}$$

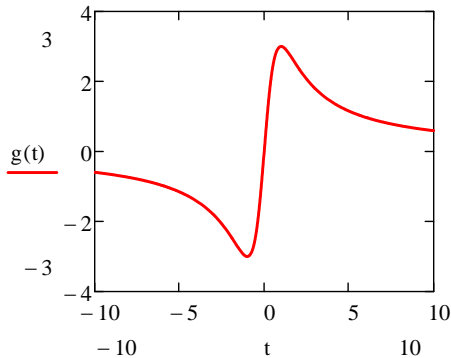


Рис. 2.2.17.

$$g(t)=a \text{ solve} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 - 2 \cdot \sqrt{2} \\ 2 \cdot \sqrt{2} + 3 \end{pmatrix} \quad g(t)=b \text{ solve} \rightarrow 1$$

$$a1 := 2 \cdot \sqrt{2} + 3 \quad b1 := 1$$

$$dg(t) := \frac{d}{dt} g(t) \text{ simplify} \rightarrow -\frac{6 \cdot (t^2-1)}{(t^2+1)^2}$$

$$f1(t) := f(g(t)) \left. \begin{array}{l} \text{assume, } t > 1 \\ \text{simplify} \end{array} \right\} \rightarrow \frac{(t^2-1) \cdot (t^2+1)^3}{432 \cdot t^4}$$

$$f2(t) := f1(t) \cdot dg(t) \rightarrow -\frac{(6 \cdot t^2 - 6) \cdot (t^2 - 1) \cdot (t^2 + 1)}{432 \cdot t^4}$$

$$I := \int_{a1}^{b1} f2(t) dt \quad I \rightarrow \frac{9232 \cdot \sqrt{2} + 13056}{11016 \cdot \sqrt{2} + 15579}$$

Позбуваючись ірраціональності у знаменнику, неважко переконатися, що цей результат такий самий, як і отриманий першим способом.

III спосіб (тригонометрична підстановка)

$$f(x) := \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^4} \quad a := 1 \quad b := 3$$

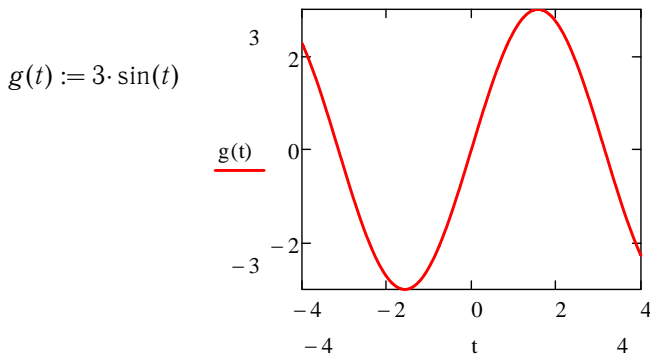


Рис. 2.2.18.

$$g(t)=a \text{ solve} \rightarrow \left( \begin{array}{c} \pi - \operatorname{asin}\left(\frac{1}{3}\right) \\ \operatorname{asin}\left(\frac{1}{3}\right) \end{array} \right) \quad g(t)=b \text{ solve} \rightarrow \frac{\pi}{2}$$

$$a1 := \operatorname{asin}\left(\frac{1}{3}\right) \quad b1 := \frac{\pi}{2}$$

$$dg(t) := \frac{d}{dt}g(t) \rightarrow 3 \cdot \cos(t)$$

$$f1(t) := f(g(t)) \rightarrow \frac{\sqrt{1-\sin(t)^2}}{27 \cdot \sin(t)^4}$$

Але, оскільки вираз для  $f1(t)$  ніякими командами не вдається автоматично спростити, то краще вручну перевизначити цю функцію так:

$$f1(t) := \frac{\cos(t)}{27 \cdot \sin(t)^4}$$

$$f2(t) := f1(t) \cdot dg(t) \rightarrow \frac{\cos(t)^2}{9 \cdot \sin(t)^4}$$

Далі за програмою MathCAD отримується результат з неправильним знаком:

$$I := \int_{a1}^{b1} f2(t) dt \quad I \rightarrow -\frac{16 \cdot \sqrt{2}}{27}$$

Причини цієї помилки одразу з'ясовуються, коли спробувати знайти (за допомогою MathCAD) відповідний невизначений інтеграл:

$$\int \frac{\cos(t)^2}{\sin(t)^4} dt \rightarrow \frac{\cos(t)^3}{3 \cdot \sin(t)^3}$$

Неважко переконатися, що тут теж втрачено знак мінус. Це можна перевірити і за допомогою самої програми MathCAD, якщо знайти похідну від правої частини останньої рівності:

$$\frac{d}{dt} \frac{\cos(t)^3}{3 \cdot \sin(t)^3} \text{ simplify} \rightarrow \frac{\sin(t)^2 - 1}{\sin(t)^4}$$

Таким чином, програму MathCAD при обчисленні інтегралів треба використовувати з обережністю.

Реалізація формули інтегрування частинами для визначеного інтеграла в MathCAD принципово нічим не відрізняється від аналогічної формули для невизначеного інтеграла, розглянутої в підпункті 1.3.8.3. Тому зупинятися на ній не будемо.

Зауважимо, що за допомогою MathCAD зручно будувати графіки функцій, заданих через інтеграли із змінними межами. В пункті 1.2.5 вже



наводився один такий графік. Побудуємо графіки ще двох функцій, пов'язаних з інтегралами Френеля (рис. 2.2.19):

$$f(x) := \int_0^x \cos(t^2) dt \quad g(x) := \int_{-x}^x \sin(t^2) dt$$

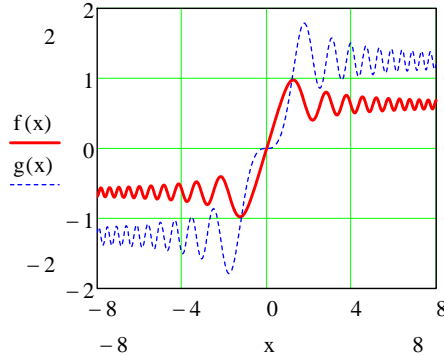


Рис. 2.2.19.

**2.2.9. Історичні відомості.** Нерівність (3) пункту 2.2.2 встановлена у 1859 році українським математиком В. Я. Буняковським (1804–1889). Цю нерівність часто називають нерівністю Шварца на честь німецького математика Германа Шварца (1843–1921), який довів її значно пізніше (у 1884 році).

Термін “адитивність” походить від латинського “additivus” – який додається.

**2.2.10. Зв'язок із шкільним курсом математики.** У шкільному курсі математики, в основному, вивчаються найпростіші властивості інтеграла Ньютона – Лейбніца (*NL*-інтеграла), але в класах з поглибленим вивченням математики, на факультативних та інших додаткових заняттях можливе вивчення інтеграла Рімана (визначеного інтеграла) та його властивостей, важливість яких розкривається багатьма практичними застосуваннями.

**2.2.11. Постановка проблеми.** Функція  $F(x) = \int_c^x f(t) dt$  є диференційовною в кожній точці  $x_0 \in [a; b]$ , в якій  $f$  є неперервною. А скільки таких точок існує на відрізьку  $[a; b]$ , коли  $f \in R[a; b]$ ?

### 2.2.12. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Якщо функція  $f + \varphi \in R[a; b]$ , то  $f \in R[a; b]$  і  $\varphi \in R[a; b]$ .
2. Якщо функція  $\alpha f + \beta \varphi \in R[a; b] \forall \alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$ , то функції  $f \in R[a; b]$  і  $\varphi \in R[a; b]$ .

3. Якщо  $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a; b]$  і  $f \in R[a; b]$ , то  $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$ .
4. Якщо  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ , то й  $f(x) \geq 0$  на  $[a; b]$ .
5. Твердження, обернене до 4, правильне.
6. Функція  $f \in R[a; b] \Leftrightarrow |f| \in R[a; b]$ .
7. Функція  $f(x) = 2D(x) - 1$ , де  $D(x)$  – функція Діріхле,  $R$ -інтегровна на довільному відрізку  $[a; b]$ .
8. Якщо  $f\varphi \in R[a; b]$ , то  $f$  і  $\varphi \in R[a; b]$ .
9. Якщо  $f\varphi \in R[a; b]$ , то  $\exists x^* \in [a; b]: \int_a^b f(x) dx = f(x^*)(b-a)$ .
10. Для неперервної на відрізку  $[a; b]$  функції  $f$  існує функція  $F$  така, що  $\int_a^b f(x) dx = F(\beta) - F(\alpha) \forall \alpha, \beta \in [a; b]$ .
11. Функція  $f(x) = \text{sign } x \in R$ -інтегрованою на  $[-1; 1]$ .
12. Функція  $F(x) = \int_{-1}^x \text{sign } t dt$  диференційовна на відрізку  $[-1; 1]$ .
13. Якщо  $\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x) dx$ , то функціональний ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) dx$  рівномірно збіжний на  $[a; b]$ .
14.  $\int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} (x^{k-1} - x^k) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b (x^{k-1} - x^k) dx$ .
15.  $\int_a^b \sum_{k=1}^{\infty} ((1-x)(k(k+1)x^{k-1} - (k-1)x^{k-2})) dx =$   
 $= \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b ((1-x)(k(k+1)x^{k-1} - (k-1)x^{k-2})) dx$ .

## II. Довести дані твердження.

1. Якщо  $f \in R[0; a]$ ,  $a > 0$ , то  $\int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(a-t) dt$ .
2. Якщо  $f \in R[-a; a]$ ,  $a > 0$ , то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & \text{коли } f - \text{ парна функція,} \\ 0, & \text{коли } f - \text{ непарна функція.} \end{cases}$$

3. Якщо  $f$  –  $T$ -періодична функція і  $f \in R[0; T]$ , то  $f \in R[a; a + T]$   
 $\forall a \in D(f)$  і  $\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$ .
4. Якщо функція  $f$  неперервна, то  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos t) dt$ . Зокре-  
ма  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m t dt \forall m \in \mathbb{N}$ .
5. Якщо  $f$  є неперервною функцією на  $[a; b]$  і  $\int_a^b |f(x)| dx = 0$ , то  
 $f(x) = 0 \forall x \in [a; b]$ .
6. Якщо  $f \in R[a; b]$  і  $f(x) > 0 \forall x \in [a; b]$ , то  $\int_a^b f(x) dx > 0$ , коли  
 $b > a$ .
7. а)  $\sin^{2n+1} x < \sin^{2n} x < \sin^{2n-1} x \forall x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ ;  
б)  $\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}$ ;  
в)  $\frac{\pi}{2} = \lim_{n \rightarrow 0} \left( \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \right)^2 \frac{1}{2n+1}$  – **формула Валліса**.

III. Наступні задачі розв'язати за допомогою комп'ютерних засобів математики.

1. Навести геометричну ілюстрацію властивостей 1 – 7  $R$ -інтеграла.
2. Проілюструвати ситуацію, коли формальна заміна змінної дає не-  
правильний результат при обчисленні  $R$ -інтеграла.
3. Проілюструвати метод інтегрування частинами для обчислення  $R$ -  
інтеграла.

## 2.3. Невласні інтеграли

У даному підрозділі поняття визначеного інтеграла узагальнює-  
ться на випадок, коли необмеженими є проміжок інтегрування або  
підінтегральна функція.

**2.3.1. Поняття невласного інтеграла.** Розглянемо на площині  
 $OXY$  фігури  $\Phi^{(1)} = \{(x, y): 1 \leq x < +\infty, 0 \leq y \leq \frac{1}{x^\alpha}\}$  і  
 $\Phi^{(2)} = \{(x, y): 0 < x \leq 1, 0 \leq y \leq \frac{1}{x^\alpha}\}$ , де  $\alpha > 0$  – фіксоване  
число.

Такого типу фігури природно назвати *необмеженими криволі-  
нійними трапеціями* (рис. 2.3.1).

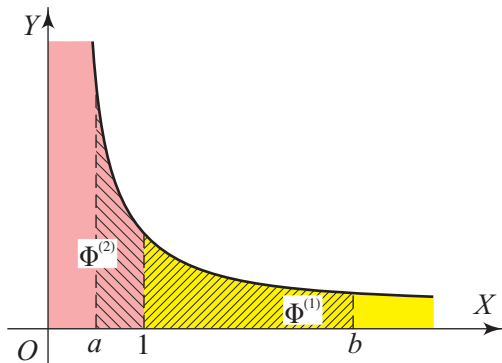


Рис. 2.3.1.

Частина  $\Phi_b^{(1)} = \{(x, y): 1 \leq x \leq b, 0 \leq y \leq \frac{1}{x^\alpha}\}$  фігури  $\Phi^{(1)}$  має площу  $S(\Phi_b^{(1)}) = \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} \forall b > 1$ . З геометричних міркувань природно назвати площею фігури  $\Phi^{(1)}$  границю  $S = \lim_{b \rightarrow +\infty} S(\Phi_b^{(1)}) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha}$  і позначити її  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ .

Аналогічно приходимо до висновку, що площу фігури  $\Phi^{(2)}$  можна означити так:  $S(\Phi^{(2)}) = \lim_{a \rightarrow 0+} S(\Phi_a^{(2)}) = \lim_{a \rightarrow 0+} \int_a^1 \frac{dx}{x^\alpha}$  і позначити її  $\int_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ , де підінтегральна функція є необмеженою на проміжку  $(0, 1]$ . У зв'язку з розглянутими прикладами введемо наступні поняття.

Нехай функція  $f$  не є інтегрованою (за Ріманом або Ньютоном – Лейбніцом) на скінченному або нескінченному проміжку  $\langle a; b \rangle$ , але задовольняє одну з умов:

- 1)  $f$  є інтегрованою функцією на відрізку  $[a; c] \forall c \in (a; b)$ ;
- 2)  $f$  є інтегрованою функцією на відрізку  $[c; b] \forall c \in (a; b)$ .

Тоді вираз  $\int_a^b f(x) dx$  називають *невласним інтегралом функції*  $f$  відповідно: 1) *на проміжку*  $[a; b)$  або 2) *на проміжку*  $(a; b]$ .

Наприклад,  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  – невластний інтеграл функції  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$  на

проміжку  $[1; +\infty)$ ,  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$  – невласний інтеграл функції  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  на проміжку  $(-1; 0]$ , а  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$  – невласний інтеграл функції  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  на проміжку  $[0; 1)$ .

**2.3.2. Значення невласного інтеграла, його збіжність і розбіжність.** Розглянемо невласний інтеграл функції  $f$  на проміжку  $[a; b)$  (на проміжку  $(a; b]$ ). Якщо існує скінченна або нескінченна границя  $I(f) = \lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c f(x) dx$  ( $I(f) = \lim_{c \rightarrow a+0} \int_c^b f(x) dx$ ), то її називають значенням невласного інтеграла  $\int_a^b f(x) dx$  на проміжку  $[a; b)$  (на проміжку  $(a; b]$ ) і записують  $\int_a^b f(x) dx = I(f)$ . При цьому якщо  $I(f)$  – скінченне число, то невласний інтеграл  $\int_a^b f(x) dx$  називають збіжним, а функцію  $f$  називають невласно інтегрованою на проміжку  $[a; b)$  (на проміжку  $(a; b]$ ) (за Ріманом або Ньютоном – Лейбніцом). В іншому разі невласний інтеграл  $\int_a^b f(x) dx$  називають розбіжним, а функцію  $f$  – неінтегрованою навіть невласно на проміжку  $[a; b)$  (на проміжку  $(a; b]$ ).

В геометричному тлумаченні збіжність невласного інтеграла означає існування площі відповідної необмеженої криволінійної трапеції.

**Приклад 1.**  $\int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(b^{1-\alpha} - 1), & \text{коли } \alpha \neq 1, \\ \ln b, & \text{коли } \alpha = 1. \end{cases}$

Тому  $\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}, & \text{коли } \alpha > 1, \\ +\infty, & \text{коли } \alpha \leq 1. \end{cases}$

Отже, невласний інтеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \in \mathbb{R}$  є збіжним, коли  $\alpha > 1$ , і

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = +\infty \in \mathbb{R}$  є розбіжним, коли  $\alpha \leq 1$ .

**Приклад 2.**  $\int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x \Big|_a^0 = -\arcsin a \rightarrow \frac{\pi}{2}$ , коли  $a \rightarrow -1$ .

Тому невластний інтеграл  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$  є збіжним.

**2.3.3. Узагальнення поняття невластного інтеграла.** Нехай  $f$  неінтегровна на проміжку  $\langle a; b \rangle$ , але існує скінченна кількість точок  $x_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , таких, що  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$  і кожен вираз  $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx$ ,  $k \in \overline{0, n-1}$ , є невластним інтегралом на проміжку  $[x_k; x_{k+1}]$  чи на проміжку  $(x_k; x_{k+1}]$ . Тоді вираз  $\int_a^b f(x) dx$  називають *невластним інтегралом функції  $f$  на проміжку  $\langle a; b \rangle$*  (не конкретизуючи вигляду цього проміжку). Цей невластний інтеграл називають *збіжним*, якщо збіжним є кожен з невластних інтегралів  $\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx$ ,  $k \in \overline{0, n-1}$ . При цьому записують  $\int_a^b f(x) dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dx$  і називають функцію  $f$  *невластно інтегрованою на проміжку  $\langle a; b \rangle$* . В іншому разі невластний інтеграл  $\int_a^b f(x) dx$  називають *розбіжним*, а функцію  $f$  *неінтегрованою на віть невластно на проміжку  $\langle a; b \rangle$* .

Зауважимо, що на практиці точки  $x_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , є, як правило, точками розриву функції  $f$ .

**Приклад 3.**  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$  – невластний інтеграл функції  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$  на проміжку  $(-1; 1)$ . Покладемо  $x_0 = -1$ ,  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 1$ . Вище показано, що невластний інтеграл  $\int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ . Аналогічно можна показати, що й  $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}$ . Тому невластний інтеграл  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$  є збіжним.

**Приклад 4.**  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$  – невластний інтеграл функції  $f(x) = \frac{1}{x^2}$  на проміжку  $(0; +\infty) = (0; c) \cup [c; +\infty)$  тобто  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = c > 0$ ,  $x_2 = +\infty$ . Оскільки  $\int_0^c \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^c \frac{dx}{x^2} = \lim_{a \rightarrow 0^+} (-\frac{1}{x} \Big|_a^c) = \lim_{a \rightarrow 0^+} (\frac{1}{a} - \frac{1}{c}) = +\infty$ , то даний невластний інтеграл є розбіжним.

**Приклад 5.**  $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sin x}$  – цей вираз не є невластним інтегралом. Справді,

для будь-якої скінченної кількості точок  $x_k, k \in \overline{0, n}$ , таких, що  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = +\infty$ , вираз  $\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) dx = \int_{x_{n-1}}^{+\infty} f(x) dx$  не є звичайним інтегралом чи невластним інтегралом на проміжку  $(x_{n-1}; +\infty)$ , оскільки знаменник виразу  $\frac{1}{\sin x}$  обертається в нуль у нескінченній кількості точок  $t_i = \pi i, i \in \mathbb{N}, i > i_0$ .

**Приклад 6.**  $\int_{-a}^a \operatorname{sign} x dx, a > 0$ , є невластним інтегралом Ньютона – Лейбніца на проміжку  $[-a; a]$ .

Покладемо  $x_0 = -a, x_1 = 0, x_2 = a$ . Оскільки

$$\int_{-a}^0 \operatorname{sign} x dx = \lim_{c \rightarrow 0^-} \int_{-a}^c -1 dx = \lim_{c \rightarrow 0^-} (-x)|_{-a}^c = -a$$

і

$$\int_0^a \operatorname{sign} x dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^a 1 dx = \lim_{c \rightarrow 0^+} (x)|_c^a = a,$$

то інтеграл

$$\int_{-a}^a \operatorname{sign} x dx = \int_{-a}^0 \operatorname{sign} x dx + \int_0^a \operatorname{sign} x dx = -a + a = 0,$$

тобто є збіжним невластним інтегралом Ньютона – Лейбніца. Зауважимо, що цей інтеграл, як інтеграл Рімана, є звичайним (або власним) інтегралом, проте він не існує, як звичайний інтеграл Ньютона – Лейбніца.

**2.3.4. Умови збіжності невластних інтегралів.** Оскільки довільний невластний інтеграл зводиться до невластних інтегралів на проміжках вигляду  $[a; b)$  та  $(a; b]$ , то розглянемо перший з них детальніше. Міркування для другого аналогічні.

Отже, нехай  $\int_a^b f(x) dx$  – невластний інтеграл на проміжку  $[a; b)$ , де  $-\infty < a < b \leq +\infty$ . Коли  $b = +\infty$ , то цей інтеграл називають ще *невластним інтегралом на нескінченному проміжку*  $[a; +\infty)$  або *невластним інтегралом першого роду*:  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ .

Якщо  $b < +\infty$ , то  $\int_a^b f(x) dx$  називають *невластним інтегралом другого роду*. Він може бути *невластним інтегралом від необмеженої функції* (коли розглядається  $R$ -інтегровність), і в цьому випадку  $f$  необмежена в довільному околі точки  $b$ , або ж *від функції, що не*

має первісної (коли розглядається  $NL$ -інтегровність).

Оскільки висновок про збіжність невластного інтеграла  $\int_a^b f(x) dx$  на проміжку  $[a; b)$  роблять в залежності від існування границі функції  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ , коли  $b > x \rightarrow b$ , то при цьому можна використовувати всі твердження про границю функції в точці. Враховуючи це, легко довести наступне твердження.

**Теорема 1** (про умови збіжності невластного інтеграла). *Невластний інтеграл  $\int_a^b f(x) dx$  на проміжку  $[a; b)$  є збіжним, коли виконується принаймні одна з умов 1) – 5):*

- 1) послідовність  $F(x_n) = \int_a^{x_n} f(x) dx$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , є збіжною для будь-якої послідовності  $(x_n)$ :  $b > x_n \rightarrow b$ , коли  $n \rightarrow \infty$ ;
- 2)  $|F(x_m) - F(x_n)| = \left| \int_{x_m}^{x_n} f(x) dx \right| \rightarrow 0$ , за умови  $m \geq n \rightarrow \infty$ , для будь-якої послідовності  $(x_n)$ :  $b > x_n \rightarrow b$ , коли  $n \rightarrow \infty$ ;
- 3) Функція  $f(x) \geq 0$ , а  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  обмежена на проміжку  $[a; b)$ ;
- 4)  $|f(x)|$  є невластно інтегрованою функцією на  $[a; b)$  (при цьому  $\int_a^b f(x) dx$  називають **абсолютно збіжним невластним інтегралом**);
- 5)  $|f(x)| \leq g(x) \forall x \in [a; c]$  і  $g$  – невластно інтегровна функція на  $[a; b)$ .

Проілюструємо метод доведення тверджень теореми 1 на прикладі умови 3).

□ Оскільки  $f(x) \geq 0 \forall x \in [a; b)$ , то за властивостями адитивності та монотонності  $R$ -інтеграла та  $NL$ -інтеграла маємо:

$$\begin{aligned} F(x_2) - F(x_1) &= \int_a^{x_2} f(t) dt - \int_a^{x_1} f(t) dt = \\ &= \int_a^{x_1} f(t) dt + \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt - \int_a^{x_1} f(t) dt = \int_{x_1}^{x_2} f(t) dt \geq 0 \end{aligned}$$



$\forall x_1 \in [a; b)$  та  $x_2 \in [a; b)$ :  $x_1 < x_2$ . Тому  $F$  – неспадна і обмежена на  $[a; b)$  функція. Отже, за теоремою про границю монотонної функції існує скінченна границя

$$\lim_{x \rightarrow b} F(x) = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt = \int_a^b f(t) dt,$$

тобто даний невласний інтеграл збіжний. ■

Доведення інших тверджень теореми 1 також досить прості.

**2.3.5. Інтегральна ознака збіжності додатного ряду.** Виявляється, що невласні інтеграли тісно пов'язані з рядами.

□ Нехай функція  $f$  є незростаючою та невід'ємною на проміжку  $[1; +\infty)$  (рис. 2.3.2).

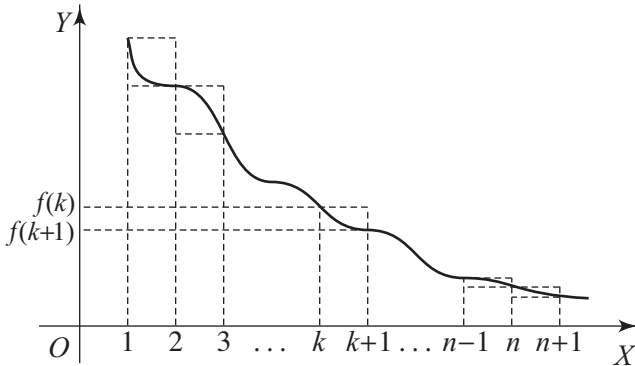


Рис. 2.3.2.

Тоді за доведеним вище існує границя  $I(f) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (R) \int_1^x f(t) dt = \int_1^{+\infty} f(t) dt$ . Тому  $I(f) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_1^n f(t) dt$  і ця границя скінченна тоді й тільки тоді, коли послідовність  $F(n) = \int_1^n f(t) dt$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , є обмеженою.

За адитивністю  $R$ -інтеграла  $F(n) = \int_1^n f(t) dt = \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} f(t) dt$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , а за властивістю монотонності  $R$ -інтеграла

$$f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(t) dt \leq f(k),$$

оскільки  $f(k+1) \leq f(t) \leq f(k) \forall t \in [k; k+1]$ . Тому

$$\sum_{k=1}^{n-1} f(k+1) \leq F(n) \leq \sum_{k=1}^n f(k) \Leftrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^n f(k) - f(1) \leq F(n) \leq \sum_{k=1}^n f(k) \forall n \in \mathbb{N}.$$

Звідси випливає, що послідовність  $F(n)$  обмежена тоді і тільки тоді, коли обмеженою є послідовність  $(S_n)$ , де  $S_n = \sum_{k=1}^n f(k)$  – ча-

стинна сума додатного ряду  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$ . Тому за критерієм збіжності додатного ряду  $(F(n))$  – обмежена послідовність тоді і тільки тоді, коли ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  є збіжним. Таким чином, невластний інтеграл

$\int_1^{+\infty} f(t) dt$  і ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  одночасно збіжні або розбіжні. ■

Отже, доведена наступна теорема.

**Теорема 2** (інтегральна ознака збіжності додатного ряду). *Нехай функція  $f$  невід'ємна і незростаюча на проміжку  $[1; +\infty)$ . Тоді ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} f(k)$  і невластний  $R$ -інтеграл  $\int_1^{+\infty} f(t) dt$  одночасно збіжні або розбіжні.*

**Приклад 7.** Нехай дано ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ , де  $\alpha > 0$ . Розглянемо функцію  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ ,  $x \geq 1$ . Тоді  $f(k) = \frac{1}{k^\alpha} \forall k \in \mathbb{N}$ ,  $f(x) \geq 0 \forall x \in [1; +\infty)$  і  $f$  – спадна функція. Тому за теоремою 2 даний ряд і невластний інтеграл  $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$  одночасно збіжні або розбіжні.

Вище було показано, що коли  $\alpha > 1$ , то заданий невластний інтеграл є збіжним, а коли  $\alpha \leq 1$ , то він розбіжний. Тому ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$  збігається, коли  $\alpha > 1$ , і розбігається коли  $0 < \alpha \leq 1$ .

Зауважимо, що коли  $\alpha \leq 0$ , то  $\frac{1}{k^\alpha} \not\rightarrow 0$ , коли  $k \rightarrow \infty$ , і тому даний ряд також є розбіжним.

**2.3.6. Головні значення невластного інтеграла.** Якщо невластний інтеграл  $\int_a^b f(x) dx$  не є збіжним на проміжках  $[a; b)$  та  $(a; b]$ ,

то він може мати так зване головне значення. Проілюструємо це поняття на прикладі двох типів невластних інтегралів.

Нехай для невластного інтеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  існує скінченна границя  $\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{-r}^r f(x) dx = I(f)$ , де  $\int_{-r}^r f(x) dx$  – звичайний (власний) інтеграл. Тоді дану границю називають *головним значенням невластного інтеграла*  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  і записують в.р.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = I(f)$  або гол.  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = I(f)$ .

Нехай для невластного інтеграла  $\int_a^b f(x) dx$  від необмеженої функції існує скінченна границя  $\lim_{r \rightarrow 0^+} \left( \int_a^{c-r} f(x) dx + \int_{c+r}^b f(x) dx \right) = I(f)$ , де  $\int_a^{c-r} f(x) dx$  і  $\int_{c+r}^b f(x) dx$  – звичайні (власні) інтеграли. Тоді число  $I(f)$  називають *головним значенням невластного інтеграла*  $\int_a^b f(x) dx$  і записують в.р.  $\int_a^b f(x) dx = I(f)$  або гол.  $\int_a^b f(x) dx = I(f)$ .

**Приклад 8.** Невласний інтеграл  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x}$  є розбіжним, оскільки  $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{x} = \lim_{c \rightarrow 0^+} (-\ln c) = +\infty$ . Разом з тим  $\int_{-1}^{-r} \frac{dx}{x} + \int_r^1 \frac{dx}{x} = \ln r - \ln r = 0 \rightarrow 0$ , коли  $r \rightarrow 0^+$ . Тому в.р.  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0$  (або гол.  $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} = 0$ ).

**Приклад 9.** Так званий інтегральний логарифм  $\text{li } x = \int_0^x \frac{dt}{\ln t}$ , коли  $x > 1$ , розуміють як головне значення невластного інтеграла від необмеженої функції.

**2.3.7. Використання комп'ютерних засобів математики.** Оскільки за допомогою сучасних СКМ, таких як Maxima або MathCAD, можна обчислювати визначені інтеграли та границі, то вже через це їх можна ефективно використовувати при вивченні невластних інтегралів. Але в цих системах передбачено також і безпосереднє обчислення невластних

інтегралів першого та другого роду.

**2.3.7.1. Використання Gran1.** Програму Gran1 можна використати для одержання наближених значень невласних інтегралів шляхом обчислення відповідних власних інтегралів. Цей спосіб ґрунтується на суті поняття невласного інтеграла. Про оцінку точності таких наближень не може йтися, як і про переконливе обґрунтування цим способом факту збіжності чи розбіжності невласних інтегралів. Мова може йти лише про одержання гіпотези щодо збіжності невласного інтеграла та певного уявлення про його можливе значення.

Розглянемо кілька прикладів.

① Знайдемо за допомогою програми Gran1 кілька наближених значень невласного інтеграла  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$  у вигляді інтегралів  $I(b) = \int_1^b \frac{dx}{x^2}$ , де  $b$  досить велике. Так,  $I(10) = 0.9$ ,  $I(50) = 0.98$ ,  $I(100) = 0.99$ .

Виникає питання: наскільки великим потрібно брати  $b$ , щоб одержати якомога точніше наближення? Теоретично точність повинна необмежено зростати при  $b \rightarrow \infty$ . Спробуємо обчислювати  $I(b)$  при ще більших  $b$ :  $I(1000) = 1.01792$ ,  $I(10^4) = 2.80776$ ,  $I(10^5) = 26.0655$  і далі при збільшенні  $b$  на порядок значення  $I(b)$  теж збільшується приблизно на порядок. Отже, проведені обчислення дають найліпшу точність наближення при  $b = 10^3$ . Якщо ж брати  $b$  занадто великим, то за програмою Gran1 при обчисленні інтегралів отримується дуже велика похибка. Це може привести, зокрема, до неправильного висновку про розбіжність досліджуваного невласного інтеграла.

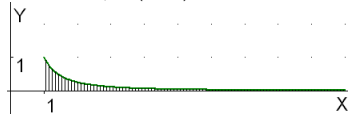


Рис. 2.3.3.

② Знайдемо тепер наближені значення невласного інтеграла  $\int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 4$

у вигляді інтегралів  $J(a) = \int_a^4 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ , де  $a > 0$  –

досить мале число. Маємо:

$$J(0.1) = 3.36754, J(0.01) = 3.80001,$$

$$J(10^{-3}) = 3.93978, J(10^{-4}) = 4.03127,$$

$$J(10^{-5}) = 4.25878, J(10^{-6}) = 4.97128,$$

$$J(10^{-7}) = 7.22367, J(10^{-10}) = 108.096, \dots$$

Знову бачимо, що за програмою Gran1 отримується прийнятна точність наближення невласного інтеграла числом  $J(a)$  при  $a \approx 10^{-4}$ , але при  $a \rightarrow 0+$  виявляється некоректна закономірність, ніби  $J(a) \rightarrow +\infty$ .

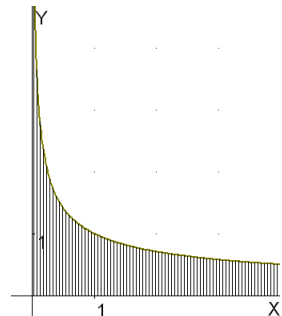


Рис. 2.3.4.

Зауважимо, що за програмою Gran1 можна здійснювати і безпосереднє обчислення невластних інтегралів другого роду. Наприклад, якщо ввести функцію  $f(x) = x^{-1/2}$  і відрізок  $[0; 4]$ , то інтеграл, обчислений по цьому відрізку, буде таким:  $I = 3.92964$  (похибка 0.07). Проте легко знайти приклади інтегралів, безпосереднє обчислення яких приводить до непередбачуваних результатів.

③ Так, при обчисленні інтеграла  $\int_0^1 x^{-19/20} dx = 20$  програмою Gran1 дістаємо  $I = 6.57553$ , а для розбіжного інтеграла  $\int_0^1 \frac{dx}{x} = \infty$  дістаємо значення  $I = 7.96288$ . Зауважимо, що такі інтеграли практично неможливо дослідити і методом наближення їх власними інтегралами, оскільки ці власні інтеграли в інтерпретації комп'ютера необмежено збільшуються, коли нижня межа інтегрування прямує до нуля.

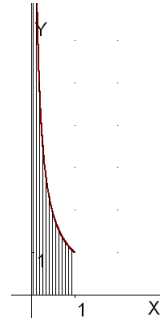


Рис. 2.3.5.

Відмітимо ще одну особливість, яка проявляється при обчисленні невластних інтегралів ① і ②. За програма Gran1 можуть отримуватися великі похибки при обчисленні навіть звичайних визначених інтегралів Рімана (коли вони “близькі” до невластних). Швидше за все, це залежить від вибору методів обчислення визначених інтегралів у даній програмі. Разом з тим за допомогою Gran1 можна ілюструвати геометричний зміст невластних інтегралів так само, як і для  $NL$ -інтегралів (див. рис. 2.3.4 – 2.3.5).

**2.3.7.2. Використання Махіма.** Для точного обчислення невластних інтегралів (як першого, так і другого роду) у програмі Махіма використовується та сама команда `integrate(f(x),x,a,b)`, що й для визначених інтегралів. При цьому повертається значення невластного інтеграла (якщо він збіжний), для розбіжного інтеграла вказується головне значення (якщо воно існує), а якщо інтеграл розбіжний і не має головного значення, тоді повідомляється, що інтеграл є розбіжним.

Продемонструємо на прикладах застосування Махіма до обчислення невластних інтегралів.

**Приклад 1.** Обчислити невластні інтеграли: 1)  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3+1}$ ; 2)  $\int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx$  ( $a > 0$ ); 3)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2(1+x)}$ ; 4)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x-1}{x^4+1} dx$ ; 5)  $\int_0^1 \ln x^{x+1} dx$ ; 6)  $\int_{-1}^8 \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$ ; 7)  $\int_{-3}^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$ .

- (%i1) integrate(1/(x^3+1),x,0,inf);  
 (%o1)  $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$   
 (%i2) integrate(x\*%e^(-a\*x^2),x,0,inf);

Is a positive, negative, or zero? p;

$$(\%o2) \frac{1}{2a}$$

(%i3) integrate(1/(x^2\*(1+x)),x,1,inf);

$$(\%o3) 1 - \log(2)$$

(%i4) integrate((2\*x-1)/(x^4+1),x,minf,inf);

$$(\%o4) -\frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

(%i5) integrate(log(x^(x+1)),x,0,1);

$$(\%o5) -\frac{5}{4}$$

(%i6) integrate(1/x^(1/3),x,-1,8);

$$(\%o6) \frac{9}{2}$$

(%i7) integrate(x^2/sqrt(9-x^2),x,-3,3);

$$(\%o7) \frac{9\pi}{2} \quad \blacksquare$$

За зовнішнім виглядом інтеграла  $\int_a^b f(x) dx$ , коли межі  $a$  та  $b$  скінченні, непомітно, власний це інтеграл чи невластний. Навіть якщо цей інтеграл обчислюється за допомогою Maxima, то з'ясувати, власний він чи невластний, користувач повинен сам. Наприклад, інтеграли 5) – 7) прикладу 1 є невластними тому, що в них підінтегральні функції на проміжках інтегрування є необмеженими.

Просте обчислення невластних інтегралів, яке було продемонстроване у прикладі 1, дає лише кінцевий результат. Якщо приклад береться із збірника задач, у якому є відповіді, то знайдений за допомогою комп'ютера результат можна порівняти з відповіддю у книзі. Проте часто буває необхідно обчислити якийсь інтеграл, до якого немає готової відповіді. Тоді одержання відповіді за допомогою комп'ютера може наштовхнути на правильний хід обчислення даного інтеграла. Або коли приклад розв'язаний, а потрібно впевнитися у правильності розв'язку, тоді використання комп'ютера теж може виявитися корисним.

В система Maxima є дуже потужний апарат символьного (і чисельного) інтегрування і вона визнається професійними математиками однією з найкращих математичних програм.

Іноді необхідно за допомогою комп'ютера деталізувати хід розв'язування задачі.

**Приклад 2.** Обчислити кожен невластний інтеграл прикладу 1 за означенням, тобто спочатку знайти відповідний визначений інтеграл із змінною межею, а потім перейти до границі.

□ (%i1) 'limit(integrate(1/(x^3+1),x,0,b),b,inf);

Is b positive, negative, or zero? p;

$$(\%o1) \lim_{b \rightarrow \infty} -\frac{\log(|b^2-b+1|)}{6} + \frac{\operatorname{atan}\left(\frac{2\sqrt{3}b-\sqrt{3}}{3}\right)}{\sqrt{3}} + \frac{\log(b+1)}{3} + \frac{\pi}{2 \cdot 3^{\frac{3}{2}}}$$

(%i2) %,nouns;

```
(%o2)  $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} + \frac{\pi}{2 \cdot 3^{\frac{3}{2}}}$ 
(%i3) ratsimp(%);
(%o3)  $\frac{2\pi}{3^{\frac{3}{2}}}$ 
(%i4) 'limit(integrate(x*%e^(-a*x^2),x,0,b),b,inf);
Is b positive, negative, or zero? p;
(%o4)  $\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2a} - \frac{e^{-a} b^2}{2a}$ 
(%i5) %,nouns;
Is a positive, negative, or zero? p;
(%o5)  $\frac{1}{2a}$ 
(%i6) 'limit(integrate(1/(x^2*(1+x)),x,1,b),b,inf);
Is b-1 positive, negative, or zero? p;
(%o6)  $\lim_{b \rightarrow \infty} \log(b+1) - \log(b) - \frac{1}{b} - \log(2) + 1$ 
(%i7) %,nouns;
(%o7) 1 - log(2)
(%i8) 'limit(integrate((2*x-1)/(x^4+1),x,a,0),a,minf)+
'limit(integrate((2*x-1)/(x^4+1),x,0,b),b,inf),logcontract;
Is a positive, negative, or zero? n;
Is b positive, negative, or zero? p;
(%o8) 
$$\frac{\lim_{a \rightarrow -\infty} \log\left(\frac{a^4+2\frac{3}{2}a^3+4a^2+2\frac{3}{2}a+1}{a^4-2\frac{3}{2}a^3+4a^2-2\frac{3}{2}a+1}\right) + (2\frac{7}{2}+4) \operatorname{atan}(\sqrt{2}a+1) + (4-2\frac{7}{2}) \operatorname{atan}(\sqrt{2}a-1) - 2\frac{5}{2}\pi}{2\frac{7}{2}} -$$


$$\frac{\lim_{b \rightarrow \infty} \log\left(\frac{b^4+2\frac{3}{2}b^3+4b^2+2\frac{3}{2}b+1}{b^4-2\frac{3}{2}b^3+4b^2-2\frac{3}{2}b+1}\right) + (2\frac{7}{2}+4) \operatorname{atan}(\sqrt{2}b+1) + (4-2\frac{7}{2}) \operatorname{atan}(\sqrt{2}b-1) - 2\frac{5}{2}\pi}{2\frac{7}{2}}$$

(%i9) %,nouns;
(%o9)  $-\frac{2\frac{7}{2}\pi + 2\frac{5}{2}\pi - 4\pi}{2\frac{7}{2}} - \frac{(4-2\frac{5}{2})\pi}{2\frac{7}{2}}$ 
(%i10) ratsimp(%);
(%o10)  $-\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ 
(%i11) 'limit(integrate(log(x^(x+1)),x,a,1),a,0,plus);
Is a-1 positive, negative, or zero? n;
(%o11)  $\lim_{a \rightarrow 0^+} -\frac{(2a^2+4) \log(a) - a^2 - 4a}{4} - \frac{5}{4}$ 
(%i12) %,nouns;
(%o12)  $-\frac{5}{4}$ 
(%i13) 'limit(integrate(1/x^(1/3),x,-1,a),a,0,minus)+
'limit(integrate(1/x^(1/3),x,c,8),c,0,plus);
Is a+1 positive, negative, or zero? n;
Is c-8 positive, negative, or zero? n;
Is c positive, negative, or zero? p;
(%o13)  $\lim_{c \rightarrow 0^+} 6 - \frac{3c^{\frac{2}{3}}}{2} + \lim_{a \rightarrow 0^-} \frac{3a^{\frac{2}{3}}}{2} - \frac{3}{2}$ 
```

(%i14) %,nouns;

(%o14)  $\frac{9}{2}$

(%i15) 'limit(integrate(x^2/sqrt(9-x^2),x,a,0),a,-3,plus)+  
'limit(integrate(x^2/sqrt(9-x^2),x,0,c),c,3,minus);

Is a positive, negative, or zero? n;

Is a+3 positive, negative, or zero? p;

Is c positive, negative, or zero? p;

Is c-3 positive, negative, or zero? n;

(%o15)  $\frac{\lim_{a \rightarrow -3+} a \sqrt{9-a^2} - 9 \operatorname{asin}\left(\frac{a}{3}\right)}{2} - \frac{\lim_{c \rightarrow 3-} c \sqrt{9-c^2} - 9 \operatorname{asin}\left(\frac{c}{3}\right)}{2}$

(%i16) %,nouns;

(%o16)  $\frac{9\pi}{2}$  ■

Як бачимо, всі результати, одержані при розв'язуванні прикладу 2, збігаються з результатами прикладу 1. А основне – за допомогою комп'ютера спочатку отримано усі відповідні визначені інтеграли, а потім знайдено їхні границі, що дає змогу проконтролювати обидва етапи відшукування невластного інтеграла. До того ж, цим наочно ілюструється суть поняття невластного інтеграла.

В системі Maxima при інтегруванні елементарних функцій передбачено використання не тільки елементарних, а й деяких спеціальних функцій. Це дозволяє розв'язувати значно ширше коло задач. Зокрема, за замовчуванням включений параметр `erfflag:true`, що дозволяє використовувати при інтегруванні так звану *функцію помилок (Гауса)*:

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

Стислі відомості про цю функцію можна знайти в інтернеті за адресою [http://en.wikipedia.org/wiki/Error\\_function](http://en.wikipedia.org/wiki/Error_function). Побудуємо графік цієї функції (рис. 2.3.6) за допомогою наступних команд.

(%i1) load(draw)\$

(%i2) draw2d(proportional\_axes=xy, grid=true,  
xaxis=true, yaxis=true,  
xaxis\_type=solid, yaxis\_type=solid,  
xaxis\_width=2, yaxis\_width=2,  
xlabel="x", ylabel="erf(x)",  
line\_width=3, color=red,  
explicit(erf(x),x,-3,3),  
xrange=[-3.2,3.2], yrange=[-1.2,1.2])\$



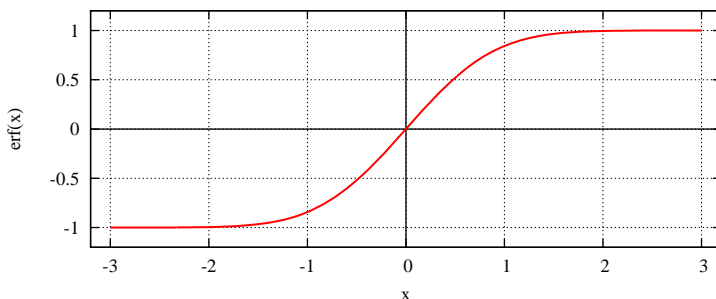


Рис. 2.3.6.

Інші назви функції помилок – *функція Лапласа* або *інтеграл імовірностей* (див. п. 1.3.7). Відмітимо, що

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = 1.$$

Доведення цього факту можна знайти, наприклад, у [17, с. 612–613]. Невласний інтеграл в останній рівності називають *інтегралом Ейлера – Пуассона*.

**Приклад 3.** Обчислити невластний інтеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x - 1}{e^{x^2}} dx$  за

означенням. Зобразити графік підінтегральної функції.

```
(%i1) f:(x^5-x^4-x^3-x^2-x+1)/%e^(x^2)$
(%i2) [i1:integrate(f,x,-a,0),i2:integrate(f,x,0,b)];
Is b positive, negative, or zero? p;
(%o2) [-\frac{e^{-a^2}(\sqrt{\pi}e^{a^2}\operatorname{erf}(a)-4a^4-4a^3-4a^2-10a)}{8},
-\frac{e^{-b^2}(\sqrt{\pi}e^{b^2}\operatorname{erf}(b)+4b^4-4b^3+4b^2-10b)}{8}]
(%i3) I1:limit(i1,a,inf);
(%o3) -\frac{\sqrt{\pi}}{8}
(%i4) I2:limit(i2,b,inf);
(%o4) -\frac{\sqrt{\pi}}{8}
(%i5) I1+I2;
(%o5) -\frac{\sqrt{\pi}}{4}
```

Інтеграл обчислено. Зобразимо тепер графік підінтегральної функції (рис. 2.3.7), за яким можна краще уявити геометричний зміст даного інтеграла.

```
(%i6) load(draw)$
(%i7) draw2d(proportional_axes=xy,grid=true,nticks=200,
line_width=4,color=dark-salmon,explicit(f,x,-4,4));
```

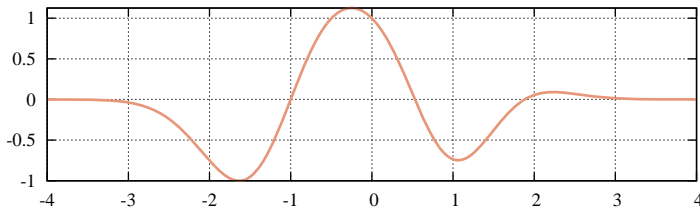


Рис. 2.3.7.

Аналогічно можна обчислити довільний (але не дуже складний) інтеграл вигляду  $\int_{-\infty}^{+\infty} P_n(x)e^{-x^2} dx$ , де  $P_n(x)$  – деякий многочлен. ■

Наступний приклад стосується головних значень невласних інтегралів.

**Приклад 4.** Обчислити головні значення заданих невласних інтегралів за означенням і безпосередньо: 1)  $\int_a^b \frac{dx}{x}$ ,  $a < 0 < b$ ; 2)  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \operatorname{tg} x dx$ ;

3)  $\int_0^1 \frac{dx}{x \ln x}$ ; 4)  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ax+b}{x^2+1} dx$ .

□ 1) Легко бачити, що даний інтеграл розбіжний, тому перейдемо до відшукування його головного значення.

```
(%i1) integrate(1/x,x,a,-r)+integrate(1/x,x,r,b);
```

Is r + a positive, negative, or zero? n;

Is r positive, negative, or zero? p;

Is a positive, negative, or zero? n;

Is r - b positive, negative, or zero? n;

```
(%o1) log(b) - log(-a)
```

До границі переходити немає потреби, оскільки отримано стає значення, яке і є головним значенням інтеграла 1). Спробуємо тепер знайти його безпосередньо:

```
(%i2) [assume(a<0),assume(b>0)]$
```

```
(%i3) integrate(1/x,x,a,b);
```

Principal Value

```
(%o3) log(b) - log(a) + i pi
```

```
(%i4) rectform(%);
```

```
(%o4) log(b) - log(-a)
```

Дістали те саме значення.

2) Перевіримо, що даний інтеграл розбіжний:

```
(%i4) integrate(tan(x),x,0,%pi/2);
```

defint: integral is divergent. – an error.

To debug this try: debugmode(true);

Так у системі Maxima видається повідомлення про те, що інтеграл розбіжний. Перейдемо до відшукування головного значення.

```
(%i5) integrate(tan(x),x,-r,r);
(%o5) 0
```

Знову головне значення знайдено без використання границі. Перевіримо, яке значення даного інтеграла 2) буде отримане за допомогою Maxima:

```
(%i5) integrate(tan(x),x,-%pi/2,%pi/2);
(%i6) 0
```

Тут не вказано, що це головне значення невласного інтеграла, тому може скластися враження, що обчислений інтеграл був збіжним невласним або звичайним рімановим.

Переобчислимо заданий інтеграл ще раз, по-іншому записавши підінтегральну функцію:

```
(%i7) integrate(sin(x)/cos(x),x,-%pi/2,%pi/2);
Principal Value
(%o7) log(-1)
```

Ця відповідь теж неправильна, хоча вказано, що мова йде про головне значення.

Разом з тим аналогічний інтеграл, тільки з котангенсом, за допомогою Maxima знаходиться правильно:

```
(%i8) integrate(cot(x),x,0,%pi);
Principal Value
(%o8) 0
```

3) Перевіряємо розбіжність даного інтеграла:

```
(%i9) integrate(1/x/log(x),x,0,1/2);
defint: integral is divergent. - an error.
To debug this try: debugmode(true);
```

Тепер знайдемо його головне значення:

```
(%i10) integrate(1/x/log(x),x,r,1-r);
Is 2 r - 1 positive, negative, or zero? n;
Is r positive, negative, or zero? p;
(%o11) log(-log(1-r)) - log(-log(r))
(%i10) logcontract(%);
(%o10) log( $\frac{\log(1-r)}{\log(r)}$ )
(%i11) limit(%r,0,plus);
(%o11)  $-\infty$ 
```

Цим встановлено, що даний розбіжний інтеграл є розбіжним і в розумінні головного значення. Перевіримо це ще й безпосередньо:

```
(%i12) integrate(1/x/log(x),x,0,1);
defint: integral is divergent. - an error.
To debug this try: debugmode(true);
```

Це повідомлення у Maxima видається, коли інтеграл розбіжний і не має головного значення, тобто в даному випадку все коректно.

4) Досліджуємо невластний інтеграл на збіжність:

```
(%i13) integrate((a*x+b)/(x^2+1),x,0,inf);
```

```
defint: integral is divergent. – an error.
```

```
To debug this try: debugmode(true);
```

Діставши підтвердження розбіжності, можемо шукати головне значення:

```
(%i14) integrate((a*x+b)/(x^2+1),x,-r,r);
```

```
Is r positive, negative, or zero? p;
```

```
(%o13) 2 b atan(r)
```

```
(%i14) limit(%r,inf);
```

```
(%o14) π b
```

Тепер це саме знайдемо однією командою:

```
(%i15) integrate((a*x+b)/(x^2+1),x,minf,inf);
```

```
Principal Value
```

```
(%o15) π b ■
```

Таким чином, за допомогою Maxima в основному досить коректно відшукуються головні значення невластних інтегралів. Проте іноді при використанні команди `integrate` можуть виникати помилки. Тому для більшої впевненості краще знаходити головні значення за означенням.

Невластні інтеграли, як і визначені інтеграли, далеко не завжди виражаються через елементарні функції, причому таких “неелементарних” інтегралів набагато більше, ніж тих, які можна знайти у скінченному вигляді. Тоді замість символьних обчислень використовують чисельні методи. У програму Maxima вбудовано потужний апарат чисельних методів. Зокрема, для чисельного обчислення визначених або невластних інтегралів є команди `romberg` (тільки для власних інтегралів), `quad_qag` і `quad_qags` (для визначених інтегралів і невластних інтегралів II роду) та `quad_qagi` (для невластних інтегралів I роду). Застосовуються ці команди аналогічно до команди `integrate`, але повертають не точні значення інтеграла, а наближені десяткові, причому на точність результату можна впливати за допомогою додаткових параметрів. У кожна з наведених вище команд використовується далеко не простий алгоритм роботи.

**Приклад 5.** Обчислити задані невластні інтеграли чисельно, визначивши приблизну точність отриманих значень:

$$1) \int_0^{\pi/2} \ln \sin x \, dx, \quad 2) \int_0^{1/\pi} \sin \frac{1}{x} \, dx, \quad 3) \int_{-1}^2 \frac{dx}{x}, \quad 4) \int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} \, dx, \quad 5) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^2+1} \, dx.$$

□ 1) При спробі обчислити цей інтеграл командою `integrate` на екран виводиться дуже громіздкий вираз, який містить комплекснозначні і спеціальні функції, і цей вираз ніяк не спрощується. Застосуємо до нього команду чисельного інтегрування:

```
(%i1) quad_qags(log(sin(x)),x,0,%pi/2);
```

```
(%o1) [-1.088793045151801, 1.2088031077792673 10-15, 231, 0]
```

Пояснимо виведений результат. Це список з чотирьох елементів. Перший елемент – наближене десяткове значення шуканого інтеграла, другий – оцінка абсолютної похибки наближення, третій – кількість проміжних обчислень (ітерацій), четвертий – код помилки (може набувати значень від 0 до 6). Нульове значення коду помилки свідчить про те, що ніяких помилок при обчисленні виявлено не було, а отже, отриманий результат є надійним. Перевіримо, чи це так насправді.

Виявляється, що за допомогою програми MathCAD можна точно обчислити даний інтеграл:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(x)) dx \rightarrow -\frac{\pi \cdot \ln(2)}{2}$$

(див. також [17, с. 611–612]). Перевірку виконаємо так:

```
(%i2) -%pi/2*log(2),numer;
```

```
(%o2) -1.088793045151801
```

Правильність обчислень підтверджено.

2) Обчислимо цей інтеграл командою integrate:

```
(%i3) integrate(sin(1/x),x,0,1/%pi),numer;
```

```
(%o3) - limx→0+ sin(1/x) x + 0.5 gamma_incomplete(0, i/x) +
```

```
0.5 gamma_incomplete(0, -i/x) - 0.073667912046426
```

Знову отримано складний результат, оскільки він містить спеціальну так звану *верхню неповну гамма-функцію*

$$\text{gamma\_incomplete}(z) = \Gamma(a, z) = \int_z^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt, \quad a, z \in \mathbb{C}$$

(див. [http://en.wikipedia.org/wiki/Incomplete\\_gamma\\_function](http://en.wikipedia.org/wiki/Incomplete_gamma_function)).

Якщо границя, що отримується за допомогою Maxima (за умови  $z \in \mathbb{R}$ ):

```
(%i4) limit(gamma_incomplete(a,z),z,inf);
```

```
(%o4) 0
```

правильна і для  $z \in \mathbb{C}$ , то з рядка (%o3) впливає гіпотеза, що наближене значення інтеграла 2) дорівнює  $-0.073667912046426$ . Обчислимо цей інтеграл чисельним методом:

```
(%i5) quad_qags(sin(1/x),x,0,1/%pi);
```

```
(%o5) [-0.07365309492872, 2.0404047005848081 10-4, 8379, 1]
```

Слід зауважити, що обчислення інтеграла 2) виявилось при використанні системи Maxima значно складнішим, ніж інтеграла 1). Про це свідчить код помилки 2 – занадто багато відрізків розбиття (за замовчуванням

їх повинно бути не більше 200 і в даному випадку цей ліміт досягнутий). По-друге, велика кількість (8379) проміжних операцій, виконаних для підінтегральної функції. По-третє, навіть при такій великій кількості операцій точність кінцевого результату невисока – близько  $2 \cdot 10^{-4}$ . При цьому перші чотири значущі цифри цього результату і гіпотетичного значення інтеграла 2) однакові.

Щоб досягти більшої точності обчислення даного інтеграла, у команді `quad_qags` передбачено додатковий аргумент – `limit=N`, де  $N$  – кількість відрізків розбиття, яке лежить в основі відповідного чисельного методу інтегрування. Чим більше цих відрізків, тим більшої точності можна досягти. Спробуємо обчислювати інтеграл 2), збільшуючи значення параметра `limit`.

```
(%i6) quad_qags(sin(1/x),x,0,1/pi,limit=1000);
```

```
(%o6) [-0.073669268288225, 9.9488501288241826 10-6, 41979, 1]
```

```
(%i7) quad_qags(sin(1/x),x,0,1/pi,limit=10000);
```

```
(%o7) [-0.073667792853306, 1.5314523429954541 10-7, 419979, 1]
```

Таким чином, для уточнення результату доводиться витратити все більше ресурсів комп'ютера (і часу), хоча точність збільшується повільно. Приблизно на значенні `limit=100000` вже досягається межа можливостей використання комп'ютера і з'являється код помилки 2 – занадто велике накопичення похибок округлень. Отже, найбільш точне і вірогідне значення інтеграла 2) міститься у рядку (%o7).

3) Згідно з прикладом 4 (1) цей інтеграл розбіжний, але має головне значення  $\ln 2 - \ln 1 \approx 0.69314718055995$ . Перевіримо, чи обчислюються такий інтеграл за допомогою системи `Maxima` чисельними методами:

```
(%i8) quad_qags(1/x,x,-1,2);
```

```
(%o8) [0.69314718055995, 7.6954795931166209 10-16, 231, 5]
```

Цей приклад розв'язано успішно, причому з великою точністю. Код помилки 5 означає, що даний інтеграл розбіжний (а це так і є) або збігається дуже повільно.

4) За ознакою порівняння цей невластий інтеграл очевидно збіжний. Разом з цим, за командою `integrate` одержується

```
(%i9) integrate(sin(x)/x^2,x,1,inf);
```

```
defint: integral is divergent.
```

```
– an error. To debug this try: debugmode(true);
```

тобто відповідь некоректна. Скоріш за все це означає, що за допомогою `Maxima` неможливо отримати ніякого символічного результату (хоча коректніше було б просто повернути вираз без змін). Тепер обчислимо даний інтеграл чисельно:

```
(%i10) quad_qagi(sin(x)/x^2,x,1,inf);
```

```
(%o10) [0.50407286289509, 1.7991257037852648 10-4, 5985, 1]
```

Збільшимо кількість відрізків розбиття, щоб знайти більш точне значення шуканого інтеграла:

```
(%i1) quad_qagi(sin(x)/x^2,x,1,inf,limit=10000);
(%o1) [0.50406697819984, 2.2690561252147745 10-7, 299985, 1]
```

5) Згідно з прикладом 4 (4) цей інтеграл розбіжний і має головне значення  $\pi \approx 3.141592653589793$ . Обчислимо його командою чисельного інтегрування:

```
(%i2) quad_qagi((x+1)/(x^2+1),x,minf,inf);
(%o2) [3.141592653589793, 5.1555843303740272 10-10, 90, 0]
```

Таким чином, очікуваний результат підтвердився. ■

За допомогою програми Maxima можна ілюструвати геометричний зміст невластних інтегралів (див. п. 2.3.1).

**Приклад 6.** Проілюструвати геометричний зміст інтеграла 7) з прикладу 1.

□ Наведемо програму, у результаті виконання якої з'являється потрібна ілюстрація (рис. 2.3.8):

```
f:=if x^2/sqrt(9-x^2)<7 then x^2/sqrt(9-x^2) else 7;
load(draw)$
draw2d(fill_color=yellow, filled_func=f,
explicit(0.02, x, -3.000001, 3.000001),
line_width=5, filled_func=false, color=brown,
explicit(x^2/sqrt(9-x^2), x, -3, 3),
line_width=3, line_type=dots,
implicit(abs(x)=3, x, -4, 4, y, -10, 10),
xrange=[-4, 4], yrange=[-1, 7],
xaxis=true, yaxis=true, xaxis_width=3, yaxis_width=3); ■
```

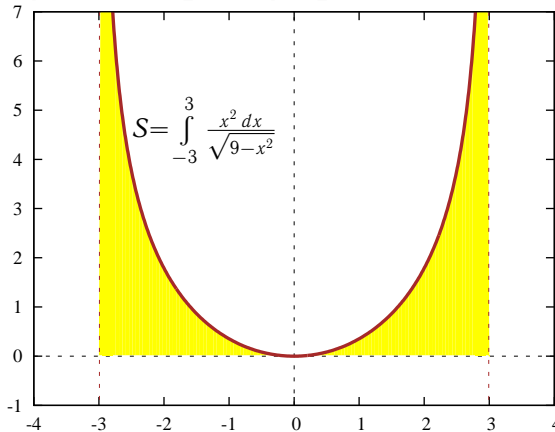


Рис. 2.3.8.

**2.3.7.3. Використання MathCAD.** У програмі MathCAD передбачено символічне та чисельне обчислення невластних інтегралів першого та другого роду. У математичній базі даних цієї програми закладено відомості про велику кількість табличних інтегралів. Можливості застосування MathCAD до обчислення невластних інтегралів майже такі самі, як і можливості застосування Maxima.

Продемонструємо обчислення невласних інтегралів за допомогою MathCAD на тих самих прикладах, які були розв'язані за допомогою Maxima.

**Приклад 1.** Обчислимо наступні невласні інтеграли за допомогою оператора символьних обчислень MathCAD:

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3+1} dx \rightarrow \frac{2 \cdot \pi \cdot \sqrt{3}}{9} \quad \int_0^{\infty} x \cdot e^{-a \cdot x^2} dx \text{ assume, } a > 0 \rightarrow \frac{1}{2 \cdot a}$$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2(1+x)} dx \rightarrow 1 - \ln(2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x-1}{x^4+1} dx \rightarrow -\frac{\pi \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$\int_0^1 x \cdot \ln(x) dx \rightarrow -\frac{1}{4} \quad \int_{-3}^3 \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx \rightarrow \frac{9 \cdot \pi}{2}$$

Таким чином, наведені інтеграли обчислені правильно, проте при обчисленні наступного інтеграла виявляється помилка:

$$\int_{-1}^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx \rightarrow \frac{27}{4} - \left(\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{4}\right) \cdot i$$

Ця помилка виникає внаслідок того, що в системі MathCAD при символьних перетвореннях в якості значення  $\sqrt[n]{x}$  завжди береться головне. Наприклад,

$$(-1)^{\frac{1}{n}} \text{ rectangular} \rightarrow \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot i$$

Разом з тим, за допомогою оператора чисельних обчислень останній інтеграл обчислюється правильно:

$$\int_{-1}^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = 4.5$$

**Приклад 2.** Обчислимо два невласних інтеграли за означенням:

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2(1+x)} dx \rightarrow 1 - \ln(2)$$

$$\lim_{y \rightarrow 0^+} \int_{-3+y}^0 \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx + \lim_{y \rightarrow 0^+} \int_0^{3-y} \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}} dx \text{ simplify} \rightarrow \frac{9 \cdot \pi}{2}$$

**Приклад 3.** Обчислимо за означенням інтеграл  $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-x}{e^{x^2}} dx$ :

$$\int_{-a}^0 \frac{1-x}{e^{x^2}} dx \text{ assume, } a > 0 \rightarrow \frac{\sqrt{\pi} \cdot \text{erf}(a)}{2} - \frac{e^{-a^2}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\int_0^b \frac{1-x}{e^{x^2}} dx \text{ assume, } b > 0 \rightarrow \frac{e^{-b^2}}{2} + \frac{\sqrt{\pi} \cdot \text{erf}(b)}{2} - \frac{1}{2}$$

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\pi} \cdot \text{erf}(a)}{2} - \frac{e^{-a^2}}{2} + \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\lim_{b \rightarrow \infty} \frac{e^{-b^2}}{2} + \frac{\sqrt{\pi} \cdot \text{erf}(b)}{2} - \frac{1}{2} \rightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} - \frac{1}{2}$$

Звідси видно, що шуканий інтеграл збігається до  $\sqrt{\pi}$ .



Зауважимо, що коли многочлен  $P_n(x)$  містить парні степені, то невизначений інтеграл  $\int P_n(x)e^{-x^2} dx$  у програмі MathCAD не обчислюється. Але якщо вказати конкретні числові межі (зокрема, нескінченні), то такий інтеграл уже обчислюється:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^5 - x^4 - x^3 - x^2 - x + 1}{e^{x^2}} dx \rightarrow -\frac{\sqrt{\pi}}{4}$$

**Приклад 4.** У наступних інтегралів шукатимемо головне значення. Знайти це значення безпосередньо можна лише (і то далеко не завжди) за допомогою оператора чисельних обчислень. При цьому результат виводиться без будь-яких попереджень про розбіжність інтеграла. Тому потрібно спочатку з'ясувати, чи інтеграл розбіжний (у цьому випадку оператором символьних обчислень видається значення  $\infty$  чи  $-\infty$  або виводиться undefined).

$$\int_{-1}^2 \frac{1}{x} dx \rightarrow \text{undefined} \quad \int_{-1}^2 \frac{1}{x} dx = 0.693$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^2+1} dx \rightarrow \text{undefined} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{x^2+1} dx = 3.142$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan(x) dx \rightarrow \infty \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \tan(x) dx = 0$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx \rightarrow -\infty$$

При спробі обчислити цей інтеграл чисельно виводиться повідомлення: “Це обчислення не збігається до розв’язку.” Це є ознакою відсутності головного значення у даного інтеграла.

**Приклад 5.** Наступні інтеграли за допомогою MathCAD можна обчислити виключно у чисельному вигляді:

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx = 0.504$$

$$\int_0^{\frac{1}{\pi}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = -0.074$$

Збільшити точність обчислень інтегралів можна за допомогою вбудованого параметра TOL (похибка обчислень), надаючи йому значення від 1 до  $10^{-16}$ . Це можна зробити безпосередньо на робочому аркуші або через меню Інструменти > Параметри робочого аркуша... (див. рис. 2.3.9).

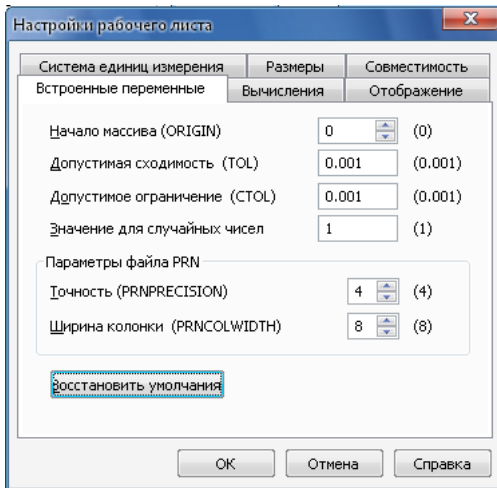


Рис. 2.3.9.

Щоб усі правильні цифри можна було побачити на екрані, треба виділити потрібну формулу, зайти в меню **Формат** > **Результат...** і виставити на вкладці “Формат чисел” > “Загальні” (рис. 2.3.10) бажану кількість десяткових знаків (відповідну параметру TOL).

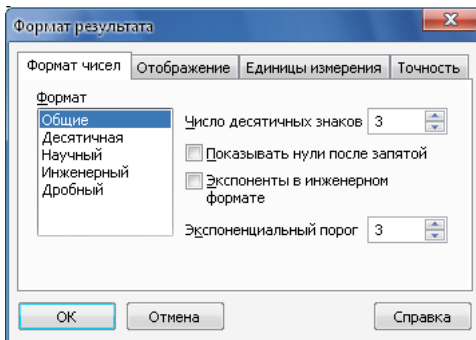


Рис. 2.3.10.

За умовчанням  $TOL = 10^{-3}$ , а кількість десяткових знаків дорівнює 3.

Проте слід зазначити, що не всі обчислення, які були виконані зі стандартною точністю, зможуть бути виконані зі збільшеною точністю. Так, точність обчислення останніх двох інтегралів може бути доведена лише до  $10^{-5}$ :

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} dx = 0.50408 \quad \int_0^{\frac{1}{\pi}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx = -0.07367$$

При збільшенні точності на порядок біля цих інтегралів уже з’являється повідомлення “Це обчислення не збігається до розв’язку.” Разом з

тим простіший інтеграл, наведений нижче, можна обчислити з точністю до  $10^{-15}$ :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{\sin(x)}} dx = 2.034805319207571$$

Зауважимо, що в залежності від типу інтеграла в системі MathCAD автоматично застосовується до нього один з чотирьох чисельних методів інтегрування. Щоб побачити ці методи і при необхідності вручну вказати бажаний метод, потрібно натиснути праву клавішу миші, щоб викликати контекстне меню заданого інтеграла. Наприклад, на рис. 2.3.11 показано контекстне меню останнього з обчислених вище інтегралів.

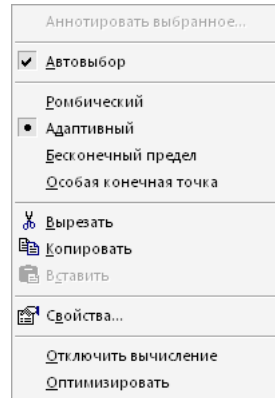


Рис. 2.3.11.

**Приклад 6.** Зобразимо за допомогою програми MathCAD геометричний зміст невластного інтеграла  $\int_{-3}^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{9-x^2}}$  (рис. 2.3.12).

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}$$

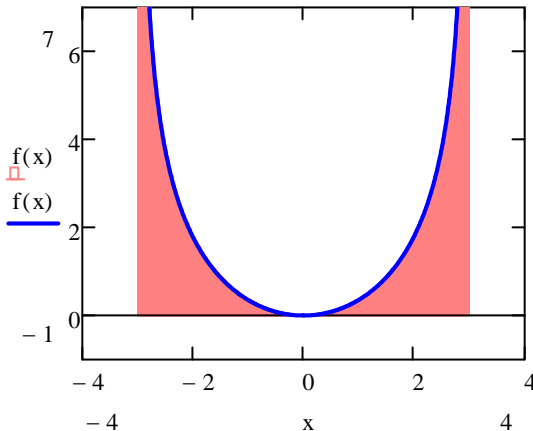


Рис. 2.3.12.

Детальніше про налаштування вигляду графіка вже йшлося в підпункті 2.1.11.3.

**2.3.8. Історичні відомості.** Задачі, що приводять до невластних інтегралів, розглядали ще Е. Торрічеллі та П. Ферма. Точне означення невластного інтеграла дав О. Коші. Він ввів також поняття головного значення та його позначення *v.p.* – від слів *valeur principal*, що означає французькою мовою “голове значення”.

**2.3.9. Зв'язок із шкільним курсом математики.** Поняття невластного інтеграла не вивчається в шкільному курсі математики, але це поняття пов'язане з багатьма практичними задачами та з багатьма важливими функціями, які не є елементарними.

**2.3.10. Постановка проблеми.** У зв'язку з інтегральною ознакою збіжності додатного ряду виникає питання: чи завжди можна дослідження на збіжність невластного інтеграла  $\int_a^b f(x) dx$  звести до дослідження

на збіжність деякого ряду  $\sum_{k=0}^{\infty} \int_{a_k}^{a_{k+1}} f(x) dx$ , де  $a = a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{n-1} < a_n < \dots$ ,  $a_n \rightarrow b$ , коли  $n \rightarrow \infty$ ?

**2.3.11. Контрольні запитання і завдання.**

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Якщо  $\int_a^b f(x) dx$  – невластний інтеграл функції  $f$  на проміжку  $\langle a; b \rangle$ , то цей проміжок нескінченний або функція  $f$  необмежена на  $\langle a; b \rangle$ .
2. Якщо  $f$  є інтегрованою функцією на  $[a; b] \forall b > a$ , то невластні інтеграли  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  і  $\int_{a_1}^{+\infty} f(x) dx \forall a_1 > a$  одночасно збіжні або розбіжні.
3. Якщо невластний інтеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  є збіжним, то  $f(x) \rightarrow 0$ , коли  $x \rightarrow +\infty$ .
4. Твердження, обернене до 3), неправильне.
5. Якщо  $|f(x)| \leq \frac{1}{x^\alpha} \forall x \geq a > 0$  і  $\alpha > 1$ , то невластний інтеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  збіжний.
6. Якщо  $f(x) \geq \frac{1}{x^\alpha} \forall x \geq a > 0$  і  $\alpha > 1$ , то невластний інтеграл  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$  розбіжний.
7. Вираз  $\int_0^1 \frac{dx}{\sin \frac{1}{x}}$  є невластним інтегралом.
8.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$ .
9. Якщо  $F'(x) = f(x) \forall x \in [a; b] \setminus \{x_k: k = \overline{1, m}\}$ , а  $F$  є неперервною функцією в точках  $x_k, k \in \overline{1, m}$ , то функція  $f$  невластно  $NL$ -інтегрована на  $[a; b]$  і  $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ .

10. Якщо невластний інтеграл  $\int_a^b f(x) dx$  абсолютно збіжний, то він також збіжний.

II. Довести дані твердження.

1. Якщо  $f \in R[a, b]$  і  $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq H \forall b > a$ , а  $g(x) \downarrow 0$ , коли  $x \rightarrow +\infty$ , то невластний інтеграл  $\int_a^{+\infty} f(x)g(x) dx$  збіжний.

2.  $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$  – збіжний невластний інтеграл, але не абсолютно.

3. Якщо невластний інтеграл  $\int_0^{+\infty} f(t) dt$  збіжний до числа  $I(f)$ , то  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x F(t) dt = I(f)$ , де  $F(t) = \int_0^t f(x) dx \forall t > 0$ .

4. Якщо  $S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\alpha}{k(k+\alpha)}$ ,  $\alpha > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , то  $\ln(1 + \frac{\alpha}{n+1}) < S_n < \ln(1 + \frac{\alpha}{n})$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Зокрема,  $S_n = \frac{\alpha}{n} + o(\frac{1}{n})$ .

III. Наступні задачі розв'язати за допомогою комп'ютерних засобів математики.

1. Зобразити графік функції  $f(x)$ ,  $x \in [0; +\infty)$ , для якої невластний інтеграл  $\int_0^{+\infty} f(x) dx$  розбіжний, проте  $\int_0^n f(x) dx \rightarrow 0$ , коли  $n \rightarrow \infty$ .
2. Дослідити збіжність невластних інтегралів, пов'язаних з неелементарними функціями, наведеними у пункті 1.3.7.
3. Перевірити збіжність та існування головного значення самостійно наведеного невластного інтеграла.
4. Зобразити графік гамма-функції  $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$  та обчислити її значення для  $x = n \in \mathbb{N}$ .

## 2.4. Інтеграл Стілтєса

У даному підрозділі поняття  $R$ -інтеграла узагальнюється на випадок, коли довжина довільного проміжка  $[x_k; x_{k+1})$  вимірюється не звичним способом:  $l([x_k; x_{k+1})) = x_{k+1} - x_k = \Delta x_k$ , а узагальненим способом:  $l([x_k; x_{k+1})) = g(x_{k+1}) - g(x_k) = \Delta g(x_k)$ , де  $g(x)$ ,  $x \in (-\infty; \infty)$ , – задана функція. Для  $R$ -інтеграла ця функція  $g(x) = x$ ,  $x \in (-\infty; \infty)$ .

### 2.4.1. Задача про статичний момент маси відносно точки.

З курсу фізики відомо, що коли в точках  $x_k$  числової прямої знаходяться маси  $m_k$ ,  $k \in \overline{1, n}$ , то *статичним моментом цих мас відносно точки  $x = 0$*  називають число  $M = \sum_{k=1}^n x_k \cdot m_k$ .

Припустимо тепер, що масу  $m$  розподілено вздовж відрізка  $[a; b]$ , де  $a < b$ . При цьому маса відрізка  $[a; x]$  дорівнює  $m(x) \forall x \in [a; b]$ . Виникає питання: *що розуміти під статичним моментом маси  $m$  відносно точки  $x = 0$ ?*

Щоб відповісти на поставлене питання, розглянемо розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$  точками  $x_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ . Тоді маса, розподілена вздовж відрізка  $[x_k; x_{k+1}]$ , дорівнює  $\Delta m(x_k) = m(x_{k+1}) - m(x_k)$ . Вважатимемо, що ця маса знаходиться в точці  $x_k^* \in [x_k; x_{k+1}]$ . При такому розподілі маси її статичний момент  $M(T)$  відносно точки  $x = 0$  можна обчислити за формулою  $M(T) = \sum_{k=0}^{n-1} x_k^* \Delta m(x_k)$ . Після цього

природно назвати границю  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} M(T) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} x_k^* \Delta m(x_k) = M$  статичним моментом відносно точки  $x = 0$  маси  $m$ , розподіленої вздовж відрізка  $[a; b]$ .

Розглянута задача привела до сум вигляду  $\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*) \Delta m(x_k)$  та до границі цих сум, коли  $\lambda(T) \rightarrow 0$ . До цього ж приводять і багато інших практичних задач. Тому розглянемо вказані суми та їх границі детальніше.

**2.4.2. Поняття інтегральної суми Стільєса та інтеграла Стільєса.** Нехай числові функції  $f$  і  $g$  визначені на відрізку  $[a; b]$ . Задамо розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$  точками  $x_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , де  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ , виберемо проміжні точки  $x_k^* \in [x_k; x_{k+1}] \forall k \in \overline{0, n-1}$ , множину всіх проміжних точок позначимо через  $X^*$  і складемо суму

$$S(f, T, X^*, g) = S(f, T, g) = S(T, X^*) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*) \Delta g(x_k),$$

де  $\Delta g(x_k) = g(x_{k+1}) - g(x_k)$ . Цю суму називають *інтегральною сумою Стільєса*, а скінченну границю  $I(f, g) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(f, T, X^*, g)$

називають *інтегралом Стільтєса функції  $f$  відносно функції  $g$*  (або *за мірою  $g$* ) або  *$S_g$ -інтегралом вздовж відрізка  $[a; b]$*  і позначають  $\int_a^b f(x) dg(x)$  або  $(S) \int_a^b f(x) dg(x)$ , або скорочено  $\int_a^b f dg$ . Функцію  $f$  при цьому називають  *$S$ -інтегровною відносно функції  $g$*  або  *$S_g$ -інтегровною на відрізку  $[a; b]$*  і записують  $f \in S_g[a; b]$ .

Зрозуміло, що коли  $g(x) = x \forall x \in [a; b]$ , то  $S_g$ -інтеграл функції  $f$  стає  $R$ -інтегралом. Отже, поняття інтеграла Стільтєса є узагальненням поняття інтеграла Рімана. Разом з тим багато властивостей інтеграла Стільтєса майже повторюють відповідні властивості інтеграла Рімана, як за формою, так і за методами доведення. Тому надалі деякі з цих властивостей наводяться без доведення. Наприклад, має місце наступна теорема.

**Теорема 1** (про необхідну умову  $S_g$ -інтегровності). *Якщо функція  $f \in S_g[a; b]$ , а  $\Delta g(x_k) \neq 0 \forall k \in \overline{0, n-1}$ , коли розбиття  $T$  досить дрібне, то  $f$  є обмеженою функцією на  $[a; b]$ .*

**2.4.3. Формула інтегрування частинами для інтеграла Стільтєса.** Нехай  $f \in S_g[a; b]$ . Природно виникає питання, чи не впливає звідси, що  $g \in S_f[a; b]$ . Знайдемо відповідь на це питання.

□ Візьмемо довільне розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$  точками  $x_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , виберемо множину  $X^*$  проміжних точок  $x_k^* \in [x_k; x_{k+1}]$ ,  $k \in \overline{0, n-1}$ , і складемо інтегральну суму Стільтєса

$$S(g, T, X^*, f) = \sum_{k=0}^{n-1} g(x_k^*) \Delta f(x_k),$$

де  $\Delta f(x_k) = f(x_{k+1}) - f(x_k)$ .

Перетворимо цю інтегральну суму, додавши та віднявши вираз  $f(a)g(a) - f(b)g(b) = f(x_0)g(x_0) - f(x_n)g(x_n)$ :

$$\begin{aligned} S(g, T, X^*, f) &= g(x_0^*) (f(x_1) - f(x_0)) + g(x_1^*) (f(x_2) - f(x_1)) + \dots + \\ &+ g(x_{n-1}^*) (f(x_n) - f(x_{n-1})) = -f(x_0) (g(x_0^*) - g(a)) - \\ &- f(x_1) (g(x_1^*) - g(x_0^*)) - f(x_2) (g(x_2^*) - g(x_1^*)) - \dots - \\ &- f(x_{n-1}) (g(x_{n-1}^*) - g(x_{n-2}^*)) - f(x_n) (g(b) - g(x_{n-1}^*)) + \\ &+ f(b)g(b) - f(a)g(a) = f(x)g(x) \Big|_a^b - S(f, T', T, g), \end{aligned}$$

де  $T' = X^* \cup \{a, b\}$  є розбиттям відрізка  $[a; b]$  точками  $x_k^*$ ,  $k \in \overline{1, n}$ ,  $x_{-1}^* = a$ , а  $x_n^* = b$  (рис. 2.4.1).

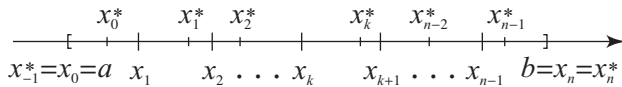


Рис. 2.4.1.

Для розбиття  $T'$  точки  $x_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , є проміжними. Легко бачити, що

$$\lambda(T') = \max_{-1 \leq k \leq n-1} (x_{k+1}^* - x_k^*) \leq 2 \cdot \lambda(T),$$

де  $\lambda(T) = \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta x_k$ , і  $\lambda(T) \leq 2\lambda(T')$ , а тому  $\lambda(T) \rightarrow 0 \Leftrightarrow \lambda(T') \rightarrow 0$ . Отже,

$$S(g, T, X^*, f) = f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - S(f, T', T, g)$$

і коли  $\lambda(T) \rightarrow 0$ , то  $\lambda(T') \rightarrow 0$ . Тому якщо  $f \in S_g[a; b]$ , то права, а отже і ліва, частини останньої рівності прямуватимуть до скінченної границі:

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(g, T, X^*, f) &= f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \lim_{\lambda(T') \rightarrow 0} S(f, T', T, g) = \\ &= f(x) \cdot g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) dg(x). \end{aligned}$$

Звідси випливає, що  $g \in S_f[a; b]$  і

$$\int_a^b g(x) df(x) = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x) dg(x). \quad (1)$$

Ця формула інтегрування частинами для інтеграла Стілтєса. ■

Отже, доведена наступна теорема.

**Теорема 2** (про формулу інтегрування частинами для інтеграла Стілтєса). Для того щоб  $f \in S_g[a; b]$ , необхідно й досить, щоб  $g \in S_f[a; b]$ . При цьому має місце формула інтегрування частинами (1).

**2.4.4. Суми Дарбу – Стілтєса та їхні властивості.** Нехай функція  $g$  неспадна, а  $f$  обмежена і дійсна на відрізку  $[a; b]$ . Тоді для довільного розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$  точками  $x_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , можна утворити суми



$$S_*(f, T, g) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta g(x_k) \quad \text{і} \quad S^*(f, T, g) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta g(x_k),$$

де  $m_k = \inf_{[x_k; x_{k+1}]} f(x)$ , а  $M_k = \sup_{[x_k; x_{k+1}]} f(x) \quad \forall k = \overline{0, n-1}$ . Ці суми називають відповідно *нижньою* і *верхньою* сумами Дарбу – Стілтєса.

Властивості цих сум подібні до властивостей сум Дарбу і за формулюванням, і за доведеннями.

**Властивість 1** (про зв'язок сум Дарбу – Стілтєса з інтегральними сумами Стілтєса). Для будь-якого розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$

$$S_*(f, T, g) \leq S(f, T, X^*, g) \leq S^*(f, T, g),$$

а за рахунок вибору множини  $X^*$  проміжних точок  $x_k^*$  інтегральну суму  $S(f, T, X^*, g)$  можна зробити як завгодно близькою до нижньої (верхньої) суми Дарбу – Стілтєса.

**Властивість 2** (про монотонність сум Дарбу – Стілтєса). Якщо розбиття  $T^{(m)}$  отримане з розбиття  $T$  шляхом введення  $m$  нових точок, то правильні нерівності

$$S_*(f, T, g) \leq S_*(f, T^{(m)}, g) \leq S^*(f, T^{(m)}, g) \leq S^*(f, T, g),$$

$$0 \leq S_*(f, T^{(m)}, g) - S_*(f, T, g) \leq 2H \cdot m \cdot \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta g(x_k)$$

і

$$0 \leq S^*(f, T, g) - S^*(f, T^{(m)}, g) \leq 2H \cdot m \cdot \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta g(x_k).$$

**Властивість 3** (про існування нижнього і верхнього інтегралів Стілтєса). Якщо  $T$  і  $T'$  – довільні розбиття відрізка  $[a; b]$ , то  $S_*(f, T, g) \leq S^*(f, T', g)$ , існують  $\sup_{(T)} S_*(f, T, g) = I_*(f, g)$  – *нижній інтеграл Стілтєса*,  $\inf_{(T)} S^*(f, T, g) = I^*(f, g)$  – *верхній інтеграл Стілтєса*, і має місце нерівність

$$S_*(f, T, g) \leq I_*(f, g) \leq I^*(f, g) \leq S^*(f, T', g).$$

За допомогою даних властивостей так само, як і для  $R$ -інтеграла, можна довести наступне твердження.

**Теорема 3** (критерій  $S_g$ -інтегровності). Нехай функція  $f$  обмежена, а  $g$  – неспадна на відріжку  $[a; b]$ . Тоді наступні твердження 1) – 4) еквівалентні між собою:

- 1)  $f \in S_g[a; b]$ , тобто існує  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(f, T, M, g) = I$ ;
- 2)  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S^*(f, T, g) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S_*(f, T, g) = I$ ;
- 3)  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} (S^*(f, T, g) - S_*(f, T, g)) = 0$ ;
- 4)  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta g(x_k) = 0$ .

### 2.4.5. Основні властивості інтеграла Стілтєсса.

**Властивість 1** (про  $S_g$ -інтеграл сталої функції). Якщо  $f(x) = c$   $\forall x \in [a; b]$ , то  $\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^b c dg = c(g(b) - g(a))$ . Зокрема,  $\int_a^b 0 dg(x) = 0$  і  $\int_a^b 1 dg(x) = g(b) - g(a)$  для будь-якої функції  $g$ .

**Властивість 2** (про лінійність  $S_g$ -інтеграла). Якщо  $f_1 \in S_g[a; b]$  і  $f_2 \in S_g[a; b]$ , то для будь-яких чисел  $\alpha$  і  $\beta$  функція  $\alpha f_1 + \beta f_2 \in S_g[a; b]$ , причому

$$\int_a^b (\alpha f_1(x) + \beta f_2(x)) dg(x) = \alpha \int_a^b f_1(x) dg(x) + \beta \int_a^b f_2(x) dg(x).$$

А якщо  $f \in S_{g_1}[a; b]$  і  $f \in S_{g_2}[a; b]$ , то  $f \in S_{\alpha g_1 + \beta g_2}[a; b]$  для будь-яких чисел  $\alpha$  і  $\beta$ , причому

$$\int_a^b f(x) d(\alpha g_1(x) + \beta g_2(x)) = \alpha \int_a^b f(x) dg_1(x) + \beta \int_a^b f(x) dg_2(x).$$

**Властивість 3** (про монотонність  $S_g$ -інтеграла). Якщо функції  $f_1 \in S_g[a; b]$  і  $f_2 \in S_g[a; b]$ , причому  $f_1(x) \geq f_2(x) \forall x \in [a; b]$ , а функція  $g$  неспадна на  $[a; b]$ , то  $\int_a^b f_1(x) dg(x) \geq \int_a^b f_2(x) dg(x)$ .

Зокрема,  $m(g(b) - g(a)) \leq \int_a^b f(x) dg(x) \leq M(g(b) - g(a))$ , коли  $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a; b]$ .

**Властивість 4** (про  $S_g$ -інтегровність  $|f|$ ). Нехай функція  $f$  обмежена, а  $g$  неспадна на  $[a; b]$  і  $f \in S_g[a; b]$ . Тоді  $|f| \in S_g[a; b]$ , причому  $\left| \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)| dg(x)$ .

**Властивість 5** (про  $S_g$ -інтегровність добутку функцій). Нехай функції  $f$  та  $\varphi$  обмежені, а  $g$  неспадна на  $[a; b]$  і  $f \in S_g[a; b]$  та  $\varphi \in S_g[a; b]$ . Тоді  $f\varphi \in S_g[a; b]$  і правильна нерівність **Ковші – Буняковського**:

$$\int_a^b |f\varphi| dg \leq \left( \int_a^b f^2 dg \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_a^b \varphi^2 dg \right)^{\frac{1}{2}}.$$

**Властивість 6** (теорема про середнє). Нехай  $m \leq f(x) \leq M$  і  $0 \leq \varphi(x) \leq H \forall x \in [a; b]$ , причому функції  $f$  і  $\varphi \in S_g[a; b]$ , а функція  $g$  неспадна на  $[a; b]$ . Тоді існує точка  $t^* \in [m; M]$ , для якої  $\int_a^b f\varphi dg = t^* \int_a^b \varphi dg$ . Якщо крім того  $f$  неперервна на  $[a; b]$ , то  $\exists x^* \in [a; b]: \int_a^b f\varphi dg = f(x^*) \int_a^b \varphi dg$ , зокрема,  $\int_a^b f dg = f(x^*)(g(b) - g(a))$ .

**Властивість 7** (адитивність  $S_g$ -інтеграла). Нехай  $f$  – обмежена, а  $g$  – неспадна функція на  $[a; b]$ . Якщо  $f \in S_g[a; b]$ , а  $c \in (a; b)$ , то  $f \in S_g[a; c]$  і  $f \in S_g[c; b]$  та має місце рівність

$$\int_a^b f(x) dg(x) = \int_a^c f(x) dg(x) + \int_c^b f(x) dg(x). \quad (2)$$

Навпаки, якщо  $f \in S_g[a; c]$  та  $f \in S_g[c; b]$  для деякого числа  $c \in (a; b)$  і принаймні одна з функцій  $f$  або  $g$  неперервна в точці  $c$ , то  $f \in S_g[a; b]$  і має місце рівність (2).

Властивості 1 – 7 так само, як і відповідні властивості  $R$ -інтеграла, впливають або безпосередньо з означення  $S_g$ -інтеграла, або з цього означення та з критерію  $S_g$ -інтегровності. Проілюструємо методи доведення цих властивостей на прикладі другої частини властивості адитивності.

□ Нехай  $f \in S_g[a; c]$  і  $f \in S_g[c; b]$ , а  $T = \{x_k: k \in \overline{0, n}\}$  – довільне розбиття відрізка  $[a; b]$ ,  $X^* = \{x_k^*: k \in \overline{0, n-1}\}$  – відповідний розбиттю  $T$  набір проміжних точок. Припустимо, що  $x_{k_*} \leq c < x_{k_*+1}$ . Тоді  $T' = \{x_k: 0 \leq k \leq k_*\} \cup \{c\}$  є розбиттям відрізка  $[a; c]$ , а  $T'' = \{x_k: k_* + 1 \leq k \leq n\} \cup \{c\}$  – розбиттям відрізка  $[c; b]$ . Виберемо довільним чином ще дві точки  $x' \in [x_{k_*}, c]$ ,  $x'' \in [c, x_{k_*+1}]$  і утворимо множину  $X' = \{x_k^*:$

$0 \leq k \leq k_* \} \cup \{x'\}$  проміжних точок розбиття  $T'$  та множину  $X'' = \{x_k^*: k_* + 1 \leq k \leq n\} \cup \{x''\}$  проміжних точок розбиття  $T''$ .

Після цього матимемо (рис. 2.4.2):

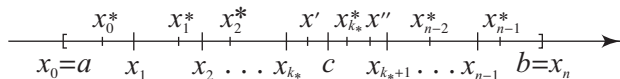


Рис. 2.4.2.

$$\begin{aligned}
 S(f, T, X^*, g) &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*) \Delta g(x_k) = \\
 &= \sum_{k=0}^{k_*-1} f(x_k^*) \Delta g(x_k) + f(x') (g(c) - g(x_{k_*})) + \\
 &+ f(x'') (g(x_{k_*+1}) - g(c)) + \sum_{k=k_*+1}^{n-1} f(x_k^*) \Delta g(x_k) + \\
 &+ f(x_{k_*}^*) (g(x_{k_*+1}) - g(c) + g(c) - g(x_{k_*})) - \\
 &- f(x') (g(c) - g(x_{k_*})) - f(x'') (g(x_{k_*+1}) - g(c)) = \\
 &= S(f, T', X', g) + S(f, T'', X'', g) + \\
 &+ (g(x_{k_*+1}) - g(c)) (f(x_{k_*}^*) - f(x'')) + \\
 &+ (g(c) - g(x_{k_*})) (f(x_{k_*}^*) - f(x')). \quad (3)
 \end{aligned}$$

Якщо  $\lambda(T) \rightarrow 0$ , то  $x_{k_*} \rightarrow c$  і  $x_{k_*+1} \rightarrow c$ , а тому  $x' \rightarrow c$ ,  $x'' \rightarrow c$  і  $x_{k_*}^* \rightarrow c$ . Звідси, внаслідок неперервності однієї з функцій (наприклад,  $f$ ) у точці  $c$ , та враховуючи обмеженість іншої (відповідно,  $g$ ), дістанемо, що останні два доданки правої частини рівності (3) прямують до нуля, коли  $\lambda(T) \rightarrow 0$ . Тому існує

$$\begin{aligned}
 \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(f, T, X^*, g) &= \\
 &= \lim_{\lambda(T') \rightarrow 0} S(f, T', X', g) + \lim_{\lambda(T'') \rightarrow 0} S(f, T'', X'', g),
 \end{aligned}$$

тобто  $f \in S_g[a; b]$  і правильна рівність (2). ■

### 2.4.6. Достатні умови інтегровності за Стильтєсом.

**Теорема 4** (про достатні умови  $S_g$ -інтегровності). *Функція  $f \in S_g$ -інтегровною на відрізьку  $[a; b]$ , якщо має місце принаймні одна з умов 1) – 3):*

- 1) *принаймні одна з функцій  $f$  і  $g$  неперервна, а інша монотонна на  $[a; b]$ ;*  
 2) *хоча б одна з функцій  $f$  і  $g$  неперервна, а інша має на  $[a; b]$  обмежену варіацію. При цьому якщо  $f$  неперервна, а  $\mathbf{V}_a^b g < +\infty$ , то*

$$\left| \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq \max_{[a;b]} |f(x)| \cdot \mathbf{V}_a^b g \quad (4)$$

і

$$\left| \int_a^b f(x) dg(x) - S(f, T, M, g) \right| \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} \omega_k(f) \cdot \mathbf{V}_a^b g; \quad (5)$$

- 3) *функція  $f \in R$ -інтегровною на  $[a; b]$ , а  $g(x) = (R) \int_a^x \varphi(t) dt + g(a) \forall x \in [a; b]$ , зокрема,  $\varphi(t) = g'(t)$  і  $g' \in R[a; b]$ ; при цьому*

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = (R) \int_a^b f(x) \varphi(x) dx \quad (6)$$

і, зокрема, коли  $\varphi = g' \in R[a; b]$ , то

$$(S) \int_a^b f(x) dg(x) = (R) \int_a^b f(x) g'(x) dx. \quad (7)$$

□ Якщо  $g$  – монотонна функція на  $[a; b]$ , то вона має обмежену варіацію на  $[a; b]$ . З іншого боку, кожна функція обмеженої варіації є різницею двох зростаючих на  $[a; b]$  функцій. Тому, враховуючи властивість 2 і теорему 2, для умов 1) і 2) досить довести, що  $f \in S_g[a; b]$ , коли  $g$  неспадна, а  $f$  неперервна на  $[a; b]$ .

За теоремою Кантора  $f$  є рівномірно неперервною функцією на  $[a; b]$ , а тому  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: \omega_k(f) < \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)}$ , коли  $\lambda(T) < \delta(\varepsilon)$

$\forall k \in \overline{0, n-1}$ . Звідси  $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta g(x_k) < \frac{\varepsilon}{g(b)-g(a)} \sum_{k=0}^{n-1} \Delta g(x_k) = \varepsilon$ .

Отже,  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta g(x_k) = 0$ , а тому  $f \in S_g[a; b]$ . Далі

маємо:  $\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*) \Delta g(x_k) \right| \leq \max_{[a;b]} |f(x)| \cdot \sum_{k=0}^{n-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \leq$

$\leq \max_{[a;b]} |f(x)| \cdot \mathbf{V}_a^b g$  і звідси, спрямувавши  $\lambda(T)$  до нуля, дістаємо нерівність (4).

Для доведення нерівності (5) скористаємося адитивністю  $S_g$ -інтеграла, нерівністю (4) та адитивністю повної варіації.

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f(x) dg(x) - S(f, T, X^*, g) \right| = \\ & = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x) dg(x) - \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*) \Delta g(x_k) \right| = \\ & = \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x) - f(x_k^*)) dg(x) \right| \leq \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \cdot \mathbf{V}_{x_k}^{x_{k+1}} g \leq \\ & \leq \max_{0 \leq k \leq n-1} \omega_k(f) \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \mathbf{V}_{x_k}^{x_{k+1}} g = \max_{0 \leq k \leq n-1} \omega_k(f) \cdot \mathbf{V}_a^b g, \end{aligned}$$

де  $T$  – довільне розбиття відрізка  $[a; b]$  точками  $x_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , а  $X^*$  – набір проміжних точок, відповідний розбиттю  $T$ .

Таким чином, умови 1) і 2) розглянуто.

Нехай має місце умова 3). Тоді за відомою властивістю  $R$ -інтеграла права частина рівності (6) існує. Розглянемо довільне розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$  точками  $x_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , виберемо довільним чином набір  $X^*$  проміжних точок  $x_k^*$ ,  $k \in \overline{0, n-1}$ , даного розбиття і складемо інтегральну суму Стильєса:

$$\begin{aligned} S(f, T, X^*, g) &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*) (g(x_{k+1}) - g(x_k)) = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k^*) \int_{x_k}^{x_{k+1}} \varphi(t) dt = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x_k^*) \varphi(t) dt = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t) \varphi(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_k^*) - f(t)) \varphi(t) dt = \\ &= \int_a^b f(t) \varphi(t) dt + \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_k^*) - f(t)) \varphi(t) dt. \quad (8) \end{aligned}$$

Оскільки  $\varphi \in R[a; b]$ , то  $\exists H > 0: |\varphi(t)| \leq H \forall t \in [a; b]$ , а тому

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} (f(x_k^*) - f(t)) \varphi(t) dt \right| \leq \\ & \leq H \sum_{k=0}^{n-1} \int_{x_k}^{x_{k+1}} |f(x_k^*) - f(t)| dt \leq H \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(f) \Delta x_k \rightarrow 0, \end{aligned}$$

коли  $\lambda(t) \rightarrow 0$ , бо  $f \in R[a; b]$ . Враховуючи це, з рівності (8) дістаємо, що  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(f, T, X^*, g) = \int_a^b f(t) \varphi(t) dt$ , тобто  $f \in S_g[a; b]$  і має місце рівність (6). ■

Рівність (7) можна вважати **основною формулою для обчислення інтеграла Стільтєса**. У ній встановлюється зв'язок між інтегралами Стільтєса та Рімана.

**Приклад 1.** Застосовуючи формулу (7), обчислимо наступні інтеграли Стільтєса:

$$1) (S) \int_{-2}^1 x^2 dx^3 = (R) \int_{-2}^1 x^2 \cdot 3x^2 dx = (R) \int_{-2}^1 3x^4 dx = \frac{3}{5} x^5 \Big|_{-2}^1 = \frac{3}{5} (1 + 32) = \frac{99}{5} = 19, 8;$$

$$2) (S) \int_0^{\pi} \cos x d \sin x = (R) \int_0^{\pi} \cos^2 x dx = (R) \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (1 + \cos 2x) dx = \frac{1}{2} (x + \frac{1}{2} \sin 2x) \Big|_0^{\pi} = \frac{\pi}{2}.$$

### 2.4.7. Граничний перехід під знаком інтеграла Стільтєса.

Розглянемо питання про граничний перехід під знаком інтеграла Стільтєса.

□ Нехай  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  на  $[a; b]$  і функції  $f_n$  неперервні на  $[a; b]$ . Тоді і функція  $f$  є неперервною на  $[a; b]$ , а тому для будь-якої функції  $g$  обмеженої варіації на  $[a; b]$  існують інтеграли  $\int_a^b f_n dg$  і  $\int_a^b f dg$ . При цьому

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b f_n(x) dg(x) - \int_a^b f(x) dg(x) \right| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f(x)) dg(x) \right| \leq \\ & \leq \max_{[a; b]} |f_n(x) - f(x)| \cdot \mathbf{V}_a^b g \rightarrow 0, \quad \text{коли } n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

оскільки  $\max_{[a;b]} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$  внаслідок рівномірної збіжності послідовності  $(f_n(x))$  до  $f(x)$  на  $[a; b]$ .

$$\text{Отже, } \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dg(x) = \int_a^b f(x) dg(x).$$

Припустимо тепер, що  $f$  є неперервною функцією, а  $g_n$  – функції обмеженої варіації на  $[a; b]$  і  $g_n(x) \rightarrow g(x)$ , коли  $n \rightarrow \infty$ ,  $\forall x \in [a; b]$ . Тоді існують інтеграли  $\int_a^b f dg_n$ , а для існування інтеграла  $\int_a^b f dg$  досить вимагати, щоб  $\mathbf{V}_a^b g < +\infty$ . Ця умова, взагалі кажучи, не впливає з умови  $\mathbf{V}_a^b g_n < +\infty \forall n \in \mathbb{N}$ . Тому накладемо на функції  $g_n$  жорсткішу умову:  $\mathbf{V}_a^b g_n \leq H \forall n$ , де  $H > 0$  – деяка стала. Тоді для будь-якого розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$  точками  $x_k$ ,  $k \in \overline{0, m}$ , матимемо

$$\sum_{k=0}^{m-1} |g_n(x_{k+1}) - g_n(x_k)| \leq \mathbf{V}_a^b g_n \leq H \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Якщо в цій нерівності спрямувати  $n$  до  $+\infty$ , то дістанемо

$$\sum_{k=0}^{m-1} |g(x_{k+1}) - g(x_k)| \leq H$$

для будь-якого розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$ . Тому  $\mathbf{V}_a^b g \leq H < +\infty$ ,

що гарантує існування інтеграла  $\int_a^b f dg$ .

Далі, для будь-якого розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$  точками  $x_k$ ,  $k \in \overline{0, m}$ , і будь-якого відповідного йому набору  $X^*$  проміжних точок  $x_k^*$  маємо

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f dg_n - \int_a^b f dg \right| &= \left| \left( \int_a^b f dg_n - S(f, T, X^*, g_n) \right) + \right. \\ &\left. + \left( S(f, T, X^*, g) - \int_a^b f dg \right) + \left( S(f, T, X^*, g_n) - S(f, T, X^*, g) \right) \right| \leq \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} & \leq \left| \int_a^b f dg_n - S(f, T, X^*, g_n) \right| + \left| \int_c^b f dg - S(f, T, X^*, g) \right| + \\ & \quad + \left| \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k^*) \Delta g_n(x_k) - \sum_{k=0}^{m-1} f(x_k^*) \Delta g(x_k) \right|. \end{aligned} \quad (9)$$

За теоремою 4 (умова 2), нерівність (5)) перші два доданки правої частини нерівності (9) не перевищують  $\max_{0 \leq k \leq m-1} \omega_k(f) \cdot H$ , а це в силу рівномірної неперервності функції  $f$  менше  $\frac{\varepsilon}{2}$ , якщо розбиття  $T$  досить дрібне. Зафіксуємо таке досить дрібне розбиття  $T$  і розглянемо третій доданок правої частини нерівності (9). Оскільки  $g_n(x_k) \rightarrow g(x_k)$ , коли  $n \rightarrow \infty, \forall k \in \overline{0, m}$ , то цей доданок прямує до нуля, коли  $n \rightarrow \infty$ . Тому для довільного  $\varepsilon > 0$  існує номер  $n_0(\varepsilon)$  такий, що цей доданок менший за  $\frac{\varepsilon}{2}$ , коли  $n > n_0(\varepsilon)$ , а тому

$$\left| \int_a^b f dg_n - \int_a^b f dg \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \forall n > n_0(\varepsilon).$$

Отже,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f dg_n = \int_a^b f dg$ . ■

Таким чином, має місце наступна теорема.

**Теорема 7** (про граничний перехід під знаком інтеграла Стільтєса). Нехай  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  і функції  $f_n$  неперервні на  $[a; b]$ , а  $\int_a^b V g < +\infty$ . Тоді  $f \in S_g[a; b]$  і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dg(x) = \int_a^b f(x) dg(x).$$

А якщо функція  $f$  неперервна на  $[a; b]$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x) \quad \forall x \in [a; b]$

і  $\int_a^b V g_n \leq H \quad \forall n \in \mathbb{N}$ , де  $H > 0$  – деяка стала, то  $f \in S_g[a; b]$  і

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dg_n(x) = \int_a^b f(x) dg(x).$$

**Зауваження.** Подібно до того, як це зроблено у підрозділі 2.3, можна ввести поняття невластного інтеграла Стільтєса і дослідити його збіжність.

**2.4.8. Використання комп'ютерних засобів математики.** Інтеграл Стілтєса  $\epsilon$ , в основному, теоретичним узагальненням інтеграла Рімана. Практичне ж його обчислення зводиться до обчислення інтеграла Рімана за формулою (7) та застосування властивостей 1, 2, 7 пункту 2.4.5. Системи комп'ютерної математики Gran1, Maxima і MathCAD теж не містять спеціальних засобів обчислення інтегралів Стілтєса.

**2.4.8.1. Використання Gran1.** За допомогою програми Gran1 можна обчислювати інтеграли Стілтєса у чисельному вигляді, але тільки після зведення їх до інтегралів Ньютона – Лейбніца за формулою (7). Програма Gran1 може стати в нагоді і тоді, коли потрібно швидко встановити особливості поведінки функції за її графіком.

**2.4.8.2. Використання Maxima.** Програму Maxima можна використати для обчислення інтегральних сум Рімана – Стілтєса та їхніх границь, а також для обчислення інтеграла Стілтєса за формулою (7).

Обчислимо для зразка за допомогою програми Maxima інтеграли Стілтєса з прикладу 1 п. 2.4.6.

```
(%i1) integrate(x^2*diff(x^3,x),x,-2,1);
```

```
(%o1)  $\frac{99}{5}$ 
```

```
(%i2) integrate(cos(x)*diff(sin(x),x),x,0,%pi);
```

```
(%o2)  $\frac{\pi}{2}$ 
```

Побудуємо тепер для першого з цих інтегралів інтегральні суми Рімана – Стілтєса, виконуючи розбиття відрізка інтегрування на рівні частини та вибираючи в якості проміжних точок середини відрізків розбиття.

```
(%i3) f(x):=x^2$ g(x):=x^3$ a:-2$ b:1$
```

```
(%o3) x(k,n):=a+k*(b-a)/n$ c(k,n):=(x(k,n)+x(k+1,n))/2$
```

```
(%i4) S(n):=sum(f(c(k,n))*(g(x(k+1,n))-g(x(k,n))),k,0,n-1);
```

```
(%o4) 
$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\left( \left( \frac{3(k+1)}{n} - 2 \right)^3 - \left( \frac{3k}{n} - 2 \right)^3 \right) \left( \frac{3(k+1)}{n} + \frac{3k}{n} - 4 \right)^2}{4}$$

```

Після цього можна обчислити конкретні значення інтегральної суми  $S(n)$  і спробувати знайти її границю.

```
(%i5) S(10),numer;
```

```
(%o5) 19.46412
```

```
(%i6) S(20),numer;
```

```
(%o6) 19.71572625
```

```
(%i7) S(n),simpsum,ratsimp;
```

```
(%o7)  $\frac{396 n^4 - 675 n^2 + 324}{20 n^4}$ 
```

```
(%i8) limit(%o,n,inf);
```

```
(%o8)  $\frac{99}{5}$ 
```

**2.4.8.3. Використання MathCAD.** Програму MathCAD можна використати приблизно так само, як і програму Maxima.

Наведемо вигляд робочого аркуша в MathCAD для обчислення нескладних інтегралів Стілтєса, до яких застосовна формула (7).

$$f(x) := x^2 \quad g(x) := x^3 \quad a := -2 \quad b := 1$$

$$I := \int_a^b f(x) \cdot \left(\frac{d}{dx} g(x)\right) dx \quad I \rightarrow \frac{99}{5}$$

Тут обчислено інтеграл 1) з прикладу 1. Для обчислення іншого інтеграла потрібно ввести нові дані у першому рядку. У складніших випадках може знадобитися, причому неодноразово, процедура спрощування: похідної, підінтегрального виразу та кінцевого результату.

**2.4.9. Історичні відомості.** Поняття інтеграла Стілтєса введено у 1894 р. голландським математиком Томасом Стілтєсом (1856–1894).

**2.4.10. Зв'язок із шкільним курсом математики.** Інтеграл Стілтєса не вивчається в шкільному курсі математики, але це яскравий приклад природного узагальнення вже відомих фактів. Знайомство з такими узагальненнями досить корисне, оскільки саме на таких прикладах формується вміння узагальнення різних фактів, що є невід'ємною складовою математичної культури вчителя математики.

#### 2.4.11. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

- Інтеграл Рімана є інтегралом Стілтєса.
- Якщо  $f \in S_g[a; b]$  для деякої функції  $g$ , то  $f \in R[a; b]$ .
- Якщо  $f \in S_g[a; b]$ , то  $f$  обмежена на  $[a; b]$ .
- Твердження, обернене до попереднього, правильне.
- Якщо  $f(0) = 0$ ,  $f(x) = \frac{1}{x} \forall x \neq 0$ , а  $g(x) = \text{sign}(x - 1)$ , то  $f \in S_g[0; 1]$ .
- Функція  $f(x) = x$  є  $S_g$ -інтегрованою на будь-якому відрізку  $[a; b]$  за будь-якою функцією  $g \in R[a; b]$  і  $\int_a^b x dg(x) = b - a - (R) \int_a^b g(x) dx$ .
- Суми Дарбу – Стілтєса  $S_*(f, T, g)$  та  $S^*(f, T, g)$  існують для будь-яких функцій  $f$  та  $g$ , визначених на  $[a; b]$ .
- Якщо

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x < 0, \\ 1, & \text{коли } x \geq 0, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \leq 0, \\ 1, & \text{коли } x > 0, \end{cases}$$

то

- $f \in S_g[-1; 1]$ ;
- $I_*(f, g) = I^*(f, g)$ , коли  $x \in [-1; 1]$ ;
- $f \in S_g[-1; 0]$  і  $f \in S_g[0; 1]$ .

- Якщо функція  $g$  неперервна на  $[a; b]$ , то  $\max_{0 \leq k \leq m-1} \Delta g(x_k) \rightarrow 0$ , коли  $\lambda(T) \rightarrow 0$ , а  $T$  є розбиттям відрізка  $[a; b]$  точками  $x_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ .

10. Якщо  $f(x) = c > 0 \forall x \in [a; b]$ , а функція  $g$  монотонна на  $[a; b]$ , то  $\int_a^b f dg > 0$ .
11. Якщо  $\alpha f_1 + \beta f_2 \in S_g[a; b] \forall \alpha \text{ і } \beta \in \mathbb{R}: \alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ , то  $f_1 \in S_g[a; b]$  і  $f_2 \in S_g[a; b]$ .
12. Якщо  $g$  зростає на  $[a; b]$ , а  $f \in S_g[a; b]$ , то  $|f| \in S_g[a; b]$  і  $\left| \int_a^b f dg \right| \leq \int_a^b |f| dg$ .
13. Функція  $g$  є кусково сталою на  $[a; b]$  тоді й тільки тоді, коли її множина значень  $E(g)$  скінченна.
14. Якщо функція  $f$  монотонна, а  $\varphi$   $R$ -інтегровна на  $[a; b]$ , то  $\exists x^* \in [a; b]: \int_a^b f(x)\varphi(x) dx = f(a+) \int_a^{x^*} \varphi(t) dt + f(b-) \int_{x^*}^b \varphi(t) dt$ .

## II. Довести дані твердження.

1. Якщо функції  $f$  і  $g$  неперервні на  $[a; b]$ , а  $\alpha$  – функція обмеженої варіації на  $[a; b]$ , то  $\int_a^b g d\beta = \int_a^b g f d\alpha$ , де  $\beta = \int_a^x f d\alpha \forall x \in [a; b]$ .
2. Якщо  $g$  – зростаюча функція на  $[a; b]$ , а функції  $f$  та  $\varphi$   $S_g$ -інтегровні на  $[a; b]$ , то їх добуток  $f \cdot \varphi$  також  $S_g$ -інтегровний на  $[a; b]$  і  $\left| \int_a^b f \varphi dg \right|^2 \leq \int_a^b |f|^2 dg \int_a^b |\varphi|^2 dg$ .

## III. Наступні задачі розв'язати за допомогою комп'ютерних засобів математики.

1. Для заданих функцій  $f(x)$  і  $g(x)$ ,  $x \in [a; b]$ , обчислити інтегральні суми Стільцеса  $S(f, T, X^*, g)$  та  $S(g, T, X^*, f)$  і з'ясувати, чим вони відрізняються від інтегральних сум  $S(f, T', T, g)$  та  $S(g, T, X^*, f)$ , розглянутих у пункті 2.4.3.
2. Для самостійно заданих функцій  $f$  і  $g$  обчислити суми Дарбу – Стільцеса і дослідити питання щодо їхньої близькості до  $S_g$ -інтеграла  $\int_a^b f dg$ .
3. Для самостійно заданих функцій  $f$  і  $g$  обчислити інтеграл  $\int_a^b f dg = \int_a^b f g' dx$ .

## 3. ЗАСТОСУВАННЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ЧИСЛЕННЯ

У даному розділі проілюстровано геометричні та фізичні застосування  $R$ -інтегралів та  $S$ -інтегралів.

### 3.1. Обчислення довжини дуги кривої

У цьому підрозділі введено поняття кривої, її дуги, простої дуги, довжини дуги, спрямлюваної дуги, гладкої та кусково-гладкої дуги, а також доведено критерії спрямлюваності дуги і формули для обчислення довжин спрямлюваних дуг.

**3.1.1. Поняття кривої. Приклади кривих.** Інтуїтивне поняття кривої пов'язане із слідом, який залишає матеріальна точка (кінчик загостреного олівця), що рухається на площині  $OXY$  (або  $\mathbb{C}$ ). При цьому певному моменту часу (параметру)  $t$  відповідає на кривій певна точка  $M_t(x, y)$  (або  $M_t(z)$ ) з координатами на площині  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  (або  $z = z(t)$ ). З фізичних міркувань природно розрізняти точки кривої не тільки за їх координатами, тобто за положенням матеріальної точки на площині, а й за моментом часу (параметром)  $t$ , в який матеріальна точка займає це положення.

У зв'язку з такими уявленнями про криву вводять наступні означення.

Нехай на проміжку  $\langle a; b \rangle$  задані неперервні дійсні функції  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  (або неперервна комплекснозначна функція  $z = z(t)$ ). Тоді кривою або параметричною кривою у площині  $OXY$  (або в комплексній площині  $\mathbb{C}$ ) називають множину  $\Gamma = \{M_t(x, y): x = x(t), y = y(t), t \in \langle a; b \rangle\}$  (або  $\Gamma = \{M_t(z): z = z(t), t \in \langle a; b \rangle\}$ ). При цьому елемент  $M_t(x, y)$  (або  $M_t(z)$ ) цієї множини називають точкою кривої  $\Gamma$ , що відповідає параметру  $t$ , числа  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  (або  $z = z(t)$ ) називають координатами цієї точки у площині  $OXY$  (або  $\mathbb{C}$ ), а рівності

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in \langle a; b \rangle \end{cases} \quad (\text{або } z = z(t), t \in \langle a; b \rangle) \quad (1)$$

називають параметричними рівняннями кривої  $\Gamma$  в дійсній (або в

комплексній) формі.

Якщо ототожнювати площини  $OXY$  та  $\mathbb{C}$ , тобто ототожнювати точки  $(x, y)$  та  $z = x + iy$ , то від дійсної форми параметричного рівняння кривої легко перейти до комплексної і навпаки, оскільки  $z(t) = x(t) + iy(t) \forall t \in \langle a; b \rangle$ .

Зрозуміло, що кожна крива цілком визначається своїми параметричними рівняннями. Тому часто замість слів “крива  $\Gamma$ , параметричні рівняння якої мають вигляд (1)” використовують слова “крива  $\Gamma$  вигляду (1)”, або “крива (1)”, або крива  $\Gamma: x = x(t), y = y(t), t \in \langle a; b \rangle$  ( $\Gamma: z = z(t), t \in \langle a; b \rangle$ ).

Якщо в рівнянні (1)  $x(t) = t \forall t \in [a; b]$  або  $y(t) = t \forall t \in [a; b]$ , то кажуть що крива  $\Gamma$  задана явним рівнянням  $y = y(x), x \in [a; b]$ , або  $x = x(y), y \in [a; b]$ .

Нехай у рівнянні (1)  $x = \rho(t) \cos t, y = \rho(t) \sin t \forall t \in \langle a; b \rangle$  і  $\rho(t) \geq 0 \forall t \in \langle a; b \rangle$ . Тоді  $\rho := \sqrt{x^2 + y^2} = \rho(t) \forall t \in \langle a; b \rangle$  і кажуть, що крива  $\Gamma$  задана рівнянням у полярних координатах  $\rho = \rho(t), t \in \langle a; b \rangle$ , якщо  $\rho(t)$  – це відстань точки  $(x, y)$  від початку координат, а параметр  $t$  – це кут, який радіус-вектор точки  $(x, y)$  утворює з додатним напрямом осі  $OX$  (рис. 3.1.1).

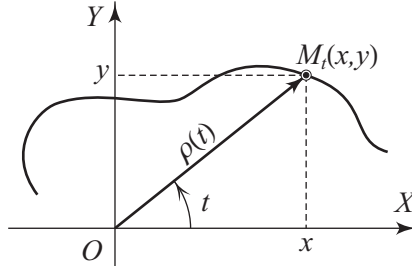


Рис. 3.1.1.

Точку  $(x, y)$  (точку  $z$ ) називають *слідом точки*  $M_t(x, y)$  (точки  $M_t(z)$ ) кривої (1) на площині  $XOY$  (на площині  $\mathbb{C}$ ), а сукупність усіх таких слідів називають *слідом кривої*  $\Gamma$  на відповідній площині і позначають  $\Gamma_c$ .

Точки  $M_{t_1}(x_1, y_1)$  і  $M_{t_2}(x_2, y_2)$  кривої  $\Gamma$  вважають *різними*, якщо  $t_1 \neq t_2$ , тобто ці точки відповідають різним значенням параметра  $t$ . При цьому різні точки кривої, взагалі кажучи, можуть мати однакові координати, тобто можуть мати однакові сліди на площині  $OXY$  (або  $\mathbb{C}$ ).

Якщо різні точки кривої (1) обов'язково мають різні координати (різні сліди), крім, можливо, випадку  $t = a$  і  $t = b$ , то цю криву називають *кривою без точок самоперетину*, або *простою кривою*, або *кривою Жордана*.

Наприклад, крива  $\Gamma$ , задана явним рівнянням, завжди є простою кривою.

Для простої кривої можна опускати індекс  $t$  в позначенні її точок, тобто  $\Gamma$  – проста крива  $\Leftrightarrow \Gamma = \{M(x, y): x = x(t), y = y(t), t \in \langle a; b \rangle\}$ , зокрема  $\Gamma = \{M(x, y): y = y(x), x \in [a; b]\}$ . Отже, прості криві можна ототожнювати з відповідними множинами точок у площині  $OXY$  або  $\mathbb{C}$ .

Розглянемо деякі **прикладі кривих**.

**1.** Графік  $\Gamma(f)$  кожної основної елементарної функції  $f$  можна вважати кривою Жордана у площині  $OXY$ , якщо розглядати  $f$  на  $\langle a; b \rangle \subset D(f)$ . Наприклад,  $\Gamma = \{M(x, y): y = \sin x, x \in \mathbb{R}\}$  – синусоїда в площині  $OXY$ , а в площині  $\mathbb{C}$  синусоїда має вигляд  $\Gamma = \{z = t + i \sin t, t \in \mathbb{R}\}$ .

**2.** Кожна пряма в площині  $OXY$  цілком визначається двома різними точками  $M_{t_1}(x_1, y_1)$  і  $M_{t_2}(x_2, y_2)$  і має рівняння  $y = y_1$  або  $x = x_1$ , або

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)t = x_2t + x_1(1 - t), \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)t = y_2t + y_1(1 - t), \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

Таким чином, кожна пряма в площині  $OXY$  є параметричною кривою в цій площині і має рівняння вигляду

$$\begin{cases} x = x_2t + x_1(1 - t), \\ y = y_2t + y_1(1 - t), \end{cases} t \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

де  $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$  – фіксовані точки прямої.

З останньої системи легко дістати рівняння прямої в комплексній площині:

$$\begin{aligned} z = x(t) + iy(t) &= (x_2 + iy_2)t + (x_1 + iy_1)(1 - t) = \\ &= z_2t + (1 - t)z_1, \quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Кожна пряма є простою кривою.

**3.** Рівняння кола  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$  в параметричній

дійсній формі має вигляд

$$\begin{cases} x - x_0 = r \cos t, \\ y - y_0 = r \sin t, \quad t \in [0; 2\pi], \Leftrightarrow \\ \begin{cases} x = x_0 + r \cos t, \\ y = y_0 + r \sin t, \quad t \in [0; 2\pi], \end{cases} \end{cases} \quad (3)$$

а в комплексній формі – вигляд

$$\begin{aligned} z = x(t) + iy(t) &= x_0 + iy_0 + r(\cos t + i \sin t) = \\ &= z_0 + r \exp it, \quad t \in [0; 2\pi] \quad (\text{рис. 3.1.2}). \end{aligned}$$

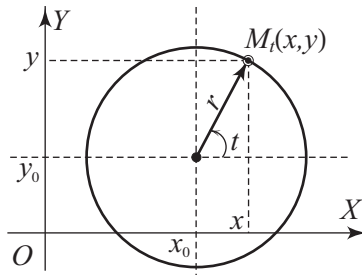


Рис. 3.1.2.

Крива (3) є простою кривою, а якщо у рівнянні (3) замінити відрізок  $[0; 2\pi]$  на відрізок  $[0; 4\pi]$ , то крива (3) вже не буде простою, проте слідом цієї кривої залишиться коло з центром у точці  $(x_0; y_0)$  і радіусом  $r$ .

4. Криву  $\Gamma$ , рівняння якої в полярних координатах має вигляд  $\rho = a(1 + \cos t)$ ,  $t \in [0; 2\pi]$ , де  $a > 0$  – фіксоване число, називають кардіоїдою (рис. 3.1.3).

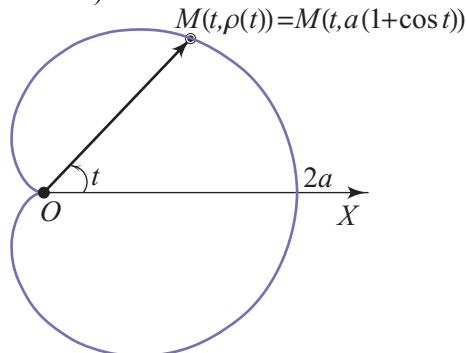


Рис. 3.1.3.



Рівняння кардіоїди в комплексній формі має вигляд

$$z = a(1 + \cos t) \exp it, \quad t \in [0; 2\pi].$$

Кардіоїда є кривою Жордана, тобто простою кривою, а якщо розглянути рівняння  $\rho = a(1 + \cos t)$ ,  $t \in [-2\pi; 2\pi]$ , то воно буде рівнянням кривої, що не є кривою Жордана, проте її слідом у площині  $XOY$  залишиться кардіоїда.

Дугою кривої  $\Gamma$  вигляду (1) називають множину тих точок  $M_t(x, y) \in \Gamma$ , що відповідають параметру  $t$ , який набуває значень з відрізка  $[\alpha; \beta] \subset \langle a; b \rangle$ . При цьому точку  $A = (x(\alpha), y(\alpha))$  називають *початковою*, а точку  $B = (x(\beta), y(\beta))$  – *кінцевою точкою дуги* і позначають цю дугу  $\widehat{AB}$ , а якщо  $A = B$ , то дугу  $\widehat{AB}$  називають *замкненою дугою* або *контуром*. Точки  $A$  і  $B$  називають також *межевими точками дуги*  $\widehat{AB}$ .

Зрозуміло, що кожна дуга кривої (1) сама є деякою кривою, але довільна крива (1) є дугою тоді й тільки тоді, коли  $\langle a; b \rangle = [a; b]$ .

Наприклад, пряма (2) не є дугою, але крива

$$\begin{cases} x = x_2 + x_1(1 - t), \\ y = y_2 + y_1(1 - t), \quad t \in [0; 1], \end{cases}$$

є дугою: це *орієнтований* або *напрявлений відрізок*  $[A; B]$ , де  $A = (x_1, y_1)$ , а  $B = (x_2, y_2)$ .

Так само напрямлений відрізок  $[z_1; z_2] = \{z = z_2t + z_1(1 - t) : t \in [0; 1]\}$  у комплексній площині є дугою.

Також дугою є коло  $z = z_0 + r \exp it$ ,  $t \in [0; 2\pi]$ , і кардіоїда  $\rho = a(1 + \cos t)$ ,  $t \in [0; 2\pi]$ ; ці дуги є замкненими, тобто контурами.

Якщо дуга  $\widehat{AB}$  є кривою Жордана, то вона називається *простою дугою*.

**3.1.2. Поняття довжини дуги.** Коли дуга  $\widehat{AB}$  є відрізком, наприклад,  $[z_1; z_2]$ , то природно вважати що її довжина  $l(\widehat{AB}) = |z_1 - z_2|$ , а якщо  $\widehat{AB} = \bigcup_{k=0}^{n-1} [z_k; z_{k+1}]$  – ламана, то за означенням

$$l(\widehat{AB}) = \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| \text{ – довжина цієї ламаної.}$$

Природно виникає питання, що розуміти під довжиною довільної дуги  $\widehat{AB}$ .

Щоб відповісти на поставлене питання розглянемо довільну

дугу  $\widehat{AB}$ , параметричне рівняння якої в комплексній формі має вигляд  $z = z(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ . Зауважимо, що коли це рівняння задане в дійсній формі

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in [\alpha; \beta], \end{cases}$$

то від нього завжди можна перейти до рівняння в комплексній формі, поклавши  $z = x(t) + iy(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ .

Візьмемо довільне розбиття  $T$  відрізка  $[\alpha; \beta]$  точками  $t_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , і позначимо  $z_k = z(t_k) \quad \forall k \in \overline{0, n-1}$ .

Точки  $z_k$  утворюють ламану, вписану в дугу  $\widehat{AB}$ , довжина якої  $L(T) = \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|$  (рис. 3.1.4).

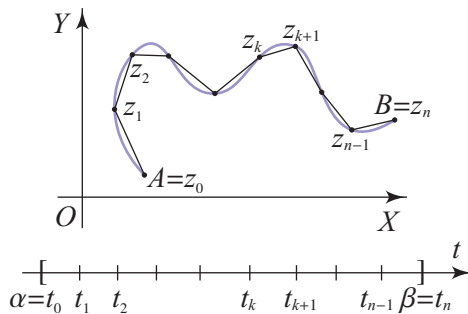


Рис. 3.1.4.

Довжиною дуги  $\widehat{AB}$  називають число

$$\begin{aligned} L &= \sup_{(T)} L(T) = \sup_{(T)} \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k| = \\ &= \sup_{(T)} \sum_{k=0}^{n-1} |z(t_{k+1}) - z(t_k)| = \int_{\alpha}^{\beta} |z'(t)| dt. \end{aligned}$$

При цьому, якщо  $L(T) < +\infty$ , то дугу  $\widehat{AB}$  називають *спрямлюваною*.

Для кожної кривої, що одержується з дуги  $\widehat{AB}$  шляхом вилучення принаймні однієї межевої точки, вважають, що вона має ту саму довжину, що й дуга  $\widehat{AB}$ .

### 3.1.3. Критерії спрямлюваності.

□ За означенням дуга  $\widehat{AB}$ :  $z = z(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ , є спрямлюваною тоді і тільки тоді, коли функція  $z = z(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ , є функцією обмеженої варіації на відрізку  $[\alpha; \beta]$ . Враховуючи, що  $\int_{\alpha}^{\beta} x(t) \leq \int_{\alpha}^{\beta} z(t)$  і  $\int_{\alpha}^{\beta} y(t) \leq \int_{\alpha}^{\beta} z(t) \leq \int_{\alpha}^{\beta} x(t) + \int_{\alpha}^{\beta} y(t)$ , де  $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$ , а  $y(t) = \operatorname{Im} z(t)$ , дістаємо перший критерій спрямлюваності дуги кривої (1). ■

**Теорема 1** (перший критерій спрямлюваності). Дуга  $\widehat{AB}$ :  $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$  (або

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [\alpha; \beta] \end{cases}$$

є спрямлюваною дугою тоді й тільки тоді, коли функція  $z = z(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$  (функції  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ ) має (мають) обмежену варіацію на відрізку  $[\alpha; \beta]$ . Зокрема, дуга  $\widehat{AB}$ :  $y = f(x)$ ,  $x \in [\alpha; \beta]$ , є спрямлюваною тоді й тільки тоді, коли  $\int_{\alpha}^{\beta} f < +\infty$ .

Всі розглянуті вище дуги (відрізок, коло, кардіоїда) є спрямлюваними дугами. Проте існують і неспрамлювані дуги.

**Приклад 1.** Дуга  $\widehat{AB}$ :  $y = x \sin \frac{1}{x}$ ,  $x \in [0; 1]$ , де  $y(0) = 0$ , не є спрямлюваною, оскільки функція  $f$ , що задає дугу, не є функцією обмеженої варіації на відрізку  $[0; 1]$ .

□ Справді, якщо  $x_0^{(m)} = 0$ ,  $x_1^{(m)} = \frac{2}{\pi(2m+1)}$ ,  $x_2^{(m)} = \frac{2}{\pi \cdot 2m}$ ,  $x_3^{(m)} = \frac{2}{\pi(2m-1)}$ ,  $\dots$ ,  $x_{2m+1}^{(m)} = \frac{2}{\pi}$ ,  $x_{2m+2}^{(m)} = 1$ , то

$$\sum_{k=0}^{2m+1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \geq \frac{2}{\pi} \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2m+1} \right) \rightarrow \infty,$$

коли  $m \rightarrow \infty$ . ■

Візьмемо довільну точку  $C = M_{t^*}(z(t^*))$  дуги  $\widehat{AB}$ :  $z = z(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ . Ця точка відповідає параметру  $t^* \in [\alpha; \beta]$ . Вважатимемо, що  $t^* \in (\alpha; \beta)$ . Тоді дуга  $\widehat{AB}$ :  $z = z(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ , є об'єднанням дуг  $\widehat{AC}$ :  $z = z(t)$ ,  $t \in [\alpha; t^*]$ , і  $\widehat{CB}$ :  $z = z(t)$ ,  $t \in [t^*; \beta]$ . Саме так розумітимемо надалі рівність  $\widehat{AB} = \widehat{AC} \cup \widehat{CB}$ .

З'ясуємо, коли  $L(\widehat{AB}) = L(\widehat{AC}) + L(\widehat{CB})$ .

□ За властивістю повної варіації  $\int_{\alpha}^{\beta} z(t) = \int_{\alpha}^{t^*} z(t) + \int_{t^*}^{\beta} z(t)$ , коли

ліва або права частина скінченні. Тому дуга  $\widehat{AB}$  спрямлювана тоді й тільки тоді, коли дуги  $\widehat{AC}$  і  $\widehat{CB}$  спрямлювані. При цьому  $L(\widehat{AB}) = L(\widehat{AC}) + L(\widehat{CB})$ . ■

Отже, доведена наступна теорема.

**Теорема 2** (адитивна властивість довжини дуги). *Якщо дуга  $\widehat{AB} = \widehat{AC} \cup \widehat{CB}$ , то дуга  $\widehat{AB}$  є спрямлюваною тоді і тільки тоді, коли спрямлювані дуги  $\widehat{AC}$  і  $\widehat{CB}$ . При цьому  $L(\widehat{AB}) = L(\widehat{AC}) + L(\widehat{CB})$ .*

Досить часто на практиці поняття довжини дуги вводять по-іншому:  $L = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} L(T)$ .

Щоб довести еквівалентність двох вказаних означень довжини дуги, переконаємося, що

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} z(t) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} L(T) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} |z(t_{k+1}) - z(t_k)|,$$

де  $T$  є розбиттям відрізка  $[\alpha; \beta]$  точками  $t_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , а  $\lambda(T)$  – дрібність розбиття  $T$ :  $\lambda(T) = \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta t_k$ . При цьому вважатимемо за означенням, що коли  $0 \leq L \leq +\infty$ , то  $L = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} L(T) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: L(T) \in O_{\varepsilon}(L)$ , якщо  $\lambda(T) < \delta(\varepsilon)$  (тобто  $|L(T) - L| < \varepsilon$ , коли  $L \neq +\infty$ , або  $L(T) > \varepsilon$ , коли  $L = +\infty$ ).

□ Якщо  $L = \int_{\alpha}^{\beta} z(t) < +\infty$ , то за властивостями супремуму  $L(T) \leq L \forall T$  і для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує розбиття  $T_0$  відрізка  $[\alpha; \beta]$  точками  $t_i^{(0)}$ ,  $i \in \overline{0, m}$ , таке, що  $L - \frac{\varepsilon}{2} < L(T_0) < L$ . Оскільки  $z(t)$  рівномірно неперервна функція на відрізку  $[\alpha; \beta]$ , то  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: |z(t') - z(t'')| < \frac{\varepsilon}{4m} \forall t' \text{ і } t'' \in [\alpha; \beta]$ , коли  $|t' - t''| < \delta(\varepsilon)$ . При цьому можна вважати  $\delta(\varepsilon) < \min \Delta t_i^{(0)}$ .

Візьмемо довільне розбиття  $T$  відрізка  $[\alpha; \beta]$  точками  $t_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , для якого  $\lambda(T) < \delta(\varepsilon)$ . Оскільки

$$\min_{0 \leq i \leq m-1} \Delta t_i^{(0)} > \lambda(T) = \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta t_k,$$

то кожен проміжок  $[t_k; t_{k+1})$  містить не більше однієї точки  $t_i^{(0)}$ . Нехай  $t_{k_i} \leq t_i^{(0)} < t_{k_i+1} \forall i \in \overline{1, m-1}$ , а  $T_1 = T \cup T_0$ . Тоді легко бачити (див. рис. 3.1.5), що

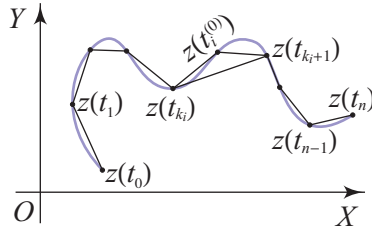


Рис. 3.1.5.

$$0 \leq L(T_1) - L(T) = \sum_{i=0}^{m-1} \left( |z(t_i^{(0)}) - z(t_{k_i})| + |z(t_{k_{i+1}}) - z(t_i^{(0)})| - |z(t_{k_{i+1}}) - z(t_{k_i})| \right) < 2 \cdot m \cdot \frac{\varepsilon}{4 \cdot m} = \frac{\varepsilon}{2},$$

оскільки  $|t_i^{(0)} - t_{k_i}| \leq |t_{k_{i+1}} - t_{k_i}| < \lambda(T) < \delta(\varepsilon)$  і  $|t_{k_{i+1}} - t_i^{(0)}| < \lambda(T) < \delta(\varepsilon)$ .

Враховуючи це, маємо

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < L(T_0) \leq L(T_1) < L,$$

а

$$\begin{aligned} |L(T) - L| &= |L(T) - L(T_1) + L(T_1) - L| \leq \\ &\leq |L(T) - L(T_1)| + |L(T_1) - L| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Отже,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: |L(T) - L| < \varepsilon$ , коли  $\lambda(T) < \delta(\varepsilon)$ , тобто  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} L(T) = L$ , коли  $L = \int_{\alpha}^{\beta} z(t) < +\infty$ .

Якщо  $L = \int_{\alpha}^{\beta} z(t) = +\infty$ , то для будь-якого  $\varepsilon > 0$  існує розбиття  $T_0$  таке, що  $L(T_0) > \frac{3\varepsilon}{2}$ . Розбиття  $T$  і  $T_1$  утворюємо, як і вище. Тоді  $L(T_1) \geq L(T_0) > \frac{3\varepsilon}{2}$ ,  $L(T) - L(T_1) > -\frac{\varepsilon}{2}$ , а

$$L(T) = L(T_1) + (L(T) - L(T_1)) > \frac{3}{2}\varepsilon - \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже,  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0: L(T) > \varepsilon$ , коли  $\lambda(T) < \delta(\varepsilon)$ , тобто  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} L(T) = +\infty$ . ■

Таким чином, доведено наступну теорему.

**Теорема 3** (другий критерій спрямлюваності дуги). Дуга  $\widehat{AB}$ :  $z = z(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ , є спрямлюваною тоді й тільки тоді, коли

існує скінчення границя  $\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} L(T) = L$ . При цьому  $L = \int_{\alpha}^{\beta} z(t) dt$  є довжиною дуги  $\widehat{AB}$ .

**Зауваження.** Якщо розглядати сукупність  $\mathfrak{S}_l$  різноманітних спрямлюваних дуг, то можна переконатися, що ця сукупність задовольняє наступні властивості:

- 1<sub>l</sub>. Сукупність  $\mathfrak{S}_l$  непорожня і  $L(\Gamma) \geq 0 \forall \Gamma \in \mathfrak{S}_l$ .
- 2<sub>l</sub>. Якщо дуги  $\Gamma_i \in \mathfrak{S}_l$ ,  $i \in \overline{1, 2}$ ,  $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$  і  $\Gamma_2 \setminus \Gamma_1 = \Gamma \in \mathfrak{S}_l$  є дугою, то  $L(\Gamma) = L(\Gamma_2) - L(\Gamma_1)$ .
- 3<sub>l</sub>. Якщо дуги  $\Gamma_i \in \mathfrak{S}_l$ ,  $i \in \overline{1, 2}$  і дуга  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ , то  $\Gamma \in \mathfrak{S}_l$ , причому  $L(\Gamma) = L(\Gamma_1) + L(\Gamma_2)$ , коли  $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$ .

Ці властивості називають основними властивостями спрямлюваних дуг і довжин.

**3.1.4. Обчислення довжини дуги.** Застосуємо теорему 3 до доведення формули обчислення довжини дуги.

□ Нехай  $\widehat{AB}$ :  $z = z(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ , – неперервна дуга, а  $T$  – довільне розбиття відрізка  $[\alpha; \beta]$  точками  $t_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ . Розглянемо суму

$$\begin{aligned} L(T) &= \sum_{k=0}^{n-1} |z(t_{k+1}) - z(t_k)| = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x(t_{k+1}) - x(t_k))^2 + (y(t_{k+1}) - y(t_k))^2}. \end{aligned}$$

Припустимо, що  $z = z(t)$ , а тому й  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  – диференційовні функції на  $[\alpha; \beta]$ . Тоді за формулою Лагранжа про скінченні прирости  $\exists t_k^* \text{ і } t_k^{**} \in [t_k; t_{k+1}]$ :  $x(t_{k+1}) - x(t_k) = x'(t_k^*) \Delta t_k$ , а  $y(t_{k+1}) - y(t_k) = y'(t_k^{**}) \Delta t_k \forall k \in \overline{0, n-1} \Rightarrow$

$$\begin{aligned} L(T) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{x'^2(t_k^*) + y'^2(t_k^{**})} \Delta t_k = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{x'^2(t_k^*) + y'^2(t_k^*)} \Delta t_k + \\ &+ \sum_{k=0}^{n-1} \left( \sqrt{x'^2(t_k^*) + y'^2(t_k^{**})} - \sqrt{x'^2(t_k^*) + y'^2(t_k^*)} \right) \Delta t_k = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} |z'(t_k^*)| \Delta t_k + W(T). \end{aligned} \quad (4)$$

Припустимо, що функції  $x'(t)$  і  $y'(t)$   $R$ -інтегровні на відрізку  $[\alpha; \beta]$ . Тоді й функція  $|z'(t)|$  є  $R$ -інтегровою на  $[\alpha; \beta]$ , а тому

$$\sum_{k=0}^{n-1} |z'(t_k^*)| \Delta t_k \rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} |z'(t)| dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt,$$

коли  $\lambda(T) \rightarrow 0$ .

Доведемо, що  $W(T)$  у рівності (4) прямує до нуля, коли  $\lambda(T) \rightarrow 0$ . Для цього зауважимо, що коли  $z^* = x'(t_k^*) + iy'(t_k^*)$ ,  $z^{**} = x'(t_k^{**}) + iy'(t_k^{**})$ , то

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{x'^2(t_k^*) + y'^2(t_k^*)} - \sqrt{x'^2(t_k^{**}) + y'^2(t_k^{**})} \right| = \\ & = \left| |z^*| - |z^{**}| \right| \leq |z^* - z^{**}| = |y'(t_k^*) - y'(t_k^{**})| \leq \\ & \leq \omega_k(y') = \sup_{[t_k; t_{k+1}]} y'(t) - \inf_{[t_k; t_{k+1}]} y'(t). \end{aligned}$$

Звідси, враховуючи критерій  $R$ -інтегровності, дістаємо

$$\begin{aligned} |W(T)| &= \left| \sum_{k=0}^{n-1} \left( \sqrt{x'^2(t_k^*) + y'^2(t_k^*)} - \sqrt{x'^2(t_k^*) + y'^2(t_k^{**})} \right) \right| \leq \\ & \leq \sum_{n=0}^{n-1} \omega_k(y') \Delta t_k \rightarrow 0, \end{aligned}$$

коли  $\lambda(T) \rightarrow 0$ . ■

Отже, враховуючи теорему 3, з рівності (4) дістаємо спрямлюваність дуги  $\widehat{AB}$  та рівність

$$L = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} L(T) = \int_{\alpha}^{\beta} |z'(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \quad (5)$$

Зокрема, якщо дуга  $\widehat{AB}$  задана явним рівнянням:  $y = f(x)$ ,  $x \in [\alpha; \beta]$ , і  $f' \in R[\alpha; \beta]$ , то

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + f'^2(x)} dx, \quad (6)$$

оскільки при цьому параметричне рівняння  $\widehat{AB}$  має вигляд

$$\begin{cases} x = t, \\ y = f(t), \quad t \in [\alpha; \beta], \end{cases}$$

і тому  $x'(t) = 1$ , а  $y'(t) = f'(t)$ .

Якщо дуга  $\widehat{AB}$  задана рівнянням у полярних координатах  $\rho = \rho(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ , і  $\rho'(t) \in R[\alpha; \beta]$ , то

$$\begin{cases} x(t) = \rho(t) \cos t, \\ y(t) = \rho(t) \sin t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'(t) = \rho'(t) \cos t - \rho(t) \sin t \in R[\alpha; \beta], \\ y'(t) = \rho'(t) \sin t + \rho(t) \cos t \in R[\alpha; \beta] \end{cases}$$

$$\text{і } x'^2(t) + y'^2(t) = \rho'^2(t) + \rho^2(t) \quad \forall t \in [\alpha; \beta].$$

Тоді

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2(t) + \rho^2(t)} dt. \quad (7)$$

Отже, має місце наступна теорема.

**Теорема 4** (про обчислення довжини дуги). *Нехай функції  $x = x(t)$  і  $y = y(t)$  є диференційовними на відрізку  $[\alpha; \beta]$ , причому функції  $x'(t)$  та  $y'(t) \in R[\alpha; \beta]$ , зокрема, неперервні на  $[\alpha; \beta]$ . Тоді дуга  $\widehat{AB}: z = x(t) + iy(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ , є спрямлюваною і довжину  $L(\widehat{AB})$  можна обчислити за формулою (5), (6) або (7), в залежності від вигляду рівняння  $\widehat{AB}$ .*

Розглянемо деякі **прикладі**.

**2.** Нехай  $\widehat{AB}$  є відрізком  $[z_1; z_2]$ , тобто має рівняння  $z = z_2 t + (1-t)z_1$ ,  $t \in [0; 1]$ . Тоді  $z' = z_2 - z_1 = \text{const}$  на  $[0; 1]$ . Отже, умови теореми 3 виконуються і тому за формулою (5) дістаємо:

$$L([z_1; z_2]) = \int_0^1 |z_2 - z_1| dt = |z_2 - z_1|, \text{ а це звичайна довжина відрізка.}$$

**3.** Для обчислення довжини кола радіуса  $r$  зручно скористатися його рівнянням у полярних координатах:  $\rho = r$ ,  $t \in [0; 2\pi]$ . Звідси за формулою (7) дістанемо знайому формулу

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2} dt = r \cdot 2\pi = 2\pi r. \text{ Якщо}$$

формулу (7) застосувати до обчислення дуги кола  $\widehat{AB}$ :  $\rho = r$ ,  $t \in [0; \alpha]$ , то матимемо  $A = (0, r)$ ,  $B = (\alpha, r)$  і

$$L(\widehat{AB}) = \int_0^{\alpha} r dt = r\alpha.$$

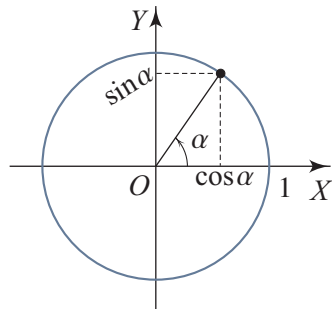


Рис. 3.1.6.

Якщо при цьому  $r = 1$ , то  $L(\widehat{AB}) = \alpha$ , і саме тому абсцису



точки  $B$  називають косинусом, а ординату  $B$  – синусом числа  $\alpha$  (рис. 3.1.6).

**3.1.5. Диференціал довжини дуги.** Розглянемо дугу  $\widehat{AB}$ :  $z = x(u) + iy(u)$ ,  $u \in [\alpha; \beta]$ , де похідні  $x'(u)$  та  $y'(u)$  – неперервні функції на  $[\alpha; \beta]$ . За теоремою 4 для будь-якої фіксованої точки  $t \in [\alpha; \beta]$  дуга  $\widehat{AB}_t$ ,  $z = x(u) + iy(u)$ ,  $u \in [\alpha; t]$  є спрямлюваною, а її довжину можна обчислити за формулою

$$l(\widehat{AB}_t) = l(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)} du \quad \forall t \in [\alpha; \beta].$$

Звідси випливає, що функція  $l = l(t)$  є диференційовною на  $[\alpha; \beta]$  і  $l'(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$ , а

$$dl(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \quad \forall t \in [\alpha; \beta].$$

При цьому  $dl(t)$  називають *диференціалом довжини дуги*.

Зокрема, якщо дуга  $\widehat{AB}$  задана явним рівнянням  $y = f(x)$ ,  $x \in [\alpha; \beta]$ , то

$$dl(x) = \sqrt{1 + f'^2(x)} dx,$$

а якщо  $\widehat{AB}$  задана рівнянням у полярних координатах  $\rho = \rho(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ , то

$$dl(t) = \sqrt{\rho'^2(t) + \rho^2(t)} dt.$$

**3.1.6. Гладкі та кусково-гладкі дуги.** Дугу  $\widehat{AB}$ :  $z = x(u) + iy(u)$ ,  $u \in [\alpha; \beta]$  називають *гладкою*, якщо функції  $x(u)$  і  $y(u)$  мають на  $[\alpha; \beta]$  неперервні похідні  $x'(u)$  та  $y'(u)$ , які одночасно не перетворюються в нуль, тобто  $|z'(u)|^2 = x'^2(u) + y'^2(u) > 0 \quad \forall t \in [\alpha; \beta]$ .

Згадуючи геометричний зміст похідної комплекснозначної функції дійсної змінної, дістаємо, що гладка дуга в кожній своїй точці  $M_t(z(t))$  має дотичний вектор і положення цього вектора неперервно змінюється, коли  $t$  пробігає відрізок  $[\alpha; \beta]$ .

Неперервну дугу  $\widehat{AB}$  називають *кусково-гладкою*, якщо вона є об'єднанням скінченної кількості гладких дуг.

Наприклад, відрізок і коло є гладкими дугами, а ламана і кардіоида – кусково-гладкими.

Враховуючи адитивну властивість  $R$ -інтеграла та довжини ду-

ги, приходимо до висновку, що формули (5), (6) і (7) можна застосувати до обчислення довжин кусково-гладких дуг.

Якщо дуга  $\widehat{AB}$ :  $z = x(t) + iy(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ , є гладкою, то функція

$$l = l(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{x'^2(u) + y'^2(u)} du, \quad t \in [\alpha; \beta],$$

є зростаючою та неперервною на відріжку  $[\alpha; \beta]$ , а її множина значень  $E(l) = [0; L]$ , де  $L$  – довжина дуги  $\widehat{AB}$ . Тому за відомою теоремою існує обернена функція  $t = t^{-1}(l)$ ,  $l \in [0; L]$ , що є неперервною і зростаючою на  $[0; L]$ .

Отже, рівняння  $\widehat{AB}$  можна записати у вигляді

$$z = x(t^{-1}(l)) + iy(t^{-1}(l)) = x_1(l) + iy_1(l) = z_1(l), \quad l \in [0; L].$$

Таке рівняння дуги  $\widehat{AB}$  називають *нормальним рівнянням* цієї дуги.

**3.1.7. Використання комп'ютерних засобів математики.** У даному підрозділі системи комп'ютерної математики можна використовувати, в основному, для графічного зображення кривих і для обчислення їхніх довжин за формулами (5) – (7) пункту 3.1.5.

**3.1.7.1. Використання Gran1.** Програма Gran1 є зручним засобом при вивченні даної теми, оскільки за її допомогою можна зображати дуги кривих, заданих явно, неявно, параметрично чи в полярних координатах, а також знаходити наближено довжини цих дуг. При побудові кривої є можливість задавати масштаб, змінювати колір і товщину ліній, включати/виключати зображення системи координат (яка може бути декартовою чи полярною) тощо. Спосіб задання кривої обирається у вікні “Список об'єктів” (рис. 3.1.7):

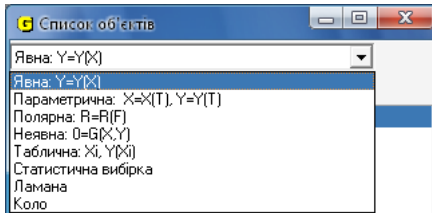


Рис. 3.1.7.

Регулювання вигляду кривої здійснюється через меню **Графік** > **Параметри вікна “Графік”...**, а для обчислення довжини дуги потрібно вибрати пункт меню **Операції** > **Інтегралі** > **Довжина дуги**.

Дуже корисною є можливість зображення кількох кривих на одному графіку, а також можливість динамічної зміни вигляду кривої за рахунок

зміни певних параметрів.

Розглянемо приклади обчислення довжин дуг, заданих явно, параметрично чи в полярних координатах, за допомогою програми Gran1. При цьому кожен криву спочатку зобразимо графічно.

**Приклад 1.** Обчислимо довжину ланцюгової лінії  $y = 2(e^{\frac{x}{4}} + e^{-\frac{x}{4}})$  від точки  $x = 0$  до точки  $x = 4$ .

Щоб краще уявити форму ланцюгової лінії, спочатку зобразимо тоншою лінією її дугу, яка відповідає відрізку  $[-5; 5]$ , а потім товщою лінією задану дугу, яка відповідає відрізку  $[0; 4]$  (рис. 3.1.8).

Після цього знайдемо шукану довжину дуги:  $L = 4,7008$ .

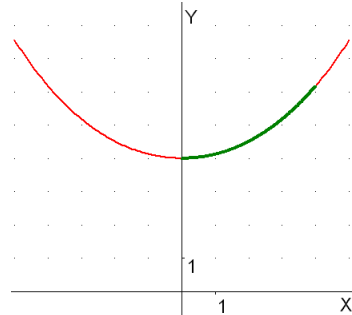


Рис. 3.1.8.

**Зауваження.** При застосуванні програми Gran1 до обчислення довжини кривої потрібно самостійно вирішувати питання, чи є задана крива спрямлюваною. За програмою Gran1 робиться спроба обчислити довжину будь-якої коректно заданої кривої. Так, якщо спробувати обчислити довжину кривої  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ ,  $x \in (0; 1]$ ,  $f(0) = 0$  (зображену на рис. 3.1.9), то за програмою Gran1 буде отримано результат  $L = 2.784$ . Проте, як було показано у прикладі 1 пункту 3.1.3, дана крива не є спрямлюваною і правильний результат обчислення її довжини мав би бути таким:  $L = +\infty$ .

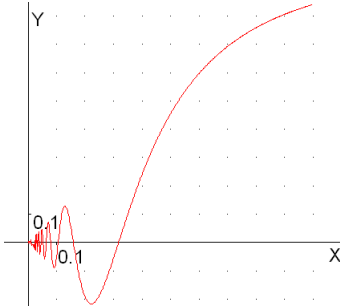


Рис. 3.1.9.

**Приклад 2.** Обчислимо довжину дуги астроиди:

$$\begin{cases} x = 2 \cos^3 t, \\ y = 2 \sin^3 t, \end{cases} t \in [0; 2\pi].$$

Вказуємо у вікні “Список об’єктів” тип задання кривої: параметрична.

Створюємо новий об’єкт, ввівши задані рівняння і відрізок.

Будуємо задану криву (рис. 3.1.10).

Обчислюємо її довжину:  $L = 11.9998$ .

**Приклад 3.** Обчислимо довжину трипелюсткової троянди:

$$\rho = \cos 3t, t \in [0; 2\pi].$$

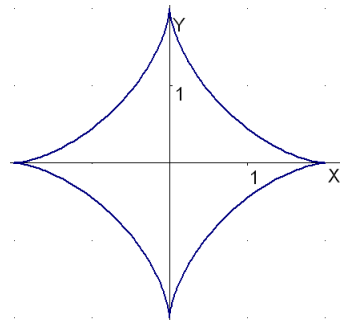


Рис. 3.1.10.

Цього разу крива задана у полярній системі координат. Тому вказує-

мо у вікні “Список об’єктів” тип системи координат: полярна. Задаючи рівняння кривої через меню “Об’єкт”, обов’язково позначаємо аргумент літерою  $F$ .

За програмою *Gran1* координата  $\rho$  може набувати як додатних значень, так і від’ємних. Якщо  $\rho < 0$ , то точка  $M_t$ , яка відповідає полярному куту  $t$ , відкладається на промені  $Ot$  у від’ємному напрямку на відстань  $|\rho(t)|$  (рис. 3.1.11).

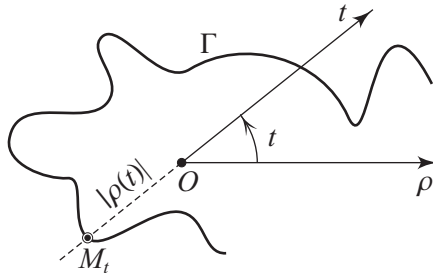


Рис. 3.1.11.

Тому, враховуючи, що функція  $\cos 3t$  парна, прийдемо до висновку, що вся трипелюсткова троянда отримується, коли  $t \in [0; \pi]$  (рис. 3.1.12).

Для відображення на екрані полярної системи координат доцільно налаштувати властивості вікна “Графік” так, як показано на рис. 3.1.13.

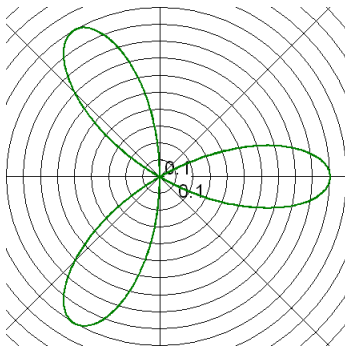


Рис. 3.1.12.

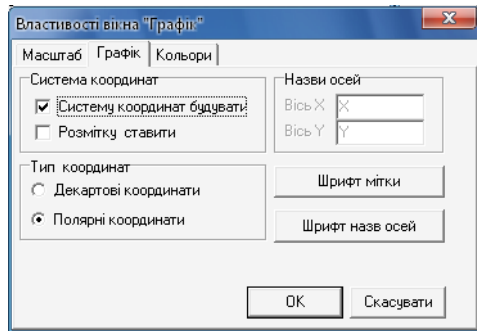


Рис. 3.1.13.

Обчислюємо довжину заданої “троянди”:  $L = 6.68206$ .

У зв’язку з відсутністю обмеження  $\rho \geq 0$  при полярному заданні кривих у цих кривих можуть з’являтися зайві частини. Наприклад, “двопелюсткова троянда”  $R = \cos(2F)$  зображається з чотирма пелюстками (рис. 3.1.14). Для зображення даної кривої у відповідності з класичним полярним заданням (рис. 3.1.15) можна записати її рівняння так:  $R = \sqrt{\cos(2F)^2}$ .

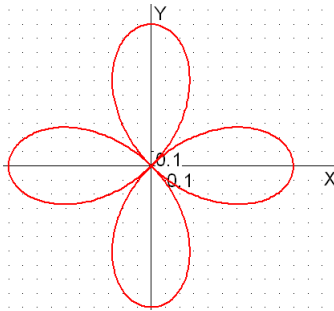


Рис. 3.1.14.

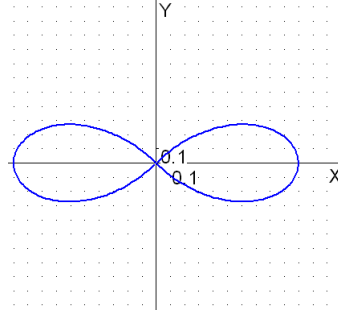


Рис. 3.1.15.

При цьому довжини цих кривих є такими:  $L_1 = 9.68712$ ,  $L_2 = 4.8043$ .

Зауважимо також, що *є такі навіть явно задані функції, що тільки графічно передати особливості їхньої поведінки неможливо!* Для них потрібно проводити додаткові дослідження.

Наприклад, якщо взяти функцію  $f(x) = \cos \ln x$ ,  $x \in (0; +\infty)$ , і задати відрізок  $[0; 100]$ , то за програмою Gran1 буде побудовано графік, показаний на рис. 3.1.16.

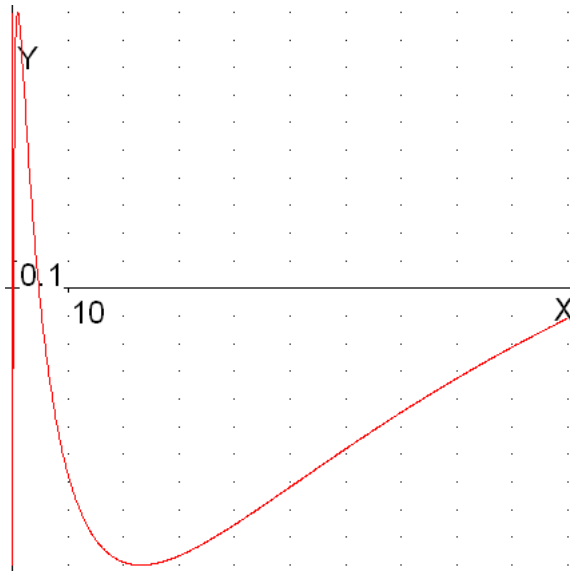


Рис. 3.1.16.

Значення цієї функції коливаються між  $-1$  і  $1$ , причому точки повтору пов'язані рівністю  $t = t_k = e^{2k\pi}x$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Тому відстань між ними стає або дуже великою, коли рухатися вправо, або дуже малою, коли рухатися вліво. Наприклад, для точки  $x = 1$  перша точка повтору справа  $t_1 \approx 535$ ,

друга  $t_2 \approx 286751$ ; зліво першою йде точка повтору  $t_{-1} \approx 0,002$ , а другою  $t_{-2} \approx 3 \cdot 10^{-6}$ . Зрозуміло, що побачити на графіку такої функції хоча б три хвили коливань проблематично.

**3.1.7.2. Використання Maxima.** За програмою Maxima можна обчислювати довжини дуг, заданих явно, параметрично чи в полярній системі координат, за формулами (5) – (7) пункту 3.1.5. На відміну від Gran1, Maxima не містить готових команд для обчислення довжин кривих. Проте у ній можна одержувати точні значення довжин кривих у символічному вигляді. Крім того, можна знаходити наближені значення довжин кривих у вигляді довжин вписаних ламаних (що можна робити і при використанні програми Gran1). Цим самим ілюструється також суть поняття довжини дуги. При обчисленні довжин кривих доцільно зображати ці криві графічно. У системі Maxima є достатньо засобів для цього.

**Задача 1.** Зобразити криву  $y = x^2$ ,  $x \in [-1; 2]$ , і вписану в неї ламану. Обчислити довжину цієї кривої точно і наближено, як довжину вписаної ламаної, що відповідає розбиттю відрізка  $[-1; 2]$  на  $n = 10$ ,  $n = 20$  і  $n = 50$  рівних частин.

□ Введемо функцію  $f(x)$ , відрізок  $[a; b]$ ; визначимо точки  $x(n, k)$  розбиття відрізка  $[a; b]$  на  $n$  рівних частин; знайдемо довжини  $l(n, k)$  ланок ламаної, вписаної у криву  $y = f(x)$ , і загальну довжину  $p(n)$  цієї ламаної. Все це зробимо в одній макрокоманді:

```
(%i1) f(x):=x^2$ a:-1$ b:2$
      x(n,k):=a+k*(b-a)/n$
      l(n,k):=sqrt((x(n,k+1)-x(n,k))^2+(f(x(n,k+1))-f(x(n,k)))^2)$
      p(n):=sum(l(n,k),k,0,n-1)$
```

Для зображення ламаної скористаємось командою `points(X,Y)` пакету `draw` з параметром `points_joined=true`. Попередньо створимо списки  $X = X(n)$  – абсцис та  $Y = Y(n)$  – ординат вершин ламаної:

```
(%i7) X(n):=makelist(x(n,k),k,0,n)$
      Y(n):=makelist(f(x(n,k)),k,0,n)$
```

Зобразимо задану криву і вписану в неї 7-ланкову ламану (рис. 3.1.17).

```
(%i8) load(draw)$
      draw2d(nticks=200,
            proportional_axes=xy,
            transparent=true,points_joined=true, point_type=none,
            line_width=2,color=red,points(X(7),Y(7)), color=blue,
            explicit(x^2,x,-1,2) )$
```

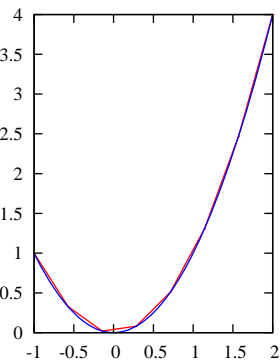


Рис. 3.1.17.

Обчислимо точне значення довжини заданої кривої за формулою (6):

```
(%i9) s:integrate(sqrt(1+diff(f(x),x)^2),x,a,b);
```

```
(%o9)  $\frac{\operatorname{asinh}(4+4\sqrt{17})}{4} + \frac{\operatorname{asinh}(2)+2\sqrt{5}}{4}$ 
```

```
(%i10) %,numer
```

```
(%o10) 6.125726619977533
```

Знайдемо і подамо одним списком довжини ламаних, які складаються з 10, 20 і 50 ланок:

```
(%i11) [p(10),p(20),p(50)],numer;
```

```
(%o11) [6.11173222783138, 6.1222997731457, 6.12516723429138]
```

Тут помітно, що при подрібненні ланок ламаної збільшується точність наближення до довжини дуги.

Поставимо додаткове питання: яким повинен бути найменший номер  $n$ , при якому довжина  $s$  заданої дуги відрізняється від довжини  $p(n)$  вписаної в неї ламаної менше, ніж на  $10^{-3}$ ?

Для відповіді на це запитання виконаємо таку програмку:

```
(%i12) block([n],n:1,for i:1 step 1 unless s-p(i)<10^(-3) do n:n+1,n);
```

```
(%o12) 38
```

Ця програмка придатна для використання у випадку, коли точність наближення, що задається, не перевищує  $10^{-5}$ . ■

Зауважимо, що обчислити границю побудованої послідовності  $p(n)$ , коли  $n \rightarrow \infty$ , за допомогою Махіма не вдається (хоча вихідна функція була досить простою). Це пов'язано з труднощами при спрощуванні сум.

**Задача 2.** Обчислити довжину однієї арки циклоїди  $x = R(t - \sin t)$ ,  $y = R(1 - \cos t)$ ,  $t \in [0; 2\pi]$ , і зобразити цю арку при  $R = 1$ .

□ Вводимо параметричні рівняння кривої та відрізок:

```
(%i1) x:R*(t-sin(t))$ y:R*(1-cos(t))$ a:0$ b:2*%pi$
```

Обчислюємо довжину кривої за формулою (5):

```
(%i5) integrate(sqrt(diff(x,t)^2+diff(y,t)^2),t,a,b);
```

```
Is R positive or negative? p;
```

```
(%o5) 8R
```

Зображуємо арку циклоїди у випадку  $R = 1$  і коло, що її породжує (рис. 3.1.18):

```
(%i6) load(draw)$ R:1$
```

```
draw2d(proportional_axes=xy,
ytics=[0,1,2],nticks=200,transparent=true,
line_width=2,color=green,ellipse(0,1,1,0,360),
line_width=3,color=red,parametric(x,y,t,a,b))$
```

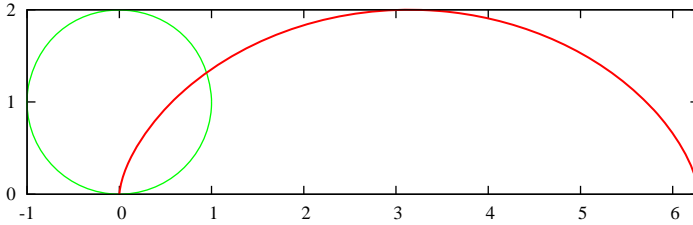


Рис. 3.1.18.

У цій задачі, як і в попередній, можна було б теж визначити довжини вписаних у криву ламаних і знаходити наближене значення довжини дуги за допомогою довжин цих ламаних. ■

**Задача 3.** Обчислити довжину кривої  $\rho = c \sin^3 \frac{t}{3}$ ,  $t \in [0; 3\pi]$ , і зобразити цю криву при  $c = 1$ .

□ Вводимо полярне рівняння кривої та відрізок:

```
(%i1) r:c*sin(t/3)^3$ a:0$ b:3*pi$
```

Обчислюємо довжину кривої за формулою (7):

```
(%i4) 'integrate(sqrt(r^2+diff(r,t)^2),t,a,b);
```

Поставивши апостроф біля інтеграла, дістаємо можливість не відразу отримати відповідь, а подивитися на підінтегральну функцію і поетапно її спростити:

```
(%o4) ∫03π √{c2 sin(t/3)6 + c2 cos(t/3)2 sin(t/3)4} dt
```

```
(%i5) factor(%);
```

```
(%o5) |c| ∫03π sin(t/3)2 √{sin(t/3)2 + cos(t/3)2} dt
```

```
(%i6) assume(c>0)$
```

```
(%i7) trigsimp(%o5);
```

```
(%o7) c ∫03π sin(t/3)2 dt
```

```
(%i8) %,nouns;
```

```
(%o8)  $\frac{3\pi c}{2}$ 
```

Довжину кривої обчислено. Зобразимо цю криву (при  $c = 1$ ), склавши її з трьох частин, щоб краще уявити, яким чином рухається по ній біжуча точка при зміні параметра  $t$  (рис. 3.1.19).

```
(%i9) load(draw)$ c:1$
```

```
(%i10) draw2d(proportional_axes=xy,nticks=1000,line_width=5,
color=forest-green,polar(r,t,0,2*pi),
```

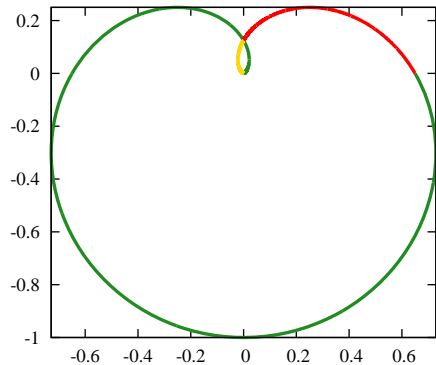


Рис. 3.1.19.



```
color=red,polar(r,t,2*%pi,2.5*%pi),
color=gold,polar(r,t,2.5*%pi,3*%pi) )$ ■
```

Система Maxima, як і Gran1, налаштована таким чином, що при побудові кривої  $\Gamma: \rho = \rho(t), t \in [a; b]$ , у полярній системі координат допускаються не тільки невід'ємні значення  $\rho(t)$ , а й від'ємні. Якщо притримуватися умови, що координата  $\rho$  обов'язково має бути додатною, то потрібно відкидати ті частини кривої  $\Gamma$ , для яких  $\rho(t) < 0$ . Це можна зробити, задаючи лише такі проміжки  $[a; b] \ni t$ , для яких  $\rho(t) \geq 0$ . Але це потребує додаткових досліджень функції  $\rho(t)$  і часто призводить до того, що для побудови однієї кривої потрібно задавати кілька команд polar.

Подання функції  $\rho(t)$  у вигляді  $\sqrt{\rho(t)^2}$  не приводить до відкидання від'ємних значень, оскільки воно автоматично спрощується до початкового вигляду.

У випадку, коли “додатні” і “від'ємні” петлі кривої починаються і закінчуються в початку координат, “від'ємні” петлі можна відкинути, ввівши допоміжну функцію

$$\rho_1(t) := \begin{cases} \rho(t), & \text{коли } \rho(t) \geq 0, \\ 0, & \text{коли } \rho(t) < 0. \end{cases}$$

Полярний графік функції  $\rho_1(t)$ , побудований за допомогою Maxima, буде правильним полярним графіком функції  $\rho(t)$ .

Продемонструємо побудову 4-пелюсткової троянди  $\rho = \sin 4t, t \in [0; 2\pi]$ , коли на  $\rho$  не накладається ніяких обмежень (рис. 3.1.20), і коли виконана умова  $\rho \geq 0$  (рис. 3.1.21).

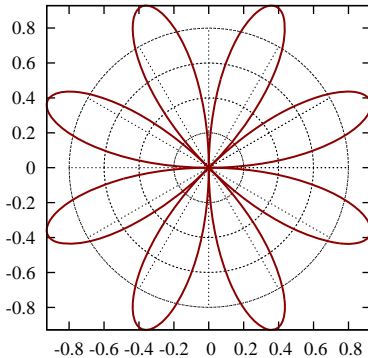


Рис. 3.1.20.

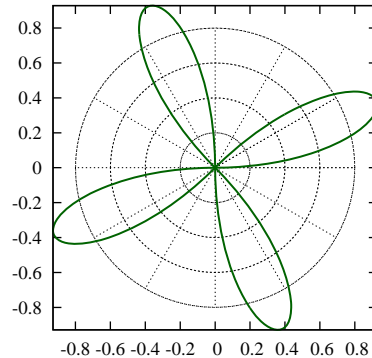


Рис. 3.1.21.

Наведемо команди, за допомогою яких одержано ці побудови:

```
(%i11) r(t):=sin(4*t)$
(%i12) r1(t):=if sin(4*t)>=0 then sin(4*t) else sqrt(sin(4*t))$
(%i13) draw2d(user_preamble="set grid polar",proportional_axes=xy,
nticks=1000,line_width=3,color=dark-red,polar(r(t),t,0,2*%pi))$
```

```
(%i14) draw2d(user_preamble="set grid polar",proportional_axes=xy,
  nticks=1000,line_width=3,color=dark-green,polar(r1(t),t,0,2*%pi))$
```

При використанні пакету `draw` для побудови графіків досить зручно налаштувати вигляд графіка. Разом з тим у цього пакету є *дві особливості*, які не завжди дають бажані результати побудов:

- 1) яка б не була функція  $f(x)$ , замість неї береться  $\operatorname{Re} f(x)$  і цю опцію неможливо відключити;
- 2) при зверненні до команди `implicit`, `parametric` і `polar` вимагається, щоб функції, до яких вони застосовуються, були визначені на суцільних проміжках; а команда `explicit` хоч і застосовна до функцій, які визначені на розрізнених частинах проміжку, але сусідні частини графіка з'єднуються відрізками.

На рисунках 3.2.22 і 3.2.23 показано ці особливості:

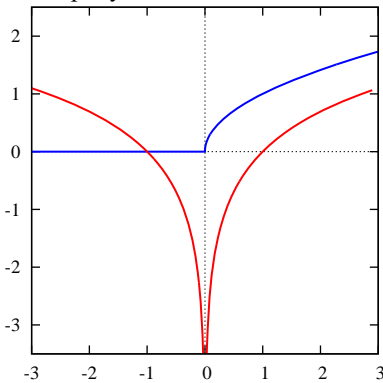


Рис. 3.1.22.

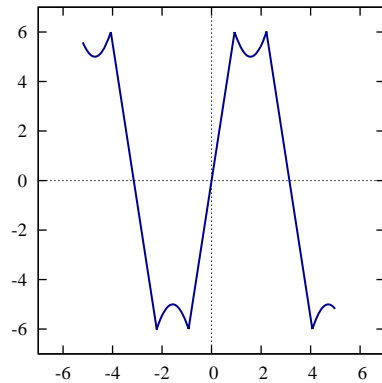


Рис. 3.1.23.

Ці графіки одержані за допомогою таких команд:

```
(%i15) draw2d(proportional_axes=xy,xaxis=true,yaxis=true,nticks=1000,
  line_width=3,color=blue,explicit(sqrt(x),x,-3,3),
  color=red,explicit(log(x),x,-3,3),yrange=[-3.5,2.5])$
```

```
(%i16) draw2d(proportional_axes=xy,xaxis=true,yaxis=true,nticks=1000,
  line_width=3,color=dark-blue,xrange=[-7,7],yrange=[-7,7],
  explicit(if abs(5*sin(x))>4
    then 10*signum(sin(x))-5*sin(x),x,-2*%pi,2*%pi))$
```

У таких випадках доцільніше замість пакету `draw` скористатися вбудованою командою побудови графіків `plot2d`. Шляхом задання додаткових параметрів у цій команді можна одержувати майже такі самі графічні побудови, як і при використанні пакету `draw`. При цьому використання команди `plot2d` не приводить до вказаних вище двох недоліків.

Перемалюємо, наприклад, наведені вище два графіка, використовуючи такі команди:

```
(%i17) plot2d([sqrt(x),log(x)],[x,-3,3],[y,-3.5,2.5],[legend,false],
  [gnuplot_preamble,"set size ratio 1"],[nticks,1000],
  [style,[lines,3]],[xlabel,""],[ylabel,""]);
(%i18) plot2d(if abs(5*sin(t))>4 then 10*signum(sin(t))-5*sin(t),
  [t,-2*%pi,2*%pi],[x,-7,7],[y,-7,7],[legend,false],[xlabel,""],
  [ylabel,""],[gnuplot_preamble,"set size ratio 1;set grid"],
  [nticks,1000],[color,dark-blue],[style,[lines,3]]);
```

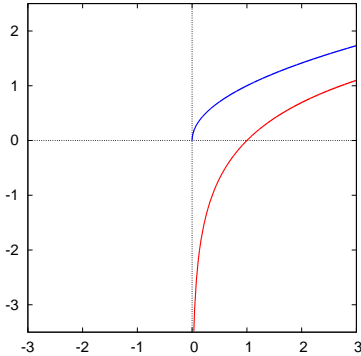


Рис. 3.1.24.

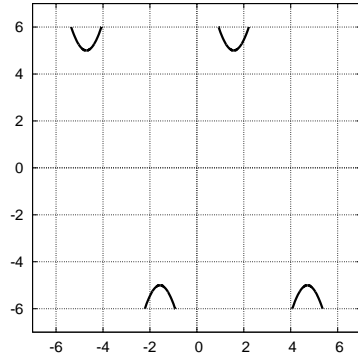


Рис. 3.1.25.

Графіки, наведені на рисунках 3.1.24 і 3.1.25, побудовані коректно.

Наведемо ще один малюнок, на якому зображено три криві у полярній системі координат за допомогою команди `plot2d`. При цьому застосуємо цілу низку додаткових параметрів, які впливають на кінцевий вигляд графіка. Незважаючи на те, що дві криві задані розривними функціями, отримане зображення є правильним і красивим (рис. 3.1.26).

```
(%i19) r1(t):=if sin(16*t)>=0.5
  then sin(16*t)$
r2(t):=if -sin(16*t)>=0.5
  then 0.25-sin(16*t)/2$
r3(t):=(sin(16*t)+1.235)^(1/8)*0.915$
plot2d([r1(t),r2(t),r3(t)],[t,0,2*%pi],
  [x,-1.1,1.1],[y,-1.1,1.1],[nticks,1000],
  [color,red,blue,magenta],
  [style,[lines,4],[lines,4],[lines,6]],
  [legend,false],[xlabel,""],[ylabel,""],
  [gnuplot_preamble,"set size ratio 1;
  set polar;set grid polar"])$
```

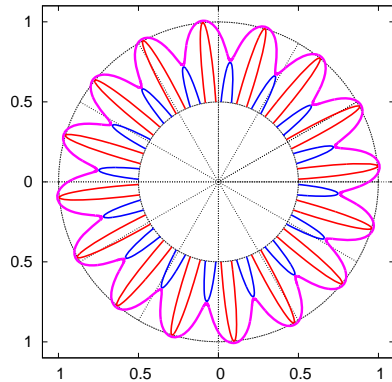


Рис. 3.1.26.

**3.1.7.3. Використання MathCAD.** При вивченні теми “Довжина дуги” програму MathCAD можна використовувати в тих самих ситуаціях, що і програму Maxima. Розглянемо конкретні приклади.

**Задача 1.** Знайти довжину кривої  $y = x^2$ ,  $x \in [-1; 2]$ , і довжину вписаної у неї ламаної, яка відповідає розбиттю відрізка  $[-1; 2]$  на 5 рівних частин.

Розв'язання цієї задачі у загальному вигляді можна здійснити за допомогою такого робочого аркуша.

$$f(x) = x^2 \quad a := -1 \quad b := 2 \quad L := \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2} dx$$

$$L \rightarrow \frac{\ln(\sqrt{17}+4)}{4} - \frac{\ln(\sqrt{5}-2)}{4} + \frac{\sqrt{5}}{2+\sqrt{17}} \quad L = 6.126$$

$$x(n, k) := a + k \cdot \frac{b-a}{n}$$

$$p(n) := \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x(n, k+1) - x(n, k))^2 + (f(x(n, k+1)) - f(x(n, k)))^2}$$

$$p(5) = 6.069 \quad k := 0..5$$

Зобразимо задану криву та вписану в неї ламану (рис. 3.1.27):

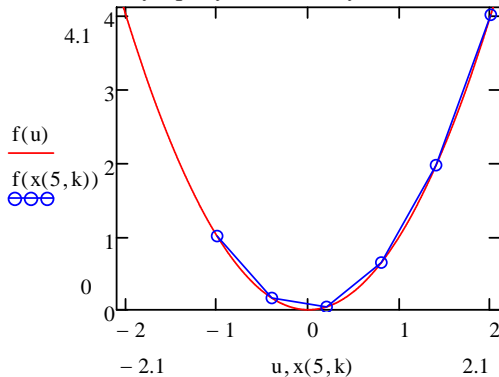


Рис. 3.1.27.

Вище було наведено стисле розв'язання задачі на обчислення довжини дуги. При потребі можна детальніше описати окремі кроки розв'язання: окремо знайти  $f'(x)$ ,  $1 + f'^2(x)$ , спростити підінтегральну функцію. А для обчислення інтеграла може знадобитися додаткове припущення.

Продемонструємо це при розв'язуванні наступної задачі.

**Задача 2.** Обчислити довжину дуги  $y = \ln \sin x$ ,  $x \in [\pi/6; 3\pi/4]$ , і зобразити цю дугу як частину більшої дуги з цим самим рівнянням, тільки ширшим відрізком.

$$f(x) = \ln(\sin(x)) \quad a := \frac{\pi}{6} \quad b := \frac{3\pi}{4} \quad L := \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2}$$

$$\frac{d}{dx}f(x) \rightarrow \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \quad 1 + \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2 \text{ simplify} \rightarrow \cot(x)^2 + 1$$

$$L \left| \begin{array}{l} \text{assume, } a < x < b \\ \text{simplify} \end{array} \right. \rightarrow \ln(\sqrt{2} + 1) - \ln(2 - \sqrt{3}) \quad L = 2.198$$

$$g(t) := if(a < t < b, f(t), i)$$

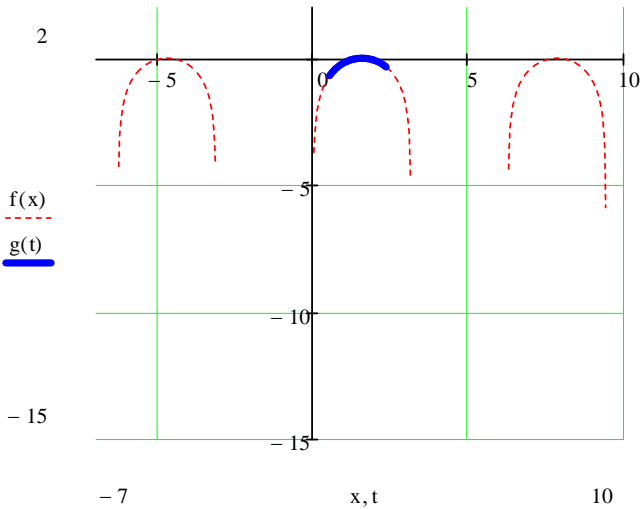


Рис. 3.1.28.

Для зображення меншої дуги на більшій потрібно визначити допоміжну функцію  $g(t)$ , яка збігається з  $f(x)$  на  $(a; b)$  і дорівнює уявній одиниці (набирається як  $1i$ ) в інших випадках.

Поглянувши на отриманий малюнок (рис. 3.1.28), помічаємо, що пунктирна лінія при русі донизу рано обривається, що зумовлено недостатньою кількістю точок, використаних для її побудови. Більш детального промальовування цієї лінії (див. рис. 3.1.29) можна досягти шляхом задання множини значень аргументу  $x$ :

$x := -7, -7 + 0.00004..10$

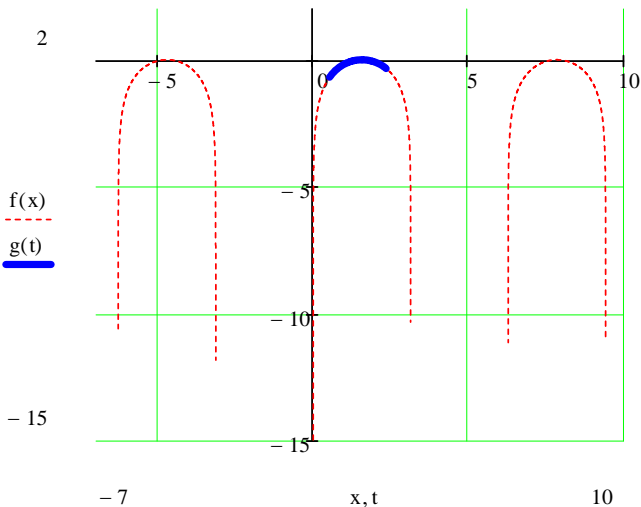


Рис. 3.1.29.

**Задача 3.** Обчислити довжину дуги кривої

$$\begin{cases} x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t, \\ y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t, \end{cases}$$

від  $t_1 = 0$  до  $t_2 = 2\pi$ , з'ясувавши особливості форми цієї кривої.

Для розв'язання задачі 2 створюємо такий робочий аркуш.

$$x(t) := (t^2 - 2) \cdot \sin(t) + 2t \cdot \cos(t) \quad a := 0$$

$$y(t) := (2 - t^2) \cdot \cos(t) + 2t \cdot \sin(t) \quad b := 2\pi$$

$$\frac{d}{dt}x(t) \rightarrow 2 \cdot \cos(t) + \cos(t) \cdot (t^2 - 2) \text{ simplify} \rightarrow t^2 \cdot \cos(t)$$

$$\frac{d}{dt}y(t) \rightarrow 2 \cdot \sin(t) + \sin(t) \cdot (t^2 - 2) \text{ simplify} \rightarrow t^2 \cdot \sin(t)$$

$$L := \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d}{dt}x(t)\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}y(t)\right)^2} dt \quad L \rightarrow \frac{8 \cdot \pi^3}{3}$$

$$t := -13, -13 + 0.001..13 \quad u := a, a + 0.001..b$$

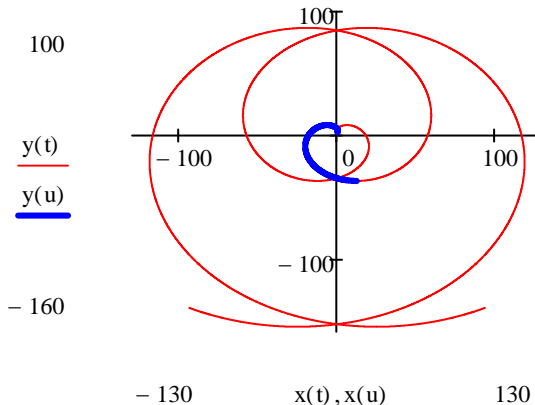


Рис. 3.1.30.

Зауважимо, що крива на рис. 3.1.30 складається з двох спіралей, котрі виходять з точки  $(0; 2)$  і розкручуються одна проти годинникової стрілки (коли  $0 < t \uparrow$ ), інша – за годинниковою стрілкою (коли  $0 > t \downarrow$ ).

**Задача 4.** Обчислити наближено довжину дуги кривої, заданої полярним рівнянням  $\rho = \sin t + \text{ctg } t$ ,  $t \in [\pi/6; \pi/2]$ . Побудувати загальний вигляд кривої з даним рівнянням і показати на ньому частину, довжину якої потрібно знайти.

Як і раніше, спочатку задамо функцію та відрізок і запишемо формулу для обчислення довжини дуги в полярних координатах. Після цього обчислимо чисельно (символьно не вдається, бо відповідний інтеграл дуже складний) шукану довжину дуги. Далі зобразимо графічно задану криву в загальному вигляді, а на ній дугу, довжину якої обчислено (рис. 3.1.31). Для цього введемо ще один параметр  $u$ . Щоб вставити в робочий аркуш графік, можна зайти в меню Додати > Графіки >

Полярний графік або написати  $\text{Ctrl} + 7$ .

$$p(t) := \sin(t) + \cot(t) \quad a := \frac{\pi}{6} \quad b := \frac{\pi}{2}$$

$$L := \int_a^b \sqrt{p(t)^2 + \left(\frac{d}{dt}p(t)\right)^2} dt \quad L = 2.004$$

$$u := a, a + 0.001..b$$

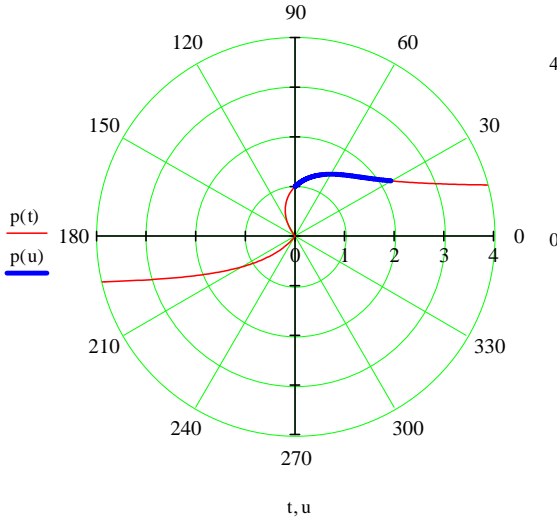


Рис. 3.1.31.

В системі MathCAD можна у налаштуваннях полярного графіка вмикати або вимикати опцію “Від’ємні радіуси”. Для того щоб виконувалася умова  $\rho(t) \geq 0$ , цю опцію потрібно ввімкнути (див. рис. 3.1.32).

Потрібно також звернути увагу на два чорні квадратики справа. Це віконця для вказування проміжку зміни полярного радіуса  $\rho$ . Якщо туди нічого не вписано, відбувається автоматичний добір діапазону зміни  $\rho$ . При цьому не завжди отримується вдала точка спостереження або фігура обрізується з країв.

За допомогою програми MathCAD, як і програми Maxima, також можна будувати графіки кусково-визначених функцій, причому як у декартовій, так і в полярній системі координат. Такі функції можна задати за допомогою оператора  $\text{if}(A, B, C)$ , який набуває значення  $B$ , якщо виконується умова  $A$ , і значення  $C$  в іншому разі. Наприклад, дійсну функцію  $r(t) = \cos 4t$ , коли  $\cos 4t > 3/4$ , можна задати так:

$$r(t) := \text{if} \left( \cos(4t) > \frac{3}{4}, \cos(4t), i \right)$$

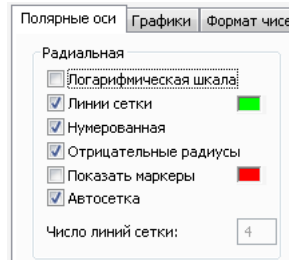


Рис. 3.1.32.

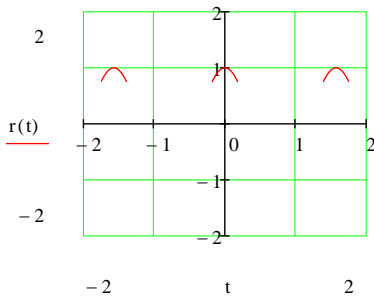


Рис. 3.1.33.

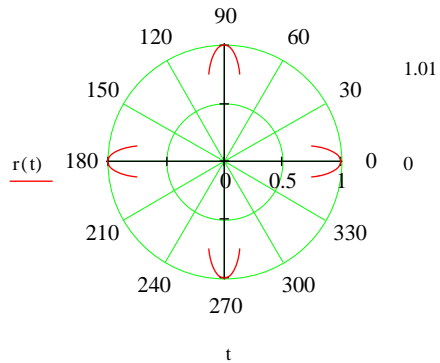


Рис. 3.1.34.

На рисунках 3.1.33, 3.1.34 побудовано графіки функції  $r(t)$  у декартовій і в полярній системах координат.

**3.1.8. Історичні відомості.** Конкретні криві вивчали ще в давні часи. Поняття неперервної параметричної кривої як множини

$$\Gamma = \{(x, y): x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha; \beta]\},$$

де  $x(t)$  та  $y(t)$  – неперервні функції на  $[\alpha; \beta]$ , введене французьким математиком Камілом Жорданом (1838–1922) у 80-х роках XIX століття. Йому належать поняття довжини дуги, спрямлюваної дуги та критерій спрямлюваності (теорема 1).

**3.1.9. Зв'язок із шкільним курсом математики.** Поняття кривої, дуги кривої та її довжини – одні з найважливіших геометричних понять. У шкільному курсі математики вони застосовуються до конкретних кривих (відрізок, ламана, коло та деякі інші). При цьому перш ніж розв'язувати питання про обчислення довжини дуги кривої (наприклад, кола) треба знати, що таке довжина цієї дуги. Потрібно також розуміти, чому довжину кола можна вважати рівною границі периметрів правильних многокутників, вписаних у коло, коли кількість їх сторін прямує до  $+\infty$ .

### 3.1.10. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Кожна параметрична крива є простою кривою.
2. Криві  $\Gamma_1: z = \exp it, t \in [0; 2\pi]$ , і  $\Gamma_2: z = \exp 2it, t \in [0; 2\pi]$ , є простими дугами.
3. Криву  $\Gamma: z = \exp it, t \in (-\infty; \infty)$ , можна вважати числовою прямою, “накрученою” на одиничне коло.
4. Крива  $\Gamma: z = a \cos t + ib \sin t, t \in [0; 2\pi]$ , де  $a > 0$  і  $b > 0$ , є дугою, що зображується на площині  $OXY$  еліпсом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .



5. Крива  $\Gamma: z = a \operatorname{ch} t + i b \operatorname{sh} t, t \in (-\infty; \infty)$ , де  $a > 0$  і  $b > 0$ , є простою кривою, що зображується на площині  $OXY$  гіперболою  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .
  6. Криві з тверджень 2 – 5 є контурами.
  7. Кожна дуга має довжину.
  8. Кожна дуга є спрямлюваною дугою.
  9. Якщо дуга  $\widehat{AB}: y = f(x), x \in [\alpha; \beta]$ , є спрямлюваною, то функція  $f$  диференційовна на  $[a; b]$ .
  10. Дуга  $\widehat{AB}: y = \sqrt{1 - x^2}, x \in [-1; 1]$ , є спрямлюваною, а функція  $y$  – диференційовною на  $[-1; 1]$ .
  11.  $dl(x) = \sqrt{1 + f'^2(x)} dx$  є довжиною гіпотенузи прямокутного трикутника з катетами  $dx$  та  $df(x)$ .
  12. Кожна гладка дуга є кусково-гладкою.
  13. Кожна пряма є кривою.
  14. Крива, задана рівнянням  $y = x, x \in [0; \frac{\pi}{2}]$ , є відрізком у: 1) будь-якій системі координат, 2) декартовій системі координат, 3) полярних координатах.
- II. Нехай  $\widehat{AB}: y = f(x), x \in [a; b]$  і  $f$  – двічі диференційовна на  $[a; b]$  функція. Довести, що:
1.  $\widehat{AB}$  – спрямлювана дуга;
  2.  $\forall x \in E[a; b] \exists \alpha = \alpha(x): \operatorname{tg} \alpha = f'(x)$ ;
  3.  $\forall x \in [a; b] \exists l(x) = \int_a^x \sqrt{1 + f'^2(t)} dt$ ;
  4.  $\forall x \in [a; b] \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha(x)}{\Delta l(x)} = k(x)$  – кривина дуги  $\widehat{AB}$  в точці  $(x, f(x))$ , де  $\alpha(x)$  і  $l(x)$  визначено у 2) і 3). При цьому  $k(x) = \frac{y''(x)}{(1 + y'^2(x))^{\frac{3}{2}}}$ .
  5.  $\forall x \in [a; b] \exists R(x) = \frac{1}{k(x)}$  – радіус кривини дуги  $\widehat{AB}$  у точці  $(x, f(x))$ .
- III. Наступні задачі розв'язати за допомогою комп'ютерних засобів математики.
1. Знайти кривину та радіус кривини: 1) кола; 2) гіперболи  $y^2 - x^2 = 1$ ; 3) відрізка прямої; 4) параболи  $y = x^2$ .
  2. За допомогою дуг відомих кривих зобразити цікаві малюнки та орнаменти.

3. Самостійно задати неспрямлювану дугу і з'ясувати, яка відповідь отримується при застосуванні комп'ютерного засобу математики до обчислення довжини цієї дуги.

### 3.2. Обчислення площ плоских фігур

У даному підрозділі введено означення плоскої фігури, її площі (міри), квадровної фігури; доведено критерії квадровності, основні властивості площі та формули для обчислення площ деяких плоских фігур.

**3.2.1. Поняття плоскої фігури та її площі.** *Плоскою фігурою* називають довільну множину, що лежить у даній площині.

Якщо плоска фігура є прямокутником  $P$ , то *площею*  $S(P)$  цього *прямокутника* називають добуток його вимірів, тобто довжин його двох взаємно перпендикулярних сторін. Зокрема, якщо прямокутник  $P$  лежить у площині  $OXY$  і  $P = \{(x; y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , то  $P$  називають *елементарною фігурою* і  $S(P) = (b - a) \cdot (d - c)$ .

У випадку  $a = b$  або  $c = d$  елементарна фігура перетворюється на відрізок, площа якого за означенням дорівнює нулю.

Якщо з елементарної фігури  $P$  вилучити довільну множину  $E$ , що лежить на межі  $P$ , то утворену фігуру також називають *елементарною* і вона за означенням має ту саму площу, що й елементарна фігура  $P$ .

Нехай  $\Phi$  – довільна плоска фігура. *Що розуміти під площею цієї фігури і як цю площу можна обчислити?*

Щоб відповісти на це питання, вважатимемо фігуру  $\Phi$  обмеженою, тобто  $\Phi \subset P = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$  для деякого прямокутника  $P$  (рис. 3.2.1).

Розглянемо розбиття  $T_x$  відрізка  $[a; b]$  точками  $x_k, k \in \overline{0, n}$ , і розбиття  $T_y$  відрізка  $[c; d]$  точками  $y_i, i \in \overline{0, m}$ . Тоді прямі  $x = x_k$  і  $y = y_i$  розіб'ють прямокутник  $P$  на прямокутники  $P_{ki} = \{(x, y): x_k \leq x \leq x_{k+1}, y_i \leq y \leq y_{i+1}\}, k \in \overline{0, n-1}, i \in \overline{0, m-1}$ . Сукупність усіх прямих  $x = x_k$  та  $y = y_i$  називають *розбиттям*  $T$  *прямокутника*  $P$ . Утворимо фігури  $\Phi_*(T)$  і  $\Phi^*(T)$  так, що  $\Phi_*$  складається з усіх прямокутників  $P_{ki}$ , які цілком лежать у фігурі  $\Phi$ , а  $\Phi^*$  складається з усіх прямокутників, які містять принаймні одну

точку з фігури  $\Phi$ . Отже,  $\Phi_*(T) = \bigcup_{P_{ki} \subset \Phi} P_{ki}$ , а  $\Phi^*(T) = \bigcup_{P_{ki} \cap \Phi \neq \emptyset} P_{ki}$ .

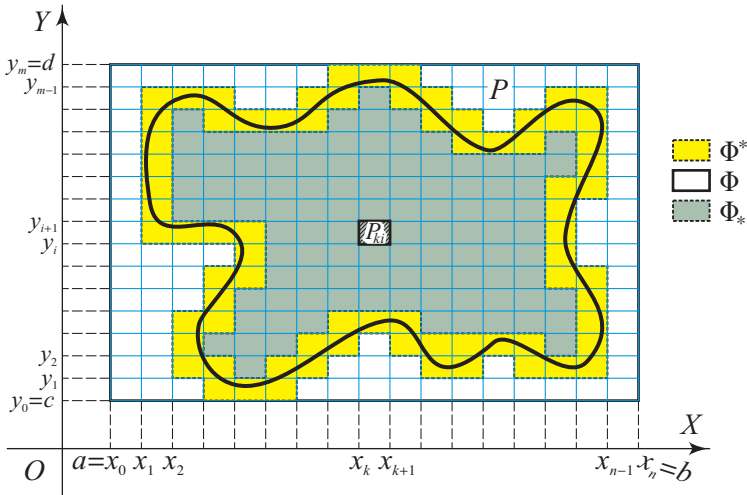


Рис. 3.2.1.

Фігури  $\Phi_*(T)$  та  $\Phi^*(T)$  (що є об'єднаннями елементарних фігур) називають *простими*. При цьому можливо, що  $\Phi_*(T) = \emptyset$ , але  $\Phi^*(T) = \emptyset \Leftrightarrow \Phi = \emptyset$ . Шляхом вилучення з елементарних фігур деяких частин їхніх меж можна досягти того, щоб *кожна проста фігура була об'єднанням скінченної кількості елементарних фігур, що попарно не перетинаються*.

Легко бачити, що різниця двох простих фігур, об'єднання і переріз довільної скінченної кількості простих фігур також є простою фігурою.

Природно вважати також, що *площа простих фігур  $\Phi_*(T)$  і  $\Phi^*(T)$  за означенням дорівнює сумі площ тих прямокутників  $P_{ki}$ , які утворюють цю фігуру*. Позначимо ці площі відповідно  $S(\Phi_*(T)) = S_*(T)$  і  $S(\Phi^*(T)) = S^*(T)$ , тобто

$$S_*(T) = \sum_{P_{ki} \subset \Phi} S(P_{ki}), \quad \text{а} \quad S^*(T) = \sum_{P_{ki} \cap \Phi \neq \emptyset} S(P_{ki}).$$

Якщо  $\Phi_*(T) = \emptyset$  або  $\Phi^*(T) = \emptyset$ , то вважають  $S_*(T) = 0$  або  $S^*(T) = 0$ .

Зрозуміло, що які б не були розбиття  $T$  і  $T'$  прямокутника  $P$ , завжди матимемо  $\Phi_*(T) \subset \Phi^*(T)$  і  $S_*(T) \leq S^*(T')$ . Довести це

можна так, як це зроблено для сум Дарбу. Тому існують числа

$$S_*(\Phi) = \sup_T S_*(T) \text{ і } S^*(\Phi) = \inf_T S^*(T),$$

які називають відповідно *внутрішньою* і *зовнішньою площами фігури*  $\Phi$ . При цьому

$$S_*(T) \leq S_*(\Phi) \leq S^*(\Phi) \leq S^*(T') \quad \forall T \text{ і } T'. \quad (1)$$

Фігуру  $\Phi$  називають *квадровною* або *вимірною за Жорданом*, якщо  $S_*(\Phi) = S^*(\Phi)$ . При цьому число  $S(\Phi) := S(\Phi_*) = S(\Phi^*)$  називають *площею* або *мірою Жордана фігури*  $\Phi$ . Якщо  $S_*(\Phi) < S^*(\Phi)$ , то фігуру  $\Phi$  називають *неквадровною* або *невимірною за Жорданом* і вона площі не має.

**Приклади. 1.** Зрозуміло, що фігура  $\Phi$ , яка є порожньою множиною, квадратна і  $S(\Phi) = 0$ .

**2.** Нехай фігура  $\Phi = \{(x_k, y_k) : k \in \overline{1, n}\}$  – скінченна множина. Тоді для будь-якого досить дрібного розбиття елементарного прямокутника  $P \supset \Phi$  на елементарні прямокутники  $P_{ki}$ , що попарно не перетинаються, матимемо:  $\Phi_* = \emptyset \subset \Phi$  і тому  $S_*(\Phi) = 0$ , а  $\Phi^*$  є об'єднанням  $n$  прямокутників  $P_{ki}$ .

Якщо розбиття  $T$  настільки дрібне, що  $S(P_{ki}) < \frac{\varepsilon}{n}$ , де  $\varepsilon > 0$  – довільне фіксоване, то дістанемо, що  $S(\Phi^*) = \sum_{\Phi \cap P_{ki} \neq \emptyset} S(P_{ki}) < \frac{\varepsilon}{n} \cdot n = \varepsilon$ . Звідси випливає, що  $S^*(\Phi) = 0 = S_*(\Phi)$ .

Звідси за означенням дістанемо, що  $S(\Phi) = 0$ .

Отже, *кожна скінченна плоска множина  $\Phi$  є квадратною множиною і  $S(\Phi) = 0$ .*

**3.** Нехай  $\Phi = \{(x, y) : x \text{ та } y \in \mathbb{Q} \cap [0; 1]\}$ . Тоді  $\Phi \subset K = \{(x, y) : x, y \in [0; 1]\}$  і для будь-якого розбиття  $T$  квадрата  $K$  маємо  $\Phi_*(T) = \emptyset$ ,  $\Phi^*(T) = K \Rightarrow S_*(\Phi) = 0$  і  $S^*(\Phi) = 1$ , тобто  $\Phi$  не є квадратною фігурою.

### 3.2.2. Критерії квадратності.

□ Припустимо, що (обмежена) плоска фігура  $\Phi$  є квадратною:

$$S(\Phi) = S_*(\Phi) = S^*(\Phi) = \sup_T S_*(T) = \inf_T S^*(T).$$

Тоді за властивостями супремуму та інфімуму  $\forall \varepsilon > 0$  існують розбиття  $T$  і  $T'$  прямокутника  $P$ , для яких

$$S_*(T) = S(\Phi_*(T)) > S(\Phi) - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \Phi_*(T) \subset \Phi,$$

і

$$S^*(T') = S(\Phi^*(T')) < S(\Phi) + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \Phi \subset \Phi^*(T').$$

Отже, позначивши  $\Phi_* = \Phi_*(T)$ ,  $\Phi^* = \Phi^*(T')$ , можна записати

$$\Phi_* \subset \Phi \subset \Phi^* \quad \text{і} \quad 0 \leq S(\Phi^*) - S(\Phi_*) < \varepsilon. \quad (2)$$

Нехай плоска фігура  $\Phi$  така, що  $\forall \varepsilon > 0$  існують прості фігури  $\Phi_* = \Phi_*(T)$  і  $\Phi^* = \Phi^*(T')$ , для яких має місце (2).

Припустимо, що  $\Phi$  не є квадровною, тобто  $S_*(\Phi) < S^*(\Phi)$ . Тоді  $\varepsilon = S^*(\Phi) - S_*(\Phi) > 0$  і для довільних простих фігур  $\Phi_* = \Phi_*(T)$  та  $\Phi^* = \Phi^*(T')$  маємо  $\Phi_* \subset \Phi \subset \Phi^*$ . Але за нерівністю (1)

$$S(\Phi^*) - S(\Phi_*) = S^*(T') - S_*(T) \geq S^*(\Phi) - S_*(\Phi) = \varepsilon.$$

Це суперечить умові (2), накладеній на фігуру  $\Phi$ . Отже,  $\Phi$  – квадровна фігура і за нерівністю (1)  $S(\Phi_*) \leq S(\Phi) \leq S^*(\Phi)$ . ■

Таким чином, доведена наступна теорема.

**Теорема 1** (перший критерій квадровності). *Для того щоб обмежена плоска фігура  $\Phi$  була квадровною, необхідно й досить, щоб  $\forall \varepsilon > 0$  існували прості фігури  $\Phi_*$  і  $\Phi^*$  такі, що  $\Phi_* \subset \Phi \subset \Phi^*$  і  $0 \leq S(\Phi^*) - S(\Phi_*) < \varepsilon$ . При цьому  $S(\Phi_*) \leq S(\Phi) \leq S(\Phi^*)$ .*

**Приклад 4.** Нехай  $\Gamma_f = \{(x, y) : x \in [a; b], y = f(x)\}$ , де функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[a; b]$ , тобто  $\Gamma_f$  є графіком функції, неперервної на відрізку, або, іншими словами,  $\Gamma_f$  є неперервною дугою, заданою явно. Доведемо, що  $\Gamma_f$  є квадровною множиною і  $S(\Gamma_f) = 0$ .

□ За теоремою Кантора функція  $f(x)$  рівномірно неперервна на відрізку  $[a; b]$  і тому для довільного  $\varepsilon > 0$  знайдеться  $\delta > 0$  таке, що  $|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}$ , коли  $\{x', x''\} \subset [a; b]$  і  $|x' - x''| < \delta$ . Враховуючи це, візьмемо розбиття  $T = \{x_k : k \in \overline{0, n}\}$  відрізка  $[a; b]$  на  $n$  рівних частин таким, щоб дрібність цього розбиття  $\lambda(T) = \frac{b-a}{n} < \delta$ . Тоді на кожному відрізку  $[x_k; x_{k+1}]$  матимемо:  $f(x'_k) \leq f(x) \leq f(x''_k)$ , де  $\{x'_k, x''_k\} \subset [x_k; x_{k+1}]$ ,  $f(x'_k) = \min_{[x_k; x_{k+1}]} f(x)$ , а  $f(x''_k) = \max_{[x_k; x_{k+1}]} f(x)$  (такі точки знайдуться за теоремою Вейерштрасса). Геометрично це означає, що дуга  $\Gamma_f^{(k)} = \{(x, y) : x \in [x_k; x_{k+1}], y = f(x)\}$  міститься у прямокутнику  $P_k = [x_k; x_{k+1}] \times [f(x'_k); f(x''_k)] \quad \forall k \in \overline{0, n-1}$  (див. рис. 3.2.2).

Згідно з вибором розбиття  $T$  матимемо  $f(x''_k) - f(x'_k) < \frac{\varepsilon}{b-a}$ , звідки випливає, що площа  $S(P_k) = (x_{k+1} - x_k)(f(x''_k) - f(x'_k)) < \frac{b-a}{n} \cdot \frac{\varepsilon}{b-a} = \frac{\varepsilon}{n}$ .

Зрозуміло, що  $\Gamma_f \subset \bigcup_{k=0}^{n-1} P_k = \Phi^*$ , причому фігура  $\Phi^*$  проста, а її площа

$$S(\Phi^*) = \sum_{k=0}^{n-1} S(P_k) < \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{n} = n \cdot \frac{\varepsilon}{n} = \varepsilon.$$

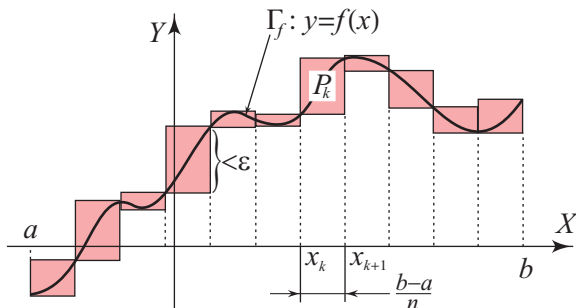


Рис. 3.2.2.

Оскільки  $\Phi_* = \emptyset \subset \Gamma_f \subset \Phi^*$  і  $S(\Phi^*) - S(\Phi_*) < \epsilon$ , де  $\epsilon > 0$  – довільне фіксоване, то за теоремою 1 фігура  $\Gamma_f$  квадровна, а її площа  $S(\Gamma_f) \leq S(\Phi^*) < \epsilon$ . В силу довільності  $\epsilon > 0$  дістаємо, що  $S(\Gamma_f) = 0$ . ■

□ Зауважимо, що коли з простої фігури  $\Phi_*$  вилючити межові точки, то дістанемо просту фігуру  $\tilde{\Phi}_*$ , для якої проста фігура  $\Phi^* \setminus \tilde{\Phi}_*$  містить межу  $\Gamma_\Phi$  фігури  $\Phi$ , причому  $0 \leq S(\Phi^* \setminus \tilde{\Phi}_*) = S(\Phi^*) - S(\Phi_*)$ , а тому з теореми 1 випливає наступна теорема. ■

**Теорема 2** (другий критерій квадровності). *Обмежена плоска фігура  $\Phi$  є квадровною тоді й тільки тоді, коли квадровною є її межа  $\Gamma_\Phi$  і  $S(\Gamma_\Phi) = 0$ .*

Виявляється, що в доведеній теоремі 1 прості фігури  $\Phi_*$  і  $\Phi^*$  можна замінити довільними квадровними фігурами  $\Phi_1$  та  $\Phi_2$ .

□ Дійсно, оскільки прості фігури є квадровними, то за теоремою 1 для квадровної фігури  $\Phi \forall \epsilon > 0$  існують квадровні фігури  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$  такі, що

$$\Phi_1 \subset \Phi \subset \Phi_2 \text{ і } 0 \leq S(\Phi_2) - S(\Phi_1) < \epsilon. \quad (3)$$

Нехай тепер плоска фігура  $\Phi$  така, що  $\forall \epsilon > 0$  існують квадровні фігури  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$ , для яких має місце (3). Вважатимемо, що фігури  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$  знайдено для числа  $\frac{\epsilon}{3}$ , тому  $0 \leq S(\Phi_2) - S(\Phi_1) < \frac{\epsilon}{3}$ .

За теоремою 1 для фігури  $\Phi_1$  існує проста фігура  $\Phi_* \subset \Phi_1$ , для якої  $S(\Phi_1) - S(\Phi_*) < \frac{\epsilon}{3}$ , а для фігури  $\Phi_2$  існує проста фігура  $\Phi^* \supset \Phi_2$ , для якої  $S(\Phi^*) - S(\Phi_2) < \frac{\epsilon}{3}$ . Тому для довільного  $\epsilon > 0$  існують прості фігури  $\Phi_*$  та  $\Phi^*$  такі, що  $\Phi_* \subset \Phi \subset \Phi^*$  і

$$0 \leq S(\Phi^*) - S(\Phi_*) = S(\Phi_2) - S(\Phi_1) + S(\Phi^*) - S(\Phi_2) + S(\Phi_1) - S(\Phi_*) < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon.$$

Звідси за теоремою 1 випливає, що фігура  $\Phi$  є квадратною. ■

Отже, має місце наступна теорема.

**Теорема 3** (третій критерій квадратності). *Обмежена плоска фігура  $\Phi$  є квадратною тоді й тільки тоді, коли для довільного  $\varepsilon > 0$  існують квадратні фігури  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$  такі, що  $\Phi_1 \subset \Phi \subset \Phi_2$  і  $0 \leq S(\Phi_2) - S(\Phi_1) < \varepsilon$ . При цьому  $S(\Phi_1) \leq S(\Phi) \leq S(\Phi_2)$ .*

З теореми 3 з очевидністю випливає досить важливий наслідок.

**Наслідок 1** (про повноту площі). *Якщо множина  $E \subset \mathbb{R}^2$  квадратна і  $S(E) = 0$ , то будь-яка її підмножина  $A \subset E$  також квадратна і має площу  $S(A) = 0$ .*

**Приклад 5.** Множину  $M \subset \mathbb{R}^2$  називають *одновимірною*, якщо вона є підмножиною деякої прямої  $l$ . Завдяки наслідку 1 буде правильним таке твердження: *довільна обмежена одновимірна множина  $M$  є квадратною, а її площа  $S(M) = 0$ .*

**3.2.3. Основні та вивідні властивості квадратних фігур і площі.** Безпосередньо з означення квадратної фігури та її площі або з критеріїв квадратності випливають властивості квадратних фігур і площі. Позначимо через  $\mathfrak{S}_S$  сукупність квадратних фігур.

**Властивість 1** (про непорожність  $\mathfrak{S}_S$  і невід'ємність площі). *Сукупність  $\mathfrak{S}_S \neq \emptyset$  і  $S(\Phi) \geq 0$  для будь-якої фігури  $\Phi \in \mathfrak{S}_S$ .*

**Властивість 2** (про квадратність доповнення). *Якщо  $\Phi_1$  – квадратна фігура, причому  $\Phi_1 \subset P$ , де  $P$  – елементарний прямокутник, то  $P \setminus \Phi_1 = C_P \Phi_1 = \Phi_2$  – квадратна фігура і*

$$S(\Phi_2) = S(P) - S(\Phi_1).$$

**Властивість 3** (про адитивність площі). *Якщо фігури  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$  квадратні, то і фігура  $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$  є квадратною, причому коли  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$  не мають спільних точок, то  $S(\Phi) = S(\Phi_1) + S(\Phi_2)$ .*

□ Якщо  $\varepsilon > 0$  довільне фіксоване, то за першим критерієм квадратності існують прості фігури  $\Phi_*^{(i)}$  і  $\tilde{\Phi}_*^{(i)}$ ,  $i \in \overline{1, 2}$ , такі, що  $\Phi_*^{(i)} \subset \Phi_i \subset \Phi_*^*$ ,  $0 \leq S(\Phi_*^*) - S(\Phi_*^{(i)}) = S(\Phi_*^*) - S(\tilde{\Phi}_*^{(i)}) < \frac{\varepsilon}{4}$   $\forall i \in \overline{1, 2}$ , де  $\tilde{\Phi}_*^{(i)}$  – внутрішність фігури  $\Phi_*^{(i)}$ . Об'єднання простих фігур є простою фігурою, а тому  $\Phi_* = \Phi_*^{(1)} \cup \Phi_*^{(2)}$  і  $\Phi^* = \Phi_1^* \cup \Phi_2^*$  є простими фігурами, причому  $\Phi_* \subset \Phi \subset \Phi^*$ .

Окрім цього, прості фігури  $\Phi_i^* \setminus \tilde{\Phi}_*^{(i)}$  покривають межі фігур  $\Phi_i$ ,  $i \in \overline{1, 2}$ , а тому їх об'єднання покриває межу фігури  $\Phi$  і має площу,

яка не перевищує  $S(\Phi_1^* \setminus \tilde{\Phi}_*^{(1)}) + S(\Phi_2^* \setminus \tilde{\Phi}_*^{(2)}) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}$ . Звідси за другим критерієм квадровності фігура  $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$  є квадровною.

У випадку, коли  $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$ , маємо

$$\begin{aligned} S(\Phi_*) &= S(\Phi_*^{(1)}) + S(\Phi_*^{(2)}) \quad \text{і} \quad S(\Phi^*) \leq S(\Phi_1^*) + S(\Phi_2^*) \Rightarrow \\ &|S(\Phi) - S(\Phi_1) - S(\Phi_2)| = \\ &= |S(\Phi) - S(\Phi_*) + S(\Phi_*) - S(\Phi_1) - S(\Phi_2)| \leq \\ &\leq |S(\Phi) - S(\Phi_*)| + |S(\Phi_*^{(1)}) - S(\Phi_1)| + |S(\Phi_*^{(2)}) - S(\Phi_2)| \leq \\ &\leq |S(\Phi^*) - S(\Phi_*)| + |S(\Phi_1^*) - S(\Phi_*^{(1)})| + |S(\Phi_2^*) - S(\Phi_*^{(2)})| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4}. \end{aligned}$$

Отже,  $|S(\Phi) - S(\Phi_1) - S(\Phi_2)| < \varepsilon$  і, враховуючи довільність  $\varepsilon > 0$ , дістанемо рівність  $S(\Phi) = S(\Phi_1) + S(\Phi_2)$ . ■

Методом математичної індукції властивість адитивності площі узагальнюється на випадок довільної скінченної кількості квадровних фігур  $\Phi_i$ ,  $i \in \overline{1, n}$ , що попарно не мають спільних точок:

$$S\left(\bigcup_{i=1}^n \Phi_i\right) = \sum_{i=1}^n S(\Phi_i).$$

Властивості 1 – 3 називають *основними*, тому що з них випливають усі інші властивості площі. Наведемо деякі з них.

**Властивість 4** (про квадровність перерізу). *Переріз двох квадровних фігур є квадровною фігурою.*

**Властивість 5** (про площу об'єднання). *Якщо фігури  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$  квадровні, то  $S(\Phi_1 \cup \Phi_2) = S(\Phi_1) + S(\Phi_2) - S(\Phi_1 \cap \Phi_2)$ .*

**Властивість 6** (про площу різниці). *Якщо фігури  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$  квадровні, то й різниця  $\Phi_1 \setminus \Phi_2$  є квадровною множиною і  $S(\Phi_1 \setminus \Phi_2) = S(\Phi_1) - S(\Phi_1 \cap \Phi_2)$ .*

**Властивість 7** (про монотонність площі). *Якщо фігури  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$  квадровні і  $\Phi_1 \subset \Phi_2$ , то  $S(\Phi_2 \setminus \Phi_1) = S(\Phi_2) - S(\Phi_1) \geq 0$  і тому  $S(\Phi_1) \leq S(\Phi_2)$ .*

**3.2.4. Площа узагальненої криволінійної трапеції.** Нехай функції  $f_1$  і  $f_2$  інтегровні за Ріманом на відрізку  $[a; b]$  і  $f_1(x) \leq f_2(x) \forall x \in [a; b]$ . Розглянемо фігуру (рис. 3.2.3)

$$\Phi = \{(x, y) : x \in [a; b], f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}. \quad (4)$$



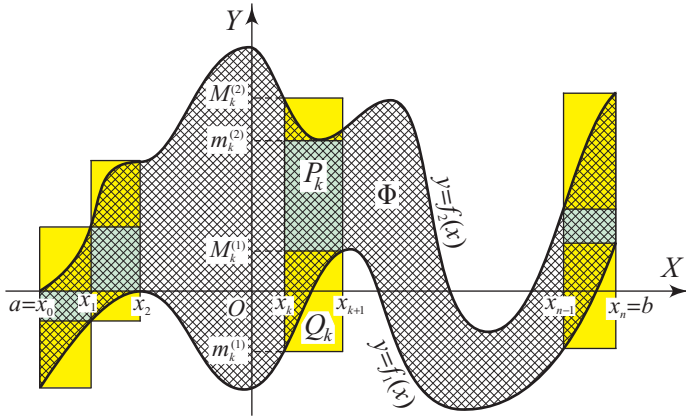


Рис. 3.2.3.

Цю фігуру можна назвати *узагальненою криволінійною трапецією*, оскільки вона перетворюється на криволінійну трапецію, коли  $f_1 = 0$ , а  $f_2$  невід'ємна і неперервна на  $[a; b]$ .

Візьмемо довільне розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$  точками  $x_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , і введемо позначення

$$m_k^{(i)} = \inf_{[x_k; x_{k+1}]} f_i(x), \quad M_k^{(i)} = \sup_{[x_k; x_{k+1}]} f_i(x), \quad i \in \overline{1, 2}.$$

Оскільки  $f_1(x) \leq f_2(x) \forall x \in [a; b]$ , то  $m_k^{(1)} \leq m_k^{(2)} \leq M_k^{(2)} \forall k \in \overline{0, n-1}$ , але для деяких  $k \in \overline{0, n-1}$  можливо, що  $M_k^{(1)} > m_k^{(2)}$ .

Нехай  $K^* = \{k \in \overline{0, n-1} : M_k^{(1)} < m_k^{(2)}\}$ ,

$$P_k = \{(x, y) : x_k \leq x \leq x_{k+1}, M_k^{(1)} \leq y \leq m_k^{(2)}\} \forall k \in K^*$$

і

$$Q_k = \{(x, y) : x_k \leq x \leq x_{k+1}, m_k^{(1)} \leq y \leq M_k^{(2)}\} \forall k \in \overline{0, n-1}.$$

Тоді  $\Phi_* = \bigcup_{k \in K^*} P_k \subset \Phi$ , а  $\Phi^* = \bigcup_{k=0}^{n-1} Q_k \supset \Phi$ , причому

$$\begin{aligned} S(\Phi_*) &= \sum_{k \in K^*} S(P_k) = \sum_{k \in K^*} (m_k^{(2)} - M_k^{(1)}) \Delta x_k \geq \\ &\geq \sum_{k=0}^{n-1} (m_k^{(2)} - M_k^{(1)}) \Delta x_k = S_*(f_2, T) - S^*(f_1, T), \end{aligned}$$

а

$$S(\Phi^*) = \sum_{k=0}^{n-1} S(Q_k) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k^{(2)} - m_k^{(1)}) \Delta x_k = S^*(f_2, T) - S_*(f_1, T).$$

Отже,  $\Phi_* \subset \Phi \subset \Phi^*$  і

$$\begin{aligned} 0 &\leq S(\Phi^*) - S(\Phi_*) \leq \\ &\leq S^*(f_2, T) - S_*(f_1, T) - (S_*(f_2, T) - S^*(f_1, T)) = \\ &= (S^*(f_2, T) - S_*(f_2, T)) + (S^*(f_1, T) - S_*(f_1, T)). \end{aligned}$$

За умовою функції  $f_1$  і  $f_2$   $R$ -інтегровні на  $[a; b]$ . Тому за критерієм  $R$ -інтегровності  $\forall \varepsilon > 0$  існує розбиття  $T$  таке, що  $S^*(f_i, T) - S_*(f_i, T) < \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $i \in \overline{1, 2}$ . Отже,  $\forall \varepsilon > 0$  існують прості фігури  $\Phi_*$  і  $\Phi^*$  такі, що  $\Phi_* \subset \Phi \subset \Phi^*$  і  $0 \leq S(\Phi^*) - S(\Phi_*) < \varepsilon$ . За першим критерієм квадровності фігура  $\Phi$  є квадровною і

$$S(\Phi_*) \leq S(\Phi) \leq S(\Phi^*).$$

За властивостями сум Дарбу, якщо функції  $f_i$ ,  $i \in \overline{1, 2}$ , є інтегровними, то  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0$ : для кожного  $i \in \overline{1, 2}$

$$S_*(f_i, T) > \int_a^b f_i(x) dx - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{і} \quad S^*(f_i, T) < \int_a^b f_i(x) dx + \frac{\varepsilon}{2},$$

коли  $\lambda(T) < \delta(\varepsilon)$ . Тому, враховуючи нерівність  $S(\Phi^*) \geq S_*(f_2, T) - S^*(f_1, T)$ , дістанемо

$$\begin{aligned} \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx - \varepsilon &\leq S(\Phi_*) \leq S(\Phi) \leq S(\Phi^*) = \\ &= S^*(f_2, T) - S_*(f_1, T) < \int_a^b f_2(x) dx - \int_a^b f_1(x) dx + \varepsilon, \end{aligned}$$

а тому  $S(\Phi) = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx$ , оскільки  $\varepsilon > 0$  довільне.

Отже, будь-яка узагальнена криволінійна трапеція (4) є квадровною фігурою, а її площу можна обчислити за формулою

$$S(\Phi) = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (5)$$

Зокрема, якщо  $\Phi = \{(x, y): x \in [a; b], 0 \leq y \leq f(x)\}$  – криволінійна трапеція, то вона є квадровною, а її площа  $S(\Phi) = \int_a^b f(x) dx$ .

**Приклад 6.** Застосуємо формулу (5) для обчислення площі трикутника з основою  $a$  і висотою  $h$ . Виберемо систему координат

так, як це показано на рис. 3.2.4. Тоді за формулою (5)

$$S(\triangle OAB) = \int_0^h \left( \frac{a-b}{h}x + \frac{b}{h}x \right) dx = \frac{a}{h} \cdot \frac{x^2}{2} \Big|_0^h = \frac{1}{2}a \cdot h$$

– це відома зі школи формула площі трикутника.

Оскільки  $h = |OA| \cdot \sin \alpha$ , то  $S(\triangle OAB) = \frac{1}{2}|AB| \cdot |OA| \cdot \sin \alpha$ .

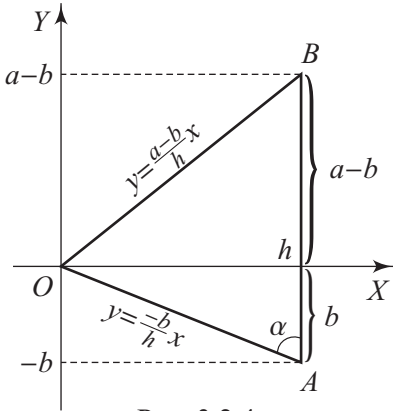


Рис. 3.2.4.

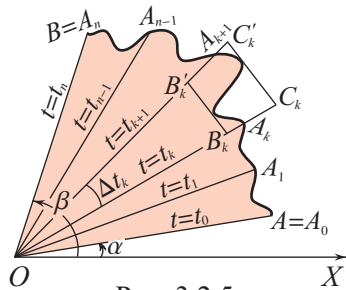


Рис. 3.2.5.

**Зауваження. 1** Якщо з даного трикутника вилучити будь-яку множину його межових точок, то дістанемо фігуру, яку називають *трикутною* і яка має ту саму площу, що й даний трикутник.

**2.** При введенні поняття квадровної фігури можна вважати елементарними фігурами довільні трикутники. При цьому площа трикутника дорівнює добутку основи на висоту за означенням. Тоді кожен прямокутник буде простою фігурою, а його площа дорівнюватиме добутку його вимірів.

**3.2.5. Площа криволінійного сектора.** Нехай проста дуга  $\widehat{AB}$  задана рівнянням у полярних координатах  $\rho = \rho(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ . Тоді фігуру  $\Phi = \{(t, \rho) : \alpha \leq t \leq \beta, 0 \leq \rho \leq \rho(t)\}$  називають *криволінійним сектором* (рис. 3.2.5). Зокрема, коли  $\widehat{AB}$  – дуга кола:  $\rho = r$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ , то фігура  $\Phi$  – звичайний круговий сектор.

Визначимо, чи є криволінійний сектор квадровною фігурою. Для цього візьмемо розбиття  $T$  відрізка  $[\alpha; \beta]$  точками  $t_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , і введемо позначення

$$m_k = \min_{[t_k; t_{k+1}]} \rho(t), \quad M_k = \max_{[t_k; t_{k+1}]} \rho(t), \quad A_k = (t_k; \rho(t_k)).$$

Побудуємо на променах  $OA_k$ ,  $OA_{k+1}$  рівнобедрені трикутники:  $\triangle B_k OB'_k$  і  $\triangle C_k OC'_k$  такі, що  $|OB_k| = |OB'_k| = m_k$ ,  $|OC_k| = |OC'_k|$  і висота  $\triangle C_k OC'_k$  дорівнює  $M_k$  (див. рис. 3.2.5). Враховуючи приклад 4, за властивістю адитивності площі дістаємо, що фігури

$$\Phi_* = \bigcup_{k=0}^{n-1} \triangle B_k OB'_k \text{ і } \Phi^* = \bigcup_{k=0}^{n-1} \triangle C_k OC'_k$$

квадровні, причому  $\Phi_* \subset \Phi \subset \Phi^*$ , а площі цих фігур дорівнюють

$$S(\Phi_*) = \sum_{k=0}^{n-1} S(\triangle B_k OB'_k) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} m_k^2 \sin \Delta t_k$$

і

$$S(\Phi^*) = \sum_{k=0}^{n-1} S(\triangle C_k OC'_k) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k^2 \operatorname{tg} \frac{\Delta t_k}{2}.$$

Оскільки  $m_k = \rho(t_k^*)$ ,  $M_k = \rho(t_k^{**})$ , де  $t_k^*$  і  $t_k^{**} \in [t_k; t_{k+1}]$ , дістаємо

$$S(\Phi_*) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \rho^2(t_k^*) \Delta t_k + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \rho^2(t_k^*) \Delta t_k \left( \frac{\sin \Delta t_k}{\Delta t_k} - 1 \right). \quad (6)$$

Перший доданок останньої суми є інтегральною сумою функції  $\rho = \frac{1}{2} \rho^2(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ . Тому, враховуючи неперервність цієї функції і вважаючи  $\varepsilon > 0$  довільним фіксованим, знайдемо  $\delta(\varepsilon) > 0$  таке, що

$$\left| \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \rho^2(t_k^*) \Delta t_k - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(t) dt \right| < \frac{\varepsilon}{4}, \text{ коли } \lambda(T) < \delta(\varepsilon). \quad (7)$$

При цьому якщо число  $M > 0$  таке, що  $\rho^2(t) < M \forall t \in [\alpha; \beta]$ , то число  $\delta(\varepsilon) > 0$  можна взяти таким, щоб  $\left| \frac{\sin \Delta t_k}{\Delta t_k} - 1 \right| < \frac{\varepsilon}{2M(\beta-\alpha)}$ . Тоді модуль другого доданка правої частини рівності (6) не перевищуватиме  $\frac{1}{2} M \frac{\varepsilon}{2M(\beta-\alpha)} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \Delta t_k = \frac{\varepsilon}{4}$ . Враховуючи це, а також

(6) і (7), матимемо  $S(\Phi_*) > \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(t) dt - \frac{\varepsilon}{2}$ . Так само дістанемо

$$\text{нерівність } S(\Phi^*) < \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(t) dt + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже,  $\forall \varepsilon > 0$  існують квадратні фігури  $\Phi_*$  і  $\Phi^*$  такі, що  $\Phi_* \subset \Phi \subset \Phi^*$  і  $0 \leq S(\Phi^*) - S(\Phi_*) < \varepsilon$ . За третім критерієм квадрат-

ності  $\Phi$  є квадровною фігурою, причому  $S(\Phi_*) < S(\Phi) < S(\Phi^*)$  і тому

$$\frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(t) dt - \frac{\varepsilon}{2} < S(\Phi) < \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(t) dt + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Звідси, враховуючи довільність  $\varepsilon > 0$ , дістанемо

$$S(\Phi) = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \rho^2(t) dt. \quad (7)$$

Таким чином, *будь-який криволінійний сектор є квадровною фігурою і його площу можна обчислити за формулою (7).*

**Приклад 7.** Застосуємо формулу (7) до обчислення площі кругового сектора:  $\rho = r$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ . Маємо:  $S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 dt = \frac{r^2}{2}(\beta - \alpha) = \frac{r^2}{2}\varphi$ , де  $\varphi = \beta - \alpha$  – величина центрального кута, за яким визначається даний сектор. Зокрема, площа круга  $S = \frac{r^2}{2} \cdot 2\pi = \pi r^2$ .

**3.2.6. Використання комп'ютерних засобів математики.** Хоча теоретично даний підрозділ присвячено загальному поняттю площі плоскої фігури, для практичного обчислення площ фігур потрібно ці фігури певним чином задавати. Основним способом аналітичного задання плоских фігур є подання їх або їхніх частин у вигляді узагальнених криволінійних трапецій. Обчислення ж площі узагальненої криволінійної трапеції по суті нічим не відрізняється від обчислення площі звичайної криволінійної трапеції. Тому використовувати комп'ютер при вивченні даної теми можна аналогічно до того, як це описано в пункті 2.1.11.

**3.2.7. Історичні відомості.** Задача обчислення площ вже в давнину була однією з найважливіших задач практичної геометрії. Так, давньогрецькі вчені володіли точними правилами обчислення площ багатокутних фігур і деяких криволінійних фігур. Наведене в цьому підрозділі поняття площі ввів у 1893 р. французький математик Каміл Жордан.

**3.2.8. Зв'язок із шкільним курсом математики.** У шкільному курсі математики обчисленню площ найпростіших фігур приділяється значна увага. Означення площі вводиться аксіоматично [11, 12] і основний наголос робиться на виведенні певних формул та їх застосуванні. Іноді ці виведення досить громіздкі (наприклад, виведення формули для обчислення площі прямокутника) і по суті не є доведеннями, оскільки не визначено, що таке площа відповідної фігури (наприклад, прямокутника).

**3.2.9. Постановка проблем.** Якщо фігури  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$  квадратні (можливо, такі, що перетинаються), то чи є квадратними фігурами різниці  $\Phi_1 \setminus \Phi_2$ , переріз  $\Phi_1 \cap \Phi_2$  та об'єднання  $\Phi_1 \cup \Phi_2$ ? Чи є квадратною фігурою об'єднання скінченної або зчисленної кількості квадратних множин?

**3.2.10. Контрольні запитання і завдання.**

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Кожна елементарна фігура є багатокутником.
2. Кожен багатокутник є елементарною фігурою.
3. Кожна елементарна фігура має площу.
4. Кожна обмежена плоска фігура має площу.
5. Якщо фігура має площу, то і будь-яка її частина має площу.
6. Кожна зчисленна обмежена плоска множина є квадратною фігурою.
7. Якщо фігура  $\Phi$  є квадратною, то вона є узагальненою криволінійною трапецією.
8. Твердження, обернене до 7, правильне.
9. Криволінійний сектор може не бути узагальненою криволінійною трапецією.
10. Якщо  $\Phi = \Phi_1 \cup \Phi_2$  – квадратна фігура, то  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$  – квадратні фігури.
11. Якщо фігура  $\Phi$  обмежена відрізком  $[a; b]$  і кривою  $y = f(x)$ ,  $x \in [a; b]$ , то вона є: а) криволінійною трапецією; б) узагальненою криволінійною трапецією.
12. Площа фігури  $\Phi$  з попереднього завдання дорівнює  $\int_a^b f(x) dx$ .

II. Довести і твердження.

1. Якщо  $\Gamma: x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha; \beta]$ , – простий кусково-гладкий контур, що обмежує фігуру  $\Phi$ , то  $\Phi$  – квадратна фігура і

$$S(\Phi) = \left| \int_{\alpha}^{\beta} x(t)y'(t) dt \right| = \left| \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t) dt \right|.$$

2. Парабола  $y^2 = 2x$  поділяє круг  $x^2 + y^2 \leq 8$  на дві частини, відношення площ яких дорівнює  $(3\pi + 2)/(9\pi - 2)$ .
3. Якщо  $E \subset P = \{(x, y): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$ , то множини  $E$  і  $C_P E = P \setminus E$  одночасно квадратні або ні. При цьому  $S(E) + S(C_P E) = S(P)$ .
4. Якщо  $\Gamma$  – спрямлювана крива, то вона є квадратною фігурою і має площу  $S(\Gamma) = 0$ .

5. Нехай фігура  $\Phi$  квадровна, проектується на відрізок  $[a; b]$  осі  $OX$  і кожна пряма  $x = t, t \in [a; b]$ , у перетині з фігурою  $\Phi$  дає відрізок  $[A_t; B_t]$ . Тоді якщо довжина  $l(t)$  відрізка  $[A_t; B_t]$  є неперервною функцією на  $[a; b]$ , то  $S(\Phi) = \int_a^b l(t) dt$  (принцип Кавальєрі).

III. Наступні задачі розв'язати за допомогою комп'ютерних засобів математики.

1. Зобразити обмежену плоску фігуру  $\Phi$  та відповідні прості фігури  $\Phi_*$  та  $\Phi^*$  і знайти їхні площі. Дослідити поведінку цих площ, коли дрібність розбиття  $T$  зменшується.
2. Зобразити задану самостійно узагальнену криволінійну трапецію і обчислити її площу.
3. Зобразити заданий самостійно криволінійний сектор і обчислити його площу.

### 3.3. Обчислення об'єму просторової фігури

У даному підрозділі введено означення просторової фігури, її об'єму (міри), кубовної фігури; розглянуто критерії кубовності, основні властивості об'єму та одержано формули для обчислення об'ємів деяких просторових фігур.

**3.3.1. Поняття просторової фігури та її об'єму.** *Просторовою фігурою* або просто *фігурою* називатимемо довільну множину точок тривимірного простору. Якщо фігура  $\Phi$  є прямокутним паралелепіпедом, то її *об'ємом*  $V(\Phi)$  називають добуток його вимірів. Зокрема, якщо  $\Phi = P = \{(x, y, z): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$ , то  $V(P) := (b - a)(d - c)(f - e)$  і такі прямокутні паралелепіпеди  $P$  називатимемо *елементарними фігурами* або *елементарними паралелепіпедами*.

Якщо з елементарної фігури вилучити довільну множину її межових точок, то отриману фігуру також називають *елементарною* і за означенням приймають, що вона має той самий об'єм, що й вихідна елементарна фігура.

Нехай  $\Phi$  – довільна просторова фігура. *Що розуміти під об'ємом цієї фігури та як обчислити її об'єм?*

Щоб відповісти на поставлене питання вважатимемо, що фігура  $\Phi$  обмежена, тобто  $\Phi \subset P = \{(x, y, z): a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, e \leq z \leq f\}$ .

Візьмемо розбиття  $T_x$  відрізка  $[a; b]$  точками  $x_k, k \in \overline{0, n}$ , розбиття  $T_y$  відрізка  $[c; d]$  точками  $y_i, i \in \overline{0, m}$ , і розбиття  $T_z$  відрізка  $[e; f]$  точками  $z_j, j \in \overline{0, l}$ . Сукупність усіх площин  $x = x_k, y = y_i, z = z_j$  назвемо *розбиттям прямокутного паралелепіпеда*  $P$  на елементарні паралелепіпеди  $P_{kij} = \{(x, y, z): x_k \leq x \leq x_{k+1}, y_i \leq y \leq y_{i+1}, z_j \leq z \leq z_{j+1}\}, k \in \overline{0, n-1}, i \in \overline{0, m-1}, j \in \overline{0, l-1}$ , і позначимо це розбиття через  $T$ .

Утворимо так звані *прості фігури*  $\Phi_* = \Phi_*(T)$ , що складаються з усіх елементарних фігур  $P_{kij}$ , які повністю містяться у фігурі  $\Phi$ , та  $\Phi^* = \Phi^*(T)$ , що складається з усіх елементарних фігур  $P_{kij}$ , які містять принаймні одну точку з фігури  $\Phi$ . При цьому можливо, що  $\Phi_*(T) = \emptyset$ , але  $\Phi^*(T) = \emptyset \Leftrightarrow \Phi = \emptyset$ .

За означенням вважають, що *об'єм кожної простої фігури* – це сума об'ємів тих  $P_{kij}$ , які утворюють цю просту фігуру. Тоді об'єми фігур  $\Phi_*$  і  $\Phi^*$  дорівнюватимуть

$$V(\Phi_*) = V_*(T) = \sum_{P_{kij} \subset \Phi} V(P_{kij})$$

та

$$V(\Phi^*) = V^*(T) = \sum_{P_{kij} \cap \Phi \neq \emptyset} V(P_{kij}).$$

Коли  $\Phi_* = \emptyset$  ( $\Phi^* = \emptyset$ ), то вважають  $V(\Phi_*) = 0$  ( $V(\Phi^*) = 0$ ).

Якщо  $T$  і  $T'$  – довільні розбиття елементарного паралелепіпеда  $P \supset \Phi$ , то  $\Phi_*(T) \subset \Phi^*(T')$ . Тому існують числа  $V_*(\Phi) = \sup_T V_*(T)$  і  $V^*(\Phi) = \inf_{T'} V^*(T')$ , які називають відповідно *внутрішнім* та *зовнішнім об'ємами фігури*  $\Phi$ . При цьому

$$V_*(T) \leq V_*(\Phi) \leq V^*(\Phi) \leq V^*(T') \quad \forall T \text{ і } T'.$$

Просторову фігуру  $\Phi$  називають *кубовною* або *вимірною* за Жорданом, якщо  $V_*(\Phi) = V^*(\Phi)$ . При цьому число

$$V(\Phi) = V_*(\Phi) = V^*(\Phi)$$

називають *об'ємом* або *мірою Жордана фігури*  $\Phi$ .

Якщо  $V_*(\Phi) < V^*(\Phi)$ , то фігуру  $\Phi$  називають *некубовною* або *невимірною за Жорданом* і вона об'єму не має.

**3.3.2. Властивості кубовних фігур та об'ємів.** Наведені у попередньому пункті міркування аналогічні до міркувань пункту



3.2.1, де визначалося поняття площі плоскої фігури. Тому природно чекати, що властивості об'єму такі самі, як і властивості площі.

Якщо у теоремах 1 – 3 з пункту 3.2.2 та у властивостях 1 – 7 з пункту 3.2.3 замінити слова “прямокутник”, “квадровність” і “площа” відповідно на слова “паралелепіпед”, “кубовність” і “об’єм”, то дістанемо критерії кубовності і властивості кубовних фігур та об’ємів. При цьому доведення одержаних тверджень по суті не зміняться.

**Зауваження.** Порівнюючи властивості спрямлюваних кривих і довжин, квадратних фігур і площ, кубовних фігур і об’ємів, бачимо, що вони є аналогічними. Це дає підстави ввести узагальнене поняття вимірної множини та її міри за допомогою основних (характеристичних) властивостей.

Нехай виділено систему  $\mathfrak{S}$  певних множин і задано функцію множин  $\mu(\Phi)$ ,  $\Phi \in \mathfrak{S}$ . Тоді кожному множині  $\Phi \in \mathfrak{S}$  називають *вимірною*, а число  $\mu(\Phi)$  – *мірою множини*  $\Phi$ , якщо виконуються такі три *основні (характеристичні) властивості*:

- 1 <sub>$\mu$</sub> . Система  $\mathfrak{S}$  непорожня і  $\mu(\Phi) \geq 0 \forall \Phi \in \mathfrak{S}$ .
- 2 <sub>$\mu$</sub> . Якщо  $\Phi \in \mathfrak{S}$  і  $\Phi_1 \in \mathfrak{S}$ , причому  $\Phi_1 \subset \Phi$ , то  $\Phi_2 = \Phi \setminus \Phi_1 \in \mathfrak{S}$  і  $\mu(\Phi_2) = \mu(\Phi) - \mu(\Phi_1)$ .
- 3 <sub>$\mu$</sub> . Якщо  $\Phi_1 \in \mathfrak{S}$  і  $\Phi_2 \in \mathfrak{S}$ , то  $\Phi_1 \cup \Phi_2 \in \mathfrak{S}$ , причому
 
$$\mu(\Phi_1 \cup \Phi_2) = \mu(\Phi_1) + \mu(\Phi_2),$$
 коли  $\Phi_1 \cap \Phi_2 = \emptyset$ .

**3.3.3. Приклади кубовних та некубовних просторових фігур.** 1. Якщо фігура  $\Phi$  – порожня множина, або довільна скінченна множина, або обмежена плоска фігура, то  $\Phi$  – кубовна фігура і  $V(\Phi) = 0$ .

2. Якщо  $\Phi = \{(x, y, z): x, y \text{ і } z \in \mathbb{Q} \cap [0; 1]\}$ , то  $V_*(\Phi) = 0$ , а  $V^*(\Phi) = 1$  і тому фігура  $\Phi$  не є кубовною.

3. Нехай  $E$  – квадратна фігура, що лежить у площині  $OXY$ ,  $h > 0$ , а  $\Phi = \{(x, y, z): (x, y) \in E, 0 \leq z \leq h\}$  (рис. 3.3.1). Тоді фігуру  $\Phi$  називають *прямим циліндром з основою  $E$  і висотою  $h$* . Зокрема, якщо  $E$  – круг, то  $\Phi$  – *прямий круговий циліндр*, або просто *циліндр*.

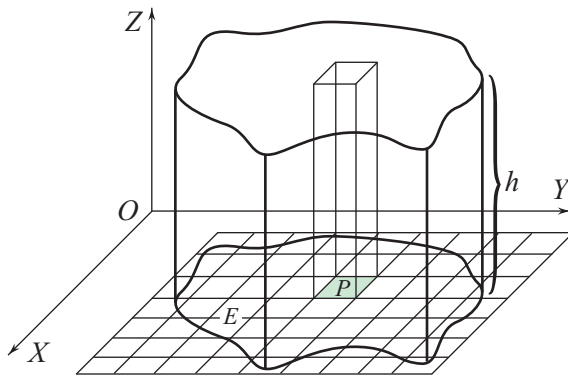


Рис. 3.3.1.

Оскільки  $E$  – квадровна фігура, то  $\forall \varepsilon > 0$  існують прості плоскі фігури  $E_*$  і  $E^*$  такі, що  $E_* \subset E \subset E^*$  і  $0 \leq S(E^*) - S(E_*) < \frac{\varepsilon}{h}$ . Якщо побудувати прямокутні паралелепіпеди, основами яких є прямокутники, що утворюють прості фігури  $E_*$  і  $E^*$ , а висоти яких рівні  $h$ , то дістанемо прості фігури  $\Phi_*$  та  $\Phi^*$ , для яких  $\Phi_* \subset \Phi \subset \Phi^*$ ,  $V(\Phi_*) = S(E_*) \cdot h$ ,  $V(\Phi^*) = S(E^*) \cdot h$ . Тому

$$0 \leq V(\Phi^*) - V(\Phi_*) = h(S(E^*) - S(E_*)) < h \cdot \frac{\varepsilon}{h} = \varepsilon.$$

Отже,  $\Phi$  – кубовне тіло і

$$V(\Phi_*) = S(E_*) \cdot h \leq V(\Phi) \leq S(E^*) \cdot h = V(\Phi^*).$$

Звідси, враховуючи, що  $S(E_*)$  і  $S(E^*)$  можна зробити як завгодно близькими до  $S(E)$ , дістаємо, що  $V(\Phi) = S(E) \cdot h$ .

Отже, кожен прямий циліндр  $\Phi$  з основою  $E$  і висотою  $h$  є кубовною фігурою, причому  $V(\Phi) = S(E) \cdot h$ .

**3.3.4. Принцип Кавальєрі.** Припустимо, що фігура  $\Phi$  лежить між площинами  $x = a$  та  $x = b$  і кожна площина  $x = t$ , де  $t \in [a; b]$ , в перетині з  $\Phi$  дає квадровну фігуру  $E_t$ , площа якої  $S(t)$  є неперервною функцією на  $[a; b]$ . Вважатимемо також, що проєкції різних перерізів  $E_t$  на площину  $x = a$  обов'язково лежать одна в одній (рис. 3.3.2).

Візьмемо розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$  точками  $x_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , і введемо позначення:

$$m_k = \min_{[x_k; x_{k+1}]} S(t), \quad M_k = \max_{[x_k; x_{k+1}]} S(t).$$

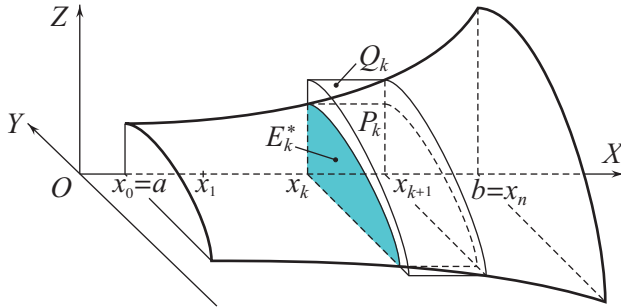


Рис. 3.3.2.

Площини  $x = x_k$  та  $x = x_{k+1}$  відтинають шар  $\Phi_k$  фігури  $\Phi$ . Якщо перерізи фігури  $\Phi$  площинами  $x = t \in [x_k; x_{k+1}]$  спроектувати на площину  $x = x_k$ , то всі вони міститимуть проекцію  $E_k^*$  перерізу найменшої площі  $m_k$  та міститимуться в проекції  $E_k^{**}$  перерізу найбільшої площі  $M_k$ . Тоді прямий циліндр  $P_k$  з основою  $E_k^*$  і висотою, що є відрізком  $[x_k; x_{k+1}]$ , міститься у шарі  $\Phi_k$ , а прямий циліндр  $Q_k$  з основою  $E_k^{**}$  і висотою  $[x_k; x_{k+1}]$  містить у собі шар  $\Phi_k$ . Отже, фігури  $\Phi_* = \bigcup_{k=0}^{n-1} P_k$  та  $\Phi^* = \bigcup_{k=0}^{n-1} Q_k$  є кубовними,  $\Phi_* \subset \Phi \subset \Phi^*$  і

$$0 \leq V(\Phi^*) - V(\Phi_*) = \sum_{k=0}^{n-1} (V(Q_k) - V(P_k)) =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (M_k - m_k) \Delta x_k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(S) \Delta x_k.$$

Оскільки функція  $S = S(x)$  є неперервною на  $[a; b]$ , то вона  $R$ -інтегровна на  $[a; b]$  і за критерієм  $R$ -інтегровності розбиття  $T$  можна вибрати так, щоб  $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(S) \Delta x_k < \varepsilon$ , де  $\varepsilon > 0$  – довільне фіксоване число.

Тому  $\forall \varepsilon > 0$  існують кубовні фігури  $\Phi_*$  і  $\Phi^*$  такі, що  $\Phi_* \subset \Phi \subset \Phi^*$  і  $0 \leq V(\Phi^*) - V(\Phi_*) < \varepsilon$ . За критерієм кубовності  $\Phi$  є кубовним тілом, причому

$$\sum_{k=0}^{n-1} m_k \Delta x_k = V(\Phi_*) \leq V(\Phi) \leq V(\Phi^*) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k \Delta x_k.$$

Якщо в цій нерівності спрямувати  $\lambda(T) = \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta x_k$  до нуля, то ліва і права частини прямуватимуть до однієї границі  $\int_a^b S(x) dx$ . Тому

$$V(\Phi) = \int_a^b S(x) dx. \quad (1)$$

З цієї формули випливає так званий **принцип Кавальєрі**: якщо перерізи двох кубовних фігур будь-якою площиною, що паралельна заданій площині, мають однакову площу, то і об'єми цих фігур однакові.

**3.3.5. Об'єм тіла обертання.** Застосуємо формулу (1) до тіла обертання, тобто фігури  $\Phi$ , яку можна дістати шляхом обертання навколо осі  $OX$  криволінійної трапеції, що визначається неперервною невід'ємною функцією  $y = f(x)$ ,  $x \in [a; b]$  (рис. 3.3.3).

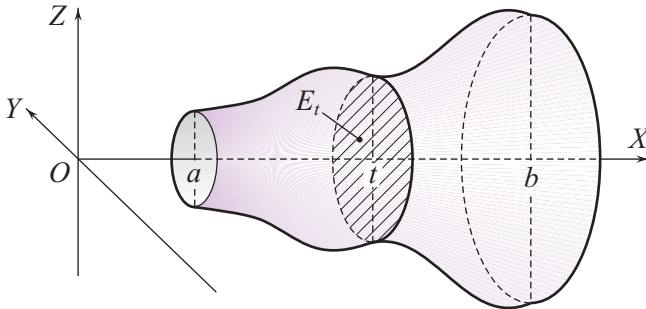


Рис. 3.3.3.

Тіло обертання  $\Phi$  можна задати також наступним чином:

$$\Phi = \{(x, y, z): x \in [a; b], -f(x) \leq y \leq f(x), y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}.$$

Переріз тіла обертання площиною  $x = t \in [a; b]$  є кругом радіуса  $r_t = f(t)$ . Тому  $S(t) = \pi f^2(t)$  – неперервна функція на  $[a; b]$ , внаслідок чого об'єм тіла обертання можна обчислити за формулою

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (2)$$

**Приклад 1.** Обертаючи навколо осі  $OX$  плоску фігуру, обмежену еліпсом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ , дістанемо еліпсоїд обертання, який перетворює-

ться на кулю, коли  $a = b = r$ .

За формулою (2) об'єм цього еліпсоїда дорівнює

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^a b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2 \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_{-a}^a = \\ &= \pi b^2 \left(2a - \frac{2}{3}a\right) = \frac{4}{3}\pi a b^2. \end{aligned}$$

Зокрема, коли  $a = b = r$ , то  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$  – відома формула для обчислення об'єму кулі.

**3.3.6. Використання комп'ютерних засобів математики.** Окрім обчислення об'ємів за допомогою певних інтегралів, комп'ютерні засоби математики можна використати для графічного зображення фігур, що розглядаються.

**3.3.6.1. Використання Gran1.** У програмі Gran1 передбачена функція для обчислення об'єму (і площі поверхні) тіла обертання навколо осі  $OX$  або осі  $OY$ . Знаходиться вона в пункті меню Операції > Інтеграли ► > Об'єм та площа поверхні обертання, вісь Ox..., а в наступному рядочку те саме, тільки для осі  $Oy$ . Крива повинна бути заданою явним рівнянням  $y = y(x)$ ,  $x \in [a; b]$ . Об'єм тіла обертання обчислюється чисельними методами. При цьому, якщо попередньо було побудовано графік відповідної функції, то на екрані зображається тіло, обмежене поверхнею, яка утворюється при обертанні цього графіка навколо осі  $OX$  чи  $OY$ , та двома площинами, які передбачаються у програмі Gran1 за умовчанням. Зауважимо, що при обертанні навколо осі  $Oy$  графіка функції  $y = f(x)$ ,  $x \in [a; b]$ , у програмі Gran1 за умовчанням вважають, що функція  $f$  є неперервною і строго монотонною на  $[a; b]$ .

Протестуємо роботу програми Gran1 з обчислення об'ємів тіл обертання на кількох прикладах і проаналізуємо отримані результати.

$\Gamma_1: y = \sin x, x \in [0; \pi/2]$  (рис. 3.3.4)  $\Rightarrow V_{1x} = 2.4674$ .

$\Gamma_2: y = \arcsin x, x \in [0; 1]$  (рис. 3.3.5)  $\Rightarrow V_{2y} = 2.37308$ .

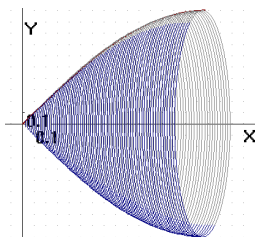


Рис. 3.3.4.

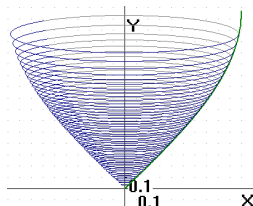


Рис. 3.3.5.

За формулою (2) п. 3.3.5 можна перевірити, що значення  $V_{1x}$  відповідає дійсності. Проте об'єм  $V_{2y}$  обчислено з недостачею  $\approx 4\%$ . Крім того,

на малюнку 3.3.5, з естетичного погляду, не вистачає ще одного-двох верхніх кілець обертання (можливо, це якось пов'язано і з обчисленням об'ємів).

$\Gamma_3: y = \sin x, x \in [\pi/2; \pi]$  (рис. 3.3.6)  $\Rightarrow V_{3x} = 2.4674$ .

$\Gamma_4: y = \pi - \arcsin x, x \in [0; 1]$  (рис. 3.3.7)  $\Rightarrow V_{4y} = -2.37308$ .

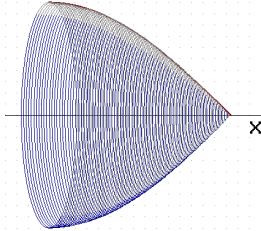


Рис. 3.3.6.

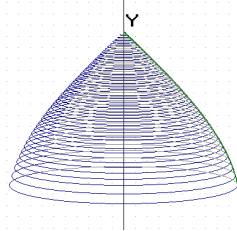


Рис. 3.3.7.

При обчисленні об'єму  $V_{4y}$  робиться така сама похибка, що й при обчисленні  $V_{2y}$ , а також з'являється від'ємний знак, що некоректно.

Так само, якщо взяти чверть кола  $\Gamma_5 = \Gamma_6: y = \sqrt{1 - x^2}, x \in [0; 1]$  (рис. 3.3.8, 3.3.9), і обертати цю криву навколо осей  $Ox$  та  $Oy$ , то за програмою Gran1 дістанемо:  $V_{5x} = 2.0944$ ,  $V_{6y} = -2.00124$ .

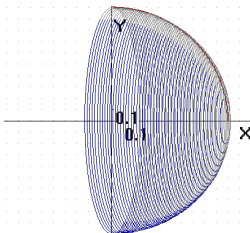


Рис. 3.3.8.

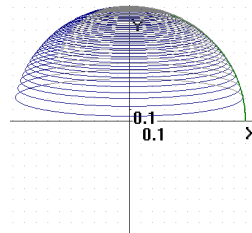


Рис. 3.3.9.

Як відомо, об'єм півкулі одиничного радіуса дорівнює  $\frac{2\pi}{3} \approx 2,0944$ , тобто правильно обчислено лише об'єм  $V_{5x}$ , а при обчисленні  $V_{6y}$  допущено похибку і за абсолютною величиною, і за знаком.

**3.3.6.2. Використання Maxima.** У даній програмі немає вбудованої команди обчислення об'єму тіла обертання, як немає і команди побудови його графічного зображення. Разом з цим є багато можливостей використання цієї програми для обчислення об'ємів таких тіл. По-перше, для обчислення об'єму тіла обертання достатньо скористатися формулою (2) і в багатьох випадках буде отримано не наближене, а точне значення шуканого об'єму (якщо навіть при цьому в заданні фігури наявні деякі буквені параметри). По-друге, за допомогою програми Maxima неважко побудувати графічне подання тіла обертання, схоже на те, що будується програмою Gran1.

Ідея полягає у тому, щоб до графіка функції додати кільця обертання, тобто фактично еліпси. При цьому можна скористатися аналогією з пп. 2.1.11.2, де зображувався геометричний зміст інтегральних сум.

**Приклад 1.** Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнею, що утворюється при обертанні кривої  $y = \sin x + x + \cos x$ ,  $x \in [-\pi; \pi]$ , і прямих  $x = \pm\pi$  навколо осі  $OX$ . Навести графічну ілюстрацію.

□ Розв'язання цього прикладу реалізується у наступній послідовності команд.

```
(%i1) load(draw)$
(%i2) f(x):=sin(x)+x+cos(x)$
a:-%pi$ b:%pi$ N:100$
x(k,n):=a+k*(b-a)/n$
pp(n):=makelist(ellipse(x(k-1,n),0,
max(abs(f(x(k-1,n)))/10),1/1000),
max(abs(f(x(k-1,n))),1/1000),2,360),
k,1,n+1)$
graph:[line_width=3,color=black,
explicit(f(x),x,a-0.1,b+0.1),
explicit(-f(x),x,a-0.1,b+0.1)]$
options:[xtics=none,ytics=none,
xrange=[a-0.5,b+0.5],yrange=auto,
xaxis=true,yaxis=true,nticks=100,
axis_bottom=false,axis_top=false,axis_right=false,axis_left=false,
proportional_axes=xy,transparent=true,color=magenta]$
mal(n):=append(options,pp(n),graph)$
apply(draw2d,mal(N))$
```

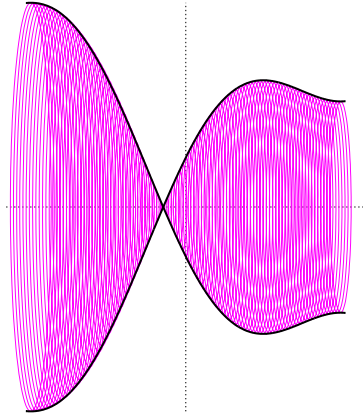


Рис. 3.3.10.

Тіло обертання побудовано (рис. 3.3.10). Тепер обчислимо його об'єм.

```
(%i12) V:ratsimp(%pi*integrate(f(x)^2,x,a,b))$
print("V=",V,"=",float(V))$

$$V = \frac{2\pi^4 + 18\pi^2}{3} = 124.1570204292044$$

```

Зауважимо, що у наведену вище програму зображення тіла обертання легко внести потрібні зміни так, щоб еліпси обертання йшли густіше чи рідше, були більш чи менш видовженими, зафарбованими, мали інший колір, були товщими і т. п. ■

Враховуючи твердження, наведене після рис. 3.3.3 пункту 3.3.5, для побудови тіл обертання можна скористатися також командами plot3d або draw3d побудови тривимірних зображень.

Так, ілюстрацію до прикладу 1 можна виконати іншим способом.

```
(%i14) draw3d(xaxis=true,yaxis=true,zaxis=true,
label(["X",5,0,0]),label(["Y",0,10,0]),label(["Z",0,0,5]),grid=true,
xtics=false,ytics=false,ztics=false,xyplane=0,axis_3d=false,
```

```

xaxis_width=2,xaxis_color=forest-green,xaxis_type=solid,
yaxis_width=2,yaxis_color=forest-green,yaxis_type=solid,
zaxis_width=2,zaxis_color=forest-green,zaxis_type=solid,
xu_grid=50,yv_grid=50, surface_hide=false,color=orange,
explicit(-sqrt(f(x)^2-y^2),x,-%pi,%pi,y,-5,5),
explicit(sqrt(f(x)^2-y^2),x,-%pi,%pi,y,-5,5),
xrange=[-7,7],yrange=[-10,10],zrange=[-4.2,4.2]);
z

```

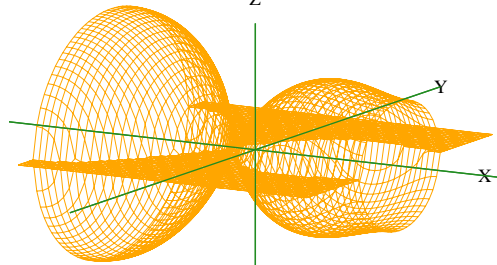


Рис. 3.3.11.

Розв'яжемо за допомогою програми *Matha* ще один приклад.

**Приклад 2.** Знайти об'єм просторової фігури, обмеженої еліпсоїдом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ . Зобразити цей еліпсоїд при  $a = 1$ ,  $b = 2$ ,  $c = 3$ .

□ Розв'язування цього прикладу буде базуватися на формулі (1) пункту 3.3.4. Спочатку знайдемо, яка лінія утворюється при перетині еліпсоїда площиною  $x = t$ :

```
(%i1) eliminate([x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1,x=t],[x]);
```

```
(%o1) [a^2*b^2*z^2 + a^2*c^2*y^2 + b^2*c^2*(t^2 - a^2)]
```

При виключенні змінної  $x$  з рівняння еліпсоїда отримали вираз, який потрібно прирівняти до нуля. Перепишемо це рівняння у вигляді

```
(%i2) a^2*b^2*z^2+a^2*c^2*y^2=b^2*c^2*(a^2-t^2);
```

```
(%o2) a^2*b^2*z^2 + a^2*c^2*y^2 = b^2*c^2*(a^2 - t^2)
```

Звідси видно, що перетин еліпсоїда площиною  $x = t$  буде непорожнім за умови  $a^2 - t^2 \geq 0$ , тобто  $t \in [-a; a]$ . При  $t = \pm a$  отримується одна точка. Припустимо, що  $t \in (-a; a)$  і скоротимо рівняння (%o2) на його праву частину:

```
(%i3) %o2/(b^2*c^2*(a^2-t^2));
```

```
(%o3) \frac{a^2*b^2*z^2+a^2*c^2*y^2}{b^2*c^2*(a^2-t^2)} = 1
```

Враховуючи, що  $a$ ,  $b$ ,  $c$  і  $t$  у цьому рівнянні – параметри, прийдемо до висновку, що дане рівняння відносно змінних  $y$  та  $z$  є рівнянням еліпса з півосями

```
(%i4) [A:b*sqrt(a^2-t^2)/a,B:c*sqrt(a^2-t^2)/a];
```

```
(%o4) [\frac{b\sqrt{a^2-t^2}}{a}, \frac{c\sqrt{a^2-t^2}}{a}]
```



Обчислимо площу фігури, обмеженої цим еліпсом, за відомою формулою  $S = \pi AB$ , де  $A, B$  – півосі еліпса:

```
(%i5) S:%pi*A*B;
```

```
(%o5)  $\frac{\pi bc(a^2 - t^2)}{a^2}$ 
```

Отже, знайдено площу поперечного перерізу площиною  $x = t$  тіла, обмеженого еліпсоїдом, коли  $t \in [-a; a]$ , і можна знайти об'єм цього тіла за формулою (1) пункту 3.3.4:

```
(%i6) integrate(S,t,-a,a);
```

```
(%o6)  $\frac{4\pi abc}{3}$ 
```

Перейдемо до зображення заданого еліпсоїда за умови  $a = 1, b = 2, c = 3$ . Хоча у пакеті `draw` є команда `implicit`, якою будуються графіки неявно заданих функцій 2-х змінних, але вона виконується не так швидко і якісно, як команда `explicit`, якою будуються графіки явно заданих функцій. Тому виразимо з рівняння еліпсоїда змінну  $z$ :

```
(%i7) solve(x^2+y^2/4+z^2/9=1,z);
```

```
(%o7)  $[z = -\frac{3\sqrt{-y^2-4x^2+4}}{2}, z = \frac{3\sqrt{-y^2-4x^2+4}}{2}]$ 
```

Тепер побудуємо графіки обох цих явно заданих функцій (нижню й верхню частини еліпсоїда) на одному малюнку.

```
(%i8) load(draw)$
```

```
(%i9) draw3d(xaxis=true,yaxis=true,zaxis=true,
label(["X",1.5,0,0]),label(["Y",0,2.5,0]),label(["Z",0,0,4]),
xtics=false,ytics=false,ztics=false,
xtics_axis=true,ytics_axis=true,xyplane=0,axis_3d=false,
xaxis_width=2,xaxis_color=forest-green,xaxis_type=solid,
yaxis_width=2,yaxis_color=forest-green,yaxis_type=solid,
zaxis_width=2,zaxis_color=forest-green,zaxis_type=solid,
xu_grid=50,yv_grid=50,surface_hide=false,color=orange,
explicit((-3*sqrt(-y^2-4*x^2+4))/2,x,-1,1,y,-2,2),
explicit((3*sqrt(-y^2-4*x^2+4))/2,x,-1,1,y,-2,2),
xrange=[-1.5,1.5],yrange=[-2.5,2.5],zrange=[-3.5,3.5]); ■
```

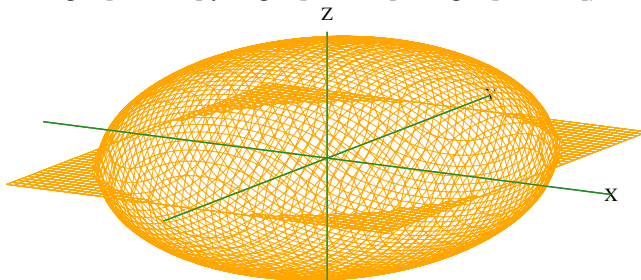


Рис. 3.3.12.

На рис. 3.3.12, як і на рис. 3.3.11, помітно зайву частину побудованої поверхні, яка лежить на площині  $XOY$ . Вона з'являється тому, що за командою `draw3d` (як і за командою `plot3d`) замість кожної функції  $f$  розглядається її дійсна частина  $\text{Re } f$ .

**3.3.6.3. Використання MathCAD.** У програмі MathCAD можна виконати такі ж завдання, які було виконано при розгляді програми Maxima.

Для прикладу зобразимо засобами MathCAD тіло, яке утворюється при обертанні навколо осі  $OX$  криволінійної трапеції, що визначається функцією  $f(x) = (1, 1 + \sin x)^{\cos x}$ ,  $x \in [0; 2\pi]$ . Також обчислимо його об'єм.

□ Оскільки у програмі MathCAD немає спеціальної команди для побудови еліпсів, то доведеться еліпси обертання задати параметричними рівняннями. При цьому передбачимо кількість цих еліпсів і коефіцієнт їхнього стиску. Отже, розв'язання прикладу 1 наведемо у наступному робочому аркуші.

$$\begin{aligned} f(x) &:= (1.1 + \sin(x))^{\cos(x)} & a &:= 0 & b &:= 2\pi & N &:= 50 & K &:= \frac{1}{3} \\ c(k, n) &:= a + k \cdot \frac{b-a}{n} & k &:= 0..N \\ u(k, t) &:= c(k, N) + K |f(c(k, N))| \cdot \cos(t) \\ v(k, t) &:= |f(c(k, N))| \cdot \sin(t) & t &:= 0, 0.01..2\pi & x &:= a, a + 0.01..b \end{aligned}$$

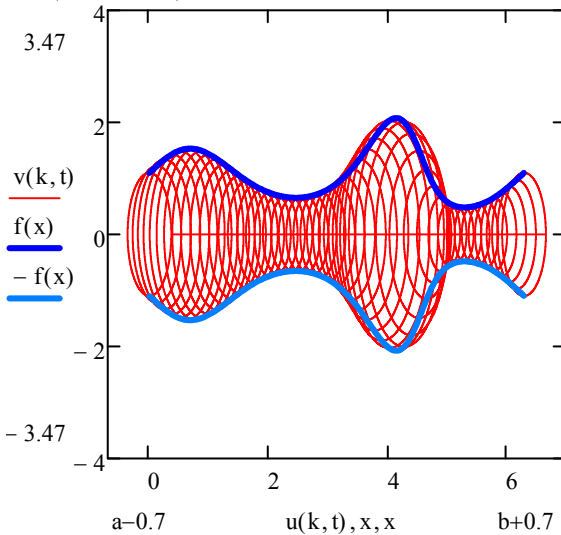


Рис. 3.3.13.

$$V := \pi \int_a^b f(x)^2 dx \quad V = 27.233$$

Об'єм обчислено чисельним методом, тому що відповідний інтеграл не береться в скінченному вигляді. ■

Зобразимо тепер це саме тіло обертання у тривимірному просторі.

Для зображення поверхні, заданої явним рівнянням  $z = f(x, y)$ ,  $x \in [a; b]$ ,  $y \in [c; d]$ , потрібно натиснути **Ctrl** + **2** або скористатися пунктом меню **Додати** > **Графіки** > **Графік поверхні**. Коли з'явиться рамка з тривимірною системою координат, слід у нижньому чорному квадратику ввести букву (наприклад,  $f$ ), якою перед цим було позначено функцію, і натиснути **Enter**. Після цього буде побудовано графік даної функції із стандартними налаштуваннями, зокрема за замовчуванням  $[a; b] = [c; d] = [-5; 5]$ .

Для успішної побудови графіка функції  $f(x, y)$ ,  $x \in [a; b]$ ,  $y \in [c; d]$ , обов'язково потрібно, щоб ця функція була визначеною в усіх точках прямокутної області  $[a; b] \times [c; d]$ . Це приводить до певних труднощів при побудові функцій з непрямокутними областями визначення. Вирішити цю проблему можна за допомогою оператора `if` (але при цьому будуть з'являтися зайві ділянки поверхонь).

Повернемося до нашого прикладу. На тому самому робочому аркуші, нижче продовжуємо:

$$g(x, y) := \text{if}(f(x)^2 - y^2 \geq 0, \sqrt{f(x)^2 - y^2}, 0) \quad g1(x, y) := -g(x, y)$$

Поставивши курсор нижче, натискаємо **Ctrl** + **2** і в допоміжному вікні, яке з'являється, впишемо у чорний прямокутник  $g, g1$ , щоб побудувати верхню й нижню частини потрібного тіла обертання. Потім, натискаючи праву клавішу миші, встановивши попередньо її курсор на області малюнка, викликаємо меню властивостей графіка (рис. 3.3.14) і виставимо такі значення на вкладці "Дані QuickPlot":

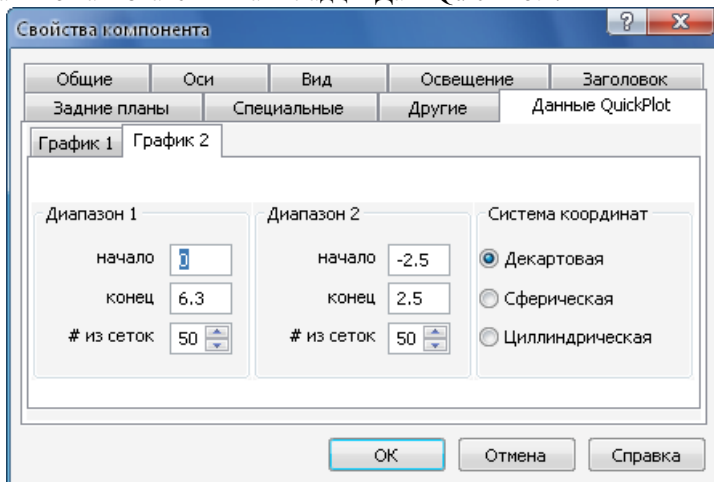


Рис. 3.3.14.

Після цього буде побудовано рисунок 3.3.15:

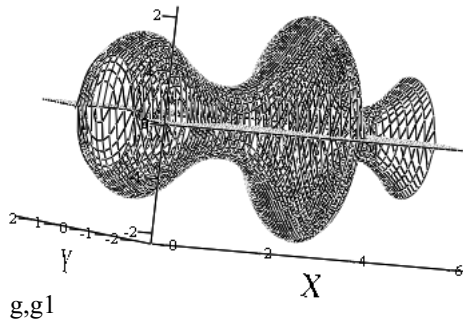


Рис. 3.3.15.

Цей рисунок можна вільно обертати в довільному напрямі за допомогою мишки. А якщо натиснути клавішу `Shift` і легенько “крутнути” зображення за допомогою мишки, то воно почне обертатися, доки це обертання не буде зупинено.

За допомогою вкладки “Вигляд” можна зробити побудований графік кольоровим, додати освітлення тощо. Тоді він може набути, наприклад, такого вигляду (рис. 3.3.16):

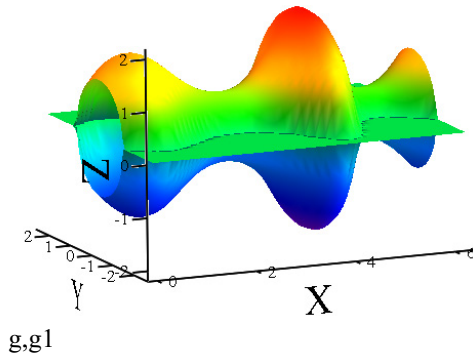


Рис. 3.3.16.

**3.3.7. Історичні відомості.** Однією з практичних задач, що стимулювали розвиток математики, завжди була задача обчислення об'ємів тіл. Ще вавилонські математики володіли правилами для обчислення об'ємів найпростіших тіл (призм, пірамід, циліндрів), але багато з цих правил були неточними. Грецькі математики за кілька століть до н. е. володіли точними правилами для обчислення об'ємів многогранних тіл та деяких круглих тіл. Наведене у цьому підрозділі поняття кубовної фігури та її об'єму належить Камілу Жордану. Принцип Кавальєрі був відомий ще давньогрецьким математикам, але італійський математик Бонавентура Кавальєрі у 1635 р. дав обґрунтування цього принципу.

**3.3.8. Зв'язок із шкільним курсом математики.** Як і у випадку площі, виведення формул для обчислення об'єму того чи іншого тіла має сенс лише тоді, коли відомо, що таке об'єм тіла і що дане тіло має об'єм. Тому іноді замість складних і по суті неточних доведень доцільно ввести відповідні формули як означення. Це, зокрема, стосується формули об'єму прямокутного паралелепіпеда.

**3.3.9. Постановка проблем.** Проблеми, поставлені в попередньому пункті для площі, мають пряме відношення і до об'єму. Іншою проблемою є проблема узагальнення понять довжини, площі і об'єму на випадок множин з простору  $\mathbb{R}^n$ .

### 3.3.10. Контрольні запитання і завдання.

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Кожна множина є просторовою фігурою.
2. Кожна просторова фігура є множиною.
3. Якщо фігура є прямокутним паралелепіпедом, то вона є елементарним тілом.
4. Якщо фігура має об'єм, то вона є елементарною або простою фігурою.
5. Твердження, обернене до 4, є правильним.
6. Кожна просторова фігура має внутрішній і зовнішній об'єми.
7. Кожна обмежена просторова фігура є кубовною.
8. Об'єм кожної кубовної фігури є додатним числом.
9. Якщо фігура кубовна, то й будь-яка її частина також кубовна.
10. Кожне елементарна просторова фігура є прямим циліндром.
11. Будь-яка пряма призма є прямим циліндром.
12. До будь-якої призми чи піраміди можна застосувати формулу (1).
13. Формула (1) застосовна до будь-якого тіла обертання.
14. Твердження, обернене до принципу Кавальєрі, є правильним.
15. Якщо обертати навколо осі  $OX$  узагальнену криволінійну трапецію  $\Phi_1 = \{(x, y): x \in [a; b], f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$ , то дістанемо тіло обертання  $\Phi$  з об'ємом  $V(\Phi) = \pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx$ .

II. Довести дані твердження.

1. Якщо криволінійну трапецію, що визначається функцією  $y = f(x)$ ,  $x \in [a; b]$ , де  $0 \leq a < b$ , обертати навколо осі  $OY$ , то утворюється кубовна просторова фігура  $\Phi$ , причому  $V(\Phi) = 2\pi \int_a^b xf(x) dx$ .

2. Якщо  $\Phi_1$  і  $\Phi_2$  – кубовні фігури, то  $\Phi^* = \Phi_1 \cup \Phi_2$  і  $\Phi_* = \Phi_1 \cap \Phi_2$  – кубовні фігури, причому  $V(\Phi^*) = V(\Phi_1) + V(\Phi_2) - V(\Phi_*)$ .

III. Наступні задачі розв'язати за допомогою комп'ютерних засобів математики.

1. Зобразити просторову фігуру  $\Phi$  та елементарний паралелепіпед  $P \supset \Phi$ ; утворити розбиття  $T$  фігури  $\Phi$  на елементарні паралелепіпеди; виділити прості фігури  $\Phi_*$  та  $\Phi^*$  та знайти їхні об'єми; дослідити поведінку об'ємів  $V(\Phi_*)$  і  $V(\Phi^*)$ , коли дрібність розбиття  $T$  зменшується.
2. Утворити тіло обертання шляхом обертання навколо осі  $OX$  певної узагальненої криволінійної трапеції та знайти об'єм цього тіла.
3. Утворити тіло обертання шляхом обертання навколо осі  $OY$  певної узагальненої криволінійної трапеції та знайти об'єм цього тіла.

### 3.4. Обчислення площі поверхні обертання і фізичні застосування визначеного інтеграла

У даному підрозділі введено поняття поверхні обертання та її площі, маси матеріальної дуги та пластинки, статичного моменту цієї маси відносно координатних осей та центра мас. Виведено формули для обчислення вказаних величин.

**3.4.1. Поняття поверхні обертання та її площі.** Нехай  $\widehat{AB}$ :  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ , є простою спрямованою дугою. Тоді *поверхнею обертання* називають множину, яку можна дістати шляхом обертання дуги  $\widehat{AB}$  навколо осі  $OX$  (або  $OY$ ) (рис. 3.4.1). Наприклад, якщо  $\widehat{AB}$  є відрізком, що лежить у верхній півплощині, то відповідна поверхня обертання є бічною поверхнею зрізаного конуса або циліндра, або конуса.

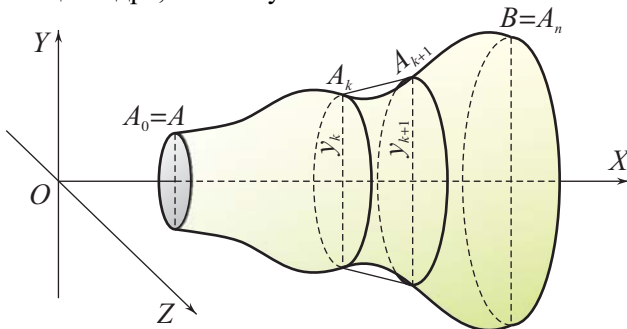


Рис. 3.4.1.

Для вирішення питання про площу поверхні обертання будемо виходити з того, що поняття бічної поверхні зрізаного конуса вже визначено:

$$S_{\text{зр.кон.}} = \pi(R + r)l,$$

де  $r$  і  $R$  – радіуси основ зрізаного конуса, а  $l$  – довжина твірної цього зрізаного конуса. Зокрема, коли  $r = 0$ , то маємо  $S_{\text{кон.}} = \pi Rl$ , а коли  $r = R$ , то  $S_{\text{цил.}} = 2\pi Rl$ .

Візьмемо розбиття  $T$  відрізка  $[\alpha; \beta]$  точками  $t_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , і введемо позначення  $x_k = x(t_k)$ ,  $y_k = y(t_k)$ ,  $A_k = (x_k, y_k)$ ,  $k \in \overline{0, n-1}$ .

Точки  $A_k$  дуги  $\widehat{AB}$  утворюють ламану  $\Gamma_n = \bigcup_{k=0}^{n-1} [A_k; A_{k+1}]$ . Коли дуга  $\widehat{AB}$  обертається навколо осі  $OX$ , то ламана  $\Gamma_n$  описує поверхню, що є об'єднанням бічних поверхонь зрізаних конусів, твірними яких є відрізки  $[A_k; A_{k+1}]$  (рис. 3.4.1). Тому площа цієї поверхні

$$S(T) = \sum_{k=0}^{n-1} \pi(|y_k| + |y_{k+1}|) |A_k A_{k+1}|,$$

де  $|A_k A_{k+1}| = \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (y_{k+1} - y_k)^2}$ .

Враховуючи визначення поняття довжини дуги, площі плоскої фігури і об'єму просторової фігури, природно назвати *площею поверхні обертання* границю

$$S = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(T) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \pi(|y_k| + |y_{k+1}|) |A_k A_{k+1}|.$$

### 3.4.2. Обчислення площі поверхні обертання.

□ Відомо, що дуга  $\widehat{AB}$ :  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$  є спрямлюваною, коли  $x'(t)$  і  $y'(t)$  – неперервні функції на  $[\alpha; \beta]$ . Надалі вважаємо, що ці умови виконано. Тоді

$$\begin{aligned} S(T) &= \pi \sum_{k=0}^{n-1} |y(t_k)| \sqrt{(x(t_{k+1}) - x(t_k))^2 + (y(t_{k+1}) - y(t_k))^2} + \\ &+ \pi \sum_{k=0}^{n-1} |y(t_{k+1})| \sqrt{(x(t_{k+1}) - x(t_k))^2 + (y(t_{k+1}) - y(t_k))^2} = \\ &= S_1(T) + S_2(T). \end{aligned} \quad (1)$$

Розглянемо перший доданок. За формулою Лагранжа

$$x(t_{k+1}) - x(t_k) = x'(t_k^*) \Delta t_k, \quad \text{а} \quad y(t_{k+1}) - y(t_k) = y'(t_k^{**}) \Delta t_k,$$

де  $t_k^*$  і  $t_k^{**} \in [t_k; t_{k+1}] \forall k \in \overline{0, n-1}$ . Тому

$$\begin{aligned} S_1(T) &= \pi \sum_{k=0}^{n-1} |y(t_k)| \sqrt{x'^2(t_k^*) + y'^2(t_k^{**})} \Delta t_k = \\ &= \pi \sum_{k=0}^{n-1} |y(t_k)| \sqrt{x'^2(t_k^*) + y'^2(t_k^*)} \Delta t_k + \\ &+ \pi \sum_{k=0}^{n-1} |y(t_k)| \left( \sqrt{x'^2(t_k^*) + y'^2(t_k^{**})} - \sqrt{x'^2(t_k^*) + y'^2(t_k^*)} \right) \Delta t_k = \\ &= S_{11}(T) + S_{12}(T). \end{aligned} \quad (2)$$

В пункті 3.1.4 доведено, що

$$\begin{aligned} \left| \sqrt{x'^2(t_k^*) + y'^2(t_k^{**})} - \sqrt{x'^2(t_k^*) + y'^2(t_k^*)} \right| &\leq \\ &\leq |y'(t_k^{**}) - y'(t_k^*)| \leq \omega_k(y'). \end{aligned}$$

Тому, враховуючи, що  $|y(t)| \leq H, \forall t \in [\alpha; \beta]$ , маємо

$$|S_{12}(t)| \leq \pi H \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(y') \Delta t_k,$$

а за критерієм  $R$ -інтегровності остання сума прямує до нуля, коли  $\lambda(T) \rightarrow 0$ . Далі маємо:

$$\begin{aligned} S_{11}(T) &= \pi \sum_{k=0}^{n-1} |y(t_k^*)| \sqrt{x'^2(t_k^*) + y'^2(t_k^*)} \Delta t_k + \\ &+ \pi \sum_{k=0}^{n-1} (|y(t_k)| - |y(t_k^*)|) \sqrt{x'^2(t_k^*) + y'^2(t_k^*)} \Delta t_k. \end{aligned} \quad (3)$$

Оскільки  $||y(t_k)| - |y(t_k^*)|| \leq |y(t_k) - y(t_k^*)| \leq \omega_k(y)$ , а в силу неперервності  $x'$  та  $y'$  корінь  $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \leq H_1 \forall t \in [\alpha; \beta]$ , то модуль другого доданка правої частини рівності (3) не перевищує  $\pi H_1 \sum_{k=0}^{n-1} \omega_k(y) \Delta t_k$ , а це прямує до нуля, коли  $\lambda(T) \rightarrow 0$ , бо функція  $y(t)$  є  $R$ -інтегровною на  $[\alpha; \beta]$ .

Перший доданок правої частини рівності (3) є інтегральною



сумою, що складена для функції  $f(t) = \pi|y(t)|\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ . Оскільки ця функція неперервна на  $[\alpha; \beta]$ , то вона інтегровна за Ріманом на  $[\alpha; \beta]$ , а тому

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \pi \sum_{k=0}^{n-1} |y(t_k^*)| \sqrt{x'^2(t_k^*) + y'^2(t_k^*)} \Delta t_k &= \\ &= \pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \end{aligned}$$

Отже, з рівності (3) випливає, що

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S_{11}(T) = \pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Тому з рівності (2) дістаємо, що

$$\lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S_1(T) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S_{11}(T) = \pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

Аналогічно можна показати, що і  $S_2(T)$  має ту саму границю, коли  $\lambda(T) \rightarrow 0$ . Тому з рівності (1) дістаємо:

$$S = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} S(T) = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \quad (4)$$

Зокрема, якщо дуга  $\widehat{AB}$  задана явним рівнянням  $y = f(x)$ ,  $x \in [\alpha; \beta]$ , і  $f'(x)$  неперервна на  $[a; b]$ , то площу поверхні обертання можна обчислити за формулою

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)| \sqrt{1 + f'^2(x)} dx. \quad (5)$$

Якщо дуга  $\widehat{AB}$  задана рівнянням в полярних координатах:  $\rho = \rho(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ , то формула (4) набуде вигляду

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} \rho(t) |\sin t| \sqrt{\rho^2(t) + \rho'^2(t)} dt. \quad (6)$$

Формули (4) – (6) найчастіше і використовують для знаходження площі поверхні обертання. ■

**Приклад 1.** Знайдемо площу поверхні еліпсоїда обертання, що утворюється, коли еліпс  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$  обертається навколо осі  $OX$ .

Для цього зручніше скористатися параметричними рівняннями дуги еліпса, що лежить у верхній півплощині:  $x = a \cos t$ ,  $y = b \sin t$ ,  $t \in [0; \pi]$ , причому  $a \geq b > 0$ .

Маємо:  $x'(t) = -a \sin t$ ,  $y'(t) = b \cos t$ . Тому

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_0^{\pi} |b \sin t| \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt = \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} |b \sin t| \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 t} dt. \end{aligned}$$

Враховуючи невід'ємність синуса на  $[0; \pi]$ , маємо: якщо  $a > b$ , то

$$\begin{aligned} S &= 2\pi b \int_0^{\pi} \sin t \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 t} dt = \\ &= \left| \begin{array}{l} u = \sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 t} dt, \quad dv = \sin t dt \\ du = \frac{(b^2 - a^2) \cos t \sin t}{\sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 t}}, \quad v = -\cos t \end{array} \right| = \\ &= 2\pi b \left( -\sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 t} \cos t \Big|_0^{\pi} - \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{\pi} \frac{(b^2 - a^2) \cos^2 t \sin t}{\sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 t}} dt \right) = \\ &= 2\pi b \left( 2b - \int_0^{\pi} \frac{(b^2 - a^2) \cos^2 t + a^2}{\sqrt{a^2 + (b^2 - a^2) \cos^2 t}} \sin t dt + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{-b^2 + a^2}} \int_0^{\pi} \frac{a^2 d(\sqrt{-b^2 + a^2} \cos t)}{\sqrt{a^2 - (\sqrt{-b^2 + a^2} \cos t)^2}} \right) = \\ &= 4\pi b^2 - S + \frac{2\pi a^2 b}{\sqrt{-b^2 + a^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2} \cos t}{a} \Big|_0^{\pi} = \\ &= 4\pi b^2 - S + \frac{4a^2 \pi b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \Rightarrow \\ 2S &= 4\pi b^2 + 4\pi ab \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \Rightarrow \\ S &= 2\pi b^2 + 2\pi ab \cdot \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \cdot \arcsin \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}. \end{aligned}$$

Якщо  $a = b = r$ , то дістанемо відому формулу для обчислення площі сфери:  $S = 4\pi r^2$ .

**3.4.3. Обчислення маси матеріальної дуги.** Нехай уздовж спрямлюваної дуги  $\widehat{AB}$ :  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ , розподілена маса з густиною  $\mu(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ . Яким чином можна обчислити масу матеріальної дуги?

□ Щоб відповісти на поставлене питання, візьмемо розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$  точками  $t_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , і введемо позначення  $x_k = x(t_k)$ ,  $y_k = y(t_k)$ ,  $A_k = (x_k, y_k) \forall k \in \overline{0, n}$ . Довжину  $\Delta l_k$  дуги  $\widehat{A_k A_{k+1}}$  можна обчислити за формулою

$$\Delta l_k = l(t_{k+1}) - l(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} |z(t)| dt,$$

де  $z(t) = x(t) + iy(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ .

Якщо функція  $\mu(t)$  є неперервною на  $[\alpha; \beta]$ , то для досить дрібного розбиття  $T$  відрізка  $[\alpha; \beta]$  густину  $\mu(t) \forall t \in [t_k; t_{k+1}]$  можна вважати майже сталою:  $\mu(t) \approx \mu(t_k) \forall t \in [t_k; t_{k+1}]$ . Тоді масу  $m_k$  дуги  $\widehat{A_k A_{k+1}}$  можна вважати майже рівною  $\mu(t_k) \Delta l_k$ , тобто  $m_k \approx \mu(t_k) \Delta l_k$ . Тому можна вважати, що маса дуги  $\widehat{AB}$  дорівнює  $m \approx m(T) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k$ .

Звідси випливає природне означення маси матеріальної дуги:

$$m = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} m(T) = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \mu(t_k) \Delta l_k.$$

Сума  $m(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \mu(t_k) \Delta l_k$  є інтегральною сумою Стілтєса для

функції  $\mu = \mu(t)$  за функцією  $l = l(t) = \int_{\alpha}^t |z(u)| du$ . Тому, враховуючи, що  $\mu$  – неперервна функція, а  $l$  – функція обмеженої варіації, дістаємо:

$$m = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} m(T) = \int_{\alpha}^{\beta} \mu(t) dl(t).$$

Зокрема, коли  $l(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$ , то за теоремою 4 пункту 2.4.6

$$m = \int_{\alpha}^{\beta} \mu(t) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \quad (7)$$

Якщо при цьому дуга  $\widehat{AB}$  задана явним рівнянням:  $y = f(x)$ ,  $x \in [\alpha; \beta]$ , то

$$m = \int_{\alpha}^{\beta} \mu(x) \sqrt{1 + f'^2(x)} dx,$$

а якщо  $f(x) = 0 \forall x \in [\alpha; \beta]$ , тобто  $\widehat{AB} = [\alpha; \beta]$ , то

$$m = \int_{\alpha}^{\beta} \mu(x) dx$$

– це формула для обчислення маси прямолінійного стержня. ■

**3.4.4. Обчислення маси матеріальної пластини.** Визначимо тепер, як знайти масу матеріальної пластини, що має форму узгальненої трапеції (рис. 3.4.2)

$$\Phi = \{(x, y): a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}.$$

□ Припустимо, що густина  $\mu$  розподілу маси в кожній точці  $(x, y)$  залежить тільки від  $x$ , тобто  $\mu = \mu(x)$ , і  $\mu \in$  функцією, непервною на  $[a; b]$ .

Для розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$  точками  $x_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , введемо позначення:  $\Phi_k = \{(x, y): x_k \leq x \leq x_{k+1}, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$ ,  $\Delta S_k$  – площа  $\Phi_k$ , причому  $\Delta S(x_k) = S(x_{k+1}) - S(x_k)$ , де  $S(x) = \int_a^x (f_2(t) - f_1(t)) dt$ .

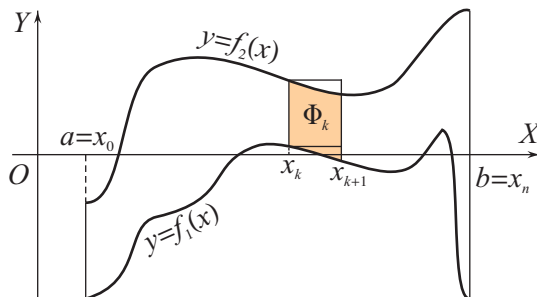


Рис. 3.4.2.

Далі, майже повторюючи міркування, наведені при обчисленні маси дуги, дістанемо формулу для обчислення маси пластини:

$$m = \int_a^b \mu(x) (f_2(x) - f_1(x)) dx. \quad (8)$$

Аналогічно можна знайти формулу для обчислення маси тіла обертання, коли густина  $\mu$  розподілу цієї маси в кожній точці  $(x, y, z)$  залежить тільки від  $x$ , тобто  $\mu = \mu(x)$ , і  $\mu$  є неперервною функцією на  $[a; b]$ :

$$m = \pi \int_a^b \mu(x) f^2(x) dx. \quad \blacksquare$$

### 3.4.5. Статичні моменти та центр маси матеріальної дуги.

Якщо маса  $m$  розподілена по площині  $OXY$  дискретно, так, що в кожній точці  $A_k = (x_k, y_k)$ ,  $k \in \overline{1, n}$ , площини  $OXY$  знаходиться маса  $m_k$  і  $m = \sum_{k=1}^n m_k$ , то *статичним моментом цієї маси відносно осі*

$OX$  (осі  $OY$ ) називають число  $M_{OX} = \sum_{k=1}^n m_k y_k$  ( $M_{OY} = \sum_{k=1}^n m_k x_k$ ).

При цьому *центром маси* називають таку точку  $(\bar{x}, \bar{y})$ , для якої  $m \cdot \bar{y} = M_{OX}$  і  $m \cdot \bar{x} = M_{OY}$ , тобто

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k x_k \quad \text{і} \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n m_k y_k.$$

Нехай тепер маса  $m$  розподілена вздовж спрямлюваної дуги  $\widehat{AB}$ :  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ , з густиною  $\mu = \mu(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ , де  $\mu$  – неперервна функція на  $[\alpha; \beta]$ . Візьмемо розбиття  $T$  відрізка  $[\alpha; \beta]$  точками  $t_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , причому  $\lambda(T) = \max_{k=1}^n \Delta x_k$  досить мале. Тоді

точки  $A_k = (x(t_k), y(t_k))$  утворюють дуги  $\widehat{A_k A_{k+1}}$ , які можна вважати однорідними, тобто сталої густини  $\mu = \mu(t_k)$ . Вважатимемо, що маса  $m_k = \mu(t_k) \Delta l_k$ , де  $\Delta l_k$  – довжина дуги  $\widehat{A_k A_{k+1}}$ , знаходиться в точці  $A_k = (x(t_k), y(t_k))$ . Тоді замість неперервного розподілу маси  $m$  маємо її дискретний розподіл, для якого

$$M_{OX}(T) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k y(t_k) = \sum_{k=0}^{n-1} y(t_k) \mu(t_k) \Delta l_k,$$

а

$$M_{OY}(T) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k x(t_k) = \sum_{k=0}^{n-1} x(t_k) \mu(t_k) \Delta l_k.$$

Тепер природно покласти за означенням, що

$$M_{OX} = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} M_{OX}(T) \quad \text{і} \quad M_{OY} = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} M_{OY}(T)$$

– статичні моменти відносно осей  $OX$  та  $OY$  маси  $m$ , розподіленої вздовж дуги  $\widehat{AB}$ .

Враховуючи неперервність функцій  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$  і  $\mu = \mu(t)$  та монотонність функції  $l(t) = \int_{\alpha}^t |z(\tau)|$ , де  $z(\tau) = x(\tau) + iy(\tau)$ ,  $\tau \in [\alpha; \beta]$ , дістаємо формули для обчислення статичних моментів маси  $m$ , розподіленої вздовж дуги  $\widehat{AB}$ :

$$M_{OX} = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\mu(t) dl(t), \quad M_{OY} = \int_{\alpha}^{\beta} x(t)\mu(t) dl(t)$$

та координат центра мас:

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_{\alpha}^{\beta} x(t)\mu(t) dl(t), \quad \bar{y} = \frac{1}{m} \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\mu(t) dl(t).$$

Зокрема, якщо  $l(t) = \int_{\alpha}^t \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau)} d\tau$ , то

$$\left. \begin{aligned} M_{OX} &= \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\mu(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt, \\ M_{OY} &= \int_{\alpha}^{\beta} x(t)\mu(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt, \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{m} \int_{\alpha}^{\beta} x(t)\mu(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt, \\ \bar{y} &= \frac{1}{m} \int_{\alpha}^{\beta} y(t)\mu(t)\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt. \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

**3.4.6. Статичні моменти та центр маси матеріальної пластини.** Нехай маса  $m$  розподілена по узагальненій криволінійній трапеції

$$\Phi = \{(x, y): x \in [a; b], f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

так, що в кожній точці  $(x, y)$  густина  $\mu$  розподілу маси залежить тільки від  $x$ , тобто  $\mu = \mu(x)$ ,  $x \in [a; b]$ , і  $\mu$  є неперервною функцією на  $[a; b]$ .

Якщо розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$  точками  $x_k$ ,  $k \in \overline{0, n}$ , досить дрібно, то частина  $\Phi_k$  фігури  $\Phi$  (рис. 3.4.2) мало відрізняється від прямокутника з основою  $\Delta x_k$  і висотою  $f_2(x_k) - f_1(x_k)$ , а густина  $\mu = \mu(x)$  мало відрізняється від  $\mu(x_k)$ .

Отже,  $\Phi_k$  можна вважати однорідним матеріальним прямокутником, маса якого  $m_k = \mu(x_k)(f_2(x_k) - f_1(x_k))\Delta x_k$ , а центр мас знаходиться в точці  $A_k = (\bar{x}_k, \bar{y}_k)$ , де  $\bar{x}_k = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$ ,  $\bar{y}_k = \frac{1}{2}(f_2(x_k) + f_1(x_k))$ .

Тоді замість неперервного розподілу маси маємо її дискретний розподіл, для якого

$$M_{OX}(T) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} (f_2^2(x_k) - f_1^2(x_k)) \mu(x_k) \Delta x_k,$$

а

$$M_{OY}(T) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} (x_k + x_{k+1}) ((f_2(x_k) - f_1(x_k)) \mu(x_k) \Delta x_k).$$

Далі природно покласти за означенням, що

$$M_{OX} = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} M_{OX}(T) \quad \text{і} \quad M_{OY} = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} M_{OY}(T)$$

– статичні моменти відносно координатних осей матеріальної пластини  $\Phi$ .

З цього означення неважко дістати формули для обчислення статичних моментів:

$$\left. \begin{aligned} M_{OX} &= \frac{1}{2} \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) \mu(x) dx, \\ M_{OY} &= \frac{1}{2} \int_a^b x (f_2(x) - f_1(x)) \mu(x) dx \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

і координат центра мас пластини  $\Phi$ :

$$\left. \begin{aligned} \bar{x} &= \frac{1}{m} \int_a^b x (f_2(x) - f_1(x)) \mu(x) dx, \\ \bar{y} &= \frac{1}{2m} \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) \mu(x) dx. \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

Зокрема, якщо  $\Phi = \{(x, y): x \in [a; b], 0 \leq y \leq f(x)\}$  – криволінійна трапеція, то

$$\bar{x} = \frac{1}{m} \int_a^b x f(x) \mu(x) dx, \quad \bar{y} = \frac{1}{2m} \int_a^b f^2(x) \mu(x) dx,$$

де  $m = \int_a^b \mu(x) f(x) dx$ .

### 3.4.7. Теорема Гульдіна.

□ Якщо  $\mu = \mu(t) \equiv \text{const}$ , тобто матеріальна дуга  $\widehat{AB}$  є однорідною, і  $y(t) \geq 0 \forall t \in [\alpha; \beta]$  або  $y(t) \leq 0 \forall t \in [\alpha; \beta]$  то, враховуючи формули (7) і (9), дістаємо:

$$|\bar{y}| \cdot \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt \Leftrightarrow$$

$$2\pi|\bar{y}|L = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |y(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = S,$$

де  $L$  – довжина дуги  $\widehat{AB}$ , а  $S$  – площа поверхні, яка утворюється шляхом обертання дуги  $\widehat{AB}$  навколо осі  $OX$ . ■

Таким чином, доведено таку теорему.

**Перша теорема Гульдіна.** *Площа поверхні, що утворюється шляхом обертання навколо осі  $OX$  однорідної матеріальної дуги  $\widehat{AB}$ , яка не перетинає вісь  $OX$ , дорівнює добутку довжини цієї дуги на довжину кола, яке описує при цьому обертанні центр мас дуги  $\widehat{AB}$ .*

□ Припустимо, що узагальнена криволінійна трапеція

$$\Phi = \{(x, y): x \in [a; b], 0 \leq f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

є однорідною матеріальною пластиною, тобто  $\mu(x) = \text{const}$  на  $[a; b]$ . Тоді з формул (8) і (12) дістаємо:

$$2\bar{y} \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx = \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx \Leftrightarrow$$

$$2\pi\bar{y}S = \pi \int_a^b (f_2^2(x) - f_1^2(x)) dx \Leftrightarrow 2\pi\bar{y}S = V,$$

де  $S$  – площа узагальненої криволінійної трапеції  $\Phi$ ,  $V$  – об'єм тіла, що утворюється шляхом обертання цієї трапеції навколо осі  $OX$ , а  $2\pi\bar{y}$  – довжина кола, яке описує при цьому обертанні центр мас пластини  $\Phi$ . ■

Отже, доведена наступна теорема.

**Друга теорема Гульдіна.** *Об'єм тіла, що утворюється шляхом обертання навколо осі  $OX$  однорідної матеріальної пластини, що має форму узагальненої криволінійної трапеції, яка не перетинає*



вісь  $OX$ , дорівнює добутку площі цієї пластини на довжину кола, що описує при цьому обертанні центр мас пластини.

Проілюструємо застосування теорем Гульдїна.

**Приклад 2.** Розглянемо однорідну матеріальну пластину, що має форму півкруга  $K = \{(x, y): -r \leq x \leq r, 0 \leq y \leq \sqrt{r^2 - x^2}\}$ . Тоді півколо  $\Gamma = \{(x, y): -r \leq x \leq r, y = \sqrt{r^2 - x^2}\}$  є однорідною матеріальною дугою.

Якщо обертати  $K$  навколо осі  $OX$ , то дістанемо кулю, площа поверхні якої  $S = 4\pi r^2$ , а об'єм  $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ . З міркувань симетрії та однорідності центр мас півкруга  $K$  лежить у точці  $(0, \bar{y}_2)$ , а а центр мас півкола  $\Gamma$  – у точці  $(0, \bar{y}_1)$ . За першою та другою теоремами Гульдїна відповідно маємо

$$2\pi\bar{y}_1 \cdot \pi r = 4\pi r^2 \quad \text{і} \quad 2\pi\bar{y}_2 \cdot \frac{\pi r^2}{2} = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow$$

$$\bar{y}_1 = \frac{2r}{\pi}, \quad \text{а} \quad \bar{y}_2 = \frac{4r}{3\pi}.$$

**Приклад 3.** Якщо круг  $K = \{(x, y): x^2 + (y - d)^2 \leq r^2\}$ , де  $r \leq d$ , обертати навколо осі  $OX$ , то дістанемо, так званий *тор* (бублик) (рис. 3.4.3).

Коли дивитися на круг  $K$  як на однорідну матеріальну пластину, то і на межу круга – коло  $\Gamma$  – можна дивитися як на однорідну матеріальну дугу.

Центром мас і круга  $K$ , і дуги  $\Gamma$  є точка  $(0, d)$ , довжина кола  $\Gamma$  дорівнює  $L_\Gamma = 2\pi r$ , а площа круга  $K$  дорівнює  $S_K = \pi r^2$ .

Тоді за першою теоремою Гульдїна площа поверхні тора

$$S = 2\pi d \cdot 2\pi r = 4\pi^2 r d,$$

а за другою теоремою Гульдїна об'єм тора становить

$$V = 2\pi d \cdot \pi r^2 = 2\pi^2 r^2 d.$$

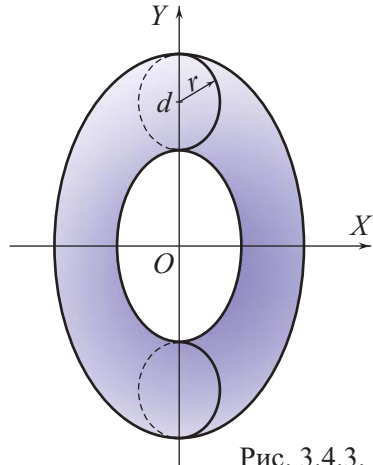


Рис. 3.4.3.

**3.4.8. Використання комп'ютерних засобів математики.** За допомогою комп'ютерних засобів можна ефективно і швидко розв'язувати прикладні задачі, які розглядалися у даному підрозділі. Це пов'язано з тим, що всі ці задачі базуються на певних інтегральних формулах.

**3.4.8.1. Використання Gran1.** Як зазначалося у попередньому підрозділі, за програмою Gran1 можна одночасно з об'ємом тіла обертання обчислювати наближено і площу його поверхні. При цьому дуга, що обертається, повинна бути задана явним рівнянням.

Цікавою ілюстрацією, яку просто виконати за допомогою програми Gran1, є зображення деякої поверхні обертання, а поряд з нею – плоскої фігури (зокрема прямокутника) з такою самою площею.

Наприклад, знайдемо площу поверхні, яка утворюється при обертанні параболу  $y = \sqrt{x}$ ,  $x \in [0; 4]$ , навколо осі  $OX$ .

Для цього спочатку задамо саму параболу, після чого знайдемо до меню  >  > "Об'єм та площа поверхні обертання, вісь  $Ox...$ ". У результаті знайдемо площу параболоїда обертання:  $S = 36.2149$ .

Далі обчислимо цю саму площу за формулою (5), тобто задавши функцію  $y = 2\pi\sqrt{x}\sqrt{1 + \frac{1}{4x}}$ ,  $x \in [0; 4]$ , і обчисливши інтеграл від неї:  $I = 36.1736$ . Звернемо увагу, що отримані двома способами результати не ідентичні, хоча близькі. Площа фігури, що лежить під графіком останньої функції, дорівнює (принаймні повинна) площі першого параболоїда обертання.

Якщо ж потрібно побудувати прямокутник, який має площу, рівну площі параболоїда, і спирається на відрізок  $[0; 4]$  (див. рис. 3.4.4), то зауважимо, що він буде лежати під графіком сталої функції  $y = 36.2149 : 4$ , тобто  $y = 9.05$ .

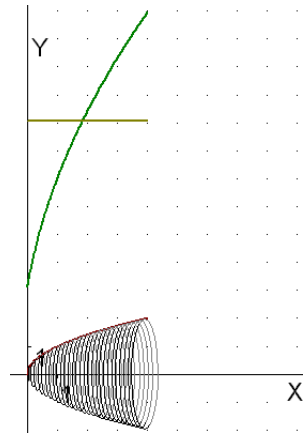


Рис. 3.4.4.

**3.4.8.2. Використання Maxima.** За допомогою програми Maxima можна швидко впоратися з відшукуванням різних геометричних і фізичних величин, яке зводиться до обчислення певних інтегралів. Так, для відшукування площі поверхні еліпсоїда обертання, який було розглянуто в якості прикладу 1 у пункті 3.4.2, досить ввести команди:

```
(%i1) apply(assume,[a>0,b>0,a>b])$
```

```
(%i2) integrate(2*%pi*b*sin(t)*sqrt(a^2*sin(t)^2+b^2*cos(t)^2),t,0,%pi);
```

```
(%o2) 2πb ( b - (2a^2√(a^2-b^2)asin(√(a^2-b^2)/a)) / (2b^2-2a^2) )
```

Тепер знайдемо площу поверхні тора, розглянутого у прикладі 3 пункту 3.4.7, але не за першою теоремою Гульдіна, а безпосередньо за формулою (5):

```
(%i3) f:d+sqrt(r^2-x^2)$
```

```
(%i4) S1:integrate(2*%pi*f*sqrt(1+(diff(f,x))^2),x,-r,r);
```

```
Is r positive or negative? p;
```

```
(%o4) 2π(2r^2 + πdr)
```

```
(%i5) g:d-sqrt(r^2-x^2)$
(%i6) S2:integrate(2*%pi*g*sqrt(1+(diff(g,x))^2),x,-r,r);
Is r positive or negative? p;
(%o6) 2π(πdr - 2r2)
(%i7) S1+S2,expand;
(%o7) 4π2dr
```

**3.4.8.3. Використання MathCAD.** Проілюструємо застосування програми MathCAD на такому прикладі.

Знайдемо центри мас однорідної кривої  $\Gamma: y = 4 - x^2, x \in [-2; 2]$ , і відповідної їй однорідної криволінійної трапеції  $\Phi: 0 \leq y \leq 4 - x^2, x \in [-2; 2]$ .

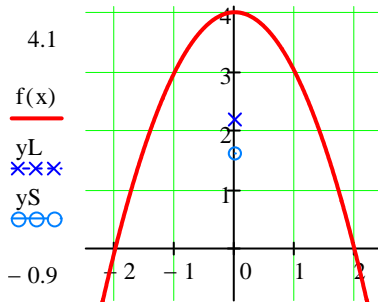
Пропонуємо робочий аркуш з розв'язанням даної задачі.

$$f(x) := 4 - x^2 \quad a := -2 \quad b := 2$$

$$L := \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2} dx \quad S := \int_a^b f(x) dx$$

$$yL := \frac{1}{L} \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{d}{dx}f(x)\right)^2} dx \quad yS := \frac{1}{2S} \cdot \int_a^b f(x)^2 dx$$

$$L = 9.294 \quad S = 10.667 \quad yL = 2.177 \quad yS = 1.6$$



a-0.5    x,0,0    b+0.5    Рис. 3.4.5.

При розв'язуванні цієї задачі було враховано симетричність кривої  $\Gamma$  і трапеції  $\Phi$  відносно осі  $OY$ , внаслідок чого очевидно, що центри їхніх мас лежать на цій осі, тобто  $xL = xS = 0$ .

На рисунку 3.4.5 центр мас кривої позначено хрестиком:  $\times$ , а центр мас трапеції – кружечком:  $\circ$ . На перший погляд могло здаватися, що центри мас кривої і трапеції повинні збігатися.

За допомогою MathCAD можна швидко отримати чисельний розв'язок даної задачі, але отримати точний розв'язок досить складно. Наприклад, при спробі точно обчислити координату  $yL$  (пов'язану з доволі складним інтегралом) комп'ютер “зависає”. В той же час за програмою MathCAD швидко знаходиться  $yL$  і в точних виразах.

**3.4.9. Історичні відомості.** Майже до кінця XIX сторіччя математики вважали, що поняття площі кривої поверхні можна ввести як певну границю площі многогранних поверхонь, вписаних у дану криву поверхню, коли грані многогранних поверхонь стягуються в точку. Але в 1880 році німецький математик Карл Шварц навів приклад многогранної поверхні, вписаної в бічну поверхню кругового циліндра, таку, що площа цієї многогранної поверхні не прямувала до площі бічної поверхні циліндра, коли грані многогранної поверхні стягувалися в точку. Цей приклад показав більш складну природу поняття площі кривої поверхні, порівняно з поняттями площі плоскої фігури і довжини дуги.

Теореми Гульдїна опубліковані швейцарським математиком Паулем Гульдїном (1577–1643) у його трактаті “Про центр ваги” в 1635–1641 роках. Але по суті ці теореми були відомі вже давньогрецькому математику Паппу Александрійському (друга половина III ст. до н.е.).

**3.4.10. Зв’язок із шкільним курсом математики.** З фактів, розглянутих у цьому та попередніх підрозділах, впливає така *схема застосування інтегрального числення до розв’язування практичних задач*:

1) впевнитися, що шукана геометрична або фізична величина  $W$  пов’язана з відрізком  $[a; b]$ , тобто  $W = W([a; b])$ , причому частині відрізка  $[a; b]$  відповідає частина величини  $W$  і  $W$  задовольняє адитивну властивість:  $W[a; b] = \sum_{k=0}^{n-1} W([x_k; x_{k+1}]) = \sum_{k=0}^{n-1} W_k$  для будь-якого розбиття  $T$  відрізка  $[a; b]$  точками  $x_k, k \in \overline{0, n}$ ;

2) знайти придатне наближення вигляду  $\Delta W_k = \omega_k \Delta x_k$  частини  $\Delta W_k$  величини  $W$ , де  $\omega_k = \omega(x_k^*)$  – значення деякої відомої величини  $\omega = \omega(x), x \in [a; b]$ ;

3) дістати наближення потрібної величини  $W = W([a; b])$  у вигляді 
$$W \approx \sum_{k=0}^{n-1} \omega(x_k^*) \Delta x_k;$$

4) покласти за означенням, що  $W = \lim_{\lambda(T) \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{n-1} \omega(x_k^*) \Delta x_k$  і дістати

формулу для обчислення величини  $W$ , а саме: 
$$W = \int_a^b \omega(x) dx.$$

При цьому важливим є те, що перш ніж вести мову про обчислення якоїсь величини  $W$ , треба знати, що слід розуміти під цією величиною. У наведеній схемі і визначається величина  $W$ , і дається формула для її обчислення.

**3.4.11. Постановка проблеми.** Важливими проблемами є проблема визначення поняття поверхні, загальнішого за поняття поверхні обертання, проблема визначення площі довільної поверхні, яка може не бути поверхнею обертання, та проблема обчислення площі цієї поверхні.

**3.4.12. Контрольні запитання і завдання.**

I. Визначити, чи правильні наступні твердження.

1. Поверхня обертання є множиною точок з простору  $\mathbb{R}^3$ .
2. Кожна множина точок з простору  $\mathbb{R}^3$  є поверхнею обертання.
3. Якщо  $y = f(x)$ ,  $x \in [a; b]$ , – неперервна невід’ємна функція на відрізку  $[a; b]$ , то множина  $P = \{(x, y, z): y^2 + z^2 = f^2(x) \forall x \in [a; b]\}$  є поверхнею обертання.
4. Поняття площі поверхні обертання визначається через поняття площі бічної поверхні зрізаного конуса.
5. З формули (5) можна дістати формули для обчислення площі бічної поверхні зрізаного конуса, конуса та циліндра.
6. Маса довільної матеріальної дуги прямо пропорційна її довжині.
7. Маса довільної однорідної матеріальної пластини прямо пропорційна її площі.
8. Центром маси  $m$ , розподіленої по фігурі  $\Phi$ , називають таку точку  $(\bar{x}, \bar{y})$ , що коли масу  $m$  помістити в точку  $(\bar{x}, \bar{y})$ , то утвориться матеріальна точка, статичні моменти якої відносно координатних осей рівні відповідним статистичним моментам матеріальної фігури  $\Phi$ .
9. В теоремах Гульдіна вісь  $OX$  не перетинає відповідну фігуру (дугу або пластину) в тому розумінні, що ця фігура цілком лежить у верхній або нижній півплощині площини  $OXY$ .
10. Якщо вісь  $OX$  перетинає дугу  $\widehat{AB}$  з першої теореми Гульдіна, то твердження цієї теореми може бути неправильним.

II. Довести дані твердження.

1. Якщо ланцюгову лінію  $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ ,  $x \in [0; a]$ , обертати навколо осі  $OX$ , то площа  $S$  відповідної поверхні обертання та об’єму  $V$  тіла, що обмежене цією поверхнею, пов’язані співвідношенням  $\frac{a}{2} \cdot S = V$ .
2. Теореми Гульдіна незастосовні до кола  $x^2 + y^2 = r^2$  та до обмеженого цим колом круга.

3. Якщо кусково гладку дугу  $\widehat{AB}$ :  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $t \in [\alpha; \beta]$ , обернати навколо осі  $OY$ , то утвориться поверхня, площа якої

$$S = 2\pi \int_{\alpha}^{\beta} |x(t)| \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt.$$

III. Наступні задачі розв'язати за допомогою комп'ютерних засобів математики.

1. Самостійно задати криву; утворити поверхні  $P_x$  та  $P_y$  шляхом обертання цієї кривої навколо осі  $OX$  та  $OY$  відповідно; обчислити площі цих поверхонь.
2. Для самостійно заданої однорідної матеріальної кривої знайти координати центра мас і перевірити, чи виконується для неї перша теорема Гульдіна.
3. Для самостійно заданої однорідної матеріальної пластинки знайти координати центра мас і перевірити, чи виконується для неї друга теорема Гульдіна. Виконати відповідні рисунки.

## Література

1. *Давидов М. О.* Курс математического анализа. Ч. 1. – К.: Вища школа, 1990. – 384 с.
2. *Давыдов Н. А., Коровкин П. П., Никольский В. Н.* Сборник задач по математическому анализу. – М.: Просвещение, 1973. – 256 с.
3. *Коровкин П. П.* Математический анализ. Т. 1. – М.: Учпедгиз, 1963. – 400 с.
4. *Жалдак М. І., Горошко Ю. В., Вінниченко Є. Ф.* Математика з комп'ютером. – Київ: РННЦ “ДНІТ”, 2009. – 282 с.
5. *Кудрявцев Л. Д.* Математический анализ. Т. 1. – М.: Высшая школа, 1988. – 712 с.
6. *Ляшко И. И., Емельянов В. Ф., Боярчук А. К.* Основы классического и современного анализа. – К.: Вища школа, 1988. – 592 с.
7. *Маркушевич А. И., Маркушевич Л. А.* Введение в теорию аналитических функций. – М.: Просвещение, 1977. Наука, 1967. – 486 с.
8. Математичний аналіз у задачах і прикладах: У 2-х ч. Навч. посіб. / *Л. І. Дюженкова, Т. В. Колесник, М. Я. Лященко та ін.* – К.: ВШ, 2002. – Ч.1. – 462 с.
9. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.
10. *Немыцкий В., Слудская М., Черкасов А.* Курс математического анализа. Т. 1 – Москва – Ленинград: Гос. изд.-во тех.-теор. лит., 1940. – 460 с.
11. *Погорелов О. В.* Геометрія. 7–9 клас. – К.: Школяр, 2004. – 240 с.
12. *Погорелов О. В.* Геометрія. 10–11 клас. – К.: Школяр, 2006. – 128 с.
13. *Прасолов В. В.* Неэлементарность некоторых интегралов элементарных функций // Математическое просвещение, сер. 3, вып. 7, 2003. – С. 126 – 135.

14. *Райков Д. А.* Одномерный математический анализ. – М.: Вища школа, 1982.
15. *Рудин У.* Основы математического анализа. – М.: Мир, 1966.
16. *Соколов Ю. Д.* Елементи теорії функцій комплексної змінної. – К.: Рад. школа, 1954.
17. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. 2. – М.: Наука, 1966. – 800 с.
18. *Чебышев П. Л.* Избранные труды. – М.: Изд.-во АН СССР, 1955. – 928 с.
19. *Шиманський І. Е.* Математичний аналіз. – К.: Вища школа, 1972.
20. *Шкіль М. І.* Математичний аналіз. Ч. 1. – К.: Вища школа, 2005. – 448 с.



## Іменний та предметний покажчик

- Адитивність довжини** 196  
–  $NL$ -інтеграла 13  
– об'єму 233  
– площі 223  
–  $R$ -інтеграла 112
- Алгоритм інтегрування раціональної функції** 48  
– – комплексної – – 50
- Антифонт** 102
- Архімед** 102
- Біном диференціальний** 53  
Буняковський В. Я. 145
- Валліс Д.** 102
- Вираз підінтегральний** 12
- Відрізок орієнтований** 12, 193
- Властивості квадровних фігур і площі** 223  
– кубовних фігур і об'єму 232  
–  $NL$ -інтеграла 13  
– сум Дарбу 82
- Геометричний зміст  $NL$ -інтеграла** 36  
– –  $R$ -інтеграла 81
- Гіппократ Хіоський** 102
- Границя інтегральної суми** 77
- Грегори Д.** 102
- Гульдін П.** 260
- Дарбу Ж.** 102
- Демокріт** 102
- Диференціал довжини дуги** 201
- Довжина дуги** 194
- Достатні умови  $R$ -інтегровності** 90  
– –  $S_g$ -інтегровності 180
- Дріб елементарний** 46, 50
- Дрібність розбиття** 75
- Дуга кривої** 193  
– гладка 201  
– замкнена 193  
– кусково-гладка 201  
– проста 191  
– спрямлювана 194
- Дюбуа-Реймон П.** 102
- Евдокс Кнідський** 102
- Ейлер Л.** 44
- Жордан К.** 216
- Заміна змінної в  $NL$ -інтегралі** 19  
– – у  $R$ -інтегралі 117
- Інтеграл визначений** 77  
– від диференціального бінома 53  
– Дарбу верхній 85  
– – нижній 85  
– імовірності 56  
– невизначений 15  
– невластний 148  
– збіжний 149  
– збіжний абсолютно 152
- Ньютона – Лейбніца, або  $NL$ -інтеграл** 11
- Рімана, або  $R$ -інтеграл** 77
- Стілтєса, або  $S_g$ -інтеграл** 174
- Френеля** 56
- Інтегральна ознака збіжності ряду** 154  
– сума Рімана 77  
– сума Стілтєса 174
- Інтегральний логарифм** 56  
– синус 56
- Інтегровна функція за Ріманом** 77  
– – – Стілтєсом 175
- Інтегровність добутку** 109

- Інтегровність модуля 107  
 Інтегрування методом розкладання  
   у степеневий ряд 56  
 – частинами  $NL$ -інтеграла 21  
 – – інтеграла визначеного 118  
 – – – невизначеного 21  
 – – – Стільгеса 176
- Кавальєрі Б.** 102  
 Кардіоїда 192  
 Квадровна фігура 220  
 Кеплер І. 102  
 Контур 193  
 Координати точки кривої 189  
 Коші О. 44  
 Крива 189  
 – без точок самоперетину 191  
 – Жордана 191  
 – параметрична 189  
 – проста 191  
 Кривина дуги 217  
 Криволінійна трапеція 36  
 – – узагальнена 225  
 Криволінійний сектор 227  
 Критерій квадровності 221 – 223  
 – кубовності 233  
 – спрямлюваності дуги 195, 197  
 –  $R$ -інтегровності 86, 87  
 Кубовна фігура 232
- Лагранж Ж.** 27  
**Лебег А.** 102  
**Лежандр А.** 73  
**Лейбніц Г.** 27  
 Лінійність  $NL$ -інтеграла 18  
 –  $R$ -інтеграла 105  
**Ліувілл Ж.** 73
- Майже  $R$ -інтегровна функція** 89  
 Метод інтегрування частинами 21  
 – заміни змінної 20  
 Міра Жордана плоскої фігури 220  
 – – просторової фігури 232
- Міра Жордана множини 233  
 Множина лінійно зв'язна 11  
 – нульової довжини 89  
 Монотонність  $R$ -інтеграла 106  
 – площі 224
- Необхідна умова  $R$ -інтегровності**  
 82
- Нерівність Коші – Буняковського  
 108, 109, 179
- Ньютон І.** 27
- Об'єм просторової фігури** 232  
 – внутрішній 232  
 – зовнішній 232  
 – тіла обертання 236
- Основні властивості довжини 198  
 – – квадровних фігур і площі 223  
 – – кубовних фігур і об'єму 233  
 – – міри 233
- Паскаль Б.** 102  
**Первісна** 10  
 Підстановки Ейлера 53  
 – Чебишова 53
- Площа криволінійної трапеції 76  
 – плоскої фігури 220  
 – – – внутрішня 220  
 – – – зовнішня 220  
 – поверхні обертання 247
- Поверхня обертання 246
- Принцип Кавальєрі 231, 236
- Проміжні точки 77
- Проста фігура 219, 232
- Радіус кривини** 217
- Рівняння кривої нормальне 202  
 – – параметричне в дійсній формі  
 189  
 – – – в комплексній формі 189  
 – – явне 190  
 – – в полярних координатах 190
- Ріман Б.** 102  
 $R$ -інтегровна функція 77

- Річ Р. 73
- Розбиття відрізка 75
- прямокутника 218
  - паралелепіпеда 232
- Статичні моменти** 253, 255
- Стілтєс Т. 187
- Сума Дарбу верхня 82
- – нижня 82
  - інтегральна 77
  - Дарбу – Стілтєсса 177
- Таблиця основних інтегралів** 15
- Теорема про  $NL$ -інтегровність граничної функції 33
- – – ламаної функції 32
  - – – неперервної функції 36
  - – зв'язок  $NL$ -інтеграла з  $R$ -інтегралом 79
  - – почленне диференціювання функціонального ряду 35
  - – – інтегрування функціонального ряду 35, 115
  - – середнє 110
- Теорема Гульдїна 256
- Тїло кубовне, або вимїрне за Жорданом 232
- обертання 236
- Торрічелї Е. 102
- Точка кривої 189
- Умова Ліпшїца** 114
- Фїгура вимїрна, або квадратна** 220
- елементарна 218
  - кубовна 232
  - невимїрна, або неквадратна 220
  - некубовна 232
  - плоска 218
  - проста 219, 232
  - просторова 231
- Формула Ньютона – Лейбнїца 13
- – – для  $R$ -інтеграла 79
- Формула Тейлора 29
- Формули для обчислення довжини дуги 199, 200
- – – площї 226, 229
  - – – об'єму 236
- Функція алгебраїчна 53
- Дїрїхле 81
  - інтегровна за Рїманом, або  $R$ -інтегровна 77
  - – – Ньютоном – Лейбнїцом, або  $NL$ -інтегровна 11
  - – – Стїлтєсом або  $S$ -, або  $S_g$ -інтегровна 175
  - ірраціональна 52
  - ламана 30
  - майже інтегровна 89
  - підінтегральна 12
  - раціональна 46
  - – від  $n$  змінних 52
  - трансцендентна 53
- Ферма П. 102
- Центр маси матеріальної дуги** 254
- – – пластини 255
- Цилїндр прямиий 233
- круговий 233
- Чебишов П. Л.** 73
- Шварц К.** 145