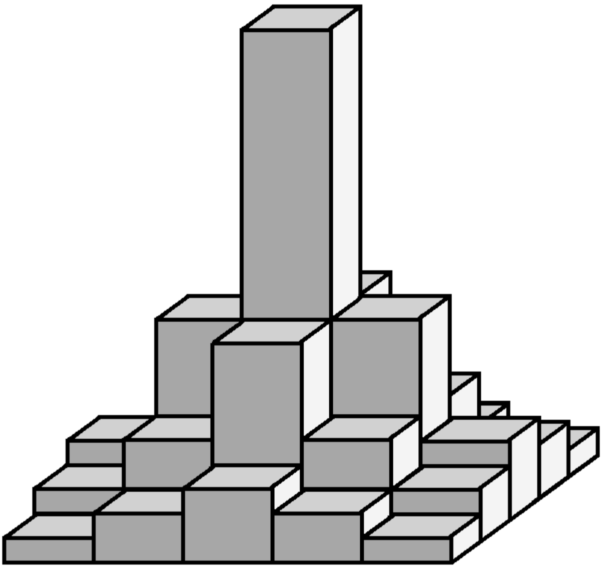
М.І. Жалдак
Г.О. Михалін
І.М. Біляй

ПОЧАТКИ СТОХАСТИКИ

Факультативний курс
для учнів старшої школи



М.І. Жалдак, Г.О. Михалін, І.М. Біляй

ПОЧАТКИ СТОХАСТИКИ

Факультативний курс
для учнів старшої школи

Київ 2014

УДК 519.2:004(076)
ББК 22.17я78
Ж 24

Початки стохастики.
Факультативний курс для учнів старшої школи. М.І. Жалдак, Г.О. Михалін, І.М. Біляй.

В посібнику подано основи стохастики – однієї з підвалин теоретичних основ інформатики. Введення основних понять стохастики базується на використанні однієї з ймовірнісних мір – статистичної ймовірності (відносної частоти) $P_n^*(A)$ відбування події A в серії із n проведених випробувань. Це дає можливість вивчати одночасно і теоретичні основи стохастики, і елементи математичної статистики.

Посібник призначено для учнів старшої школи, які поглиблено вивчають математику, беруть участь в роботі наукових гуртків, секцій Малої академії наук, олімпіадах. Посібник може бути корисним також студентам коледжів, вищих навчальних закладів I-II рівнів акредитації, де вивчають математику, студентам фізико-математичних та інформатичних факультетів педагогічних університетів, вчителям математики.

Рецензенти:
доктор педагогічних наук, професор Семеріков С.О.
доктор фізико-математичних наук, професор Торбін Г.М.
доктор педагогічних наук, професор Триус Ю.В.

РОЗДІЛ 1. ВИПАДКОВІ ПОДІЇ. ЙМОВІРНІСНІ МІРИ

1.1. Стохастичні випробування. Простір елементарних подій

Для дослідження всеможливих процесів і явищ люди часто вдаються до спеціальним чином організованих спостережень чи випробувань. Результати таких випробувань іноді є непередбачуваними. *Випробування,* точні результати яких передбачити неможливо, називають *стохастичними* або *випадковими.* Разом з тим кожному стохастичному випробуванню відповідає певна *множина* Ω *його можливих наслідків*. Ця множина Ω називається *множиною* або *простором елементарних подій*, а її елементи називаються *елементарними подіями*. При цьому результатом проведення кожного випробування є один єдиний наслідок – відбувається одна єдина елементарна подія із множини Ω всіх елементарних подій. Іншими словами, *в результаті кожного проведення випробування із множини* Ω *немов би вибирається один єдиний елемент* E *– відбувається елементарна подія* E.

Приклад 1.1.1. Грані кубика пофарбовано різними кольорами: одна грань біла, ще одна грань червона, інші чотири грані зелені. При підкиданні кубика фіксується колір грані, якою кубик впаде догори. Тоді множина $\Omega = \{$”біла”, “червона”, “зелена”$\}$ є множиною можливих наслідків випробування, тобто простором із трьох елементарних подій.

Приклад 1.1.2. Всі грані кубика пофарбовано в білий колір. При підкиданні кубика фіксується колір грані, якою кубик впаде догори. Тоді множина $\Omega = \{$”біла”$\}$ містить один єдиний елемент, а тому в даному випробуванні можливий один єдиний наслідок – верхня грань біла.

Якщо грані кубика пофарбовані в два кольори – тоді наслідків у випробуванні наведеного типу буде два, якщо в три кольори – наслідків буде три, і т.д., якщо шість кольорів – наслідків буде шість (при цьому мається на увазі, що на кожній грані є лише один колір).

Приклад 1.1.3. Підкидаються два кубики і фіксується пара кольорів: колір грані, якою догори впав перший кубик, і колір грані, якою догори впав другий кубик. При цьому кожну грань першого кубика пофарбовано одним із трьох кольорів – білий, зелений, червоний, так само як і кожну грань другого кубика пофарбовано одним із тих самих трьох кольорів. Тоді простором елементарних подій є множина

$$\Omega = \{(k_1, k_2) : k_1 \in \{\text{білий}, \text{зелений}, \text{червоний}\};$$
$$k_2 \in \{\text{білий}, \text{зелений}, \text{червоний}\}\}.$$

У цьому разі елементарні події можна інтерпретувати як усі можливі впорядковані пари кольорів (k_1, k_2), де $k_1 \in \{$білий, зелений, червоний$\}$, тобто один з кольорів, якими пофарбовано грані першого кубика, $k_2 \in \{$білий, зелений, червоний$\}$, тобто один з кольорів, якими пофарбовано грані другого кубика. Так, елементарна подія $(б, ч)$ полягає в тому, що перший кубик падає догори білою гранню, а другий – червоною.

Множину всеможливих впорядкованих пар (k_1, k_2) таких, що $k_1 \in A$, $k_2 \in B$, де змінна k_1 набуває всіх можливих значень із множини A, і при кожному значенні k_1 змінна k_2 набуває всіх можливих значень із множини B, називають *декартовим добутком множин A і B* і позначають $A \times B$.

Очевидно, з підкиданням кубика можна пов'язати простори елементарних подій з одним, двома, трьома, чотирма, п'ятьма, шістьма можливими наслідками випробовування. Якщо на гранях кубика нанесені цифри від 1 до 6 і якщо поділити множину $\{"1","2","3","4","5","6"\}$ на деяку кількість підмножин $H_1, H_2, ..., H_k$, $1 \le k \le 6$, таких, що $H_i H_j = \varnothing$ при $i \ne j$, тобто дві різні множини H_i та H_j не містять спільних елементів, а об'єднанням усіх множин H_i, $i \in \overline{1, k}$, є дана множина $\{"1","2","3","4","5","6"\}$, та вважати єдино можливими наслідками випробування попадання в такі підмножини H_i, $i \in \overline{1, k}$, тоді простір Ω елементарних подій міститиме k можливих наслідків випробовування, $1 \le k \le 6$.

Приклад 1.1.4. Підкидаються два кубики, на гранях яких нанесені цифри від 1 до 6, і як результат випробування фіксують сумарну кількість очок на двох кубиках. Тоді простором елементарних подій буде множина $\Omega = \{2, 3, 4, ..., 11, 12\}$.

У розглянутих прикладах простір елементарних подій був скінченним. Проте можливі випадки, коли множина Ω нескінченна.

Приклад 1.1.5. В круглу мішень радіуса 1, яку можна вважати множиною точок (x, y) таких, що $x^2+y^2 \le 1$, виконується один постріл. При цьому попадання кулі за межі мішені неможливе. Тоді множина $\Omega=\{(x, y): x^2+y^2\leq 1\}$ є множиною можливих наслідків випробування: через точки (x, y), в які може влучити куля, визначаються відповідні елементарні події в даному випробуванні.

Можна навести багато інших прикладів стохастичних явищ у фізиці, біології, метеорології, масовому виробництві, в системах автоматичного управління, медицині тощо.

Якщо проводити велику серію спостережень за випадковим явищем, перебіг якого при кожному спостереженні відбувається за одних і тих самих умов, можна помітити деякі закономірності стосовно частот відбування певних випадкових подій, пов'язаних із спостережуваним явищем. В стохастиці вивчаються саме такі закономірності.

У подальшому вважатимемо, що *випробування полягає в тому, що з деякої множини елементів навмання, незалежно від спостерігача, вибирається один окремий елемент. Поява того чи іншого елемента ототожнюється з відбуванням відповідної елементарної події, яка полягає в тому, що вибрано саме цей елемент.*

Поняття елементарної події та простору елементарних подій належать до основних понять стохастики і не означаються через простіші поняття.

Задачі

1.1.1. Перевірити чи правильні твердження:

1. Кожному випробуванню відповідає певний простір елементарних подій.
2. Кожна множина Ω є простором елементарних подій для деякого випробування.
3. Елементи кожної множини Ω повинні бути точками деякого координатного простору з координатами, якими характеризується місце розташування точок в такому просторі.
4. Поняття елементарної події і простору елементарних подій є означуваними поняттями.

1.1.2. Для даного випробування вказати можливі множини Ω елементарних подій (можливих наслідків випробування):

1. Підкидання монети двічі.
2. Підкидання монети тричі.
3. Підкидання кубика двічі.
4. Підкидання кубика тричі.
5. Фіксація часу зустрічі двох осіб, які домовилися зустрітися на

проміжку часу $[t_1;t_2]$.

6. Фіксація типу погоди (сонячно, хмарно, дощ) у першу суботу вересня о 9-й годині ранку.

1.1.3. Визначити, скільки різних просторів елементарних подій можна пов'язати з підкиданням кубика.

1.2. Поняття випадкової події

Нехай Ω – множина елементарних подій, що відповідає певному випробуванню.

Деяку (не будь-яку) *підмножину A множини* Ω називають *подією* (або *випадковою подією*).

Кажуть, що в результаті проведення *випробування подія A відбулася*, якщо при цьому проведенні випробування відбулася елементарна подія E така (із множини Ω навмання вибрано елемент E такий), що $E \in A$. Множини $A = \Omega$ та $B = \varnothing$ завжди вважаються подіями (на відміну від інших підмножин множини Ω).

Оскільки Ω – множина усіх можливих наслідків випробування, то в результаті кожного випробування подія Ω обов'язково відбувається, бо завжди $E \in \Omega$. Тому подію Ω називають *вірогідною.*

Подія $B = \varnothing$ не містить жодного елемента (елементарної події) з множини Ω, тому вона ніколи не може відбутися в результаті проведення випробування, бо завжди $E \,\overline{\in}\, \varnothing$. Подію $B = \varnothing$ називають *неможливою*.

Приклад 1.2.1. Випробування полягає у виборі навмання однієї кульки із 10, серед яких є білі і червоні. Як наслідок випробування фіксується колір кульки, $\Omega = \{б, ч\}$. Подіями можуть бути підмножини множини Ω: $A = \{б\}$, $B = \{ч\}$, $C = \{б, ч\}$, $D = \varnothing$, що означає відповідно: A –навмання вибрана кулька біла, B – навмання вибрана кулька червона, C – навмання вибрана кулька біла або червона, D – навмання вибрана кулька ні біла, ні червона. З відбуванням елементарної події *б* відбувається подія $A = \{б\}$, бо $б \in \{б\}$, і подія $C = \{б, ч\}$, бо $б \in \{б, ч\}$, але не відбувається подія $B = \{ч\}$ і подія $D = \varnothing$. Аналогічно, якщо відбувається елементарна подія *ч*, то відбувається подія $B = \{ч\}$, бо $ч \in \{ч\}$, і подія $C = \{б, ч\}$, бо $ч \in \{б, ч\}$, однак не відбувається подія $A = \{б\}$ і подія $D = \varnothing$.

Приклад 1.2.2. Випробування полягає у підкиданні кубика один раз, Ω={“1”, “2”, “3”, “4”, “5”, “6”}. Якщо одна з випадкових подій A={“3”, “6” } полягає в тому, що на верхній грані кубика випадає число, кратне 3, то коли випаде “3”∈Ω, відбувається подія A={“3”, “6”}, а коли випаде “2”∈Ω, не відбувається ця подія, оскільки “2” $\overline{\in}$ A={“3”, “6”}.

Приклад 1.2.3. Випробування полягає в тому, що монету підкидають тричі. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що принаймні двічі випаде герб. Множиною елементарних подій у даному експерименті можна вважати сукупність впорядкованих трійок результатів першого, другого та третього підкидань монети, тобто

$$\Omega = \{ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ГЦЦ, ЦГГ, ЦГЦ, ЦЦГ, ЦЦЦ\}.$$

Тоді

$$A = \{ГГГ,\ ГГЦ,\ ГЦГ, ЦГГ\}.$$

Приклад 1.2.4. На стіл (з бортами) навмання кидається тенісна кулька. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що кулька опиниться в певній частині площини стола. Тут множина Ω нескінченна (кожній можливій точці зупинки кульки відповідає елементарна подія, яка полягає в тому, що кулька зупиниться саме в цій точці). Так само нескінченною може бути й підмножина A, через яку визначається розглядувана подія.

Приклад 1.2.5. Виконується постріл в круглу мішень одиничного радіуса, причому куля не може влучити за межі мішені. В даному разі $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \le 1\}$. Нехай одна з подій $A = \Omega$ полягає в тому, що куля влучає в мішень. При виборі будь-якого елемента множини Ω відбувається подія A і не відбувається подія $B = \varnothing$. Якщо множина $C = \{(x, y) \colon x^2 + y^2 \le 0{,}2\}$ – подія, то при виборі точки (0; 0) відбувається подія C, а коли буде вибрано точку $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$, ця подія не відбуватиметься.

Нехай підмножини A і B множини Ω є подіями. Якщо $A \subset B$, тобто кожен елемент множини A є елементом і множини B, то говорять, що *подія A спричинює подію B*. Отже, подія A спричинює подію B тоді і тільки тоді, коли з відбуванням події A відбувається і подія B (Рис. 1.2.1).

Події A і B називають *рівними*, якщо $A \subset B$ і $B \subset A$, тобто кожна з них спричинює іншу. Отже, події A і B рівні тоді і тільки тоді, коли вони одночасно або відбуваються, або не відбуваються.

Приклад 1.2.6. Випробування полягає в тому, що двічі підкидають монету. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що двічі випаде герб. Тоді подія A спричинює подію B, яка полягає в тому, що принаймні один раз випаде герб. Тут

$$A = \{ГГ\}, \ B = \{ГГ, ГЦ, ЦГ\},$$

і таким чином $A \subset B$, тобто подія A спричинює подію B (Рис. 1.2.2).

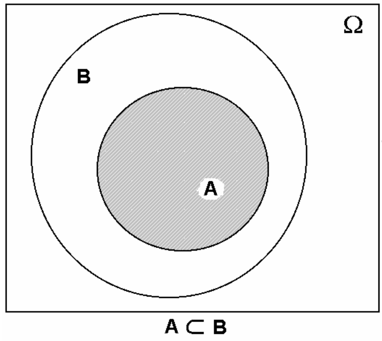


Рис.1.2.1

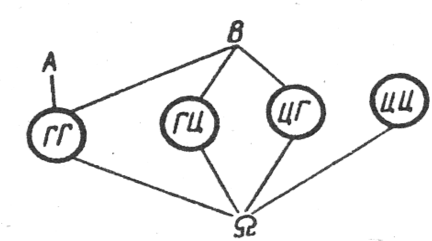


Рис. 1.2.2

Для будь-якої множини Ω та підмножин A, B, C цієї множини мають місце такі властивості.

1. $A \subset A, \ A \subset \Omega, \ \varnothing \subset A$.
2. Якщо $A \subset B$ і $B \subset C$, то $A \subset C$.
3. $A = A$.
4. Якщо $A = B$, то $B = A$.
5. Якщо $A = B$, $B = C$, то $A = C$.

Позначаючи події (множини) кругами Ейлера, дістанемо відповідні геометричні ілюстрації (Рис. 1.2.1).

Задачі

1.2.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Множина елементарних подій – це будь-яка множина.
2. Множина елементарних подій – це множина точок в деякому координатному просторі.
3. Подія – це будь-яка підмножина множини Ω елементарних подій.
4. Елементарна подія є подією.
5. При випадковому виборі навмання кожного елемента із множини елементарних подій відбувається певна подія.
6. Існує елементарна подія, при відбуванні якої не відбувається

жодна подія.

7. Для будь-яких подій A і B принаймні одна з них спричинює іншу.

1.2.2. Вказати всі можливі події, що визначаються за множиною Ω елементарних подій:

1. Ω – множина наслідків випробування, яке полягає в підкиданні відразу двох монет (1 і 2 копійки). При цьому як наслідки розглядаються:

а) усі можливі пари появи герба і цифри на двох монетах – $\Omega = \{ГГ, ГЦ, ЦГ, ЦЦ\}$, якщо першою вказується монета 1 копійка;

б) кількість появ герба на обох монетах, тобто $\Omega = \{0, 1, 2\}$.

2. Ω – множина наслідків випробування – пострілу в мішень, на якій зазначені можливі кількості отриманих очків: 0, 1, 2, 3, 4, 5 в залежності від відстані точки влучення від центра мішені. При цьому розглядаються наступні наслідки – 5 чи не 5 очків отримується після пострілу.

3. Ω – множина наслідків випробування, що полягає в підкиданні відразу двох кубиків (червоного та білого кольору), на гранях кожного з яких нанесені цифри від 1 до 6. При цьому як наслідки розглядаються:

а) можливі пари цифр $(i, j),\ i \in \overline{1,6},\ j \in \overline{1,6}$,

б) можливі суми цифр $(i + j),\ i \in \overline{1,6},\ j \in \overline{1,6}$,

де i – цифра, що випала на верхній грані одного з кубиків (білого кольору), j – цифра, що випала на верхній грані іншого кубика (червоного кольору).

1.3. Операції над подіями

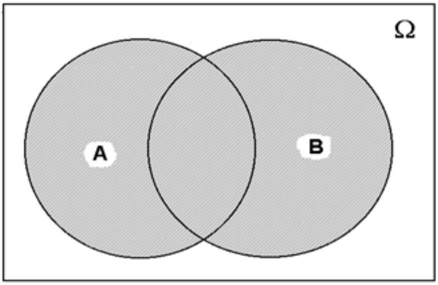
Оскільки події – це деякі підмножини множини Ω елементарних подій, то над подіями можна ввести такі самі операції, як і над множинами.

Нехай $A \subset \Omega$ і $B \subset \Omega$ – деякі події.

Означення. *Сумою подій A* і *B* називають таку подію *C*, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається принаймні одна з подій *A* або *B*.

Це означає, що кожна елементарна подія *E*, що належить до множини *C*, належить принаймні до однієї із множин *A* або *B*, і навпаки, якщо $E \in A$ або $E \in B$, то $E \in C$. В теоретико-множинному тлумаченні сумі *C* подій *A* і *B* відповідає об'єднання відповідних множин. Суму подій A і B позначають $A \bigcup B$ або $A+B$.

Аналогічно визначається *сума довільної кількості подій* A_k, $k \in K$, – це подія, яка відбувається тоді й тільки тоді, коли відбувається принаймні одна з подій A_k, $k \in K$. *Суму скінченної кількості n* подій A_k позначають $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$, а також $\sum\limits_{k=1}^{n} A_k$.



A ⋃ B

Рис 1.3.1

Зауважимо, що для того, щоб одержати об'єднання (суму) двох множин A і B, потрібно до однієї з них приєднати з іншої ті елементи, яких немає в першій множині.

Геометричне тлумачення суми подій A і B подане на Рис. 1.3.1, де прямокутником зображено множину елементарних подій Ω, один з кругів – подія A, інший – подія B, заштрихована множина – подія $A+B = A \bigcup B$.

Приклад 1.3.1. Нехай Ω={"1", "2", "3", "4", "5", "6"} – множина елементарних подій, що відповідає підкиданню кубика один раз, A={"3", "6"} – подія, що полягає у випаданні на верхній грані числа, кратного 3, а B={"2", "4", "6"} – подія, що полягає у випаданні парного числа. Тоді $A+B=A \bigcup B$={"2", "3", "4", "6"} – подія, яка полягає в тому, що на верхній грані кубика випаде або число, кратне 2 (відбувається подія B), або число, кратне 3 (відбувається подія A) (Рис. 1.3.2).

Кількість елементів у множині $C = A + B$ не обов'язково дорівнює сумарній кількості елементів в множинах A і B, оскільки спільні елементи враховуються лише один раз.

Зазначимо, що кожна множина є об'єднанням (сумою) її одноелементних підмножин. Якщо у наведеному прикладі $E_i=\{i\}$, $i \in \overline{1,6}$, то

$$A=\{E_3\}+\{E_6\},\quad B=\{E_2\}+\{E_4\}+\{E_6\},$$
$$\Omega=\{E_1\}+\{E_2\}+\{E_3\}+\{E_4\}+\{E_5\}+\{E_6\}.$$

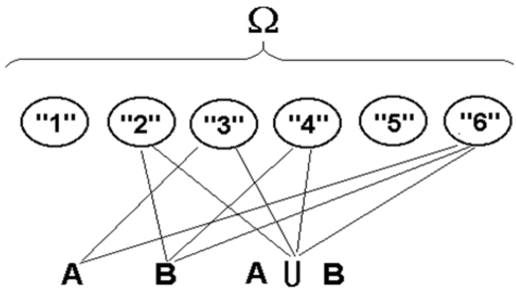


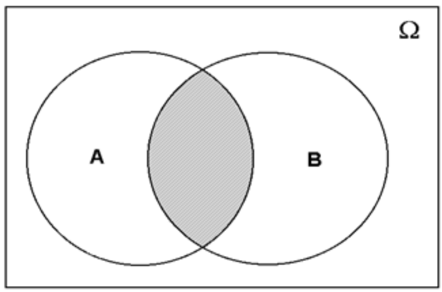
Рис. 1.3.2

Означення. *Добутком подій A* і *B* називають таку подію *C*, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбуваються обидві події *A* і *B*.

Це означає, що кожна елементарна подія *E*, що належить до множини *C,* належить також до обох множин *A* і *B*, тобто $E\in A$ і $E\in B$, і навпаки, якщо $E\in A$ і $E\in B$, то $E\in C$.

В теоретико-множинному тлумаченні добуткові подій *A* і *B* відповідає перетин відповідних множин, тобто сукупність елементів, що належать як до множини *A*, так і до множини *B*.

Добуток подій *A* і *B* позначають $A\bigcap B$, або $A\cdot B$ або просто *AB*.



A ⋂ B

Рис. 1.3.3

Аналогічно визначається *добуток довільної кількості подій* A_k, $k\in K$, – це подія, яка відбувається тоді й тільки тоді, коли відбуваються всі події A_k, $k\in K$, при проведенні одного і того самого випробування. *Добуток скінченної кількості n подій* позначають $\bigcap_{k=1}^{n} A_k$, а також $\prod_{k=1}^{n} A_k$.

Зауважимо, що для того, щоб одержати перетин (добуток) двох множин A і B, слід взяти усі елементи, які належать до обох цих множин.

Геометричне тлумачення добутку подій A і B подане на Рис. 1.3.3, де заштрихована множина точок – подія $A \cdot B = A \bigcap B$.

Приклад 1.3.2. Нехай подія A полягає в тому, що навмання вибране ціле додатне однорозрядне число ділиться на 3, а подія B – навмання вибране однорозрядне число є парним. Елементарна подія E_i – навмання вибране однорозрядне число є i, де $i \in \{1, 2, ..., 9\}$, $(E_i = i)$.

Тоді

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \ A = \{3, 6, 9\}, \ B = \{2, 4, 6, 8\}.$$

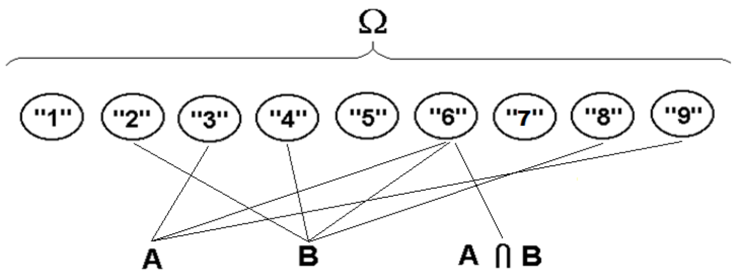


Рис. 1.3.4

Подія $C = AB$ означає, що навмання вибране число є числом 6.

Приклад 1.3.3. Мішень складається з 10 кругів, обмежених концентричними колами з радіусами r_k , $k \in \{1, 2, ..., 10\}$, причому $r_1 < r_2 < r_3 < ... < r_{10}$. Нехай A_k – подія, яка полягає у влученні в круг з радіусом r_k . Тоді події $B = \bigcup_{k=1}^{6} A_k$ і $C = \bigcap_{k=1}^{10} A_k$ – множини, зображені відповідно на Рис. 1.3.5, а, б.

Означення. Події A і B називають *несумісними,* якщо $A \cdot B = \varnothing$, тобто якщо вони не можуть відбутися обидві при проведенні одного і того самого випробування.

Приклад 1.3.4. Якщо для Ω={"1", "2", "3", "4", "5", "6"}, C={"1", "3", "5"}, D={"2", "4", "6"}, то C і D несумісні події, оскільки не існує елементарної події, яка належить як до множини C, так і до множини D.

Означення. *Різницею подій* A і B (A мінус B) називають таку подію C, яка відбувається тоді і тільки тоді, коли відбувається подія A і не відбувається подія B.

Це означає, що кожна елементарна подія E, яка належить до множини C, належить також до множини A і не належить до множини B, і навпаки, якщо $E \in A$ і $E \overline{\in} B$, то $E \in C$. В теоретико-множинному тлумаченні різниці подій A і B відповідає різниця відповідних множин.

Різницю подій A і B (A мінус B) позначають $A \setminus B$, а також $A - B$.

Зауважимо, що для того, щоб одержати різницю множин $A \setminus B$, слід із множини A вилучити всі елементи множини B.

Геометричне тлумачення різниці подій $A \setminus B$ подано на Рис. 1.3.6, де заштрихована множина точок – подія $A \setminus B$.

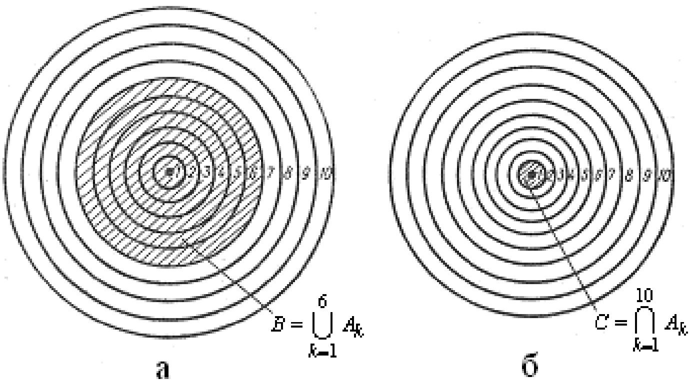


Рис. 1.3.5

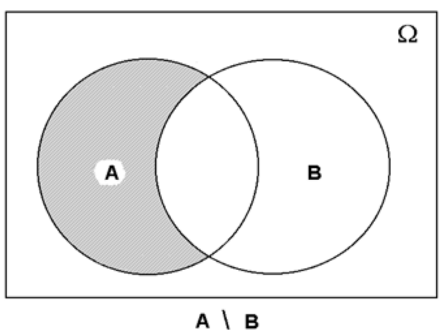


Рис. 1.3.6

Приклад 1.3.5. Серед учнів 11 класу, в якому навчається не менше п'яти спортсменів, навмання вибирається група з п'яти учнів. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що в групі не більше трьох спортсменів, B – подія, яка полягає в тому, що спортсменів не менше одного. Можливими наслідками даного випробування щодо кількості спортсменів у групі очевидно є: E_0 – 0 спортсменів, E_1 – 1 спортсмен, E_2 – 2 спортсмени, ..., E_5 – 5 спортсменів. Тоді

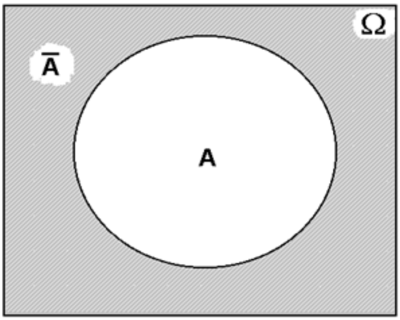
$$\Omega = \{E_0, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5\}.$$

Подія $A \setminus B$ полягає в тому, що в групі з п'яти учнів спортсменів немає, а $B \setminus A$ – спортсменів не менше чотирьох (4 або 5).

Означення. *Подією, протилежною до події А*, називають різницю $\Omega \setminus A$, яку позначають $\overline{A}$.

Отже, подія $\overline{A}$, протилежна до події A, відбувається тоді і тільки тоді, коли не відбувається подія A. Зрозуміло, що подія A є протилежною до події $\overline{A}$. Тому події A і $\overline{A}$ називають взаємно протилежними. Очевидно, події A і $\overline{A}$ несумісні.

Геометричне тлумачення взаємно протилежних подій подано на Рис. 1.3.7, де заштрихована множина точок – подія $\overline{A}$, протилежна до події A.



Ā

Рис. 1.3.7

Приклад 1.3.6. Якщо $\Omega = \{$"1", "2", "3", "4", "5", "6"$\}$ і $A = \{$"3", "6"$\}$ та $B = \{$"2", "4", "6"$\}$ – події, то $A \setminus B = \{$"3"$\}$ – подія, що полягає у випаданні непарного числа, кратного 3, $B \setminus A =$ $= \{$"2", "4"$\}$ – подія, що полягає у випаданні парного числа, не кратного 3. $\overline{A} = \Omega \setminus A = \{$"1", "2", "4", "5"$\}$ – подія, що полягає у випаданні числа, не кратного 3, а $\overline{B} = \Omega \setminus B = \{“1”,”3”,”5”\}$ – подія, що полягає у випаданні непарного числа.

Приклад 1.3.7. Нехай A подія, яка полягає в тому, що при підкиданні кубика на верхній грані випаде не менше, ніж три очка. Нехай можливими наслідками цього випробування є елементарні події $E_i = "i"$, $i \in \{1, \ldots, 6\}$, які полягають в тому, що на верхній грані випаде i очок. Тоді

$$\Omega = \{"1", "2","3","4","5","6"\}; \ A = \{"3","4","5","6"\}; \ \overline{A} = \{"1","2"\}.$$

Таким чином, тут подія $\overline{A}$ означає, що на верхній грані кубика випаде менше, ніж три очка.

Подія $\overline{\Omega}$, протилежна до вірогідної, є неможливою. Неможливій події відповідає порожня множина $\overline{\Omega} = \Omega \setminus \Omega = \varnothing$ можливих наслідків випробування. Зрозуміло, що $\overline{\varnothing} = \Omega \setminus \varnothing = \Omega$.

Задачі

1.3.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо відбувається подія A, то відбувається подія $A+B$.
2. Якщо відбувається подія $A \cdot B$, то відбувається і подія A.
3. Подія $A \cdot B$ спричинює подію A.
4. Якщо $C = A - B$, то $A = C + B$.
5. $(A + B) - B = A$; $(A - B) + B = A$.
6. $A + \overline{A} = \Omega$.
7. Якщо $A = \overline{B}$, то $\overline{A} = B$, тобто події $\overline{\overline{B}}$ і B рівносильні.

1.3.2. Мішень складається з 10 кругів, обмежених концентричними колами з радіусами $r_k : r_1 < r_2 < \ldots < r_{10}$. Подія A_k полягає у влученні в круг радіуса r_k. Що означають події:

1. $B = \sum\limits_{k=1}^{6} A_k$;
2. $C = \prod\limits_{k=1}^{10} A_k$;
3. $A_{k+1} \setminus A_k$, $k \in \overline{1,9}$;
4. $A_1 \setminus A_2$;
5. $\overline{A_k}$, $k \in \overline{1, 10}$.

1.4. Властивості операцій над подіями

Нехай Ω – простір елементарних подій, $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ і $C \subset \Omega$ – довільні випадкові події, $\varnothing$ – неможлива подія. Введені *операції над подіями задовольняють такі закони*:

1. $\overline{\overline{A}} = A$ – закон подвійного заперечення.

$$\left.\begin{array}{l} 2.\ A+B=B+A \\ 3.\ AB=BA \end{array}\right\}$$ комутативні (переставні) закони додавання й множення.

$$\left.\begin{array}{l} 4. (A+B)+C=A+(B+C) \\ 5.\ (AB)C=A(BC) \end{array}\right\}$$ асоціативні (сполучні) закони додавання й множення.

6. $(A+B)C = AC+BC$ – перший дистрибутивний (розподільний) закон.

7. $AB+C = (A+C)(B+C)$ – другий дистрибутивний (розподільний) закон.

8. $A+A=A$.

9. $A \cdot A = A$.

10. $A+\overline{A}=\Omega$.

11. $A \cdot \overline{A} = \varnothing$.

12. $A+\Omega=\Omega$.

13. $A \cdot \Omega = A$.

14. $A+\varnothing = A$.

15. $A \cdot \varnothing = \varnothing$.

$$\left.\begin{array}{l} 16.\ \overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B} \\ 17.\ \overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B} \end{array}\right\}$$ – закони двоїстості (правила де Моргана).

Рівності 1–17 випливають безпосередньо з наведених вище означень.

Для прикладу розглянемо рівність 7. Геометрично цей закон можна проілюструвати так, як показано на Рис. 1.4.1, а, б.

Сумістивши ці зображення, можна впевнитися, що множини $AB+C$ і $(A+C)\,(B+C)$ співпадають.

Аналітичне доведення рівності 7 може бути таким.

Нехай E – довільна елементарна подія така, що $E \in AB+C$. Тоді справджується принаймні одне з двох – або $E \in AB$, або $E \in C$. Якщо $E \in AB$, то $E \in A$ і $E \in B$. Проте тоді $E \in A+C$ і

$E \in B + C$ (за означенням суми подій), а отже $E \in (A + C)\ (B + C)$. Якщо $E \in C$, то $E \in C + A$ і $E \in C + B$, і тому $E \in (A + C)\ (B + C)$.

Таким чином, довільний елемент множини $AB + C$ належить до множини $(A + C)(B + C)$, тобто

$$(AB + C) \subset (A + C)\ (B + C).$$

Отже, подія $AB + C$ спричинює подію $(A + C)\ (B + C)$.

Нехай, навпаки, $E \in (A + C)\ (B + C)$. Це означає, що $E \in A + C$ і $E \in B + C$. Якщо $E \in C$, то $E \in C + AB$. Якщо $E \overline{\in} C$, то $E \in A$ і $E \in B$, тобто $E \in AB$, а отже $E \in AB + C$.

Таким чином, довільний елемент множини $(A + C)\ (B + C)$ є елементом множини $AB + C$, тобто $(A + C)\ (B + C) \subset AB + C$, і подія $(A + C)(B + C)$ спричинює подію $AB + C$. Звідси і з того, що $(AB + C) \subset (A + C)\ (B + C)$, слідує

$$AB + C = (A + C)\ (B + C).$$

Інші рівності 1–17 доводяться аналогічно.

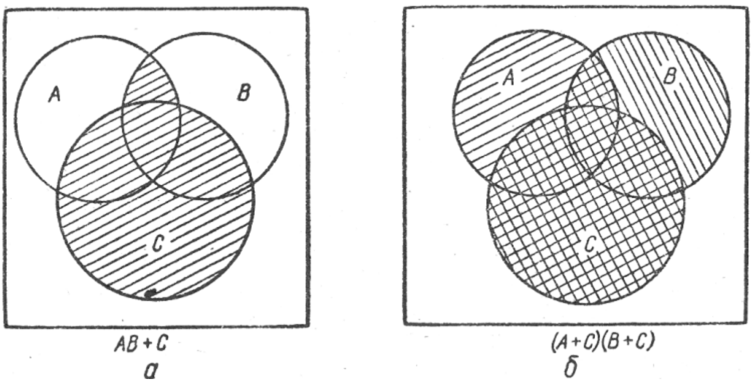


Рис. 1.4.1

Приклад 1.4.1. Для будь-яких подій $A \subset \Omega$ і $B \subset \Omega$ виконуються наступні співвідношення:

а) $AB \subset A$, $AB \subset B$, тому $\varnothing = \varnothing \cdot A \subset A$, $\varnothing = \varnothing \cdot B \subset B$;

б) $A \subset A + B$, $B \subset A + B$ (співвідношення а) і б) випливають безпосередньо з означення суми й добутку подій);

в) якщо $A \subset C$ і $B \subset C$, то й $A + B \subset C$ (співвідношення випливає з означення суми подій);

г) якщо $C \subset A$ і $C \subset B$, то $C \subset AB$ (співвідношення випливає з означення добутку подій);

д) якщо $A \subset B$, то $A+B=B,\ (A+B)\setminus A = B\setminus A$.

Справді, оскільки $A \subset B$ і $B \subset B$, то згідно із співвідношенням в) $A+B \subset B$, а згідно із співвідношенням б) $B \subset A+B$.

Таким чином, $A+B=B,\ (A+B)\setminus A = B\setminus A$. Звідси випливає також, що коли $A+B=A$, то $B \subset A$;

е) якщо $A \subset B$, то $AB = A$. Справді, згідно із співвідношенням а) $AB \subset A$, а оскільки $A \subset A$ і $A \subset B$, то згідно із співвідношенням г) $A \subset AB$. Отже $AB = A$. Звідси, якщо $AB = A$, то $A \subset B$.

Приклад 1.4.2. Довести, що $A + \overline{A}B + \overline{A+B} = \Omega$.

На основі другого дистрибутивного закону

$$A + \overline{A}B = (A+\overline{A})\ (A+B).$$

За законами 10 і 13

$$(A+\overline{A})\ (A+B) = \Omega\ (A+B) = A+B.$$

Таким чином,

$$A + \overline{A}B + \overline{A+B} = (A+\overline{A})\ (A+B) + \overline{(A+B)} = (A+B) + \overline{(A+B)} = \Omega.$$

За співвідношенням *а*) маємо

$$\varnothing = \varnothing \cdot A \subset A = A\cdot\Omega \subset \Omega \text{ і } A = A\cdot A \subset A,$$

для будь-якої підмножини A простору Ω.

Приклад 1.4.3. Довести, що з рівності $A+B=AB$ випливає, що $A=B$.

Справді, $A \subset A+B = AB \subset B$ і тому $A \subset B$. Аналогічно $B \subset A+B = AB \subset A$ і тому $B \subset A$. Отже, $A \subset B$ і $B \subset A$, тобто $A = B$.

Легко бачити, що події A_1 і $A_2 \setminus (A_2 \cap A_1)$ несумісні і $A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \setminus (A_2 \cap A_1))$.

Задачі

1.4.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. $A \cap B = \overline{\overline{A} \cup \overline{B}}$. 2. $A \setminus B = A \cap \overline{B}$. 3. $\bigcap_k A_k = \overline{\bigcup_k \overline{A_k}}$.

1.4.2. Довести закони двоїстості.

1.4.3. Вивести правило, за яким суму довільної кількості подій можна подати у вигляді суми попарно несумісних подій.

1.5. Простір подій.
Уточнення поняття випадкової події

В п.1.2 сказано, що випадковою подією називають *деяку* (не будь-яку) підмножину простору Ω елементарних подій, що відповідає певному випробуванню.

Після введення операцій над подіями можна дещо уточнити, які підмножини простору Ω можна вважати подіями, а які не можна.

Отже, нехай Ω – простір елементарних подій, що відповідає певному випробуванню, а S – *деяка* (не будь-яка, див. § 1.9) *сукупність підмножин множини* Ω, що задовольняє умови:

1) $\Omega \in S$;

2) якщо $A \in S$, то і $\overline{A} \in S$;

3) якщо $A_i \in S$, $i \in \{1,2,3,\dots\}$, то $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in S$, де $I \subset \{1,2,3,\dots\}$ – довільна непорожня підмножина множини індексів 1, 2, 3, … .

Тоді *кожну підмножину* $A \subset \Omega$*, що належить до сукупності S, називають випадковою подією* або просто *подією*, а сукупність S називають *простором подій*, що відповідає даному простору Ω елементарних подій.

Таким чином, поняття події вводиться лише у зв'язку з поняттям простору подій.

Зауважимо, що $\varnothing = \overline{\Omega}$ і тому за умовами 1) і 2) $\varnothing \in S$.

Оскільки $\bigcap\limits_{i \in I} A_i = \overline{\bigcup\limits_{i \in I} \overline{A_i}}$, то за умовами 2) і 3) $\bigcap\limits_{i \in I} A_i \in S$, коли $A_i \in S$, $I \subset \{1,2,\dots,m\}$. Зокрема, $A \bigcap B \in S$, коли $A \in S$ і $B \in S$. Враховуючи це та рівність $A \setminus B = A \bigcap \overline{B}$, з умови 2) дістанемо, що $A \setminus B \in S$, коли $A \in S$ і $B \in S$.

Отже, *простір S випадкових подій є замкненим відносно операцій суми*, *різниці та добутку подій*.

Приклад 1.5.1. Для будь-якої множини Ω елементарних подій покладемо $S=\{\varnothing, \Omega\}$. Тоді S задовольняє умови 1) - 3), тобто може бути простором подій (*найвужчим* з можливих), а тому можлива ситуація, коли подіями вважаються лише неможлива та вірогідна події.

Приклад 1.5.2. Якщо всі грані кубика пофарбовано в білий колір і при підкиданні кубика фіксується колір грані, якою кубик падає догори, тоді $\Omega=\{\text{біла}\}$ містить один єдиний елемент. Тому в даному випадку простір S може складатися лише з двох елементів: $S = \{\varnothing, \Omega\}$.

Приклад 1.5.3. Для будь-якого простору Ω елементарних подій покладемо $S=\{A: A\subset \Omega\}$, тобто елементами сукупності S вважатимемо будь-які підмножини простору Ω. Тоді S задовольняє умови 1)-3), тобто може бути простором подій (*найширшим* з можливих), а тому можлива ситуація, коли подіями будуть будь-які підмножини простору Ω.

Приклад 1.5.4. Нехай Ω={"1", "2", "3", "4", "5", "6"} – простір елементарних подій, що відповідає випробуванню – однократному підкиданню кубика. Покладемо S={$\varnothing$, Ω, {"6"}, {"1", "2", "3", "4", "5"}}. Тоді S задовольняє умови 1)–3), тобто розглядувана сукупність S підмножин множини Ω може бути простором подій, а елементи сукупності S – подіями.

Зауважимо, що в останньому прикладі сукупність S можна визначити і інакше: наприклад, покласти S={$\varnothing$, Ω, {"1"}, {"2", "3", "4", "5", "6"}}, або S={$\varnothing$, Ω, {"1", "5"}, {"2", "3", "4", "6"}}, або S={$\varnothing$, Ω, {"1", "2", "3"}, {"4", "5", "6"}}, або визначити S як у прикладі 1.5.2: $S=\{A: A\subset \Omega\}$, і т.д.

Отже, одному і тому самому простору Ω елементарних подій можуть відповідати різні простори S випадкових подій. Множина $A \subset \Omega$ залежно від обраного простору S подій може бути подією, а може й не бути. Лише множини $\varnothing$ та Ω є подіями для будь-якого простору S випадкових подій.

Приклад 1.5.5. Нехай $\Omega=[-r; r)$ – простір елементарних подій, через які характеризуються результати випробування: положення точки, в яку влучив снаряд, відносно цілі (якщо $x<0$ – недоліт на відстань $(-x)$; $x > 0$ – переліт на відстань x; $x = 0$ – влучення).

Поділимо проміжок $[-r, r)$ на k проміжків $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \{1,2,...,k\}$, $a_0 = -r$, $a_k = r$, $a_i = a_{i-1} + \dfrac{a_k - a_0}{k}$. Розглянемо сукупність S, що містить порожню множину $\varnothing$, проміжки $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,k}$, всеможливі об'єднання проміжків $[a_{i-1}, a_i)$ по два проміжки, по три, по чотири і т.д., по $(k-1)$ проміжків, всі k проміжків $\bigcup\limits_{i=1}^{k}[a_{k-1}, a_k) = \Omega$.

Тоді сукупність S буде простором подій, оскільки така сукупність задовольняє вимоги 1_s-3_s. Цей *простір подій* називають *породженим поділом множини* $\Omega=[-r,r)$ *на підмножини* $H_i=[a_{i-1},a_i)$, $i\in\overline{1,k}$. Підкреслимо, що сукупність S містить тільки усілякі об'єднання $\bigcup\limits_{i\in I}[a_{i-1},a_i)$, $I\subset\{1,2,...,k\}$, а також різні об'єднання, перетини та різниці таких об'єднань, які в свою чергу є об'єднаннями того самого типу (зокрема $\varnothing=\bigcup\limits_{i\in\varnothing}[a_{i-1},a_i)$).

Задачі

1.5.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Існує простір Ω елементарних подій, для якого існує лише один простір S випадкових подій.
2. Якщо простір Ω елементарних подій містить 2 елементи, то відповідний йому простір випадкових подій може містити 3 елементи.
3. Для множини Ω={*Г, Ц*} відповідний йому простір S випадкових подій може містити лише 2 або 4 елементи.
4. Сукупність S довільних підмножин множини $\Omega=N$ натуральних чисел може бути простором подій.
5. Сукупність S будь-яких скінченних підмножин множини $\Omega=N$ може бути простором подій.

1.5.2. Побудувати можливі простори S випадкових подій, що відповідають просторам Ω елементарних подій:

1. Ω – множина можливих наслідків випробування, що полягає в підкиданні монети двічі. При цьому як наслідки розглядаються:

а) однією стороною догори чи різними упала монета обидва рази?

б) кількість появ герба в обох підкиданнях;

в) усі можливі пари появ герба і цифри в обох підкиданнях.

2. Ω – множина можливих наслідків випробування, що полягає в підкиданні кубика, частина граней якого пофарбовані в білий колір, інша частина – в червоний, третя частина – в зелений. У кожній з частин є не менше однієї грані. При цьому як наслідки розглядаються :

а) колір грані, що виявилася верхньою;

б) зелений чи ні колір виявляється на верхній грані.

3. Ω – множина можливих наслідків випробування, що полягає в підкиданні двічі кубика, на гранях якого нанесені цифри від 1 до 6. При цьому як наслідки розглядаються :

а) можливі суми $i+j,\ i\in\overline{1,6},\ j\in\overline{1,6}$,

б) чи виконується нерівність $i\le j,\ i\in\overline{1,6},\ j\in\overline{1,6}$, де i – цифра, що випадає на верхній грані кубика при першому підкиданні, j – цифра, що випадає на верхній грані кубика при другому підкиданні.

1.5.3. Визначити, скільки елементів може містити простір S випадкових подій, якщо відповідний йому простір Ω елементарних подій містить:

а) один елемент,

б) два елементи,

в) три елементи.

1.6. Статистична ймовірність події

Нехай задано деякий простір Ω елементарних подій і один із можливих просторів S випадкових подій, пов'язаний з простором Ω елементарних подій. Розглянемо довільну подію $A \in S$. Нехай проведено серію із n випробувань, за результатами яких визначено кількість $k_n(A)$ відбувань події A.

1) Число $k_n(A)$, що дорівнює кількості тих випробувань, в яких подія A відбулася, називається *абсолютною частотою події* $A \in S$ в даній серії із n випробувань. Іншими словами, $k_n(A)$ – це кількість відбувань події A в серії із n проведених випробувань;

2) число $P_n^*(A) = \dfrac{k_n(A)}{k_n(\Omega)}$ називається *статистичною ймовірністю* або *відносною частотою події* $A \in S$ *в даній серії із* n *випробувань*.

Підкреслимо, що аргументами функцій $k_n(A)$ і $P_n^*(A)$ є підмножини простору Ω, які входять до сукупності S.

Приклад 1.6.1. Нехай простір елементарних подій $\Omega = \{Г, Ц\}$, простір подій $S=\{\varnothing, \{Г\}, \{Ц\}, \{Г, Ц\}=\Omega\}$ і подія $A_0 = \{Г\}$ – випадання герба при однократному підкиданні монети.

Припустимо, що проведено $n=100$ підкидань монети, в результаті яких герб випадав 45 разів. Тоді $k_{100}(\{Г\})=45$, $k_{100}(\{Ц\})=100–45=55$, $k_{100}(\varnothing)=0$, $k_{100}(\Omega)=100$ – абсолютні частоти відповідних подій. Числа $P_{100}^*(\{Г\}) = \dfrac{45}{100}=\dfrac{9}{20}$, $P_{100}^*(\{Ц\}) = $ $=\dfrac{55}{100}=\dfrac{11}{20}$, $P_{100}^*(\varnothing)=0$, $P_{100}^*(\Omega)=1$ – це статистичні ймовірності (відносні частоти) відповідних подій у даній серії із $n=100$ підкидань монети. Зокрема $k_{100}(A_0)=45$, $P^*_{100}(A_0)=\frac{45}{100}=\frac{9}{20}$.

Приклад 1.6.2. Нехай простір елементарних подій $\Omega=\{Г, Ц\}$, простір подій $S=\{\varnothing,\Omega\}$, а в серії випробувань фіксувалося лише число $k_n(\Omega)$, а тому й $k_n(\varnothing)=k_n(\Omega)-k_n(\Omega)=n-n=0$. В даному випадку множини $A=\{Г\}$, $B=\{Ц\}$ подіями не вважаються і тому не фіксувалися кількості їх відбувань.

Отже, про абсолютні і відносні частоти в даній серії із n випробувань можна говорити лише для будь-якої події A, що належить до даного простору S випадкових подій.

Приклад 1.6.3. Нехай підкидається кубик і простір елементарних подій $\Omega=\{"1","2","3","4","5","6"\}$, простір S подій – сукупність будь-яких підмножин простору Ω, а подія $A_1=\{"3","6"\}$ – випадання при однократному підкиданні кубика числа, кратного 3. Припустимо, що проведено n=15 таких підкидань і спостерігалися такі результати:

$$E_{сп\,1}=\text{"5"},\ E_{сп\,2}=\text{"6"},\ E_{сп\,3}=\text{"6"},\ E_{сп\,4}=\text{"6"},\ E_{сп\,5}=\text{"4"},$$
$$E_{сп\,6}=\text{"3"},\ E_{сп\,7}=\text{"5"},\ E_{сп\,8}=\text{"2"},\ E_{сп\,9}=\text{"6"},\ E_{сп\,10}=\text{"4"},$$
$$E_{сп\,11}=\text{"5"},\ E_{сп\,12}=\text{"6"},\ E_{сп\,13}=\text{"3"},\ E_{сп\,14}=\text{"3"},\ E_{сп\,15}=\text{"5"}.$$

Тоді абсолютні частоти $k_{15}(E_i)$ елементарних подій $E_i=\text{"}i\text{"}$, $(\{E_i\}\in S)$, $i\in\overline{1,6}$, дорівнюють:

$$k_{15}(\{E_1\})=k_{15}(\{"1"\})=0,\qquad k_{15}(\{E_2\})=k_{15}(\{"2"\})=1,$$
$$k_{15}(\{E_3\})=k_{15}(\{"3"\})=3,\qquad k_{15}(\{E_4\})=k_{15}(\{"4"\})=2,$$
$$k_{15}(\{E_5\})=k_{15}(\{"5"\})=4,\qquad k_{15}(\{E_6\})=k_{15}(\{"6"\})=5.$$

Тепер можна обчислити абсолютну частоту $k_{15}(A)$ для довільної події $A\in S$.

Зокрема, $k_{15}(A_1)=k_{15}(\{"3","6"\})=k_{15}(\{"3"\})+k_{15}(\{"6"\})=3+5=8$ – абсолютна частота випадання числа, кратного 3, в даній серії із n=15 підкидань кубика.

Статистична ймовірність або відносна частота події A_1 – це число $P^*_{15}(A_1)=\frac{k_{15}(A_1)}{k_{15}(\Omega)}=\frac{8}{15}$.

Задачі.

1.6.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Число $k_n(A)$ може набувати будь-якого значення з проміжка $[0; n]$.

2. Статистична ймовірність (відносна частота) $P_n^*(A)$ події A може набувати будь-якого значення з проміжка $[0; 1]$.

3. Якщо $P_n^*(A) = 1$, то A – вірогідна подія.

4. Якщо $P_n^*(A) = 0$, то A – неможлива подія.

1.6.2. 1. Монету підкидали 10 разів. Якими можуть бути при цьому абсолютні і відносні частоти появ герба і цифри?

2. Кубик, частина граней якого пофарбовані в білий колір, друга частина – у червоний колір, третя частина – у зелений колір, підкидали 5 разів. Якими при цьому можуть бути абсолютні і відносні частоти випадань на верхній грані кожного з трьох кольорів?

3. Грані кубика пофарбовані в білий, червоний, зелений, блакитний, жовтий, бузковий кольори, причому на кожній грані є лише один колір. Випробування полягає в підкиданні кубика і фіксації кольору грані, якою кубик падає догори. Якими можуть бути статистичні ймовірності випадання грані кожного кольору, якщо кубик підкидали: 1 раз? 2 рази? 3 рази? 4 рази? 5 разів? 6 разів? 7 разів? 8 разів? 9 разів? 10 разів?

4. Кубик, частина граней якого пофарбована в білий колір, друга частина – у червоний колір, третя частина – у зелений колір, підкидали 1000 разів. При цьому як результати випробувань розглядали колір верхньої грані. Виявилося, що в 1000 випробуваннях білою гранню догори кубик падав 500 разів, червоною – 300, зеленою – 200. Побудувати всі можливі простори подій, що відповідають даному експерименту, і визначити статистичні імовірності всіх подій кожного з просторів, виходячи з зазначених даних.

1.7. Властивості статистичної ймовірності

Безпосередньо з означення випливають *основні властивості статистичної ймовірності:*

$1_р$. $P_n^*(A) \geq 0, \quad A \in S$, тобто статистична ймовірність довільної події $A \in S$ невід'ємна;

$2_р$. $P_n^*\left(\sum_{i \in I} A_i\right) = \sum_{i \in I} P_n^*(A_i)$, $\quad I \subset \{1, 2, 3, \ldots\}$, коли $A_i \in S$ і $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$ (події A_i попарно несумісні), тобто статистична ймовірність суми довільної кількості попарно несумісних подій дорівнює сумі статистичних ймовірностей цих подій. Це так звана *властивість повної* (або *зчисленної*) *адитивності* статистичної ймовірності.

$3_р$. $P_n^*(\Omega) = 1,$ тобто статистична ймовірність вірогідної події дорівнює 1.

Властивості $1_р$-$3_р$ називають *основними або визначальними*. З них випливають інші важливі властивості статистичної ймовірності.

Наведемо деякі з цих властивостей:

4. $P_n^*(\overline{A}) = 1 - P_n^*(A)$. Справді, $A \cdot \overline{A} = \varnothing$ і $A + \overline{A} = \Omega$. Тому за основними властивостями $2_р$ і $3_р$ маємо:

$$P_n^*(A + \overline{A}) = P_n^*(A) + P_n^*(\overline{A}) = P_n^*(\Omega) = 1.$$

Звідси $P_n^*(\overline{A}) = 1 - P_n^*(A)$.

5. $P_n^*(\varnothing) = 0$, тобто статистична ймовірність неможливої події дорівнює нулю.

Справді, оскільки $\varnothing = \overline{\Omega}$, то за властивостями 4 і $3_р$ $P_n^*(\varnothing) = P_n^*(\overline{\Omega}) = 1 - P_n^*(\Omega) = 1 - 1 = 0$.

6. Якщо $A \subset B,$ то $P_n^*(B) = P_n^*(A) + P_n^*(B \setminus A)$, а тому $P_n^*(A) \leq P_n^*(B)$. Зокрема, $P_n^*(A) \leq 1$ для будь-якої події A.

Справді, якщо $A \subset B,$ то $B = A + (B \setminus A)$ і $A \cdot (B \setminus A) = \varnothing$. Тому за основними властивостями $2_р$ і $1_р$ маємо:

$$P_n^*(B) = P_n^*(A) + P_n^*(B \setminus A) \geq P_n^*(A).$$

Зокрема, якщо $B = \Omega$, то $A \subset \Omega$, і тому $P_n^*(A) \leq P_n^*(\Omega) = 1$ для будь-якої події A.

7. Враховуючи властивості $1_р$ та 6, дістанемо

$$0 \le P_n^*(A) \le 1,$$

тобто статистична ймовірність довільної події може набувати значення лише з відрізка $[0;1]$. (Ця властивість також випливає з означення $P_n^*(A)$).

8. Для довільних подій $A \in S$, $B \in S$ має місце рівність

$$P_n^*(A+B) = P_n^*(A) + P_n^*(B) - P_n^*(AB).$$

Справді, подію $A+B$ можна подати у вигляді суми $A+(B \setminus AB)$ двох несумісних доданків (Рис. 1.7.1.). Подію B також можна подати у вигляді суми $AB+(B \setminus AB)$ двох несумісних доданків (Рис. 1.7.2.).

Тому за властивістю $2_р$:

$$P_n^*(A+B) = P_n^*(A) + P_n^*(B \setminus AB), \qquad (1.7.1)$$

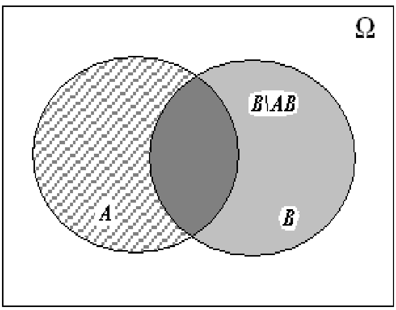
$$P_n^*(B) = P_n^*(AB) + P_n^*(B \setminus AB).$$

З останньої рівності випливає

$$P_n^*(B \setminus AB) = P_n^*(B) - P_n^*(AB),$$

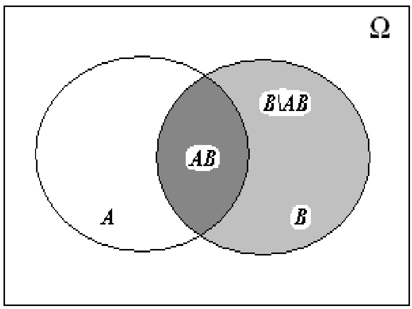
а тому, враховуючи рівність (1.7.1), дістаємо:

$$P_n^*(A+B) = P_n^*(A) + P_n^*(B) - P_n^*(AB).$$



A+B=A+(B\\AB)

Рис. 1.7.1



B=AB+(B\\AB)

Рис. 1.7.2

Задачі

1.7.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо $P_n^*(A+B) = P_n^*(A) + P_n^*(B)$, то A і B несумісні події.
2. Якщо $P_n^*(A) + P_n^*(B) = 1$, то A і B протилежні події.

3. Якщо $P_n^*(A+B) \neq P_n^*(A)+P_n^*(B)$, то A і B сумісні події.

4. Якщо подія A спричинює подію B, то $P_n^*(A) < P_n^*(B)$.

5. Якщо $P_n^*(A) < P_n^*(B)$, то подія A спричинює подію B.

6. Для будь-яких подій $A \in S$, $B \in S$ і $C \in S$:

$$P_n^*(A+B+C) = P_n^*(A)+P_n^*(B)+P_n^*(C)-$$
$$-P_n^*(A \cdot B)-P_n^*(AC)-P_n^*(BC)+P_n^*(ABC).$$

7. Якщо $A \subset B$, то $P_n^*(B \setminus A) = P_n^*(B)-P_n^*(A)$.

1.7.2. 1. Сформулювати і довести властивості абсолютної частоти, аналогічні до властивостей статистичної ймовірності.

1.8. Ймовірнісні простори. Уточнення поняття випадкової події

Нехай Ω – деякий простір елементарних подій, і задана деяка сукупність S підмножин множини Ω, що задовольняє вимоги:

1_s. $\Omega \in S$;

2_s. Якщо $A \in S$, то і $\overline{A} \in S$;

3_s. Якщо $A_i \in S$, $i \in \{1,2,3,\ldots\}$, то і $\bigcup\limits_{i \in I} A_i \in S$, $I \subset \{1,2,3,\ldots\}$.

Будь-яку *задану на* S *числову функцію* $V(A)$, $A \in S$, що задовольняє вимоги:

1_v. $V(A) \geq 0$, $A \in S$;

2_v. Якщо $A_i \in S$, $i \in \{1,2,3,\ldots\}$, $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$,

то $V\left(\bigcup\limits_{i \in I} A_i\right) = \sum\limits_{i \in I} V(A_i)$, $I \subset \{1,2,3,\ldots\}$,

називають *мірою, заданою на сукупності* S .

При цьому сукупність S називають *простором вимірних за мірою* V *множин*, кожну множину $A \in S$ називають *вимірною за мірою* V , а значення $V(A)$ називають *мірою множини* A . Якщо ж $A \subset \Omega$, але $A \overline{\in} S$, то *таку множину* A *називають невимірною відносно міри* V *, заданої на S.*

Прикладами мір можуть бути об'єми вимірних просторових фігур, площі вимірних плоских фігур, довжини вимірних лінійних фігур (зокрема об'єми многогранників та їх об'єднань, площі многокутників та їх об'єднань, довжини відрізків та їх об'єднань), кількості елементів в підмножинах даної скінченної множини, кількості попадань у певні підмножини деякої множини, з якої елементи вибираються навмання, маси фізичних тіл та їх об'єднань тощо.

Якщо $V(\Omega)=1$, тоді міру V називають *ймовірнісною мірою* або *ймовірністю, визначеною на сукупності S підмножин множини Ω*.

Таким чином, ймовірнісна міра (ймовірність) $P(A)$, визначена на сукупності S, повинна задовольняти вимоги (мати властивості):

1_p. $P(A)\ge 0$, $A\in S$;

2_p. Якщо $A_i\in S$, $i\in\{1,2,3,\ldots\}$, $A_iA_j=\varnothing$ при $i\ne j$, то

$$P\left(\bigcup_{i\in I}A_i\right)=\sum_{i\in I}P(A_i),\ I\subset\{1,2,3,\ldots\}.$$

3_p. $P(\Omega)=1$;

Якщо задано простір елементарних подій Ω, сукупність S підмножин множини Ω, що задовольняє вимоги 1_s–3_s, і на цій сукупності визначена числова функція $P(A)$, що задовольняє вимоги 1_p–3_p, тоді говорять, що задано *ймовірнісний простір* (Ω,S,P).

При цьому *елементи множини Ω називаються елементарними подіями*, *елементи сукупності S – подіями, а числа $P(A)$, $A\in S$, – ймовірностями подій A*.

Властивості 1_p-3_p функції $P(A)$, $A\in S$, називаються *основними* чи *визначальними*. З них випливають і інші важливі властивості ймовірнісної міри $P(A)$.

Властивість 2_p називають *властивістю повної адитивності функції $P(A)$*.

Будь-яку числову функцію $P(A)$, $A\in S$, що задана на просторі подій S і задовольняє вимоги 1_p-3_p, називають ймовірнісною мірою (або просто ймовірністю) подій $A\in S$.

Вимоги (властивості) 1_s-3_s, 1_p-3_p називають *системою аксіом теорії ймовірностей* (системою аксіом А.М. Колмогорова).

Зауважимо, що якщо міра $V(A)$, $A\in S$, задовольняє вимоги $0<V(\Omega)<\infty$, тоді функція $\widetilde{V}(A)$ від множин $A\in S$, що визначається за рівністю

$$\widetilde{V}(A)=\frac{V(A)}{V(\Omega)},\ A\in S,$$

буде ймовірнісною мірою, оскільки задовольняє вимоги 1_p-3_p. Зокрема $\widetilde{V}(\Omega)=1$.

Таку функцію $\widetilde{V}(A)$ від множин $A\in S$ називають *нормованою мірою, що отримується нормуванням міри* $V(A)$, *заданої на S*.

Легко бачити, що статистична ймовірність (відносна частота) $P_n^*(A)$, $A\in S$, визначена на сукупності S підмножин множини Ω, є ймовірнісною мірою (оскільки задовольняє вимоги 1_p-3_p).

Зауважимо, що $P_n^*(A)$, $A\in S$, є *нормованою мірою, одержаною нормуванням міри* $k_n(A)$, заданої на *S*:

$$P_n^*(A)=\frac{k_n(A)}{k_n(\Omega)},\ A\in S,$$

причому міра $k_n(A)$, $A\in S$, задовольняє вимоги $0\le k_n(A)<\infty$ для всіх $A\in S$, зокрема $1\le k_n(\Omega)=n<\infty$, $P_n^*(\Omega)=\dfrac{k_n(\Omega)}{k_n(\Omega)}=1$.

Зауважимо також, що $P_n^*(A)=\dfrac{k_n(A)}{k_n(\Omega)}$, $A\in S$, є часткою від кількості $k_n(\Omega)=n\ge 1$ точок, вибраних із множини Ω в результаті серії із n проведених випробувань, яка припадає на множину $A\subset\Omega$, $A\in S$, тобто $k_n(\Omega)\cdot P_n^*(A)=k_n(A)$, $A\subset\Omega$, $A\in S$.

Очевидно, $P_n^*(A)=\dfrac{k_n(A)}{k_n(\Omega)}$ може набувати лише значень $0=\dfrac{0}{n},\dfrac{1}{n},\dfrac{2}{n},\ldots,\dfrac{n}{n}=1$ в межах від 0 до 1 – найменшого, коли серед точок, вибраних із множини Ω в результаті серії із n випробувань, $n\ge 1$, $k_n(\Omega)=n$, не виявилося жодної, яка належить до множини *A*, тобто $k_n(A)=0$, $P_n^*(A)=\dfrac{k_n(A)}{k_n(\Omega)}=\dfrac{0}{n}=0$, і найбільшого, коли серед точок, вибраних із множини Ω в серії із n випробувань, $n\ge 1$, $k_n(\Omega)=n$, всі вибрані точки належать до множини *A*, тобто $k_n(A)=n$, $P_n^*(A)=\dfrac{k_n(A)}{k_n(\Omega)}=\dfrac{n}{n}=1$.

Якщо, наприклад, проведено лише одне випробування, тобто $n=1$, і вибрано точку $E\in A$, $A\subset\Omega$, $A\in S$, тоді $k_n(\Omega)=1$,

$k_n(A)=1$, $P_n^*(A)=\dfrac{k_n(A)}{k_n(\Omega)}=\dfrac{1}{1}=1$, $n=1$.

Якщо при цьому розглядається інша подія $B\subset\Omega$, $B\in S$, і вибрана точка E не належить до множини B, тобто $E\overline{\in}B$, а значить $E\in\overline{B}$, тоді $k_n(B)=0$, $k_n(\overline{B})=1$, $P_n^*(B)=\dfrac{k_n(B)}{k_n(\Omega)}=\dfrac{0}{1}=0$, $P_n^*(\overline{B})=\dfrac{k_n(\overline{B})}{k_n(\Omega)}=\dfrac{1}{1}=1$, $n=1$.

На практиці як правило проводять досить довгу серію випробувань для того, щоб за її результатами можна було робити більш або менш точні і надійні прогнози на майбутнє стосовно відбування деякої події *A*. Однак для теоретичних досліджень властивостей статистичної ймовірності $P_n^*(A)$ як ймовірнісної міри, заданої на деякій сукупності *S* підмножин множини Ω, що задовольняє вимоги 1_s-3_s, довжина серії випробувань не має ніякого значення, важливо лише, щоб виконувалась умова $1\le n<\infty$.

Приклад 1.8.1. Нехай дуже велику кількість разів проводили випробування – підкидання кубика, в результаті кожного з яких навмання вибирався один елемент із множини $\Omega=\{"1","2","3","4","5","6"\}$. Нехай, разом з тим, повідомлено лише, що за результатами цих випробувань виявилося $P_n^*(\{"6"\})=0.60$, $P_n^*(\{"5"\})=0.30$. Тоді за наведеними даними можна побудувати один із можливих просторів подій, для всіх елементів якого буде визначено статистичну ймовірність (ймовірнісну міру), слідуючим чином. Розглянемо підмножину множини Ω, яка є доповненням множини $\{"5"\}\bigcup\{"6"\}$ до множини Ω, тобто множину $\Omega\setminus(\{"5"\}\bigcup\{"6"\})=\{"1","2","3","4"\}$.

Введемо позначення: $H_1=\{"1","2","3","4"\}$, $H_2=\{"5"\}$, $H_3=\{"6"\}$. Очевидно $H_iH_j=\varnothing$, коли $i\neq j$, $H_1+H_2+H_3=\Omega$, тобто підмножини H_1,H_2,H_3 утворюють поділ множини Ω на підмножини, що попарно не перетинаються.

Розглянемо таку сукупність *S* підмножин множини $\Omega=\{"1","2","3","4","5","6"\}$:

$$S=\{\varnothing,\ H_1,\ H_2,\ H_3,\ H_1+H_2,\ H_1+H_3,\ H_2+H_3,\ H_1+H_2+H_3=\Omega\}=$$

$$= \{\varnothing, \{"1","2","3","4"\}, \{"5"\}, \{"6"\}, \{"1","2","3","4","5"\},$$
$$\{"1","2","3","4","6"\}, \{"5","6"\}, \{"1","2","3","4","5","6"\} = \Omega\}.$$

Очевидно, ця сукупність S задовольняє вимоги 1_s-3_s. В подібних випадках говорять, що сукупність S породжена поділом множини Ω на підмножини H_1, H_2, H_3. Очевидно також, що $P_n^*(A)$ визначена на всіх елементах сукупності S:

$$P_n^*(\varnothing) = 0;\ P_n^*(\{"1","2","3","4"\}) = P_n^*(\overline{\{"5"\} \bigcup \{"6"\}}) =$$
$$= 1 - P_n^*(\{"5"\} \bigcup \{"6"\}) = 1 - (0.30 + 0.60) = 0.10;\ P_n^*(\{"5"\}) = 0.30;$$
$$P_n^*(\{"6"\}) = 0.60;\ P_n^*(\{"1","2","3","4","5"\}) = 0.40;$$
$$P_n^*(\{"1","2","3","4","6"\}) = 0.70;\ P_n^*(\{"5","6"\}) = 0.90\ ;$$
$$P_n^*(\{"1","2","3","4","5","6"\}) = 1,$$

і задовольняє вимоги 1_p-3_p.

Тому в розглянутому випадку сукупність S є простором подій (вимірних за мірою $P_n^*(A)$ підмножин множини Ω), а трійка (Ω, S, P_n^*) є ймовірнісним простором.

Разом з тим підмножини, наприклад, $\{"1","2"\}$, $\{"1","3","5"\}$, $\{"2","4","6"\}$, і деякі інші підмножини множини $\Omega = \{"1","2","3", "4","5","6"\}$ виявляються невимірними відносно розглянутої міри $P_n^*(A)$, $A \in S$, і тому такі підмножини не включені до простору подій S, вони не вважаються подіями.

Приклад 1.8.2. Нехай Ω – скінченна множина точок x_i з відрізка $[0,1]$, причому $x_i = x_{i-1} + h$, $x_0 = 0$, $h = 10^{-1000000}$, $i \in \{1, 2, \dots, 10^{1000000}\}$. Тоді (як і у випадку неперервної множини Ω типу $\Omega = [a,b)$), на практиці швидше за все недоцільно розглядати всі підмножини розглянутої скінченної множини Ω. У подібних випадках доцільно множину Ω поділити на деяку практично прийнятну кількість k підмножин H_i таких, що $H_i H_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = \Omega$, і як події разом з $\varnothing$ розглядати лише всілякі об'єднання підмножин H_i. Визначивши статистичні ймовірності $P_n^*(H_i)$, $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, для довільної події

$A = \bigcup_{i \in I} H_i \in S$, $I \subset \{1,2,...,k\}$, будемо мати $P_n^*(A) = \sum_{i \in I} P_n^*(H_i)$.

При цьому сукупність S подій (підмножин множини Ω) може містити неможливу подію $\varnothing$, усі події H_i, усі суми виду $H_i + H_j$ по дві події, $i \in \{1,2,\ldots,k\}$, $j \in \{1,2,\ldots,k\}$, $i \neq j$, усі суми виду $H_i + H_j + H_l$ по три події, $i \in \{1,2,\ldots,k\}$, $j \in \{1,2,\ldots,k\}$, $l \in \{1,2,\ldots,k\}$, $i \neq j \neq l$, усі суми по чотири події H_i, усі суми по п'five подій H_i, і т.д., усі суми по $(k-1)$ подій H_i, суму всіх k подій H_i, тобто $H_1 + H_2 + ... + H_k = \Omega$. Очевидно, так побудована (породжена поділом множини Ω на підмножини H_1, H_2, …, H_k) сукупність S підмножин множини Ω задовольняє вимоги 1_s-3_s, а так введена ймовірнісна міра $P_n^*(A)$ задовольняє вимоги 1_p-3_p. У такий спосіб побудовано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*).

Якщо події H_i розглядати як єдино можливі наслідки випробування, тоді по суті вводиться новий простір $\widetilde{\Omega}$ елементарних подій $\widetilde{\Omega} = \{H_1, H_2, ..., H_k\}$ і відповідно новий ймовірнісний простір $(\widetilde{\Omega}, S, P_n^*)$.

У розглянутому прикладі множину Ω можна поділити, наприклад, на 10 підмножин H_i у такий спосіб:

$H_1 = \{x_i \mid 0 \le x_i < 0.1\}$, $H_2 = \{x_i \mid 0.1 \le x_i < 0.2\}$,
$H_3 = \{x_i \mid 0.2 \le x_i < 0.3\}$, $H_4 = \{x_i \mid 0.3 \le x_i < 0.4\}$,
$H_5 = \{x_i \mid 0.4 \le x_i < 0.5\}$, $H_6 = \{x_i \mid 0.5 \le x_i < 0.6\}$,
$H_7 = \{x_i \mid 0.6 \le x_i < 0.7\}$, $H_8 = \{x_i \mid 0.7 \le x_i < 0.8\}$,
$H_9 = \{x_i \mid 0.8 \le x_i < 0.9\}$, $H_{10} = \{x_i \mid 0.9 \le x_i \le 1.0\}$.

Можливі і інші поділи множини Ω на підмножини, які попарно не перетинаються. Наприклад, $\widetilde{H}_1 = H_1 + H_2$, $\widetilde{H}_2 = H_3 + H_4$, $\widetilde{H}_3 = H_5 + H_6$, $\widetilde{H}_4 = H_7 + H_8$, $\widetilde{H}_5 = H_9 + H_{10}$ і т.п.

Задачі

1.8.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Поняття міри множини узагальнює поняття кількості елементів у множині, довжини лінійної множини, площі плоскої фігури, об’єму тіла, маси тіла.

2. Міру можна задати на будь-якій сукупності множин.

3. Абсолютна частота $k_n(A)$ події A, $A \in S$, є мірою, заданою на S.

4. Статистична ймовірність є ймовірнісною мірою.

5. Кожна ймовірнісна міра є статистичною ймовірністю.

6. Для того, щоб задати ймовірнісну міру $P_n^*(A), A \in S$, потрібно спочатку задати простір подій S.

7. Для того, щоб задати простір подій S, потрібно спочатку задати ймовірнісну міру на деяких підмножинах $A \subset \Omega$.

1.8.2. Нехай $\Omega = \{"1","2","3","4","5","6"\}$, і відомі відносні частоти $P_n^*(\{"5","6"\}) = 0.70;$ $P_n^*(\{"1","2","3","4"\}) = 0.30$. Чи буде трійка (Ω, S, P_n^*) ймовірнісним простором, якщо:

а) $S = \{\varnothing, \{"1","2","3","4"\}, \{"5","6"\}, \Omega\}$?

б) $S = \{\varnothing, \Omega\}$?

в) $S = \{\varnothing, \{"5","6"\}, \Omega\}$?

г) $S = \{\varnothing, \{"1","2"\}, \{"3","4","5","6"\}, \Omega\}$?

д) $S = \{\{"1"\}, \{"2"\}\}$?

1.8.3. Нехай задано деяку множину Ω елементарних подій і ймовірнісну міру $P_n^*(A)$ для деякого $A \subset \Omega$. Побудувати ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*), для якого $A \in S$. Скільки просторів подій можна побудувати за заданих умов?

1.8.4. Нехай задано деяку множину Ω і ймовірнісні міри $P_n^*(H_1)$, $P_n^*(H_2)$, $P_n^*(H_3)$ деяких підмножин H_1, H_2, H_3 множини Ω, таких, що $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$. Побудувати всі можливі ймовірнісні простори (Ω, S, P_n^*) за заданих умов.

1.9. Побудова ймовірнісного простору

При побудові ймовірнісного простору трійку (Ω, S, P) можна вважати ймовірнісним простором, якщо *множина* Ω, *сукупність* S *і ймовірнісна міра* $P(A)$ *узгоджені*.

Це означає, що функція $P(A)$ повинна бути визначена для кожного $A \in S$, сукупність S підмножин множини Ω повинна задовольняти вимоги 1_s-3_s, а функція $P(A)$ – вимоги 1_p-3_p. Якщо ж хоч одна із зазначених вимог не виконується, тоді слід продовжити дії щодо побудови ймовірнісного простору.

Наприклад, якщо функція $P(A)$ визначена не на всіх $A \in S$, то тоді необхідно або довизначити функцію $P(A)$ на всіх $A \in S$ (продовжити міру $P(A)$ на всю сукупність S), або ж вилучити із сукупності S всі її елементи $A \in S$, для яких $P(A)$ не визначена, і залишивши лише такі $A \in S$, для яких $P(A)$ визначена, побудувати на їх основі нову сукупність S_1 таку, яка буде задовольняти вимоги 1_s-3_s, і крім того $P(A)$ буде визначена на всіх елементах $A \in S_1$ і буде задовольняти вимоги 1_p-3_p.

Множини $A \subset \Omega$, для яких міра $P(A)$ не визначена, називаються *невимірними* відносно міри $P(A)$. Відповідно множини $A \subset \Omega$, для яких $P(A)$ визначена, називаються *вимірними* відносно міри $P(A)$.

Невимірні (*відносно міри* $P(A)$) *підмножини* $A \subset \Omega$ *множини* Ω *не розглядаються як події* (не вважаються подіями), *а до простору подій* S *включають лише вимірні* (*відносно міри* $P(A)$) *підмножини множини* Ω.

Приклад 1.9.1. Нехай Ω ={"1", "2", "3", "4", "5", "6"} і нехай $H_1 = \{"1","2","3"\}$, $H_2 = \{"4"\}$, $H_3 = \{"5"\}$, $H_4 = \{"6"\}$. Тоді $H_i H_j = \varnothing$ при $i \neq j$, $H_1 + H_2 + H_3 + H_4 = \Omega$.

Розглянемо таку сукупність S_1 підмножин множини Ω:

$$S_1 = \{\varnothing,\ H_1,\ H_2,\ H_3,\ H_4,\ H_1+H_2,\ H_1+H_3,\ H_1+H_4,\ H_2+H_3,\ H_2+H_4,\ H_3+H_4,$$
$$H_1+H_2+H_3,\ H_1+H_2+H_4,\ H_1+H_3+H_4,\ H_2+H_3+H_4,\ H_1+H_2+H_3+H_4=\Omega\} =$$
$$= \Big\{ \varnothing,\ \{"1","2","3"\},\ \{"4"\},\ \{"5"\},\ \{"6"\},\ \{"1","2","3","4"\},\ \{"1","2","3","5"\},$$
$$\{"1","2","3","6"\},\ \{"4","5"\},\ \{"4","6"\},\ \{"5","6"\},\ \{"1","2","3","4","5"\},$$
$$\{"1","2","3","4","6"\},\quad \{"1","2","3","5","6"\},\quad \{"4","5","6"\},$$
$$\{"1","2","3","4","5','6"\} \Big\}.$$

Очевидно ця сукупність S_1 (породжена поділом множини Ω на підмножини H_1, H_2, H_3, H_4) задовольняє вимоги 1_s-3_s. Разом з тим, якщо задано лише $P_n^*(\{"6"\}) = 0.6$, $P_n^*(\{"5"\}) = 0.3$, тоді можна однозначно визначити $P_n^*(A)$ для A із сукупності подій

$$S = \{\varnothing, \{"1","2","3","4"\}, \{"5"\}, \{"6"\}, \{"1","2","3","4","5"\},$$
$$\{"1","2","3","4","6"\}, \{"5","6"\},\ \{"1","2","3","4","5","6"\}\}$$

Таким чином P_n^* і S узгоджені. Разом з тим, ймовірнісна міра $P_n^*(A)$ виявляється неузгодженою із сукупністю S_1, оскільки неможливо однозначно визначити статистичні ймовірності попадання в підмножини $\{"1","2","3"\}$, $\{"4"\}$, $\{"1","2","3","5"\}$, $\{"4","5"\}$, $\{"1","2","3","6"\}$, $\{"4","6"\}$, $\{"4","5","6"\}$, ці підмножини виявляються невимірними відносно так заданої ймовірнісної міри. Якщо при цьому в доповнення до попереднього повідомлено, що відносна частота попадання в множину $\{"4"\}$ дорівнює, наприклад, 0.06, а в множину $\{"1","2","3"\}$ – 0.04, то тоді одержуємо нову функцію $\widetilde{P}_n^*(A)$, $A \in S_1$, визначену на всіх елементах S_1. Зокрема,

$$\widetilde{P}_n^*(\{"1","2","3"\}) = 0.04 \quad \widetilde{P}_n^*(\{"4"\}) = 0.06,$$

$$\widetilde{P}_n^*(\{"1","2","3","5"\}) = 0.34, \; \widetilde{P}_n^*(\{"4","5"\}) = 0.36,$$

$$\widetilde{P}_n^*(\{"1","2","3","6"\}) = 0.64, \; \widetilde{P}_n^*(\{"4","6"\}) = 0.66,$$

$$\widetilde{P}_n^*(\{"4","5","6"\}) = 0.96,$$

а на елементах сукупності $S \subset S_1$

$$\widetilde{P}_n^*(A) = P_n^*(A), \; A \in S .$$

Таким чином ймовірнісна міра $\widetilde{P}_n^*(A)$ є продовженням ймовірнісної міри $P_n^*(A)$ із сукупності S на сукупність $S_1 \supset S$.

Разом з тим, якщо немає ніяких коректних міркувань щодо того, як слід продовжувати міру $P_n^*(A)$ із сукупності S на сукупність S_1, тоді слід із сукупності S_1 вилучити всі підмножини множини Ω, невимірні відносно міри $P_n^*(A)$, для того, щоб мати можливість побудувати сукупність S вимірних відносно міри $P_n^*(A)$ підмножин множини Ω, яка буде задовольняти вимоги 1_s-3_s, і в такий спосіб побудувати ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*).

Наприклад, якщо задані міри $P_n^*(H_i)$ множин H_1, H_2, …, H_k таких, що $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = \Omega$, тоді можна побудувати сукупність S вимірних за мірою P_n^* підмножин множини Ω, включивши до S разом з $\varnothing$ всеможливі об'єднання множин H_i по одному, по два, по три і т.д., по $k-1$, всіх k доданків. Очевидно, така сукупність S (породжена поділом множини Ω на підмножини H_1, H_2, …, H_k) задовольнятиме вимоги 1_s-3_s і на всіх елементах такої сукупності буде визначена міра P_n^*.

Слід підкреслити, що за заданих в прикладі 1.9.1 умов існує багато різних продовжень міри P із сукупності S на сукупність S_1.

Зауважимо, що коли множина Ω елементарних подій скінченна, $\Omega = \{E_1, E_2, ..., E_k\}$, і визначені статистичні ймовірності $P_n^*(\{E_i\})$, $i \in \{1, 2, ..., k\}$, то тоді числа $P_n^*(A) = \sum_{E_i \in A} P_n^*(\{E_i\})$ виявляються визначеними для будь якого $A \subset \Omega$.

Зауважимо також, що до сукупності S не обов'язково повинні входити всі множини H_i, всі суми $H_i + H_j$, $i \neq j$, по два доданки, всі суми по три доданки і т.д. Важливо лише, щоб задовольнялися вимоги 1_s-3_s стосовно сукупності S, і щоб для кожного $A \in S$ була визначена ймовірнісна міра $P_n^*(A)$.

Приклад 1.9.2. Нехай для деяких $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, $AB = \varnothing$, задано $P_n^*(A)$ і $P_n^*(B)$. Тоді оскільки

$$\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}, \; A + B + \overline{A}\,\overline{B} = \Omega, \; A \cdot \overline{A}\,\overline{B} = \varnothing, \; B \cdot \overline{A}\,\overline{B} = \varnothing,$$

$$P_n^*(\overline{A}\,\overline{B}) = 1 - P_n^*(A+B) = 1 - P_n^*(A) - P_n^*(B),$$

можна побудувати сукупність

$$S = \{\varnothing, A, B, \overline{A}\,\overline{B}, A+B, A+\overline{A}\,\overline{B}, B+\overline{A}\,\overline{B}, A+B+\overline{A}\,\overline{B} = \Omega\}$$

підмножин множини Ω, яка задовольняє вимоги 1_s-3_s, і в такий спосіб буде отримано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*).

Це означає, що ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) можна побудувати і тоді, коли задано $P_n^*(H_i)$ для деякої кількості k підмножин H_i із множини Ω таких, що $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, але не обов'язково $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = \Omega$, бо легко визначити ймовірнісну міру $P_n^*\left(\overline{\bigcup_{i=1}^{k} H_i}\right) = 1 - \sum_{i=1}^{k} P_n^*(H_i)$ доповнення множини $\bigcup_{i=1}^{k} H_i$ до множини Ω, тобто отримати поділ множини Ω на підмножини H_1, H_2, …, H_k, $\overline{\bigcup_{i=1}^{k} H_i}$, які не перетинаються, і для всіх із яких визначено ймовірнісну міру P_n^*. На основі цього поділу легко побудувати деяку сукупність S підмножин множини Ω, яка задовольнятиме вимоги 1_s-3_s і на всіх елементах якої буде визначена ймовірнісна міра P_n^*.

Таким чином, остаточно сказати, які саме підмножини A множини Ω вважаються подіями, можна лише після того, як побудовано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*).

Задачі

1.9.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо сукупність S підмножин $A \subset \Omega$ входить у простір подій S_1, тобто $S \subset S_1$, і на S_1 задана ймовірнісна міра $P_n^*(A)$, $A \in S_1$, то (Ω, S, P_n^*) ймовірнісний простір.

2. Якщо (Ω, S, P_n^*) – ймовірнісний простір, $S \subset S_1$, і S_1 задовольняє вимоги 1_s-3_s, то міру $P_n^*(A)$ можна продовжити із сукупності S на сукупність S_1:

а) безліччю способів; б) єдиним способом.

1.9.2. 1. Задано $\Omega=\{“1”,“2”,“3”,“4”,“5”,“6”\}$ і $P_n^*(\{“1”,“3”,“5”\})=0.5$, $P_n^*(\{“1”,“4”,“6”\})=0.5$. Чи можливо за заданих умов побудувати якийсь ймовірнісний простір? Якщо так, то скільки і які саме?

2. Задано простір елементарних подій Ω, підмножини $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$, $C \subset \Omega$, такі що $B \subset A$, $C \subset A$, $BC = \varnothing$. Крім того задано $P_n^*(A)$, $P_n^*(B)$, $P_n^*(C)$. Побудувати всі можливі ймовірнісні простори за заданих умов.

1.10. Умовна статистична ймовірність. Статистична ймовірність добутку подій.

Нехай Ω – простір елементарних подій, S – деякий простір подій, що відповідає Ω.

Хай проведено n випробувань, в яких спостерігалися події $A \in S$ і $B \in S$, і нехай $m_B \neq 0$ – число випробувань, в яких відбулася подія B. Серед цих m_B випробувань подія A відбувається тоді, коли відбуваються елементарні події, які належать як до множини A, так і до множини B, тобто до множини AB. Нехай m_{AB} – число випробувань, в яких відбулася подія AB. Тоді відносна частота відбування події A серед тих випробувань, коли відбувалася подія B, дорівнює

$$\frac{m_{AB}}{m_B} = \frac{m_{AB}/n}{m_B/n} = \frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)}.$$

Цю величину називають *умовною статистичною ймовірністю події A за умови, що подія B мала місце*, і позначають через $P_n^*(A/B)$. При цьому $P_n^*(A) = P_n^*(A/\Omega)$ називають *безумовною статистичною ймовірністю події A*.

Зауважимо, що умовна статистична ймовірність

$$P_n^*(A/B) = \frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)}$$

є нормованою мірою підмножин AB множини B, одержаною нормуванням міри $P_n^*(AB)$, $AB \subset B$, $A \in S$, $B \in S$. Міра $P_n^*(A/B)$ очевидно, задовольняє вимоги

$$0 \le P_n^*(A/B) \le 1,$$

зокрема $P_n^*(B/B) = \dfrac{P_n^*(B)}{P_n^*(B)} = 1$.

Якщо в механічній інтерпретації $P_n^*(B)$ – це маса, що припадає на множину B, а $P_n^*(AB)$ – маса, що припадає на множину AB, то $\dfrac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)}$ – частка від маси, що є у множині B, яка припадає на множину A. $P_n^*(A/B) = \dfrac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)}$ є також часткою від кількості попадань у множину B, яка припадає на множину A, тобто на AB.

З означення умовної статистичної ймовірності:

$$P_n^*(A/B) = \frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)} \qquad (1.10.1)$$

випливає, що

$$P_n^*(AB) = P_n^*(B)\,P_n^*(A/B).$$

Звідси, враховуючи, що $AB = BA$, дістанемо також рівність:

$$P_n^*(AB) = P_n^*(A)P_n^*(B/A). \qquad (1.10.2)$$

Приклад 1.10.1. Кубик підкидали дуже велику кількість n разів. При цьому виявилось, що відносна частота випадання на верхній грані кубика цифри “1” дорівнює 0.01, цифри “2” – 0.02, цифри “3” – 0.03, цифри “4” – 0.04, цифри “5” – 0.30, цифри “6” – 0.60.

Позначимо можливі наслідки (елементарні події) “i” через E_i, $i \in \{1, 2, \ldots, 6\}$. Тоді простір елементарних подій $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$. Як події розглядатимемо будь які підмножини множини Ω, тобто розглянемо простір S подій, який містить події $\varnothing$ і Ω, всі одноелементні підмножини множини Ω, всі двохелементні, всі триелементні, всі чотириелементні, всі п’ятиелементні підмножини множини Ω. Нехай подія A полягає в тому, що на верхній грані кубика випадає парна цифра, B – непарна цифра, C – одна із цифр “4”, ”5”, ”6”, D – одна із цифр “1”, ”2”, ”3”, ”4” (Рис. 1.10.1).

Враховуючи заданий *розподіл статистичних ймовірностей на множині* Ω *елементарних подій*:

E_i	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5	E_6
$P_n^*(\{E_i\})$	0.01	0.02	0.03	0.04	0.30	0.60

та формулу $P_n^*(A) = \sum\limits_{E_i \in A} P_n^*(\{E_i\})$, для розглядуваних подій A, B, C, D дістанемо:

$$P_n^*(A) = 0.66,\ \ P_n^*(B) = 0.34,\ \ P_n^*(C) = 0.94,\ \ P_n^*(D) = 0.10.$$

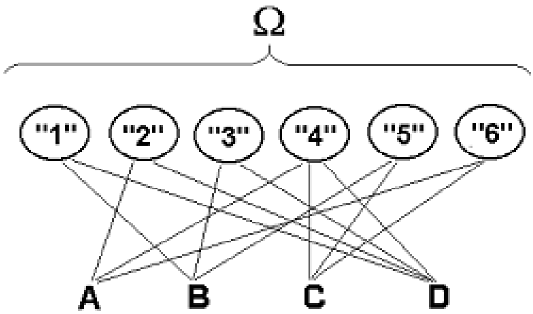


Рис. 1.10.1

Оскільки $AB = \varnothing$, $AC = \{E_4, E_6\}$, $AD = \{E_2, E_4\}$, то за формулою (1.10.1) для умовних статистичних ймовірностей матимемо:

$$P_n^*(A/B)=\frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)}=\frac{P_n^*(\varnothing)}{P_n^*(\{E_1,\,E_3,E_5\})}=\frac{0}{0.34}=0\,,$$

$$P_n^*(B/A)=\frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(A)}=\frac{P_n^*(\varnothing)}{P_n^*(\{E_2,E_4,E_6\})}=\frac{0}{0.66}=0\,,$$

$$P_n^*(A/C)=\frac{P_n^*(AC)}{P_n^*(C)}=\frac{P_n^*(\{E_4,E_6\})}{P_n^*(\{E_4,E_5,E_6\})}=\frac{0.64}{0.94}=0.68\,,$$

$$P_n^*(A/D)=\frac{P_n^*(AD)}{P_n^*(D)}=\frac{P_n^*(\{E_2,E_4\})}{P_n^*(\{E_1,E_2,E_3,E_4\})}=\frac{0.06}{0.10}=0.6\,.$$

Для добутку трьох подій *A*, *B*, *C* маємо:

$$P_n^*(ABC)=P_n^*((AB)C)=P_n^*(AB)\,P_n^*(C/AB)=$$
$$=P_n^*(A)\,P_n^*(B/A)\,P_n^*(C/AB).$$

В механічній інтерпретації – щоб одержати масу, що припадає на множину *ABC*, треба спочатку знайти масу, що припадає на *AB*, для чого треба взяти частку, що припадає на множину *B*, від маси, що є в множині *A*, потім від маси, що є в *AB*, взяти частку, що припадає на множину *C*.

За методом математичної індукції легко довести *формулу статистичної ймовірності добутку довільної скінченної кількості подій*

$$\begin{aligned}P_n^*(A_1\,A_2\ldots A_{m-1}\,A_m)&=P_n^*((A_1\,A_2\ldots A_{m-1})\,A_m)=\\&=P_n^*(A_1\,A_2\ldots A_{m-1})P_n^*(A_m/A_1A_2\cdots A_{m-1})=\ldots=\\&=P_n^*(A_1)\,P_n^*(A_2/A_1)\,P_n^*(A_3/A_1A_2)\cdots P_n^*(A_m/A_1A_2\cdots A_{m-1}).\end{aligned}\qquad(1.10.3)$$

Приклад 1.10.2. В скриньці є 49 кульок, які пронумеровані від 1 до 49. Дуже велику кількість *n* разів проводились такі випробування – навмання одна за однією без повернення в скриньку виймали шість кульок. При цьому виявилось, що відносна частота появи будь якої із 49 кульок першою дорівнює $\frac{1}{49}$. Після того, як першу кульку вийнято, відносна частота появи будь якої із решти 48 кульок дорівнює $\frac{1}{48}$ незалежно від номера першої кульки. Після того, як вийнято дві кульки, відносна частота появи будь якої із решти 47 кульок дорівнює $\frac{1}{47}$ незалежно від номерів двох вийнятих кульок. Після того, як вийнято три кульки, відносна частота появи будь якої із решти 46 кульок дорівнює $\frac{1}{46}$ незалежно від номерів трьох вийнятих кульок. Після того, як вийнято чотири кульки, відносна частота появи будь якої із решти 45 кульок дорівнює $\frac{1}{45}$ незалежно від номерів чотирьох вийнятих кульок. Після того, як вийнято 5 кульок, відносна частота появи будь якої із решти 44 кульок дорівнює $\frac{1}{44}$ незалежно від номерів п'яти вийнятих кульок.

Потрібно обчислити відносну частоту (статистичну ймовірність) відбування події A, яка полягає в тому, що на кожній із шести кульок, навмання вийнятих в одному випробуванні, був один із шести наперед задуманих номерів.

Припустимо, що задумали номери $i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6$. Позначимо через A_1 подію, яка полягає в тому, що першою вийнято кульку з номером m_1, який є серед задуманих, тобто $m_1 \in \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\}$. Зрозуміло, що ця подія спричинюється шістьма попарно несумісними подіями, кожна з яких полягає в тому, що першою вийнято кульку, номер якої дорівнює одному із задуманих, тобто дорівнює або i_1, або i_2, або i_3, або i_4, або i_5, або i_6.

За умовою задачі статистична ймовірність кожної із цих шести подій дорівнює $\frac{1}{49}$, а тому $P_n^*(A_1) = \frac{6}{49}$.

Позначимо через A_2 – подію, яка полягає в тому, що номер m_2 кульки, яку вийнято другою, є одним із шести задуманих номерів, тобто $m_2 \in \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\}$.

Якщо подія A_1 відбулася, тобто першою вийнято кульку з номером $m_1 \in \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\}$, то кулька з номером m_1 не може бути вийнята вдруге. Отже за умови, що подія A_1 відбулася, подія A_2 спричинюється п'ятьма попарно несумісними подіями, кожна з яких полягає в тому, що другою вийнято кульку, номер якої m_2 є одним із задуманих, але $m_2 \neq m_1$, тобто

$$m_2 \in \{i_1, i_2, i_3, i_4, i_5, i_6\} \setminus \{m_1\}.$$

За умовою задачі умовна статистична ймовірність кожної з цих п'яти подій дорівнює $\frac{1}{48}$. Тому $P_n^*(A_2 / A_1) = \frac{5}{48}$.

Аналогічно, якщо A_3, A_4, A_5, A_6 події, які полягають в тому, що відповідно третьою, четвертою, п'ятою, шостою вийнято кульку з номерами m_3, m_4, m_5, m_6, кожний з яких є одним із задуманих номерів і крім того не співпадає з номерами раніше вийнятих кульок, які теж належать до задуманих, то

$$P_n^*(A_3 / A_1 A_2) = \frac{4}{47}, \qquad P_n^*(A_4 / A_1 A_2 A_3) = \frac{3}{46},$$

$$P_n^*(A_5 / A_1 A_2 A_3 A_4) = \frac{2}{45}, \qquad P_n^*(A_6 / A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) = \frac{1}{44}.$$

Очевидно, що подія A відбувається тоді, коли *в одному й тому самому випробуванні* (вийманні одна за однією шести кульок) відбуваються всі шість подій $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$, тобто

$$A = A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6.$$

Враховуючи формулу (1.10.3), одержимо

$$P_n^*(A) = P_n^*(A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6) =$$
$$= P_n^*(A_1) P_n^*(A_2 / A_1) P_n^*(A_3 / A_1 A_2) P_n^*(A_4 / A_1 A_2 A_3) \cdot$$
$$\cdot P_n^*(A_5 / A_1 A_2 A_3 A_4) P_n^*(A_6 / A_1 A_2 A_3 A_4 A_5) =$$
$$= \frac{6}{49} \cdot \frac{5}{48} \cdot \frac{4}{47} \cdot \frac{3}{46} \cdot \frac{2}{45} \cdot \frac{1}{44} \approx \frac{7}{100000000}.$$

Отже, в наведеній серії дуже великої кількості n випробувань 6 номерів із 49 можливих вдавалося вгадати в середньому 7 разів у 100 мільйонах спроб.

Задачі

1.10.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Умовна статистична ймовірність $P_n^*(A / B)$ існує для будь-яких подій A та B.
2. Статистична ймовірність добутку подій дорівнює добутку статистичних ймовірностей цих подій.
3. Умовна статистична ймовірність потрібна для знаходження

статистичної ймовірності добутку подій.

4. $P_n^*(AB) = 1 - P_n^*(\overline{A} + \overline{B})$.

1.10.2. Відомо, що подія A полягає у випаданні не менше ніж a очок при підкиданні кубика, причому $P_n^*(\{"i"\}) = \frac{1}{6}$, $i \in \{1, 2, ..., 6\}$. Знайти $P_n^*(A/B)$, де подія B полягає у випаданні 4 очок, коли 1) $a = 1$; 2) $a = 2$; 3) $a = 3$; 4) $a = 4$; 5) $a = 5$; 6) $a = 6$.

1.11. Залежні і незалежні відносно ймовірнісної міри P_n^* випадкові події

Означення. *Події A і B називаються незалежними відносно ймовірнісної міри P_n^**, якщо

$$P_n^*(AB) = P_n^*(A)P_n^*(B).$$

Оскільки $P_n^*(AB) = P_n^*(B)P_n^*(A/B)$, то події A і B незалежні тоді й тільки тоді, коли $P_n^*(A/B) = P_n^*(A)$, тобто коли умовна статистична ймовірність $P_n^*(A/B)$ події A, знайдена за умови, що подія B мала місце, співпадає з безумовною статистичною ймовірністю $P_n^*(A)$ події A.

Аналогічно, якщо A і B незалежні події, то і $P_n^*(B/A) = P_n^*(B)$. Якщо ж $P_n^*(A) = 0$ або $P_n^*(B) = 0$, то події A і B незалежні, оскільки $AB \subset A$, $AB \subset B$, і тому $0 \le P_n^*(AB) \le P_n^*(A) = 0$ або $0 \le P_n^*(AB) \le P_n^*(B) = 0$, звідки $P_n^*(AB) = 0 = P_n^*(A) \cdot P_n^*(B)$.

Означення. *Події $A_1, A_2, \ldots, A_k$ називаються незалежними в сукупності відносно ймовірнісної міри P_n^**, якщо

$$P_n^*(\prod_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} P_n^*(A_i)$$

для довільного $I \subset \{1, 2, \ldots, k\}$, $I \ne \varnothing$.

З останнього означення випливає, що для того, щоб події $A_1, A_2, \ldots, A_k$ були незалежні в сукупності відносно міри P_n^*, потрібно, щоб кожна з них не залежала від будь-якої сукупності інших подій, тобто щоб мали місце рівності

$$P_n^*(A_i / \prod_{j\in I\setminus\{i\}} A_j) = P_n^*(A_i),\ I \subset \{1, 2, \dots, k\},\ I \setminus \{i\} \neq \varnothing .$$

Зауважимо, що коли замість ймовірнісної міри $P_n^*(A)$, $A \in S$, на тому самому просторі S подій задати іншу ймовірнісну міру $\widetilde{P}_n^*(A)$, $A \in S$, то події, що були незалежні (чи незалежні в сукупності) відносно ймовірнісної міри P_n^*, не обов'язково залишатимуться такими самими відносно ймовірнісної міри $\widetilde{P}_n^*$.

Одні і ті самі події A і B, $A \in S$, $B \in S$, відносно однієї ймовірнісної міри P_n^*, заданої на S, можуть бути незалежними, а відносно іншої ймовірнісної міри $\widetilde{P}_n^*$, заданої на тому самому просторі подій, можуть бути залежними. Тому говорити про незалежність чи залежність подій A і B безвідносно якоїсь ймовірнісної міри некоректно.

Приклад 1.11.1. Нехай проведено серію випробувань, в кожному з яких із скриньки, де було 40 кульок чотирьох кольорів – білі, червоні, зелені, жовті, по 10 кульок кожного кольору, навмання вибирали одну кульку, фіксували її колір і повертали в скриньку (Рис. 1.11.1).

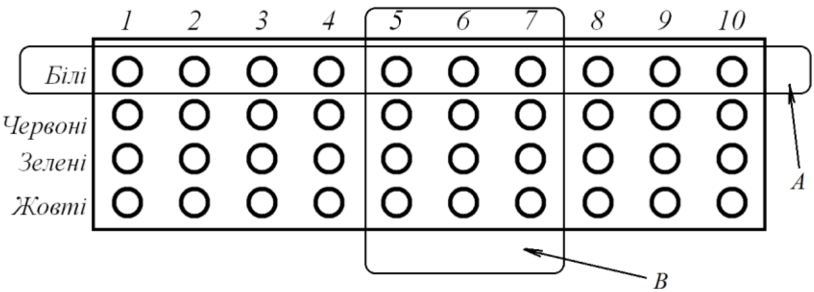


Рис. 1.11.1

Кульки кожного кольору пронумеровані від 1 до 10.

Нехай простір подій S містить всі підмножини заданої сорокаелементної множини Ω, подія A – кулька білого кольору, подія B – на кульці нанесено один із номерів 5, 6, 7 (Рис. 1.11.1).

а) Нехай в результаті проведеної серії випробувань отримали, що всі кульки вибирали однаково часто, тобто із статистичною ймовірністю $\frac{1}{40}$ кожна. Тоді

$$P_n^*(A)=\frac{10}{40}=\frac{1}{4},\ P_n^*(B)=\frac{12}{40}=\frac{3}{10},\ P_n^*(AB)=\frac{3}{40},$$

$$P_n^*(A/B)=\frac{3/40}{12/40}=\frac{1}{4}=P_n^*(A),\ P_n^*(B/A)=\frac{3/40}{10/40}=\frac{3}{10}=P_n^*(B),$$

$$P_n^*(AB)=P_n^*(A)\cdot P_n^*(B/A)=P_n^*(B)\cdot P_n^*(A/B)=P_n^*(A)\cdot P_n^*(B)=\frac{10}{40}\cdot\frac{12}{40}=\frac{3}{40}.$$

Таким чином відносно так заданої міри $P_n^*(A)$, $A\in S$, розглядувані події A і B незалежні.

б) Нехай в результаті іншої серії випробувань з тими самими множиною Ω, сукупністю підмножин S і подіями A, B отримали $\widetilde{P}_n^*(AB)=0$ (в множину AB не попадали жодного разу), $\widetilde{P}_n^*(A)=\frac{1}{2}$ (в половині всіх випробувань серії попадали в множину A), $\widetilde{P}_n^*(B)=\frac{1}{4}$ (в четвертій частині всіх випробувань серії попадали в множину B), але біла кулька з номерами 5, 6, 7 не була вибрана жодного разу. Тоді, очевидно,

$$\widetilde{P}_n^*(AB)=0\neq\widetilde{P}_n^*(A)\cdot\widetilde{P}_n^*(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

і тому відносно ймовірнісної міри $\widetilde{P}_n^*(A)$, $A\in S$, розглядувані події A і B залежні.

Приклад 1.11.2. Нехай $\Omega=\{E_1,\ E_2,\ E_3,\ E_4\}$ (Рис. 1.11.2). При цьому відомо, що

$$P_n^*(\{E_1\})=\frac{1}{4},\ P_n^*(\{E_2\})=\frac{1}{4},\ P_n^*(\{E_3\})=\frac{1}{4},\ P_n^*(\{E_4\})=\frac{1}{4}.$$

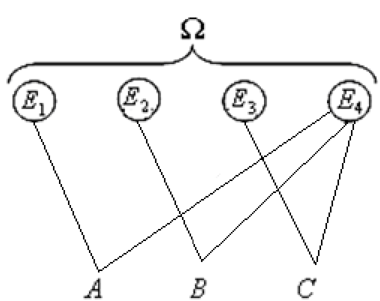


Рис. 1.11.2

Нехай події A, B, C визначені так: $A=\{E_1, E_4\}$, $B=\{E_2, E_4\}$, $C=\{E_3, E_4\}$.

Тоді $P_n^*(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $P_n^*(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $P_n^*(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$.

Оскільки $AB=\{E_4\}$, $AC=\{E_4\}$, $BC=\{E_4\}$, то

$$P_n^*(AB)=\frac{1}{4}=P_n^*(A)P_n^*(B)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2},\ P_n^*(AC)=\frac{1}{4}=P_n^*(A)P_n^*(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2},$$

$$P_n^*(BC)=\frac{1}{4}=P_n^*(B)P_n^*(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}.$$

Таким чином події A, B, C відносно розглядуваної ймовірнісної міри P_n^* попарно незалежні. При цьому подія A відбувалася в половині всіх n випробувань, а також в половині тих випробувань, коли відбувалася подія B, оскільки

$$P_n^*(A)=\frac{1}{2},\ P_n^*(A/B)=\frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)}=\frac{1/4}{1/2}=\frac{1}{2}.$$

Те саме можна сказати про безумовні статистичні ймовірності $P_n^*(B)$, $P_n^*(C)$ та умовні статистичні ймовірності $P_n^*(B/A)$, $P_n^*(A/C)$, $P_n^*(C/A)$, $P_n^*(B/C)$, $P_n^*(C/B)$.

Разом з тим $ABC=\{E_4\}$, тому

$$P_n^*(ABC)=\frac{1}{4}\neq P_n^*(A)P_n^*(B)P_n^*(C)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8}.$$

Той факт, що, наприклад, подія A залежить від добутку подій B і C, очевидний, оскільки у всіх тих випробуваннях, коли відбувалася подія BC (добуток подій B і C), відбувалася і подія A, тобто

$$P_n^*(A/BC)=1\left(=\frac{P_n^*(ABC)}{P_n^*(BC)}=\frac{1/4}{1/4}\right).$$

Оскільки $P_n^*(A/BC)=1\neq P_n^*(A)=\frac{1}{2}$, то подія A залежить від добутку подій B і C.

Отже, в розглядуваному випадку події A, B, C попарно незалежні, але залежні в сукупності.

Задачі

1.11.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Будь-які події A і B є незалежними, якщо $P_n^*(A)=0$ або $P_n^*(B)=0$.
2. Події A, B і C незалежні в сукупності, якщо вони попарно незалежні.
3. Твердження, обернене до 2, є правильним.
4. Якщо події незалежні відносно однієї ймовірнісної міри, то вони незалежні і відносно будь-якої іншої ймовірнісної міри.

1.11.2. Нехай $\Omega=\{ГГ,ГЦ,ЦГ,ЦЦ\}=\{E_1,E_2,E_3,E_4\}$ – простір елементарних подій, що відповідає одночасному підкиданню двох монет, причому $P_n^*(\{E_k\})=\dfrac{1}{4}$, $k\in\overline{1,4}$. Подія A полягає у випаданні герба на першій монеті, подія B – випадання герба на другій монеті.

1. Чи є події A і B незалежними відносно заданої міри P_n^*?

2. Чи можна визначити ймовірнісну міру P_n^* так, щоб A і B стали незалежними (чи залежними) подіями?

1.11.3. Нехай A і B події з попередньої задачі. Чи існує подія C така, що події A, B і C – незалежні в сукупності відносно заданої міри P_n^*?

1.12. Формула повної статистичної ймовірності. Формула Байєса

Нехай простір Ω елементарних подій поділено на m підмножин $H_1, H_2, ..., H_m$ таких, що $H_i\in S$, $H_iH_j=\varnothing$ при $i\neq j$, $H_1+H_2+...+H_m=\Omega$, і нехай $A-$ подія, $A\subset\Omega$, $A\in S$ (Рис. 1.12.1). Надалі H_i називатимемо *гіпотезами*. Оскільки

$$A=A\cdot\Omega=A(H_1+H_2+...+H_m)=AH_1+AH_2+...+AH_m,$$

причому $AH_i\cdot AH_j=\varnothing$, коли $i\neq j$, то за властивістю адитивності статистичної ймовірності і формулою (1.10.2) маємо:

$$P_n^*(A)=P_n^*(AH_1+AH_2+...+AH_m)=P_n^*(AH_1)+P_n^*(AH_2)+...+P_n^*(AH_m)=$$
$$=P_n^*(H_1)P_n^*(A/H_1)+P_n^*(H_2)P_n^*(A/H_2)+...+P_n^*(H_m)P_n^*(A/H_m).$$

Таким чином,

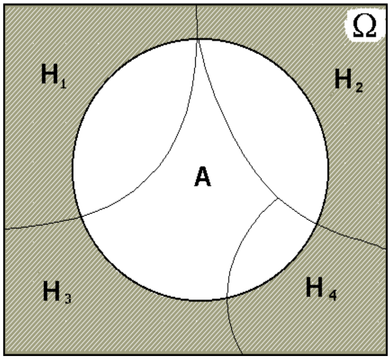


Рис. 1.12.1

$$P_n^*(A)=\sum_{i=1}^{m}P_n^*(H_i)\,P_n^*(A/H_i) \qquad (1.12.1)$$

Цю формулу називають *формулою повної статистичної ймовірності*.

Отже, якщо відомі або легко знаходяться статистичні ймовірності $P_n^*(H_i)$ гіпотез H_i, а також відомі або легко знаходяться умовні статистичні ймовірності $P_n^*(A/H_i)$ події A за кожною з гіпотез H_i, $i\in\{1,2,...,m\}$, тоді статистичну ймовірність $P_n^*(A)$ події A можна обчислити за формулою (1.12.1).

Приклад 1.12.1. Є дві скриньки, в яких є білі і чорні кульки. Випробування полягає в тому, що навмання вибирається скринька, а з неї навмання вибирається кулька, яка потім повертається в скриньку. Із n випробувань m_1 разів була вибрана перша скринька, при цьому в $k_1<m_1$ цих випадків кулька була біла, і $m_2=n-m_1$ разів була вибрана друга скринька, при цьому в $k_2<m_2$ випадків кулька була біла.

Природно вважати, що простір елементарних подій $\Omega=\{(1,б),(1,ч),(2,б),(2,ч)\}$, де елементарна подія $E_{kб}=(k,б)$, $k\in\overline{1,2}$, означає, що з k-тої скриньки вийнято білу кульку. Подія $H_k=\{(k,б),(k,ч)\}$ означає, що кульку вийнято з k-тої скриньки, $k\in\overline{1,2}$. За умовою задачі $P_n^*(H_1)=\dfrac{m_1}{n}$, $P_n^*(H_2)=\dfrac{m_2}{n}$. Очевидно $H_1\cdot H_2=\varnothing$ і $H_1+H_2=\Omega$.

Нехай подія $A=\{(1,б),(2,б)\}$ – поява білої кульки. За умовою задачі $P_n^*(A/H_1)=\dfrac{k_1}{m_1}$, $P_n^*(A/H_2)=\dfrac{k_2}{m_2}$.

Тому за формулою (1.12.1) статистична ймовірність (відносна частота) появи білої кульки в цих n випробуваннях дорівнює

$$P_n^*(A)=P_n^*(H_1)P_n^*(A/H_1)+P_n^*(H_2)P_n^*(A/H_2)=\frac{m_1}{n}\cdot\frac{k_1}{m_1}+\frac{m_2}{n}\cdot\frac{k_2}{m_2}.$$

Якщо в умовах, коли відомі $P_n^*(H_i)$ і $P_n^*(A/H_i)$, потрібно визначити, чому дорівнює $P_n^*(H_i/A)$, тобто відносну частоту відбування події H_i серед тих випробувань, коли відбувалася подія A, то, виходячи з означення умовної статистичної ймовірності та формули повної статистичної ймовірності, дістанемо:

$$P_n^*(H_i/A)=\frac{P_n^*(AH_i)}{P_n^*(A)}=\frac{P_n^*(H_i)P_n^*(A/H_i)}{\sum\limits_{i=1}^{m}P_n^*(H_i)P_n^*(A/H_i)}.$$

Останню формулу називають *формулою Байєса*.

Приклад 1.12.2. При багатократному передаванні телеграфних повідомлень за допомогою двох знаків "•" (крапка) і "—" (тире) було з'ясовано, що відносна частота спотворення знака "•" дорівнює $\dfrac{2}{5}$, а відносна частота спотворення знака "—" дорівнює $\dfrac{2}{3}$. Крім того було помічено, що у повідомленнях, які треба передавати, відносна частота появи знака "•" дорівнює $\dfrac{5}{8}$, а відносна частота появи знака "—" дорівнює $\dfrac{3}{8}$. Потрібно обчислити відносну частоту випадків, коли передавали знак "•", серед тих випадків, коли було прийнято знак "•".

Природно вважати, що простором елементарних подій є $\Omega=\{$"••", "•—", "—•", "— —"$\}$, де кожній елементарній події $E\in\Omega$ відповідає сукупність двох знаків: першим вказано переданий знак, а другим – прийнятий.

Нехай подія $A=\{$"••", "—•"$\}$ полягає в тому, що прийнято знак "•". Така подія може відбутися як за умови, що передавали знак "•", так і за умови, що передавали знак "—". Отже є дві гіпотези: $H_1=\{$"••", "•—"$\}$ – передавали знак "•", $H_2=\{$"—•",

“▬ ▬”} – передавали знак “▬”. Очевидно $H_1 H_2 = \varnothing$, $H_1 + H_2 = \Omega$. За умовами задачі $P_n^*(H_1) = \frac{5}{8}$, $P_n^*(H_2) = \frac{3}{8}$. Крім того, оскільки відносна частота спотворення знака “•” дорівнює $\frac{2}{5}$, а знака “▬” – $\frac{2}{3}$, то подія A за гіпотези H_1 відбувається тоді, коли знак “•” не спотворюється, тобто $P_n^*(A/H_1) = 1 - \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$, а за гіпотези H_2 подія A відбувається, коли спотворюється знак “▬”, тобто $P_n^*(A/H_2) = \frac{2}{3}$.

Тоді за формулою повної статистичної ймовірності одержуємо

$$P_n^*(A) = P_n^*(H_1)P_n^*(A/H_1) + P_n^*(H_2)P_n^*(A/H_2) = \frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5} + \frac{3}{8}\cdot\frac{2}{3} = \frac{5}{8}.$$

Щоб визначити статистичну ймовірність того, що передавали знак “•”, за умови, що прийнято знак “•”, тобто $P_n^*(H_1/A)$, скористаємось означенням умовної статистичної ймовірності $P_n^*(A/B) = \frac{P_n^*(AB)}{P_n^*(B)}$ або формулою Байєса.

Для розглядуваного випадку дістанемо:

$$P_n^*(H_1/A) = \frac{P_n^*(AH_1)}{P_n^*(A)} = \frac{P_n^*(H_1)P_n^*(A/H_1)}{P_n^*(A)} =$$

$$= \frac{P_n^*(H_1)P_n^*(A/H_1)}{P_n^*(H_1)P_n^*(A/H_1) + P_n^*(H_2)P_n^*(A/H_2)} = \frac{\frac{5}{8}\cdot\frac{3}{5}}{\frac{5}{8}} = \frac{3}{5}.$$

Задачі

1.12.1. Перевірити чи правильні твердження:

1. Якщо $H_1 + H_2 + \ldots + H_n = \Omega$, то H_i – гіпотези.
2. Якщо $H_i \cdot H_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то H_i – гіпотези.
3. Сума умовних статистичних ймовірностей $P_n^*(A/H_i)$, $i \in \overline{1,k}$, може бути більшою, ніж 1.
4. Для кожної гіпотези H_i існує подія A така, що

$P_n^*(H_i / A) = P_n^*(H_i)$.

5. Кожна гіпотеза у даному ймовірнісному просторі (Ω, S, P_n^*) має єдину статистичну ймовірність, яка не залежить від того, відбулася чи ні якась подія A .

6. Кожна гіпотеза у даному ймовірнісному просторі (Ω, S, P_n^*) може мати багато різних умовних статистичних ймовірностей.

1.12.2. За даними прикладу 1.12.2 обчислити:

а) відносну частоту випадків, коли передавали знак “**–**”, серед тих випадків, коли було прийнято знак “•”;

б) відносну частоту випадків, коли передавали знак “•”, серед тих випадків, коли було прийнято знак “**–**”;

в) відносну частоту випадків, коли передавали знак “**–**”, серед тих випадків, коли було прийнято знак “**–**”.

РОЗДІЛ 2. РОЗПОДІЛИ СТАТИСТИЧНИХ ЙМОВІРНОСТЕЙ

2.1. Поняття розподілу статистичних ймовірностей на множині елементарних подій

Нехай Ω – деякий простір елементарних подій, S – відповідний простір подій, $P_n^*(A)$, $A \in S$, – ймовірнісна міра, визначена на елементах сукупності *S*, які є підмножинами множини Ω, тобто $A \subset \Omega$ і $A \in S$, отже задано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*).

Тоді говорять, що тим самим задано *розподіл статистичних ймовірностей* (ймовірнісної міри) $P_n^*(A)$ на множині Ω, оскільки задано, чому дорівнює статистична ймовірність попадання в кожну підмножину $A \subset \Omega$, таку, що $A \in S$, тобто задано $P_n^*(A)$ для кожного $A \in S$. Іншими словами, задано, яка статистична ймовірність $P_n^*(A)$ припадає на кожну підмножину $A \subset \Omega$ із сукупності *S*, чим і задано розподіл статистичних ймовірностей.

Приклад 2.1.1. Нехай множину Ω поділено на підмножини H_1, H_2, …, H_k, такі, що $H_i H_j = \varnothing$, якщо $i \neq j$, тобто в підмножинах H_i і H_j немає спільних елементів, коли $i \neq j$, а $H_1 + H_2 + \ldots + H_k = \Omega$. Нехай сукупність *S* підмножин множини Ω містить порожню множину $\varnothing$, всі підмножини H_1, H_2, …, H_k, а також всеможливі об'єднання цих підмножин по дві, по три і т.д., по *k*-1, всіх *k* підмножин. В такому разі говорять, що *простір подій S породжений поділом множини* Ω *на підмножини* H_1, H_2, …, H_k такі, що $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = \Omega$.

Якщо при цьому задано $P_n^*(H_i)$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, такі, що $0 \le P_n^*(H_i) \le 1$, $\sum_{i=1}^{k} P_n^*(H_i) = 1$, то тим самим задано $P_n^*(A)$ для довільного $A \in S$. При цьому, якщо $A = \bigcup_{i \in I} H_i$, де $I \subset \{1, 2, \ldots, k\}$ – деяка непорожня підмножина індексів із множини $\{1, 2, \ldots, k\}$, то $P_n^*(A) = \sum_{i \in I} P_n^*(H_i)$. В такому разі говорять, що *на множині* Ω

задано розподіл статистичних ймовірностей за підмножинами H_i такий, що статистична ймовірність попадання в множину H_i дорівнює $P_n^*(H_i)$ (або іншими словами – на множину H_i припадає статистична ймовірність $P_n^*(H_i)$).

Якщо H_i одноелементні підмножини множини Ω, $H_i = \{E_i\}$, $\Omega = \{E_1, E_2, ..., E_k\}$, тоді S буде найбагатшим (найширшим) простором подій і міститиме всі підмножини множини Ω разом з порожньою $\varnothing$ та самою множиною Ω. При цьому *S* містить разом з $\varnothing$ і Ω всі події виду $\{E_i\}$, $i \in \{1, 2, ..., k\}$, та всеможливі підмножини множини Ω – двохелементні, триелементні і т.д., (k-1)-елементні, а для довільного $A = \bigcup_{i \in I} \{E_i\}$, $I \subset \{1, 2, ..., k\}$, буде $P_n^*(A) = P_n^*(\bigcup_{i \in I} \{E_i\}) = \sum_{i \in I} P_n^*(\{E_i\})$. В такому разі одержується *розподіл статистичних ймовірностей* $P_n^*(H_i) = P_n^*(\{E_i\})$ *на множині* Ω *за елементарними подіями* $E_i \in \Omega$.

Якщо множина Ω є множиною точок деякого координатного простору (наприклад, числової прямої – одновимірного координатного простору, площини – двохвимірного координатного простору тощо), тоді елементарні події $E \in \Omega$ будуть ототожнюватися з деякими точками відповідного координатного простору.

Розглянемо *дискретний простір* Ω елементарних подій такий, що містить скінченну кількість елементів, які можна занумерувати скінченною кількістю натуральних чисел від 1 до *k*. Отже, $\Omega = \{E_1, E_2, ..., E_k\}$. В геометричній інтерпретації кожну елементарну подію $E_i \in \Omega$ можна ототожнювати з деякою точкою на числовій прямій, тобто з деяким дійсним числом x_i, $i \in \{1, 2, ..., k\}$, причому числа x_i попарно різні: $x_i \neq x_j$, коли $i \neq j$. Тому можна вважати, що $\Omega_1 = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$, причому $x_1 < x_2 < ... < x_k$. В такий спосіб здійснюється перехід від безкоординатного простору до координатного.

Приклад 2.1.2. Якщо ототожнювати випадання білої грані при підкиданні кубика з числом 1, випадання зеленої – з числом 2, випадання червоної – з числом 3, за умови, що кожну грань пофарбовано в один з трьох кольорів – білий, зелений, червоний, то замість простору $\Omega = \{\text{білий}, \text{зелений}, \text{червоний}\}$, можна розглядати простір $\Omega = \{1,2,3\}$.

Приклад 2.1.3. Нехай експеримент полягає у підкиданні монети до першого випадання герба. Тоді замість простору елементарних подій $\Omega = \{\,Г,\ ЦГ, ЦЦГ, ЦЦЦГ, \ldots\}$ можна розглядати простір $\Omega = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

Припустимо, що проведено n випробувань, в результаті яких спостережені елементарні події $E_{\text{сп}\, i} \in \Omega$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, замість яких можна розглядати відповідні числові значення $x_{\text{сп}\, i}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ці значення $x_{\text{сп}\, i}$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, називають *спостереженими значеннями*. Якщо їх впорядкувати за величиною, то отримується так званий *варіаційний ряд*, члени якого називаються *варіантами*.

Якщо n_i – абсолютна частота відбування події $\{E_i\}$, тобто елементарна подія E_i спостерігалася в n випробуваннях n_i разів, причому $\sum_{i=1}^{k} n_i = n$, то число n_i є абсолютною частотою появи і значення x_i , а число $P_n^*(\{E_i\}) = \dfrac{n_i}{n} = P_n^*(\{x_i\})$ – статистична ймовірність або відносна частота відбування події $\{E_i\}$, а отже і події $\{x_i\}$.

Табл. 2.1.1

x_i	x_1	x_2	…	x_k
n_i	n_1	n_2	…	n_k

Табл. 2.1.2

x_i	x_1	x_2	…	x_k
$P_n^*(\{x_i\})$	$P_n^*(\{x_1\})$	$P_n^*(\{x_2\})$	$\cdots$	$P_n^*(\{x_k\})$

Таблицями виду 2.1.1 і 2.1.2 задають відповідно *ряд розподілу абсолютних частот* та *ряд розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот)* на дискретній множині $\Omega = \{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$ або, що те саме, на множині точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, за елементарними подіями. Говорять також, що таблицями 2.1.1 і 2.1.2 задано *дискретний розподіл частот* (відповідно абсолютних та відносних) за елементарними подіями. При цьому якщо $A = \bigcup_{i \in I} \{x_i\},\ I \subset \{1, 2, \ldots, k\}$, то $P_n^*(A) = \sum_{i \in I} P_n^*(\{x_i\})$.

Для полегшення підрахунку чисел n_i , а отже і чисел $P_n^*(\{x_i\})$, спостережені значення $x_{\text{сп}\,i}$ розташовують у порядку їх зростання, в результаті чого одержують *варіаційний ряд.*

Приклад 2.1.4. Варіаційний ряд для спостережених значень

5, 6, 6, 6, 4, 3, 5, 2, 6, 4, 5, 6, 3, 3, 5

має вигляд

2, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6,

а відповідні ряди розподілу абсолютних частот та статистичних ймовірностей (відносних частот) подані в таблицях 2.1.3 і 2.1.4.

Табл. 2.1.3

x_i	1	2	3	4	5	6
n_i	0	1	3	2	4	5

Табл. 2.1.4

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_n^*(\{x_i\})$	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

У фізичній інтерпретації ряд розподілу абсолютних частот можна розглядати як цілочисельний розподіл маси n на множині точок $\{x_1, x_2, ..., x_k\}$, а ряд розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот) – як розподіл відповідної нормованої (одиничної) маси на тій самій множині.

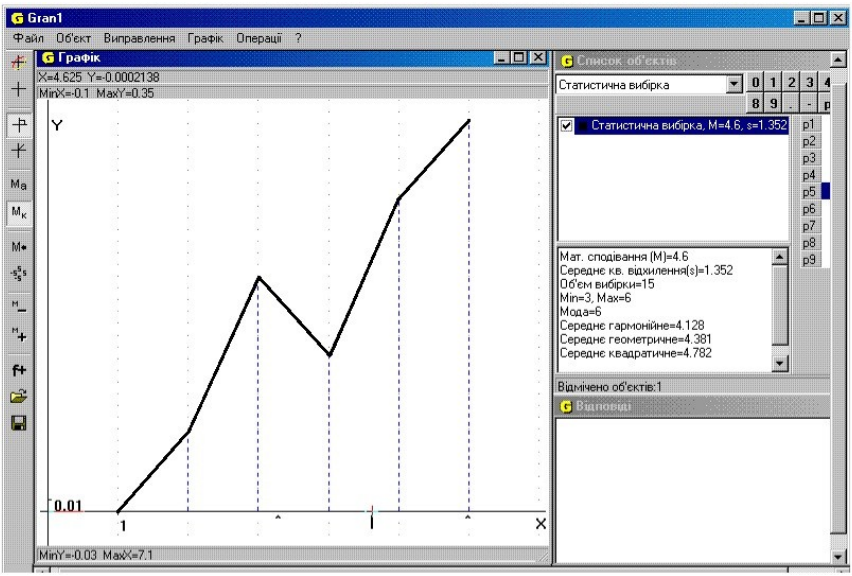


Рис. 2.1.1

Оскільки для будь-якої події $A \subset \Omega$ $P_n^*(A) = \sum_{E_i \in A} P_n^*(\{E_i\})$, то з фізичної точки зору $P_n^*(A)$ – це частина одиничної маси, що припадає на всі точки із множини A, за умови, що на множині $\Omega = \{E_1, E_2, ..., E_k\}$ одинична маса розподілена так, що на точку E_i припадає маса $P_n^*(\{E_i\})$.

Якщо точки $(x_i, P_n^*(\{x_i\}))$ зобразити на координатній площині і з'єднати відрізками прямих, то так отриману ламану з вершинами у вказаних точках називають *многокутником розподілу статистичних ймовірностей* або *полігоном відносних частот*.

Приклад 2.1.5. На Рис. 2.1.1 зображено полігон відносних частот, що визначається за таблицею 2.1.4.

Задачі

2.1.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Елементарні події довільної множини Ω можна ототожнювати з натуральними числами.
2. Спостережені елементарні події E_i – це те саме, що й спостережені значення x_i .
3. В заданій серії з n випробувань кожне спостережене і неспостережене значення має свою абсолютну і відносну частоти.
4. Будь-якими таблицями виду 2.1.1 та 2.1.2 задають дискретний розподіл частот.
5. За варіаційним рядом цілком визначається дискретний розподіл частот.
6. Сукупність чисел 1, 1, 2, 2, 2, 4, 4, 4, 4, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5, 5 можна вважати варіаційним рядом.
7. Статистичні ймовірності можна інтерпретувати як маси.
8. Кожен простір елементарних подій є дискретним.
9. Через полігон відносних частот цілком визначається дискретний розподіл частот.

2.1.2. 1. Побудувати варіаційний ряд спостережених значень, що відповідають спостереженим відхиленням точки падіння снаряда від цілі: -50, 20, -10, 20, 10, 20, -50, -20, -10, 40, -20,-30, -10, 10, 20, -40, 50, -10, 10, 50.

2. Використовуючи одержаний варіаційний ряд з 2.1.2.1, побудувати ряди розподілу абсолютних частот та статистичних ймовірностей (відносних частот) на множині можливих значень {-50, -40, -30, -20, -10, 0, 10, 20, 30, 40, 50}.

3. Побудувати многокутник розподілу статистичних ймовірностей для розподілу з 2.1.2.2.

4. Підрахувати статистичну ймовірність відбування події *A*, яка полягає в тому, що віддаль точки падіння снаряда від цілі не перевищує 20.

2.2. Щільність розподілу статистичних ймовірностей

Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*), де простір подій S породжений поділом множини Ω на підмножини H_1, H_2, …, H_k, $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = \Omega$. Підкреслимо, що надалі як події розглядатимемо лише всеможливі об'єднання підмножин H_i, тобто множини виду $A = \bigcup_{i \in I} H_i$, $I \subset \{1, 2, ..., k\}$. Очевидно $A \subset \Omega$ і $A \in S$ при довільному $I \subset \{1, 2, ..., k\}$ (зокрема $I = \varnothing$). Нехай на S окрім ймовірнісної міри P_n^* задано також деяку міру $m(A)$, $A \in S$, для якої $0 < m(\Omega) < \infty$, $0 < m(H_i) < \infty$, $i \in \overline{1, k}$.

Наприклад, мірою $m(A)$, $A \in S$, можуть бути кількості точок в множинах $A \in S$, довжини лінійних фігур $A \in S$, якщо Ω – множина точок на прямій, площі фігур $A \in S$, якщо Ω – множина точок двохвимірного координатного простору, об'єми фігур $A \in S$ в тривимірному просторі, маси фізичних тіл тощо.

Тоді відношення $\dfrac{P_n^*(H_i)}{m(H_i)}$ природно назвати *середньою щільністю* статистичної ймовірності (ймовірнісної міри) $P_n^*(A)$ у множині H_i відносно міри $m(A)$, $A \in S$.

Введемо до розгляду функцію

$$f_n^*(E) = \frac{P_n^*(H_i)}{m(H_i)}, \ E \in H_i, \ i \in \{1, 2, ..., k\},$$

визначену для всіх $E \in \Omega$.

Таку функцію природно назвати *усередненою* або *середньою щільністю відносно міри m розподілу статистичних ймовірностей* (ймовірнісної міри P_n^*) *на множині* Ω *за підмножинами* H_i.

Із виразу $f_n^*(E)=\dfrac{P_n^*(H_i)}{m(H_i)}$, $E\in H_i$, $i\in\{1,2,...,k\}$, отримуємо

$$P_n^*(H_i)=f_n^*(E)m(H_i),\ E\in H_i,\ i\in\{1,2,...,k\}.$$

Звідси для $A=\bigcup_{i\in I}H_i$, $H_iH_j=\varnothing$, коли $i\neq j$, $I\subset\{1,2,...,k\}$,

$$P_n^*(A)=P_n^*(\bigcup_{i\in I}H_i)=\sum_{i\in I}P_n^*(H_i)=\sum_{i\in I,E\in H_i}f_n^*(E)m(H_i).$$

Вираз $\sum\limits_{i\in I,E\in H_i}f_n^*(E)m(H_i)$ називають інтегралом від функції $f_n^*(E)$ на множині A за мірою m і позначають як $\int\limits_A f_n^*(E)m(dE)$.

Очевидно, функція $f_n^*(E)$ має такі властивості:

1. $f_n^*(E)\geq 0$.
2. $\int\limits_\Omega f_n^*(E)m(dE)=1$.

Приклад 2.2.1. Нехай на столі є чотири поля: H_1 – біле, H_2 – зелене, H_3 – червоне, H_4 – жовте. Всі поля однакової міри: $m(H_1)=m(H_2)=m(H_3)=m(H_4)$. В ці поля навмання кидали 100 кульок. Нехай в результаті на білому полі виявилось 60 кульок, на зеленому – 30 кульок, на червоному – 6, на жовтому – 4 кульки.

Тоді природно вважати, що на білому полі кульки розташовані щільніше, ніж на зеленому, червоному, жовтому, на зеленому щільніше, ніж на червоному і жовтому, на червоному щільніше, ніж на жовтому.

В розглядуваному випадку на множині Ω можна задати функцію

$$\hat f_{100}(E)=\begin{cases}\dfrac{60}{m(H_1)}, & \text{якщо } E\in H_1,\\ \dfrac{30}{m(H_2)}, & \text{якщо } E\in H_2,\\ \dfrac{6}{m(H_3)}, & \text{якщо } E\in H_3,\\ \dfrac{4}{m(H_4)}, & \text{якщо } E\in H_4,\end{cases}$$

яка характеризуватиме щільність відносно міри $m(H_i)$ розподілу кульок на множині Ω за полями H_i, $i \in \{1,2,3,4\}$, якщо щільністю розподілу кульок на множині Ω називати кількість кульок, яка припадає на кожну одиницю міри множини Ω в різних полях H_i, де

$$m(\Omega) = m\left(\bigcup_{i=1}^{4} H_i\right) = m(H_1) + m(H_2) + m(H_3) + m(H_4),$$

а функція

$$f_n^*(E) = \begin{cases} \dfrac{60/100}{m(H_1)}, & \text{якщо } E \in H_1, \\ \dfrac{30/100}{m(H_2)}, & \text{якщо } E \in H_2, \\ \dfrac{6/100}{m(H_3)}, & \text{якщо } E \in H_3, \\ \dfrac{4/100}{m(H_4)}, & \text{якщо } E \in H_4, \end{cases}$$

характеризуватиме щільність відносно міри $m(H_i)$ розподілу статистичних ймовірностей за полями H_i, $i \in \{1,2,3,4\}$, на тій самій множині Ω.

Приклад 2.2.2. Нехай $\Omega = H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5 + H_6 + H_7$ і H_i є подіями із простору *S*, породженого поділом H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, H_7 множини Ω на підмножини H_i, $i \in \overline{1,7}$, $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{7} H_i = \Omega$ (Рис. 2.2.1). Нехай проведено 100 випробувань, в кожному з яких із множини Ω навмання вибирали одну точку, і нехай одержано результати:

$$k_{100}(\Omega) = 100,\ k_{100}(H_1) = 5,\ k_{100}(H_2) = 8,\ k_{100}(H_3) = 18,$$
$$k_{100}(H_4) = 36,\ k_{100}(H_5) = 20,\ k_{100}(H_6) = 10,\ k_{100}(H_7) = 3.$$

Знайдемо відповідні статистичні ймовірності:

$$P_{100}^*(H_1) = \frac{5}{100},\ P_{100}^*(H_2) = \frac{8}{100},$$
$$P_{100}^*(H_3) = \frac{18}{100},\ P_{100}^*(H_4) = \frac{36}{100},$$
$$P_{100}^*(H_5) = \frac{20}{100},\ P_{100}^*(H_6) = \frac{10}{100},\ P_{100}^*(H_7) = \frac{3}{100}.$$

Якщо додатково задано міри $m(H_i) > 0$, $i \in \overline{1,7}$, тоді щільність відносно міри m розподілу статистичних ймовірностей за подіями H_i набуває вигляду

$$f_n^*(E) = \frac{P_n^*(H_i)}{m(H_i)}, \ E \in H_i, \ i \in \overline{1,7}.$$

Звідси

$$P_n^*(H_i) = f_n^*(E) \cdot m(H_i) = \int_{H_i} f_n^*(E) \cdot m(dE), \ E \in H_i.$$

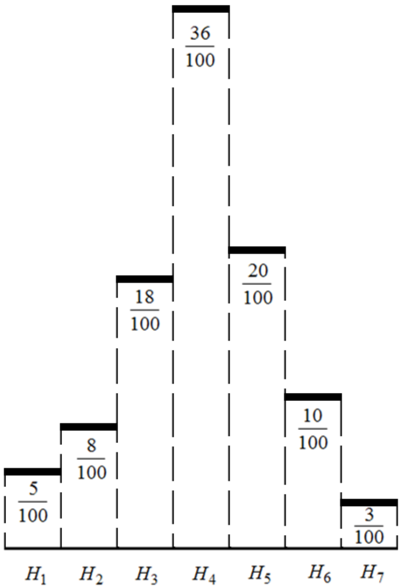


Рис. 2.2.1

Якщо Ω – відрізок числової осі довжиною 7 одиниць, H_i – інтервали довжиною 1, $m(H_i)$ – довжина інтервала H_i, тоді в геометричному тлумаченні $P_n^*(H_i) = f_n^*(E) \cdot m(H_i)$ буде площею прямокутника з основою H_i і висотою $f_n^*(E)$, тобто $P_n^*(H_i) = \int_{H_i} f_n^*(E) m(dE)$, а для $A = \bigcup_{i \in I} H_i$, $I \subset \{1,2,3,4,5,6,7\}$, буде

$$P_n^*(A) = \sum_{i \in I} P_n^*(H_i) = \sum_{i \in I} \int_{H_i} f_n^*(E) m(dE) = \int_A f_n^*(E) m(dE) \ -$$

сума площ прямокутників з висотами $f_n^*(E)$, $E \in H_i$, над інтервалами H_i, з яких складено множину A (Рис. 2.2.1).

На Рис. 2.2.1 подано графік функції $f_n^*(E)$, яка набуває сталих значень на проміжках H_i, $i \in \{1, 2, ..., 7\}$.

Приклад 2.2.3. Нехай в квадратну мішень (Рис. 2.2.2) виконано 100 пострілів, і одержано кількості $k_{100}(H_i)$ влучень у частини H_i, $i \in \overline{1, 25}$, цієї мішені:

$$k_{100}(H_1) = 1, \quad k_{100}(H_2) = 2, \quad k_{100}(H_3) = 3, \quad k_{100}(H_4) = 2,$$
$$k_{100}(H_5) = 1, \quad k_{100}(H_6) = 2, \quad k_{100}(H_7) = 4, \quad k_{100}(H_8) = 8,$$
$$k_{100}(H_9) = 4, \quad k_{100}(H_{10}) = 2, \quad k_{100}(H_{11}) = 3, \quad k_{100}(H_{12}) = 8,$$
$$k_{100}(H_{13}) = 20, \quad k_{100}(H_{14}) = 8, \quad k_{100}(H_{15}) = 3, \quad k_{100}(H_{16}) = 2,$$
$$k_{100}(H_{17}) = 4, \quad k_{100}(H_{18}) = 8, \quad k_{100}(H_{19}) = 4, \quad k_{100}(H_{20}) = 2,$$
$$k_{100}(H_{21}) = 1, \quad k_{100}(H_{22}) = 2, \quad k_{100}(H_{23}) = 3, \quad k_{100}(H_{24}) = 2,$$
$$k_{100}(H_{25}) = 1.$$

Нехай $\Omega = \bigcup_{i=1}^{25} H_i$, а підмножини мішені H_i однакової міри $m(H_i)$, $i \in \{1, 2, ..., 25\}$, вважатимемо попарно несумісними подіями із простору S, породженого поділом H_1, H_2, …, H_{25} множини Ω на підмножини H_i, $i \in \{1, 2, ..., 25\}$, $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$. Тоді відповідні статистичні ймовірності дорівнюють:

$$P_{100}^*(H_1) = \frac{1}{100}, \quad P_{100}^*(H_2) = \frac{2}{100}, \quad P_{100}^*(H_3) = \frac{3}{100}, \quad P_{100}^*(H_4) = \frac{2}{100},$$
$$P_{100}^*(H_5) = \frac{1}{100}, \quad P_{100}^*(H_6) = \frac{2}{100}, \quad P_{100}^*(H_7) = \frac{4}{100}, \quad P_{100}^*(H_8) = \frac{8}{100},$$
$$P_{100}^*(H_9) = \frac{4}{100}, \quad P_{100}^*(H_{10}) = \frac{2}{100}, \quad P_{100}^*(H_{11}) = \frac{3}{100}, \quad P_{100}^*(H_{12}) = \frac{8}{100},$$
$$P_{100}^*(H_{13}) = \frac{20}{100}, \quad P_{100}^*(H_{14} = \frac{8}{100}, \quad P_{100}^*(H_{15}) = \frac{3}{100}, \quad P_{100}^*(H_{16}) = \frac{2}{100},$$
$$P_{100}^*(H_{17}) = \frac{4}{100}, \quad P_{100}^*(H_{18}) = \frac{8}{100}, \quad P_{100}^*(H_{19}) = \frac{4}{100}, \quad P_{100}^*(H_{20}) = \frac{2}{100},$$
$$P_{100}^*(H_{21}) = \frac{1}{100}, \quad P_{100}^*(H_{22}) = \frac{2}{100}, \quad P_{100}^*(H_{23}) = \frac{3}{100}, \quad P_{100}^*(H_{24}) = \frac{2}{100},$$
$$P_{100}^*(H_{25}) = \frac{1}{100}.$$

H_{21}	H_{22}	H_{23}	H_{24}	H_{25}
H_{16}	H_{17}	H_{18}	H_{19}	H_{20}
H_{11}	H_{12}	H_{13}	H_{14}	H_{15}
H_6	H_7	H_8	H_9	H_{10}
H_1	H_2	H_3	H_4	H_5

Рис. 2.2.2 а)

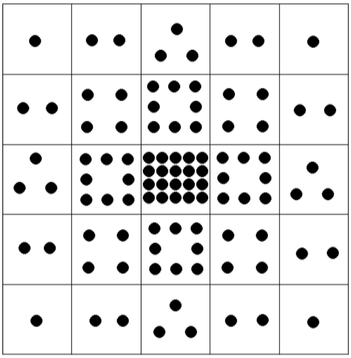


Рис. 2.2.2 б)

Як видно з Рис. 2.2.2 а), та Рис. 2.2.2 б) точки влучення у множині H_{13} розташовані набагато щільніше, ніж в множинах H_1, H_2 і т.д. Тому природно назвати відношення статистичної ймовірності (а також і абсолютної частоти) попадання в множину H_i до міри цієї множини щільністю статистичної ймовірності (а також і точок влучення) у множині H_i відносно міри $m(H_i)$.

Таким чином, якщо

$$f_n^*(E) = \frac{P_n^*(H_i)}{m(H_i)}, \ E \in H_i, \ i \in \{1, 2, \ldots, 25\},$$

то

$$P_n^*(H_i) = f_n^*(E) \cdot m(H_i) = \int_{H_i} f_n^*(E) \cdot m(dE), \ E \in H_i, \ i \in \{1, 2, \ldots, 25\},$$

а для довільного $A = \bigcup_{i \in I} H_i$, $I \subset \{1, 2, \ldots, 25\}$, за аналогією з попереднім, будемо мати ймовірнісну міру $P_n^*(A)$:

$$P_n^*(A)=\sum_{i\in I}P_n^*(H_i)=\sum_{i\in I}\int_{H_i}f_n^*(E)m(dE)=\int_A f_n^*(E)m(dE).$$

Якщо Ω квадрат із стороною довжиною 5 одиниць, H_i, $i\in\overline{1,25}$, – квадрат із стороною 1, тоді в геометричному тлумаченні $P_n^*(H_i)=f_n^*(E)\cdot m(H_i)$, $E\in H_i$, $i\in\overline{1,25}$, – об'єм прямого паралелепіпеда із основою H_i і висотою $f_n^*(E)$, $E\in H_i$, тобто

$$P_n^*(H_i)=\int_{H_i}f_n^*(E)m(dE),$$

а $P_n^*(A)=\sum_{i\in I}P_n^*(H_i)=\sum_{i\in I}\int_{H_i}f_n^*(E)m(dE)=\int_A f_n^*(E)m(dE)$ – сума об'ємів прямих паралелепіпедів з основами H_i, з яких складено множину *A*, і висотами $f_n^*(E)$, $E\in H_i$ (Рис. 2.2.3).

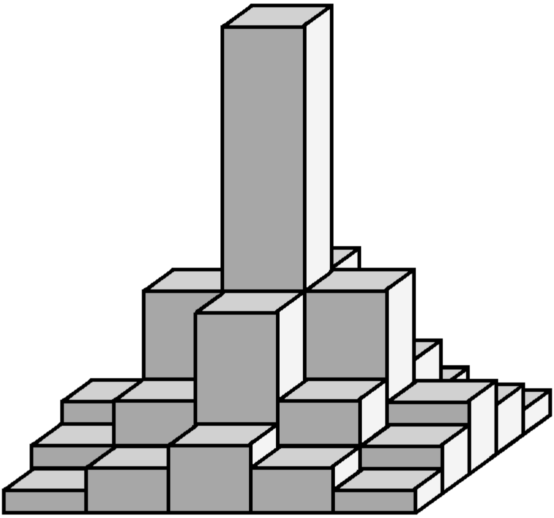


Рис. 2.2.3

Приклад 2.2.4. В коробці є 100 кульок – білі, жовті, зелені, червоні, оранжеві, по 20 кульок кожного кольору. В результаті деякої серії випробувань, в кожному з яких із коробки навмання діставали одну кульку, фіксували її колір, після чого кульку повертали в коробку, з'ясувалося, що білі кульки діставали в 5% всіх випробувань, жовті в 15% випробувань, зелені в 40%

випробувань, червоні в 25% випробувань, оранжеві – в 15% випробувань.

Нехай H_1 – множина білих кульок, H_2 – множина жовтих кульок, H_3 – множина зелених кульок, H_4 – множина червоних кульок, H_5 – множина оранжевих кульок. Нехай міра $m(H_i)$ множини H_i – кількість кульок у множині H_i.

Тоді $m(\Omega)=100$, $m(H_1)=20$, $m(H_2)=20$,

$$m(H_3)=20,\ m(H_4)=20,\ m(H_5)=20,$$

$$P_n^*(H_1)=0{,}05,\ P_n^*(H_2)=0{,}15,\ P_n^*(H_3)=0{,}40,$$

$$P_n^*(H_4)=0{,}25,\ P_n^*(H_5)=0{,}15.$$

$$f_n^*(E)=\begin{cases}\dfrac{0{,}05}{20}, & \text{коли } E\in H_1,\\[2mm] \dfrac{0{,}15}{20}, & \text{коли } E\in H_2,\\[2mm] \dfrac{0{,}40}{20}, & \text{коли } E\in H_3,\\[2mm] \dfrac{0{,}25}{20}, & \text{коли } E\in H_4,\\[2mm] \dfrac{0{,}15}{20}, & \text{коли } E\in H_5.\end{cases}$$

Таким чином кількість попадань у множину H_3 найбільша, а оскільки всі $m(H_i)$ однакові, то попадання у множину H_3 виявляються найчастішими, точки влучення у множині H_3 виявляються розташованими найщільніше в порівнянні з множинами H_1, H_2, H_4, H_5, тобто на кожну підмножину одиничної міри множини H_3 в середньому припадає більше точок влучення, ніж на кожну підмножину одиничної міри в множинах H_1, H_2, H_4, H_5.

Задачі

2.2.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Щільність розподілу статистичних ймовірностей може набувати від'ємних значень.

2. Щільність розподілу статистичних ймовірностей може набувати значень, більших за 1.

3. Величина $\sum\limits_{i\in I,\,E\in H_i} f_n^*(E)m(H_i)$ може набувати значень,

більших за 1.

4. Функція $f_n^*(E)=\dfrac{P_n^*(H_i)}{m(H_i)}$, $E\in H_i$, може набувати різних значень при різних $E\in H_i$.

5. Якщо $A=\bigcup_{i\in I}H_i$, $I\subset\{1,2,\ldots,k\}$, $\bigcup_{i=1}^{k}H_i=\Omega$, то $P_n^*(A)=$
$=\sum_{i\in I,E\in H_i} f_n^*(E)m(H_i)$.

2.2.2. 1. В мішень в тірі виконано 100 пострілів. При цьому влучення за межі мішені неможливе. Радіус мішені – 55 см. Якщо віддаль точки влучення від центра мішені не перевищує 5 см, стрільцеві нараховується 10 очок, якщо віддаль точки влучення від центра мішені в межах від 5 см до 10 см – 9 очок, якщо віддаль в межах від 10 см до 15 см – 8 очок, і т.д., якщо віддаль точки влучення від центра мішені більша, ніж 50 см – 0 очок.

Після виконання 100 пострілів з'ясувалось, що стрілець 10 очок отримував 40 разів, 9 очок – 20 разів, 8 очок – 10 разів, 7 очок – 7 разів, 6 очок – 6 разів, 5 очок – 5 разів, 4 очки – 5 разів, 3 очки – 2 рази, 2 очки – 3 рази, 1 очко – 1 раз, 0 очок – 1 раз.

Побудувати графік щільності розподілу статистичних ймовірностей на заданій множині Ω, якщо Ω – відрізок [0, 55), H_i – відрізки [5(*i*-1), 5*i*), $i\in\{1,2,\ldots,11\}$.

2. За даними 2.2.2.1 обчислити статистичну ймовірність того, що стрілець при виконанні пострілів отримував не менше, ніж 7 очок.

2.3. Інтервальний розподіл статистичних ймовірностей на неперервній множині точок

Розглянемо множину Ω елементарних подій, яку можна ототожнювати з числовим проміжком $\langle a;b\rangle$ (тобто проміжком виду $[a,b]$, або $[a,b)$, або $(a,b]$, або (a,b)). Таку *множину* Ω називають *континуальною* або *неперервною.* В цьому випадку кожне число $x\in<a;b>$, яке ототожнюється з певною елементарною подією, теоретично може бути спостереженим значенням в результаті експерименту, що пов'язаний з множиною Ω.

Приклад 2.3.1. Нехай випробування – це постріл в круглу мішень радіуса $r=1$, а кожна елементарна подія ототожнюється з відстанню точки влучення від центра мішені. При цьому попадання кулі за межі мішені неможливе. Тоді $\Omega=[0;1)$ – неперервна множина елементарних подій, кожна з яких ототожнюється з певним числом (точкою) $x\in[0;1)$.

Надалі вважатимемо, що $\Omega=[a;b)$, $-\infty<a<b<\infty$.

Поділимо проміжок $\Omega=[a;b)$ точками $a_0=a$, $a_i=a_{i-1}+h$, $h=\dfrac{b-a}{k}>0$, $i\in\overline{1,k}$, на k проміжків $[a_{i-1};a_i)$ однакової довжини. Число $h=\dfrac{b-a}{k}$ називається *кроком поділу*. Для кожного $i\in\overline{1,k}$ підрахуємо кількість спостережених значень $x_{\text{сп}\,j}$, що попадають у проміжок $[a_{i-1};a_i)$. Дістанемо числа n_i – *абсолютні частоти попадання спостережених значень* $x_{\text{сп}\,j}$ *у проміжки* $[a_{i-1};a_i)$, причому $\sum\limits_{i=1}^{k}n_i=n$. Число $P_n^*([a_{i-1};a_i))=\dfrac{n_i}{n}$ називають *статистичною ймовірністю* або *відносною частотою* попадання спостережених значень $x_{\text{сп}\,j}$, $j\in\overline{1,n}$, у проміжок $[a_{i-1};a_i)$, $i\in\overline{1,k}$. При цьому якщо $A=\bigcup\limits_{i\in I}[a_{i-1},a_i)$, $I\subset\{1,2,...,k\}$, то $P_n^*(A)=\sum\limits_{i\in I}P_n^*([a_{i-1},a_i))$. Як події розглядатимемо разом з $\varnothing$ лише всеможливі об’єднання проміжків $[a_{i-1};a_i)$ по одному, по два, по три і т.д., по $k-1$, всіх k проміжків $[a_{i-1},a_i)$, тобто розглядатимемо простір подій *S*, породжений поділом множини $\Omega=[a,b)$ на підмножини $H_i=[a_{i-1},a_i)$, $i\in\overline{1,k}$.

Таблицями виду 2.3.1 задають *інтервальний розподіл абсолютних частот*, а таблицями виду 2.3.2 задають *інтервальний розподіл статистичних ймовірностей* (*відносних частот*) на множині $\Omega=[a,b)$ за підмножинами $[a_{i-1},a_i)$, $i\in\overline{1,k}$.

Табл. 2.3.1

$[a_{i-1};a_i)$	$[a_0;a_1)$	$[a_1;a_2)$	...	$[a_{k-1};a_k)$
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Табл. 2.3.2

$[a_{i-1};a_i)$	$[a_0;a_1)$	$[a_1;a_2)$	...	$[a_{k-1};a_k)$
$P_n^*([a_{i-1};a_i))$	$P_n^*([a_0;a_1))$	$P_n^*([a_1;a_2))$	...	$P_n^*([a_{k-1};a_k))$

Для складання цих таблиць, як і у дискретному випадку, спостережені значення записують у вигляді варіаційного ряду.

У фізичній інтерпретації інтервальний розподіл абсолютних частот – це розподіл маси *n* за проміжками $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,k}$, а інтервальний розподіл статистичних ймовірностей (відносних частот) – це розподіл одиничної маси за вказаними проміжками.

Приклад 2.3.2. Нехай $\Omega = [0;1)$ з прикладу 2.3.1 і виконано *n*=100 пострілів, результати яких наведено у таблицях 2.3.3 і 2.3.4. Цими таблицями описуються конкретні інтервальні розподіли абсолютних і відносних частот.

Табл. 2.3.3

$[a_{i-1};a_i)$	$\left[0;\frac{1}{10}\right)$	$\left[\frac{1}{10};\frac{2}{10}\right)$	$\left[\frac{2}{10};\frac{3}{10}\right)$	$\left[\frac{3}{10};\frac{4}{10}\right)$	$\left[\frac{4}{10};\frac{5}{10}\right)$	$\left[\frac{5}{10};\frac{6}{10}\right)$	$\left[\frac{6}{10};\frac{7}{10}\right)$	$\left[\frac{7}{10};\frac{8}{10}\right)$	$\left[\frac{8}{10};\frac{9}{10}\right)$	$\left[\frac{9}{10};1\right)$
n_i	50	20	10	10	4	0	2	1	2	1

Табл. 2.3.4

$[a_{i-1};a_i)$	$\left[0;\frac{1}{10}\right)$	$\left[\frac{1}{10};\frac{2}{10}\right)$	$\left[\frac{2}{10};\frac{3}{10}\right)$	$\left[\frac{3}{10};\frac{4}{10}\right)$	$\left[\frac{4}{10};\frac{5}{10}\right)$	$\left[\frac{5}{10};\frac{6}{10}\right)$	$\left[\frac{6}{10};\frac{7}{10}\right)$	$\left[\frac{7}{10};\frac{8}{10}\right)$	$\left[\frac{8}{10};\frac{9}{10}\right)$	$\left[\frac{9}{10};1\right)$
$P_{100}^{*}([a_{i-1};a_i))$	0.5	0.2	0.1	0.1	0.04	0	0.02	0.01	0.02	0.01

Розглянемо функцію $f_n^*(x)$, що набуває значень $\frac{1}{h}P_n^*([a_{i-1};a_i))$ на проміжках $[a_{i-1};a_i)$, $i \in \overline{1,k}$, де $h = \frac{b-a}{k}$, $a_0 = a$, $a_i = a_{i-1} + h = a + i \cdot h$, $i \in \overline{1,k}$. Графік такої функції називають *гістограмою* інтервального розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот), який визначається за табл. 2.3.2.

Функцію $f_n^*(x)$ називають *усередненою* (або *середньою*) *щільністю розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот) на проміжку* $[a;b)$ за інтервалами $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,k}$.

У фізичній інтерпретації $f_n^*(x)$ – це усереднена щільність розподілу за інтервалами $[a_{i-1},a_i)$, $i\in\overline{1,k}$, одиничної маси на проміжку $[a;b)$, оскільки на кожному інтервалі $[a_{i-1};a_i)$ значення $f_n^*(x)$ одержується як маса $P_n^*([a_{i-1};a_i))$, що припадає на цей інтервал, поділена на довжину інтервала $h=a_i-a_{i-1}$, тобто як *середня щільність* маси на інтервалі $[a_{i-1};a_i)$.

Приклад 2.3.3. Якщо інтервальний розподіл статистичних ймовірностей задано таблицею 2.3.4, то усереднена щільність цього розподілу має вигляд:

$$f_n^*(x)=\begin{cases} 0, & \text{коли } x<0,\\ 5, & \text{коли } 0\le x<0.1,\\ 2, & \text{коли } 0.1\le x<0.2,\\ 1, & \text{коли } 0.2\le x<0.3,\\ 1, & \text{коли } 0.3\le x<0.4,\\ 0.4, & \text{коли } 0.4\le x<0.5,\\ 0, & \text{коли } 0.5\le x<0.6,\\ 0.2, & \text{коли } 0.6\le x<0.7,\\ 0.1, & \text{коли } 0.7\le x<0.8,\\ 0.2, & \text{коли } 0.8\le x<0.9,\\ 0.1, & \text{коли } 0.9\le x<1,\\ 0, & \text{коли } x\ge 1. \end{cases}$$

На Рис. 2.3.1 зображено гістограму цього інтервального розподілу статистичних ймовірностей. Оскільки при $x\in[a_{i-1};a_i)$ $P_n^*([a_{i-1};a_i))=f_n^*(x)h$ – це площа прямокутника з основою $[a_{i-1};a_i)$ і висотою $f_n^*(x)$, то

$$P_n^*([a_{i-1};\,a_i))=f_n^*(x)\cdot h=\int\limits_{[a_{i-1};\,a_i)} f_n^*(x)dx=\int\limits_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x)dx.$$

Отже, з геометричної точки зору $P_n^*([a_{i-1};\,a_i))$ – це площа вказаного прямокутника, а статистична ймовірність $P_n^*(A)$ попадання спостережених значень в множину A, що є об’єднанням деяких проміжків $[a_{i-1};a_i)$: $A=\bigcup\limits_{i\in I}[a_{i-1},a_i)$, $I\subset\{1,2,\ldots,k\}$, визначається за рівністю

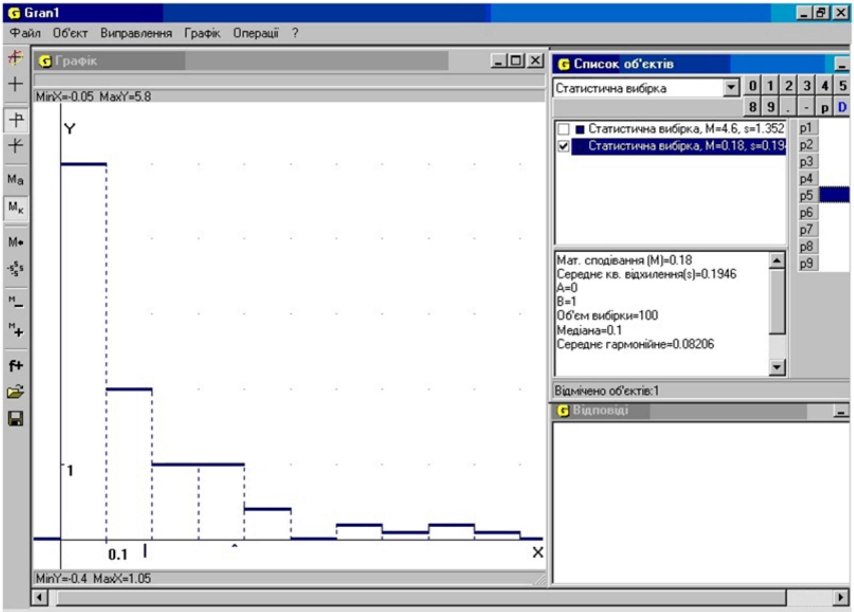


Рис. 2.3.1

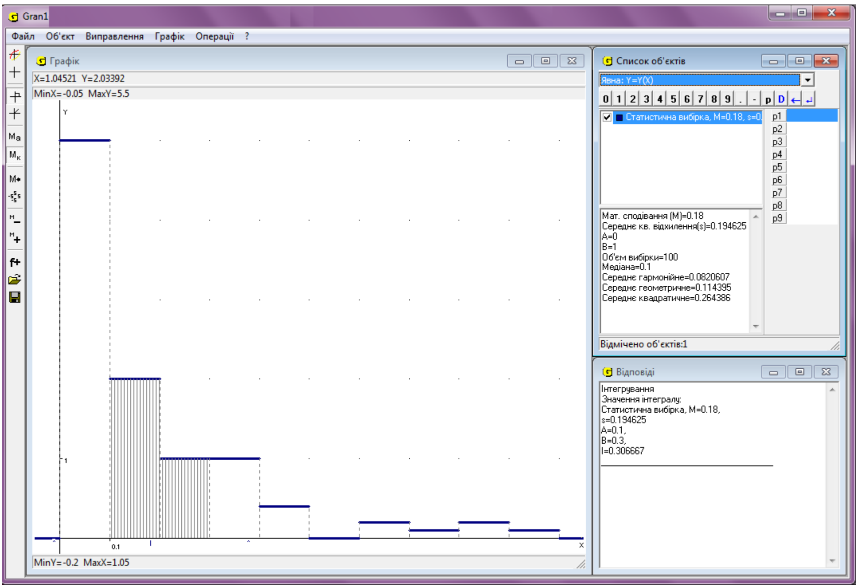


Рис. 2.3.2

$$P_n^*(A) = \sum_{i \in I} P_n^*([a_{i-1}, a_i)) = \sum_{i \in I} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x)dx = \int_A f_n^*(x)dx .$$

Останнє число називають інтегралом від функції $f_n^*(x)$ на множині A за мірою, яка є довжиною.

Щільність $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей має такі властивості:

1. $f_n^*(x) \geq 0$, $x \in (-\infty, +\infty)$; 2. $\int_\Omega f_n^*(x)dx = 1$.

Приклад 2.3.4. Якщо в експерименті, описаному у прикладі 2.3.2, подія A – це попадання у множину точок, які віддалені від центра мішені на відстань, меншу, ніж 0.30, і не меншу, ніж 0.10, тоді $P_n^*(A) = \int_{[0.10;0.30)} f_n^*(x)dx = 0.3$ – інтеграл від функції $f_n^*(x)$ на проміжку [0.10, 0.30), що дорівнює сумі площ заштрихованих прямокутників на Рис. 2.3.2, і значення цього інтеграла є ймовірнісною мірою попадання у множину A.

Нагадаємо, що як події разом з порожньою множиною $\varnothing$ розглядаються лише всеможливі об'єднання інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,k}$, тобто множини виду $A = \bigcup_{i \in I} [a_{i-1}, a_i)$, $I \subset \{1, 2, ..., k\}$, які є підмножинами множини $\Omega = [a, b)$, а також елементами простору подій S, породженого поділом множини $\Omega = [a, b)$ на підмножини $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,k}$.

Задачі

2.3.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Кожен простір Ω елементарних подій можна вважати неперервною множиною.

2. Неперервна множина Ω ототожнюється з певним проміжком $[a; b)$.

3. Для неперервної множини Ω статистичні ймовірності подій $A \subset \Omega$, $A \in S$, визначаються так само, як і для дискретної множини Ω.

4. Щоб описати інтервальний розподіл статистичних ймовірностей, підраховують абсолютні та відносні частоти попадання спостережених значень у проміжки, які попарно не перетинаються і об'єднання яких дорівнює Ω.

5. Гістограма – це графік щільності інтервального розподілу статистичних ймовірностей.

6. Якщо відома щільність $f_n^*(x)$ інтервального розподілу статистичних ймовірностей за інтервалами $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \{1, 2, ..., k\}$, то можна визначити статистичну ймовірність попадання в будь-яку підмножину $A = \bigcup_{i \in I} [a_{i-1}, a_i)$, $I \subset \{1, 2, ..., k\}$, множини Ω, складену з інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$.

2.3.2. 1. Побудувати варіаційний ряд спостережених значень відхилень точки падіння снаряда від цілі:

-52, -50, 47, 20, 17, 10, 14, 20,-50, -5, -20, 2, -27, -10, -15, 40, -19, 45, 34, -20, -29, -30, 15, -10, 10, 12, 14, 20, -33, -40, 50, 48, -10, 14, 10, -32, 50, -22, 43, 2, -5, 7, 14, -8, -5, 0, 23, -40, 17, 3.

2. Використовуючи одержаний варіаційний ряд з 2.3.2.1, побудувати інтервальні розподіли абсолютних і відносних частот (статистичних ймовірностей), взявши інтервали довжиною 10 з центрами в точках –50, -40, -30, -20, -10, 0, 10, 20, 30, 40, 50.

3. За даними з 2.3.2.2 визначити функцію $f_n^*(x)$ і побудувати її графік.

4. Використовуючи $f_n^*(x)$ з 2.3.2.3, визначити ймовірнісну міру P_n^* влучення точки падіння снаряда в інтервал:

а) (-35, 35); б) (-25, 25); в) (-5, 55).

2.4. Узагальнені статистичні ймовірності

Використовуючи функцію $f_n^*(x)$, можна ввести нову ймовірнісну міру $\widetilde{P}_n^*([\alpha, \beta))$ для довільних проміжків $[\alpha, \beta) \subset (-\infty, +\infty)$. Сукупністю таких проміжків породжується новий простір подій $\widetilde{S} \supset S$.

Нехай $\Omega = [a, b) = \bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i)$, сукупність S подій породжена поділом множини Ω на підмножини $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1, k}$, тобто $A = \bigcup_{i \in I} [a_{i-1}, a_i) \in S$, $I \subset \{1, 2, ..., k\}$.

Нехай $[\alpha, \beta) \subset (-\infty, \infty)$, $[\alpha, \beta) \in \widetilde{S}$,

$$m_*([\alpha,\beta)) = \max_{\bigcup[a_{i-1},a_i)\subset[\alpha,\beta)\cap\Omega} P_n^*\left(\bigcup[a_{i-1},a_i)\right),$$

$$m^*([\alpha,\beta)) = \min_{[\alpha,\beta)\cap\Omega\subset\bigcup[a_{i-1},a_i)} P_n^*\left(\bigcup[a_{i-1},a_i)\right).$$

Покладемо

$$\widetilde{P}_n^*([\alpha,\beta)) = m_*([\alpha,\beta)) + \frac{1}{2}(m^*([\alpha,\beta)) - m_*([\alpha,\beta))) =$$

$$= \frac{m_*([\alpha,\beta)) + m^*([\alpha,\beta))}{2}.$$

Очевидно

$$m^*([\alpha,\beta)) - m_*([\alpha,\beta)) \le c\cdot 2h,$$

де $h = a_i - a_{i-1} > 0$, $i \in \overline{1,k}$, $c = \max\limits_{x\in[a,b)} f_n^*(x) < \infty$,

$$P_n^*\left(\bigcup_{i\in I}[a_{i-1},a_i)\right) = \sum_{i\in I} P_n^*([a_{i-1},a_i)) = \sum_{i\in I}\int_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x)dx,\ I\subset\{1,2,\ldots,k\}.$$

При цьому

$$m_*([\alpha,\beta)) \le \widetilde{P}_n^*([\alpha,\beta)) \le m_*([\alpha,\beta)) + ch,$$

тобто

$$0 \le \widetilde{P}_n^*([\alpha,\beta)) - \max_{\bigcup[a_{i-1},a_i)\subset[\alpha,\beta)\cap\Omega} P_n^*\left(\bigcup[a_{i-1},a_i)\right) \le ch.$$

Очевидно, коли $h\to 0$, то

$$m^*([\alpha,\beta)) - m_*([\alpha,\beta)) =$$

$$= \min_{[\alpha,\beta)\cap\Omega\subset\bigcup[a_{i-1},a_i)} P_n^*\left(\bigcup[a_{i-1},a_i)\right) - \max_{\bigcup[a_{i-1},a_i)\subset[\alpha,\beta)\cap\Omega} P_n^*\left(\bigcup[a_{i-1},a_i)\right) \to 0,$$

$$\widetilde{P}_n^*([\alpha,\beta)) \to \max_{\bigcup[a_{i-1},a_i)\subset[\alpha,\beta)\cap\Omega} P_n^*\left(\bigcup[a_{i-1},a_i)\right).$$

Оскільки при довільних $[\alpha,\beta)\subset(-\infty,\infty)$ $0 \le m_*([\alpha,\beta)) \le$ $\le m^*([\alpha,\beta)) \le 1$, то коли $m_*([\alpha,\beta)) = 1$, природно покласти $\widetilde{P}_n^*([\alpha,\beta)) = 1$. Зокрема коли $\Omega\subset[\alpha,\beta)$, тоді буде $m_*([\alpha,\beta)) = 1$. Якщо $[\alpha,\beta)\cap\Omega = \varnothing$, тоді природно покласти $m^*([\alpha,\beta)) = 0$, $\widetilde{P}_n^*([\alpha,\beta)) = 0$.

Використовуючи функцію $f_n^*(x)$, можна ввести ймовірнісну міру $\widetilde{P}_n^*$ на просторі подій $\widetilde{S}$ і в інший спосіб, поклавши

$\widetilde{P}_n^*([\alpha,\beta)) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f_n^*(x)dx$ для довільних проміжків $[\alpha,\beta) \subset (-\infty,\infty)$.

Ймовірнісну міру $\widetilde{P}_n^*$, визначену на сукупності $\widetilde{S}$ підмножин множини $\widetilde{\Omega} = (-\infty,\infty)$ за мірою P_n^*, визначеною на сукупності *S*, будемо називати *узагальненою статистичною ймовірністю*, для якої функція $f_n^*(x)$ також називається *щільністю розподілу узагальнених статистичних імовірностей*. Очевидно, що коли $A \in S$, тоді $\widetilde{P}_n^*(A) = P_n^*(A)$.

Говорять, що міра $\widetilde{P}_n^*$ є продовженням міри P_n^* із сукупності подій *S* на сукупність $\widetilde{S}$.

Зауважимо, що міру P_n^* можна продовжити із сукупності *S* підмножин множини Ω на сукупність $\widetilde{S}$ і іншими способами, а не лише вказаними.

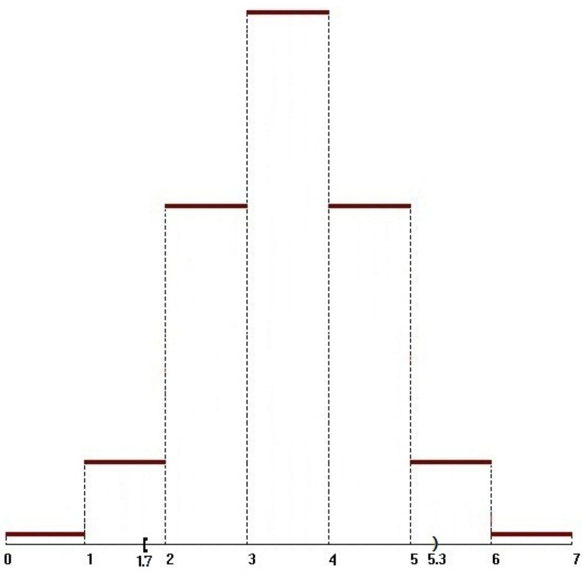


Рис. 2.4.1

Приклад 2.4.1. Нехай задано інтервальний розподіл статистичних імовірностей на множині $\Omega = [0,7)$ за інтервалами $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,7}$, $a_0 = 0$, $h = a_i - a_{i-1} = 1$:

Табл. 2.4.1

$[a_{i-1}, a_i)$	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)	[4, 5)	[5, 6)	[6, 7)
$P_n^*([a_{i-1}, a_i))$	0.006	0.061	0.242	0.382	0.242	0.061	0.006

Тоді усереднена щільність $f_n^*(x)$ такого інтервального розподілу ймовірностей матиме вигляд:

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0.006, & \text{коли } [0,1) \bigcup [6,7), \\ 0.061, & \text{коли } [1,2) \bigcup [5,6), \\ 0.242, & \text{коли } [2,3) \bigcup [4,5), \\ 0.382, & \text{коли } [3,4). \end{cases}$$

Графік функції $f_n^*(x)$ подано на Рис. 2.4.1.

Якщо $[\alpha, \beta) = [1.7, 5.3)$, тоді за попереднім

$$m_* = \max_{\bigcup [a_{i-1}, a_i) \subset [\alpha, \beta) \bigcap \Omega} P_n^*(\bigcup [a_{i-1}, a_i)) = P_n^*([2,3) \bigcup [3,4) \bigcup [4,5)) =$$

$$= P_n^*([2,3)) + P_n^*([3,4)) + P_n^*([4,5)) = 0.242 + 0.382 + 0.242 = 0.866;$$

$$m^* = \min_{[\alpha, \beta) \bigcap \Omega \subset \bigcup [a_{i-1}, a_i)} P_n^*(\bigcup [a_{i-1}, a_i)) = P_n^*([1,2) \bigcup [2,3) \bigcup [3,4) \bigcup [4,5) \bigcup$$

$$\bigcup [5,6)) == P_n^*([1,2)) + P_n^*([2,3)) + P_n^*([3,4)) + P_n^*([4,5)) + P_n^*([5,6)) =$$

$$= 0.061 + 0.242 + 0.382 + 0.242 + 0.061 = 0.988;$$

$$m^* - m_* = 0.988 - 0.866 = 0.122;$$

$$\widetilde{P}_n^*([1.7, 5.3)) = m_* + \frac{1}{2}(m^* - m_*) = 0.866 + 0.61 = 0.927.$$

Зауважимо, що інтервальний розподіл статистичних імовірностей, наведений в табл. 2.4.1, міг бути отриманий за розподілом, поданим в табл. 2.4.2, чи за будь яким іншим розподілом таким, що статистичні ймовірності попадання в інтервали $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,7}$, $a_0 = 0$, $h = a_i - a_{i-1} = 1$, вказані в Табл. 2.4.1, набувають вказаних в цій таблиці значень.

Приклад 2.4.2. Нехай задано інтервальний розподіл статистичних імовіностей на множині $\Omega = [0, 7)$ за інтервалами $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,35}$, $a_0 = 0$, $h = a_i - a_{i-1} = 0.2$:

Табл. 2.4.2

$[a_{i-1}, a_i)$	[0, 0.2)	[0.2, 0.4)	[0.4, 0.6)	[0.6, 0.8)	[0.8, 1.0)
$P_n^*([a_{i-1}, a_i))$	0.000	0.000	0.001	0.002	0.003

Продовження табл. 2.4.2

[1.0, 1.2)	[1.2, 1.4)	[1.4, 1.6)	[1.6, 1.8)	[1.8, 2.0)
0.005	0.007	0.011	0.016	0.022
[2.0, 2.2)	[2.2, 2.4)	[2.4, 2.6)	[2.6, 2.8)	[2.8, 3.0)
0.030	0.039	0.048	0.058	0.067
[3.0, 3.2)	[3.2, 3.4)	[3.4, 3.6)	[3.6, 3.8)	[3.8, 4.0)
0.073	0.078	0.080	0.078	0.073
[4.0, 4.2)	[4.2, 4.4)	[4.4, 4.6)	[4.6, 4.8)	[4.8, 5.0)
0.067	0.058	0.048	0.039	0.030
[5.0, 5.2)	[5.2, 5.4)	[5.4, 5.6)	[5.6, 5.8)	[5.8, 6.0)
0.022	0.016	0.011	0.007	0.005
[6.0, 6.2)	[6.2, 6.4)	[6.4, 6.6)	[6.6, 6.8)	[6.8, 7.0)
0.003	0.002	0.001	0.000	0.000

Тоді усереднена щільність $f_n^*(x)$ такого інтервального розподілу статистичних імовірностей матиме вигляд

$$f_n^*(x)=\begin{cases} 0.000, \text{ коли } x\in[0,0.2)\bigcup[0.2,0.4)\bigcup[6.6,6.8)\bigcup[6.8,7.0),\\ 0.005, \text{ коли } x\in[0.4,0.6)\bigcup[6.4,6.6),\\ 0.010, \text{ коли } x\in[0.6,0.8)\bigcup[6.2,6.4),\\ 0.015, \text{ коли } x\in[0.8,1.0)\bigcup[6.0,6.2),\\ 0.025, \text{ коли } x\in[1.0,1.2)\bigcup[5.8,6.0),\\ 0.035, \text{ коли } x\in[1.2,1.4)\bigcup[5.6,5.8),\\ 0.055, \text{ коли } x\in[1.4,1.6)\bigcup[5.4,5.6),\\ 0.080, \text{ коли } x\in[1.6,1.8)\bigcup[5.2,5.4),\\ 0.110, \text{ коли } x\in[1.8,2.0)\bigcup[5.0,5.2),\\ 0.150, \text{ коли } x\in[2.0,2.2)\bigcup[4.8,5.0),\\ 0.195, \text{ коли } x\in[2.2,2.4)\bigcup[4.6,4.8),\\ 0.240, \text{ коли } x\in[2.4,2.6)\bigcup[4.4,4.6),\\ 0.290, \text{ коли } x\in[2.6,2.8)\bigcup[4.2,4.4),\\ 0.335, \text{ коли } x\in[2.8,3.0)\bigcup[4.0,4.2),\\ 0.365, \text{ коли } x\in[3.0,3.2)\bigcup[3.8,4.0),\\ 0.390, \text{ коли } x\in[3.2,3.4)\bigcup[3.6,3.8),\\ 0.400, \text{ коли } x\in[3.4,3.6). \end{cases}$$

Графік цієї функції $f_n^*(x)$ подано на Рис. 2.4.2.

Якщо $[\alpha,\beta)=[1.7,5.3)$, тоді

$$m_* = \max_{\bigcup[a_{i-1},a_i)\subset[\alpha,\beta)\bigcap\Omega} P_n^*(\bigcup[a_{i-1},a_i)) = P_n^*([1.8,2.0)\bigcup[2.0,2.2)\bigcup$$

$$\bigcup[2.2,2.4)\bigcup[2.4,2.6)\bigcup[2.6,2.8)\bigcup[2.8,3.0)\bigcup[3.0,3.2)\bigcup[3.2,3.4)\bigcup$$

$$\bigcup[3.4,3.6)\bigcup[3.6,3.8)\bigcup[3.8,4.0)\bigcup[4.0,4.2)\bigcup[4.2,4.4)\bigcup[4.4,4.6)\bigcup$$

$$\bigcup[4.6,4.8)\bigcup[4.8,5.0)\bigcup[5.0,5.2)) = 0.022+0.030+0.039+0.048+$$

$$+0.058+0.067+0.073+0.078+0.080+0.078+0.073+0.067+$$
$$+0.058+0.048+0.039+0.030+0.022=0.910;$$

$$m^* = \min_{[\alpha,\beta)\bigcap\Omega\subset\bigcup[a_{i-1},a_i)} P_n^*(\bigcup[a_{i-1},a_i)) = P_n^*([1.6,1.8)\bigcup[1.8,2.0)\bigcup$$

$$\bigcup[2.0,2.2)\bigcup[2.2,2.4)\bigcup[2.4,2.6)\bigcup[2.6,2.8)\bigcup[2.8,3.0)\bigcup[3.0,3.2)\bigcup$$

$$\bigcup[3.2,3.4)\bigcup[3.4,3.6)\bigcup[3.6,3.8)\bigcup[3.8,4.0)\bigcup[4.0,4.2)\bigcup[4.2,4.4)\bigcup$$

$$\bigcup[4.4,4.6)\bigcup[4.6,4.8)\bigcup[4.8,5.0)\bigcup[5.0,5.2)\bigcup[5.2,5.4)) =$$

$$=0.016+0.022+0.030+0.039+0.048+0.058+0.067+0.073+$$

$$+0.078+0.080+0.078+0.073+0.067+0.058+0.048+0.039+$$
$$+0.030+0.022+0.016=0.942;$$

$$m^* - m_* = 0.942-0.910=0.032;$$

$$\widetilde{P}_n^*([1.7,5.3)) = m_* + \frac{1}{2}(m^* - m_*) = 0.910+0.016=0.926.$$

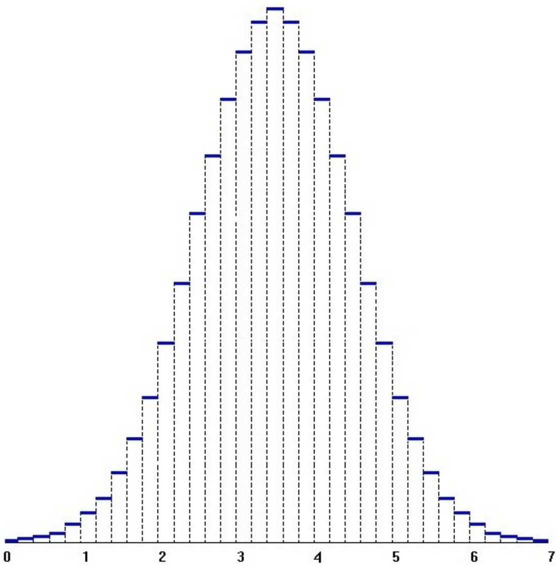


Рис. 2.4.2

Оскільки $m_* \le m^*$, бо $\bigcup\limits_{i\in I_1}[a_{i-1},a_i) \subset [\alpha,\beta) \cap \Omega \subset \bigcup\limits_{i\in I_2}[a_{i-1},a_i)$, де $I_1 \subset \{1,2,...,k\}$, $I_2 \subset \{1,2,...,k\}$, $I_1 \subset I_2$, то

$$m_* \le \widetilde{P}_n^*([\alpha,\beta)) \le \frac{1}{2}(m_* + m^*) \le m^* .$$

Як видно із прикладів 2.4.1, 2.4.2, із зменшенням довжини $h = a_i - a_{i-1}$ інтервала $[a_{i-1},a_i)$, $i \in \overline{1,k}$, різниця $m^* - m_*$ також зменшується.

Приклад 2.4.3. Нехай задано інтервальний розподіл статистичних імовірностей на множині $\Omega = [0,7)$ за інтервалами $[a_{i-1},a_i)$, $i \in \overline{1,35}$, $a_0 = 0$, $h = a_i - a_{i-1} = 0.2$, усереднена щільність $f_n^*(x)$ якого має вигляд (як і в прикладі 2.4.1):

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0.006, & \text{коли } [0,1) \cup [6,7), \\ 0.061, & \text{коли } [1,2) \cup [5,6), \\ 0.242, & \text{коли } [2,3) \cup [4,5), \\ 0.382, & \text{коли } [3,4). \end{cases}$$

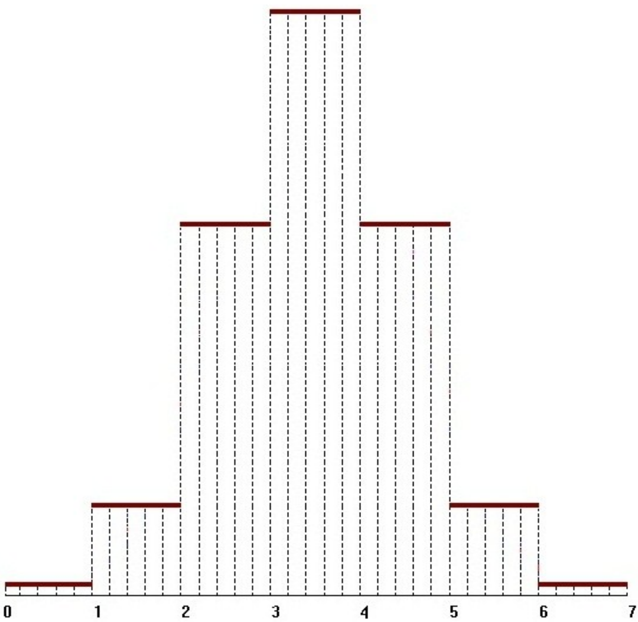


Рис. 2.4.3

При цьому на інтервалах $[\widetilde{a}_{i-1}, \widetilde{a}_i)$, $i \in \overline{1,7}$, $\widetilde{a}_0 = 0$, довжиною $\widetilde{h} = \widetilde{a}_i - \widetilde{a}_{i-1} = 1$ статистичні ймовірності розподілені рівномірно за інтервалами $[a_{i-1}, a_i)$ довжиною $h = a_i - a_{i-1} = 0.2$, тобто якщо $[a_{i-1}, a_i) \subset [\widetilde{a}_{k-1}, \widetilde{a}_k)$, $k \in \overline{1,7}$, $[a_{j-1}, a_j) \subset [\widetilde{a}_{k-1}, \widetilde{a}_k)$, $i \neq j$, то $P_n^*([a_{i-1}, a_i)) = P_n^*([a_{j-1}, a_j))$.

Графік розглядуваної функції подано на Рис. 2.4.3.

Якщо $[\alpha, \beta) = [1.7, 5.3)$, тоді (див. Рис. 2.4.3, а також приклади 2.4.1, 2.4.2)

$$m_* = \max_{\bigcup [a_{i-1}, a_i) \subset [\alpha, \beta) \cap \Omega} P_n^*(\bigcup [a_{i-1}, a_i)) = P_n^*([1.8, 2.0) \bigcup [2.0, 3.0) \bigcup$$

$$\bigcup [3.0, 4.0) \bigcup [4.0, 5.0) \bigcup [5.0, 5.2)) = P_n^*([1.8, 2.0)) + P_n^*([2.0, 3.0)) +$$

$$+ P_n^*([3.0, 4.0)) + P_n^*([4.0, 5.0)) + P_n^*([5.0, 5.2)) = 0.0122 + 0.2420 +$$

$$+ 0.3820 + 0.2420 + 0.0122 = 0.0244 + 0.8660 = 0.8904;$$

$$m^* = \min_{[\alpha, \beta) \cap \Omega \subset \bigcup [a_{i-1}, a_i)} P_n^*(\bigcup [a_{i-1}, a_i)) = P_n^*([1.6, 1.8) \bigcup [1.8, 2.0) \bigcup$$

$$\bigcup [2.0, 3.0) \bigcup [3.0, 4.0) \bigcup [4.0, 5.0) \bigcup [5.0, 5.2) \bigcup [5.2, 5.4)) = 0.0122 +$$

$$+ 0.0122 + 0.2420 + 0.3820 + 0.2420 + 0.0122 + 0.0122 = 0.0488 +$$

$$+ 0.8660 = 0.9148;$$

$$m^* - m_* = 0.9148 - 0.8904 = 0.0244;$$

$$\widetilde{P}_n^*([1.7, 5.3)) = m_* + \frac{1}{2}(m^* - m_*) = 0.8904 + 0.0122 = 0.9026.$$

Приклад 2.4.4. Нехай задано інтервальний розподіл статистичних ймовірностей на множині $\Omega = [0, 7)$ такий самий, як і в прикладі 2.4.3, і нехай $[\alpha, \beta) = [1, 6)$.

Тоді

$$m_* = \max_{\bigcup [a_{i-1}, a_i) \subset [\alpha, \beta) \cap \Omega} P_n^*(\bigcup [a_{i-1}, a_i)) = P_n^*([1, 2) \bigcup [2, 3) \bigcup [3, 4) \bigcup [4, 5) \bigcup$$

$$\bigcup [5, 6)) = 0.061 + 0.242 + 0.0382 + 0.242 + 0.061 = 0.988,$$

оскільки

$$[1, 2) \bigcup [2, 3) \bigcup [3, 4) \bigcup [4, 5) \bigcup [5, 6) \subset [1, 6),$$

$$m^* = \min_{[\alpha, \beta) \cap \Omega \subset \bigcup [a_{i-1}, a_i)} P_n^*(\bigcup [a_{i-1}, a_i)) = P_n^*([1, 2) \bigcup [2, 3) \bigcup [3, 4) \bigcup [4, 5) \bigcup$$

$$\bigcup [5, 6)) = 0.061 + 0.242 + 0.382 + 0.242 + 0.061 = 0.988,$$

оскільки

$$[1, 6) \subset [1, 2) \bigcup [2, 3) \bigcup [3, 4) \bigcup [4, 5) \bigcup [5, 6).$$

Таким чином $m_* = m^*$.

В розглядуваному випадку

$$[1,6) = [1,2) \bigcup [2,3) \bigcup [3,4) \bigcup [4,5) \bigcup [5,6) \in S,$$

$$\widetilde{P}_n^*([1,6)) = m_* + \frac{1}{2}(m^* - m_*) = m_* = m^* = P_n^*([1,6)) = 0.988.$$

Оскільки при довільних $[\alpha, \beta) \subset (-\infty, \infty)$ $0 \le m_* \le m^* \le 1$, то коли $m_* = 1$, природно покласти $\widetilde{P}_n^*([\alpha, \beta)) = 1$. Зокрема коли $\Omega \subset [\alpha, \beta)$, тоді буде $m_* = 1$. Якщо $[\alpha, \beta) \bigcap \Omega = \varnothing$, тоді природно покласти $m^* = 0$, $\widetilde{P}_n^*([\alpha, \beta)) = 0$.

Зауважимо, що ймовірнісні міри P_n^*, розглянуті в прикладах 2.4.1, 2.4.3, є гіпотетичні, знайдені за припущенням, що щільність $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей на проміжках $[0,1)$, $[1,2)$, $[2,3)$, $[3,4)$, $[4,5)$, $[5,6)$, $[6,7)$, набуває сталих значень відповідно 0.006, 0.061, 0.242, 0.382, 0.242, 0.061, 0.006, і значення 0 за межами проміжка $[0,7)$, що в дійсності може виявитись не так.

Якщо статистичні ймовірності попадання у будь-які підмножини V і W множини G однакові, коли міри цих підмножин однакові, тобто $P_n^*(V) = P_n^*(W)$, *коли* $m(V) = m(W)$, *тоді розподіл статистичних ймовірностей на множині G називається рівномірним.*

При цьому, якщо множина G дискретна (скінченна), тоді як міру $m(V)$ підмножини $V \subset G$ розглядатимемо кількість елементів у множині V, якщо ж множина G є деякий відрізок на числовій прямій чи деяка область на площині (в двохвимірному просторі) чи в просторі (тривимірному), тоді як міру $m(V)$ множини $V \subset G$ розглядатимемо відповідно суму довжин інтервалів, з яких складено V, чи суму площ областей, з яких складено V, чи суму об'ємів просторових областей, з яких складено V, і т.д.

Зокрема, розподіли статистичних ймовірностей на множинах Ω, розглянутих в прикладах 2.4.1-2.4.3, не є рівномірними.

Якщо розглянути інтервали $[i-1, i)$, $i \in \overline{1,7}$ із прикладу 2.4.1 і поділити кожен з них на 5 інтервалів довжиною 0.2, як це зроблено в прикладі 2.4.3, то статистичні ймовірності попадання в інтервали $[i-1, i)$ довжиною 1 залишаються такими самими, як і задані в інтервальному розподілі із прикладу 2.4.1, і (за припущенням) усереднена щільність $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega = [0, 7)$ на кожному інтервалі $[i-1, i)$, $i \in \overline{1, 7}$, набуває сталих значень, відповідно 0.006, 0.061, 0.242, 0.382, 0.242, 0.061, 0.006, тобто за припущенням статистичні ймовірності на кожному інтервалі $[i-1, i)$, $i \in \overline{1, 7}$ розподілені рівномірно із щільністю $f_n^*(x)$, а тому (за припущенням) статистичні імовірності попадання у дві, складені із підінтервалів довжиною 0.2, підмножини $[\alpha, \beta) \subset [i-1, i)$ і $[\gamma, \delta) \subset [i-1, i)$, $i \in \overline{1, 7}$, однакові, тобто $P_n^*([\alpha, \beta)) = P_n^*([\gamma, \delta))$, коли міри (довжини) цих множин $[\alpha, \beta)$ і $[\gamma, \delta)$ однакові, тобто $m([\alpha, \beta)) = m([\gamma, \delta))$, або, що те саме, однакові кількості інтервалів довжиною 0.2, з яких складені множини $[\alpha, \beta)$ і $[\gamma, \delta)$.

Однак припущення про рівномірність розподілу статистичних ймовірностей на інтервалах $[i-1, i)$, $i \in \overline{1, 7}$, може виявитись таким, що не узгоджується із реальним розподілом статистичних ймовірностей на множині $\Omega = \bigcup_{i=1}^{7} [i-1, i)$.

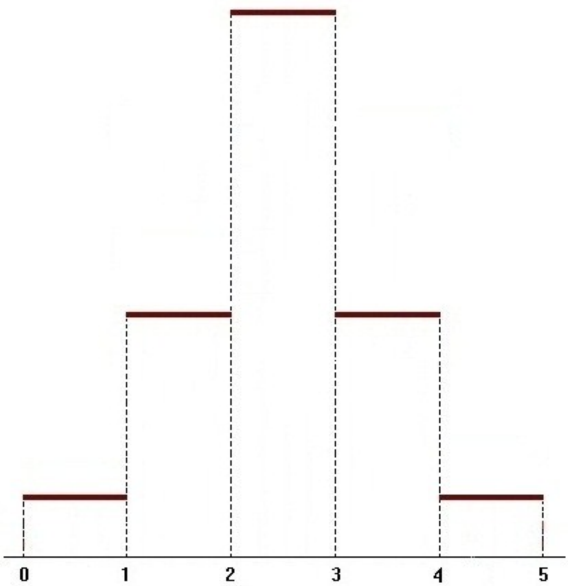


Рис. 2.4.4

Приклад 2.4.5. Якщо усереднена щільність $f_n^*(x)$ задана у вигляді (Рис. 2.4.4):

$$f_n^*(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\,\overline{\in}\,[0,5),\\ 0.05, & \text{коли } x\in[0,1)\bigcup[4,5),\\ 0.20, & \text{коли } x\in[1,2)\bigcup[3,4),\\ 0.5, & \text{коли } x\in[2,3).\end{cases}$$

то насправді розподіл може мати вигляд, поданий в табл. 2.4.3.

Табл. 2.4.3

$[a_{i-1},a_i)$	[0; 0.2)	[0.2; 0.4)	[0.4; 0.6)	[0.6; 0.8)	[0.8; 1.0)
$P_n^*([a_{i-1},a_i))$	0.02	0	0.03	0	0
	[1; 1.2)	[1.2; 1.4)	[1.4; 1.6)	[1.6; 1.8)	[1.8; 2.0)
	0.05	0.05	0	0.05	0.05
	[2; 2.2)	[2.2; 2.4)	[2.4; 2.6)	[2.6; 2.8)	[2.8; 3.0)
	0.10	0.12	0.08	0.11	0.09
	[3; 3.2)	[3.2; 3.4)	[3.4; 3.6)	[3.6; 3.8)	[3.8; 4.0)
	0.05	0.05	0.10	0	0
	[4; 4.2)	[4.2; 4.4)	[4.4; 4.6)	[4.6; 4.8)	[4.8; 5.0)
	0.03	0.01	0.01	0	0

На Рис. 2.4.5 подано графік усередненої щільності $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega=[0,5)$ за інтервалами $[a_{i-1},a_i)$, $i\in\overline{1,25}$, довжиною 0.2, за припущення, що на інтервалах $[a_{i-1},a_i)$, $i\in\overline{1,25}$, статистичні ймовірності розподілені рівномірно.

Можна навести багато інших варіантів розподілів статистичних ймовірностей, за якими одержується один і той самий інтервальний розподіл статистичних ймовірностей за інтервалами $[a_{i-1},a_i)$ з однією і тією самою усередненою щільністю $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей, наведеною в прикладах 2.4.1, 2.4.3, 2.4.5.

Зокрема, може виявитись, що інтервальний розподіл статистичних ймовірностей, розглянутий в прикладі 2.4.5, одержаний за дискретним розподілом статистичних ймовірностей на множині $\{0.5;1.5;2.5;3.5;4.5\}$ із статистичними ймовірностями попадання у вказані точки відповідно 0.05, 0.20, 0.50, 0.20, 0.05, або

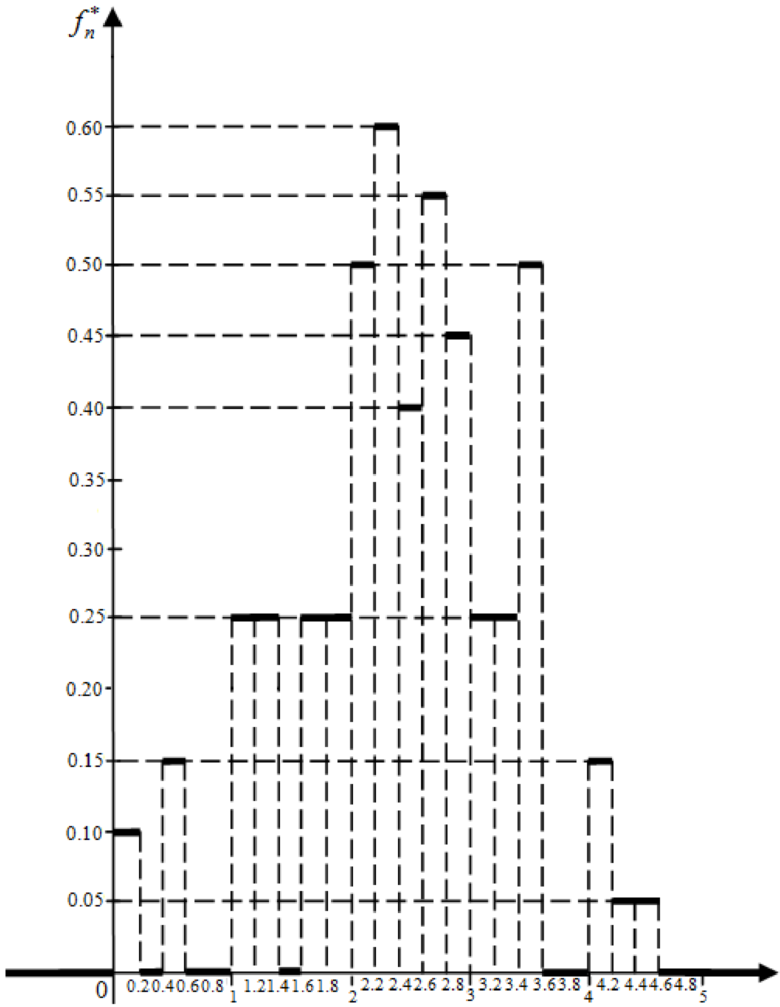


Рис. 2.4.5

на множині {0.20; 0.40; 0.60; 0.80; 1.00; 1.20; 1.40; 1.60; 1.80; 2.00; 2.20; 2.40; 2.60; 2.80; 3.00; 3.20; 3.40; 3.60; 3.80; 4.00; 4.20; 4.40; 4.60; 4.80; 5.00} із статистичними ймовірностями попадання у вказані точки відповідно 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.04, 0.04, 0.04, 0.04, 0.04, 0.10, 0.10, 0.10, 0.10, 0.10, 0.04, 0.04, 0.04, 0.04, 0.04, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01, 0.01. Очевидно, можливі і інші розподіли статистичних ймовірностей на множині $\Omega=[0;5)$, за яких буде одержуватися один і той самий інтервальний розподіл статистичних ймовірностей на множині $\Omega=[0;5)$ за інтервалами

$[i-1,i)$, $i\in\overline{1,5}$, з однією і тією самою усередненою щільністю $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей, наведеною в прикладі 2.4.5.

Подібних прикладів можна навести як завгодно багато.

Зауважимо, що якщо не збережено варіаційний ряд, в якому зафіксовано місцеположення на числовій осі всіх спостережених точок, і не проводити додаткових спостережень для уточнення розподілу статистичних ймовірностей, то за заданим інтервальним розподілом статистичних ймовірностей побудувати новий інтервальний розподіл з дрібнішими інтервалами неможливо, якщо не робити припущення про те, що усереднена щільність $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей на заданих інтервалах стала і не змінюється з подрібненням заданих інтервалів, чи якихось інших припущень. Якщо ж таке припущення зробити, тоді новий інтервальний розподіл з дрібнішими інтервалами, як і наявний, будуть гіпотетичними, які можуть виявитись такими, що не цілком узгоджуються із спостереженими даними, зафіксованими у варіаційному ряді.

Разом з тим за заданим інтервальним розподілом статистичних ймовірностей можна побудувати новий інтервальний розподіл з укрупненими інтервалами, одержаними як об'єднання кількох заданих інтервалів, при цьому статистичні ймовірності попадання в укрупнені інтервали одержуються як суми статистичних ймовірностей попадання в інтервали, через об'єднання яких утворено укрупнений інтервал.

Задачі

2.4.1. Задано інтервальний розподіл статистичних імовірностей

$[a_{i-1},a_i)$	$[0,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$	$[3,4)$	$[4,5)$
$P_n^*([a_{i-1},a_i))$	0.05	0.20	0.50	0.20	0.05

Визначити $\widetilde{P}_n^*([\alpha,\beta))$, коли: $[\alpha,\beta)=[-1,6)$; $[\alpha,\beta)=[2.1,2.9)$; $[\alpha,\beta)=[0.5,1.5)$; $[\alpha,\beta)=[-5,-1)$; $[\alpha,\beta)=[7,15)$; $[\alpha,\beta)=[-2,3)$; $[\alpha,\beta)=[2,9)$.

2.5. Поняття про функцію розподілу статистичних ймовірностей

Нехай задано деякий ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*), $\Omega \subset R$.

Будемо вважати, що сукупність S містить не більш ніж зчисленну кількість елементів (подій).

Позначимо через $\bigcup\limits_{A \subset (-\infty, x)} A$ суму всіх подій A із S таких, що $A \subset (-\infty, x)$. Очевидно така сума $\bigcup\limits_{A \subset (-\infty, x)} A$ буде належати до сукупності S, тобто буде подією.

Легко бачити, що коли множину елементарних подій $\Omega = [a, b)$, $-\infty < a < b < \infty$, поділити на скінченну кількість k підмножин виду $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1, k}$, таких, що $[a_{i-1}, a_i) \bigcap [a_{j-1}, a_j) = \varnothing$, коли $i \neq j$, $i \in \overline{1, k}$, $j \in \overline{1, k}$, $\bigcup\limits_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i) = \Omega$, $m([a_{i-1}, a_i)) = a_i - a_{i-1} > 0$, $i \in \overline{1, k}$, і як події розглядати разом з порожньою множиною $\varnothing$ лише всеможливі об'єднання підмножин $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1, k}$, тобто $A = \bigcup\limits_{i \in I} [a_{i-1}, a_i) \in S$, $I \subset \{1, 2, ..., k\}$, і таким чином розглядати простір подій S, породжений поділом множини Ω на підмножини $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1, k}$, тоді простір подій S міститиме разом з неможливою подією $\varnothing$ скінченну кількість 2^k подій виду $A = \bigcup\limits_{i \in I} [a_{i-1}, a_i)$, $I \subset \{1, 2, ..., k\}$.

В такому разі $\bigcup\limits_{A \subset (-\infty, x)} A$ буде об'єднанням не більше, ніж k підмножин $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1, k}$, і тому $\bigcup\limits_{A \subset (-\infty, x)} A \in S$, тобто $\bigcup\limits_{A \subset (-\infty, x)} A$ є подією із сукупності подій S.

Покладемо

$$F_n^*(x) = P_n^* \left(\bigcup_{A \subset (-\infty, x)} A \right), \qquad (2.5.1)$$

Очевидно, функція $F_n^*(x)$ визначена при всіх $x \in (-\infty, \infty)$.

При цьому функція $F_n^*(x)$ задовольняє такі властивості:

1. $F_n^*(x) \ge 0$ як статистична ймовірність деякої події.
2. $F_n^*(-\infty) = 0$ як статистична ймовірність неможливої події, оскільки при довільному Ω

$$\bigcup_{A \subset (-\infty, -\infty)} A = \varnothing \text{, бо } (-\infty, -\infty) = \varnothing .$$

3. $\max\limits_{\bigcup A \subset (-\infty, x) \bigcap \Omega} P_n^*(\bigcup A) \le F_n^*(x) \le \min\limits_{(-\infty, x) \bigcap \Omega \subset \bigcup A} P_n^*(\bigcup A)$, $A \in S$, для довільного $x \in (-\infty, \infty)$.
4. Функція $F_n^*(x)$ неспадна, тобто якщо $u < v$, то $F_n^*(u) \le F_n^*(v)$.

Справді, нехай $u < v$. Тоді

$$\bigcup_{A \subset (-\infty, u)} A \subset \bigcup_{A \subset (-\infty, v)} A,$$

а тому за властивостями ймовірнісної міри

$$P_n^*\left(\bigcup_{A \subset (-\infty, u)} A \right) \le P_n^*\left(\bigcup_{A \subset (-\infty, v)} A \right),$$

тобто $F_n^*(u) \le F_n^*(v)$.

Очевидно

$$P_n^*\left(\bigcup_{A \subset (-\infty, v)} A \setminus \bigcup_{A \subset (-\infty, u)} A \right) =$$
$$= P_n^*\left(\bigcup_{A \subset (-\infty, v)} A \right) - P_n^*\left(\bigcup_{A \subset (-\infty, u)} A \right) = F_n^*(v) - F_n^*(u) \tag{2.5.2}$$

Разом з тим не виключено, що $\bigcup\limits_{A \subset (-\infty, v)} A \setminus \bigcup\limits_{A \subset (-\infty, u)} A \ne \varnothing$, однак $\bigcup\limits_{A \subset [u, v)} A = \varnothing$. Наприклад, коли $\Omega = [a, b)$, простір подій S породжений поділом множини Ω на підмножини $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1, k}$, такі, що $\bigcup\limits_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i) = \Omega$, $A = \bigcup\limits_{i \in I} [a_{i-1}, a_i) \in S$, $I \subset \{1, 2, ..., k\}$, $a_{i-1} < u < a_i$, $a_i < v < a_{i+1}$, тоді буде $\bigcup\limits_{A \subset (-\infty, v)} A \setminus \bigcup\limits_{A \subset (-\infty, u)} A = [a_{i-1}, a_i)$, однак $\bigcup\limits_{A\subset[u,v)} A=\varnothing$, оскільки жоден з проміжків $[a_{i-1},a_i)$ не є підмножиною проміжка $[u,v)$. Тому не виключено, що

$$P_n^*\left(\bigcup_{A\subset[u,v)} A\right)\neq P_n^*\left(\bigcup_{A\subset(-\infty,v)} A\right)-P_n^*\left(\bigcup_{A\subset(-\infty,u)} A\right)=F_n^*(v)-F_n^*(u) .$$

Оскільки $\bigcup\limits_{A\subset[u,v)} A\subset \bigcup\limits_{A\subset(-\infty,v)} A\setminus \bigcup\limits_{A\subset(-\infty,u)} A$, то

$$P_n^*\left(\bigcup_{A\subset[u,v)} A\right)\leq P_n^*\left(\bigcup_{A\subset(-\infty,v)} A\setminus \bigcup_{A\subset(-\infty,u)} A\right)=$$
$$=P_n^*\left(\bigcup_{A\subset(-\infty,v)} A\right)-P_n^*\left(\bigcup_{A\subset(-\infty,u)} A\right)=F_n^*(v)-F_n^*(u).$$

Зауважимо, що записи вигляду $P_n^*([u,v))=F_n^*(v)-F_n^*(u)$, $F_n^*(x)=P_n^*((-\infty,x))$ тощо можуть виявитись некоректними, якщо множини $[u,v]$, $(-\infty,x)$ і т.п. не є елементами простору подій *S*, тобто не є подіями, бо ймовірнісна міра P_n^* визначена лише на елементах сукупності *S* підмножин множини Ω, тобто на подіях *A* із простору подій *S*.

Із рівності (2.5.2) слідує, що і для дискретного (точкового) розподілу статистичних ймовірностей на скінченній множині $\Omega=\{x_1,x_2,...,x_m\}$, коли як події $A\in S$ разом з порожньою множиною $\varnothing$ розглядаються всеможливі об'єднання $A=\bigcup\limits_{i\in I} H_i$, $I\subset\{1,2,...,k\}$, $k\leq m$, підмножин H_i множини Ω таких, що $H_iH_j=\varnothing$, коли $i\neq j$, $\bigcup\limits_{i=1}^{k} H_i=\Omega$ (зокрема H_i можуть бути одноелементними підмножинами множини Ω), і для інтервального розподілу статистичних ймовірностей на нескінченній неперервній множині $\Omega=[a,b)$, коли як події $A\in S$ разом з порожньою множиною $\varnothing$ розглядаються всеможливі об'єднання $A=\bigcup\limits_{i\in I}[a_{i-1},a_i)$, $I\subset\{1,2,...,k\}$, інтервалів $[a_{i-1},a_i)$ таких, що $[a_{i-1},a_i)\bigcap[a_{j-1},a_j)=\varnothing$, коли $i\neq j$, $\bigcup\limits_{i=1}^{k}[a_{i-1},a_i)=\Omega$, функція $F_n^*(x)$ кусково стала, тобто набуває одного і того самого значення, рівного $F_n^*(u)$, у всіх точках x із проміжка $[u,v)$, якщо $P_n^*\left(\bigcup_{A\subset(-\infty,v)} A \setminus \bigcup_{A\subset(-\infty,u)} A\right)=0$, зокрема коли $\bigcup_{A\subset(-\infty,v)} A \setminus \bigcup_{A\subset(-\infty,u)} A=\varnothing$.

Очевидно, коли $\Omega=\{x_1,x_2,...,x_k\}$, $A=\bigcup_{i\in I}\{x_i\}\in S$, $I\subset\{1,2,...,k\}$, і $u\in\{x_1,x_2,...,x_k\}$, $v\in\{x_1,x_2,...,x_k\}$, або коли $\Omega=[a,b)=\bigcup_{i=1}^{k}[a_{i-1},a_i)$, $A=\bigcup_{i\in I}[a_{i-1},a_i)\in S$, $I\subset\{1,2,...,k\}$, і $u\in\{a_0,a_1,...,a_k\}$, $v\in\{a_0,a_1,...,a_k\}$, тоді буде $[u,v)\in S$ і $P_n^*[u,v)=F_n^*(v)-F_n^*(u)$.

Приклад 2.5.1. Нехай на множині $\Omega=\{1,2,3,4,5\}$ задано розподіл статистичних ймовірностей через ряд розподілу

x_i	1	2	3	4	5
$P_n^*(\{x_i\})$	0.05	0.20	0.50	0.20	0.05

Як події разом з порожньою множиною $\varnothing$ розглядатимемо всеможливі об'єднання $A=\bigcup_{i\in I}\{x_i\}\in S$, $I\subset\{1,2,3,4,5\}$, $x_i=i$, $i\in\overline{1,5}$, тобто всеможливі підмножини множини $\Omega=\{1,2,3,4,5\}$.

Тоді для даного розподілу статистичних ймовірностей буде:

1) $F_n^*(x)=0$, коли $x\le 1$, оскільки жодна із непорожніх підмножин $\bigcup_{i\in I}\{x_i\}$, $I\subset\{1,2,3,4,5\}$, $I\ne\varnothing$, множини Ω не є підмножиною множини $(-\infty,1)$;
2) коли буде $1<x\le 2$, тоді до множини $(-\infty,x)$ буде входити підмножина $\{1\}$ множини Ω, і тому
$$F_n^*(x)=P_n^*(\{1\})=0.05,\text{ коли } 1<x\le 2;$$
3) коли x буде змінюватись в межах від 2 до 3 включно, тобто буде $2<x\le 3$, тоді до множини $(-\infty,x)$ будуть входити підмножини $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$, які є елементами сукупності S, тобто подіями, і об'єднання яких $\{1\}\bigcup\{2\}\bigcup\{1,2\}$ буде множиною, що входить до сукупності S, тобто подією, і крім того буде підмножиною множини $(-\infty,x)$, коли

$x \in (2,3]$. Тому

$$F_n^*(x) = P_n^*\left(\bigcup_{A \subset (-\infty, x)} A \right) = P_n^*(\{1\} \cup \{2\} \cup \{1,2\}) = P_n^*(\{1,2\}) =$$

$$= P_n^*(\{1\}) + P_n^*(\{2\}) = 0.25,$$

коли $2 < x \le 3$, тобто $F_n^*(x) = 0.25$, коли $2 < x \le 3$.

Міркуючи аналогічно, знайдемо

4) $F_n^*(x) = 0.75$, коли $3 < x \le 4$;

5) $F_n^*(x) = 0.95$, коли $4 < x \le 5$;

6) $F_n^*(x) = 1.00$, коли $5 < x$.

Остаточно одержуємо

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 1, \\ 0.05, & \text{коли } 1 < x \le 2, \\ 0.25, & \text{коли } 2 < x \le 3, \\ 0.75, & \text{коли } 3 < x \le 4, \\ 0.95, & \text{коли } 4 < x \le 5, \\ 1.00, & \text{коли } 5 < x. \end{cases}$$

Графік такої функції $F_n^*(x)$ для заданого дискретного (точкового) розподілу статистичних ймовірностей на скінченній множині точок $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$ подано на Рис. 2.5.1.

Підкреслимо, що в даному прикладі множини вигляду $(-\infty, x)$ не є подіями, бо таких множин немає в сукупності S підмножин розглядуваної множини Ω, тобто в просторі подій, до якого разом з порожньою множиною $\varnothing$ віднесено підмножини $\bigcup_{i \in I} \{x_i\}$, $I \subset \{1,2,3,4,5\}$, множини Ω, а тому записи вигляду $F_n^*(x) = P_n^*((-\infty, x))$ в розглядуваному випадку некоректні.

Приклад 2.5.2. Нехай на множині $\Omega = [0,5)$ задано інтервальний розподіл статистичних ймовірностей

$[a_{i-1}, a_i)$	$[0,1)$	$[1,2)$	$[2,3)$	$[3,4)$	$[4,5)$
$P_n^*([a_{i-1}, a_i))$	0.05	0.20	0.50	0.20	0.05

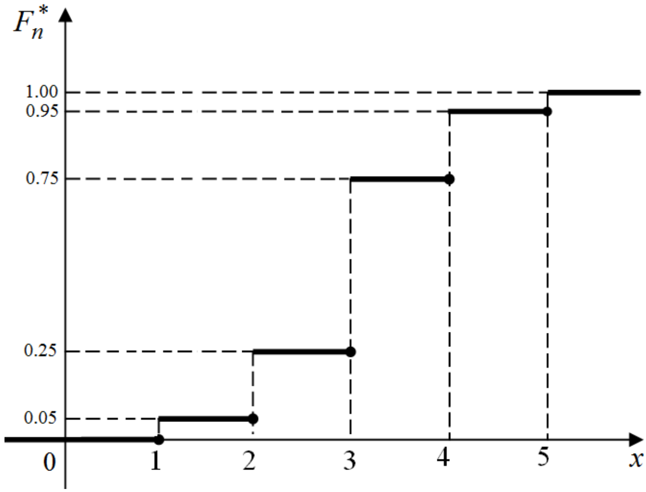


Рис. 2.5.1

Графік усередненої щільності $f_n^*(x)$ цього розподілу статистичних ймовірностей за інтервалами $[i-1, i)$, $i \in \overline{1,5}$, на множині $\Omega = [0,5) = [0,1) \bigcup [1,2) \bigcup [2,3) \bigcup [3,4) \bigcup [4,5)$ подано на Рис. 2.5.2.

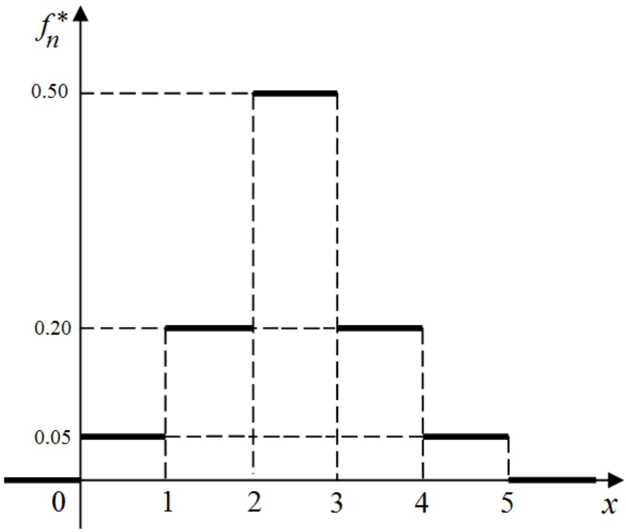


Рис. 2.5.2

Як події разом з порожньою множиною $\varnothing$ розглядатимемо всеможливі об'єднання інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$, тобто $A = \bigcup\limits_{i \in I} [a_{i-1}, a_i) \in S$,

$I \subset \{1,2,3,4,5\}$.

Тоді для даного інтервального розподілу статистичних ймовірностей будемо мати: $F_n^*(x)=0$, коли $x \le 1$, оскільки жодна з підмножин $A=\bigcup\limits_{i \in I}[a_{i-1},a_i) \in S$, $I \subset \{1,2,3,4,5\}$, $I \ne \varnothing$, не є підмножиною множини $(-\infty,x)$ при $x \le 1$. Коли ж x буде в межах від 1 до 2 включно, тобто $x \in (1,2]$, тоді інтервал $[0,1)$ буде підмножиною множини $(-\infty,x)$, і тому для $x \in (1,2]$ буде

$$F_n^*(x)=P_n^*([0,1))=\int\limits_0^1 f_n^*(x)dx=0.05, \text{ коли } x \in (1,2].$$

Коли x буде в межах від 2 до 3 включно, тобто $x \in (2,3]$, тоді сума подій $[0,1) \in S$, $[1,2) \in S$, $[0,1)\bigcup[1,2) \in S$, тобто $[0,1)\bigcup[1,2)\bigcup([0,1)\bigcup[1,2)) \in S$ буде підмножиною множини $(-\infty,x)$, $x \in (2,3]$, тому

$$\begin{aligned}
F_n^*(x)&=P_n^*([0,1)\bigcup[1,2)\bigcup([0,1)\bigcup[1,2)))=\\
&=P_n^*([0,1)\bigcup[1,2))=P_n^*([0,1))+P_n^*([1,2))=\\
&=\int\limits_0^1 f_n^*(x)dx+\int\limits_1^2 f_n^*(x)dx=0.05+0.20=0.25,
\end{aligned}$$

коли $x \in (2,3]$.

Міркуючи аналогічно, знайдемо

$$F_n^*(x)=0.75, \text{ коли } x \in (3;4];$$

$$F_n^*(x)=0.95, \text{ коли } x \in (4;5];$$

$$F_n^*(x)=1.00, \text{ коли } x \in (5;+\infty).$$

Таким чином

$$F_n^*(x)=\begin{cases}
0, & \text{коли } x \le 1,\\
0.05, & \text{коли } 1 < x \le 2,\\
0.25, & \text{коли } 2 < x \le 3,\\
0.75, & \text{коли } 3 < x \le 4,\\
0.95, & \text{коли } 4 < x \le 5,\\
1.00, & \text{коли } 5 < x.
\end{cases}$$

Вигляд графіка так визначені функції $F_n^*(x)$ інтервального розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega=[0,5)$, розглядуваного в прикладі 2.5.2, буде такий самий, як і вигляд графіка функції $F_n^*(x)$ дискретного (точкового) розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$, розглянутого в прикладі 2.5.1 (Рис. 2.5.1). Однаковий вигляд мають і подання самих функцій $F_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей в обох розглядуваних в прикладах 2.5.1 і 2.5.2 випадках.

Тому у випадках розглянутого способу побудови простору подій *S*, коли як події разом з порожньою множиною $\varnothing$ розглядаються всеможливі об'єднання $A = \bigcup_{i \in I} H_i \in S$, $I \subset \{1,2,...,k\}$, підмножин (можливо одноточкових) H_i, $i \in \overline{1,k}$, скінченної множини $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, $(k \le m)$, чи підмножин $H_i = [a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,k}$, нескінченної множини $\Omega = [a,b)$, таких, що $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \ne j$, $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = \Omega$, за виглядом опису функції $F_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей неможливо визначити, розглядається дискретний (точковий) розподіл статистичних ймовірностей на скінченній множині $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, чи інтервальний розподіл статистичних ймовірностей на нескінченній множині

$$\Omega = [a,b) = \bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i),\ [a_{i-1}, a_i) \cap [a_{j-1}, a_j) = \varnothing, \text{ коли } i \ne j.$$

Приклад 2.5.3. Нехай на множині $\Omega = [0,5)$ задано інтервальний розподіл статистичних ймовірностей такий самий, як і в прикладі 2.5.2, а простір подій *S* породжений поділом множини Ω на 25 інтервалів довжиною 0.2, тобто як події разом з порожньою множиною $\varnothing$ розглядаються всеможливі об'єднання $\bigcup_{i \in I} [a_{i-1}, a_i)$, $I \subset \{1,2,...,25\}$, інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,25}$, $a_0 = 0$, $a_i - a_{i-1} = 0.2$.

Це означає, що розглядається новий простір $\tilde{S}$, породжений сукупністю проміжків $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,25}$, елементами якого є множини виду $A = \bigcup_{i \in I} [a_{i-1}, a_i)$, $I \subset \{1,2,...,25\}$. Очевидно, всі події із простору *S*, розглядуваного в прикладі 2.5.2, є також і елементами простору $\tilde{S}$, тобто $S \subset \tilde{S}$. Нову ймовірнісну міру $\tilde{P}_n^*$ на просторі подій $\tilde{S}$ визначимо за формулою

$$\widetilde{P}_n^*(A) = \int_A f_n^*(x)dx = \sum_{x \in [a_{i-1}, a_i) \subset A} f_n^*(x) \cdot (a_i - a_{i-1}), \ A \in \widetilde{S},$$

де $f_n^*(x)$ – щільність розподілу статистичних ймовірностей така сама, як і в прикладі 2.5.2 (див. Рис. 2.5.2, Рис. 2.5.3).

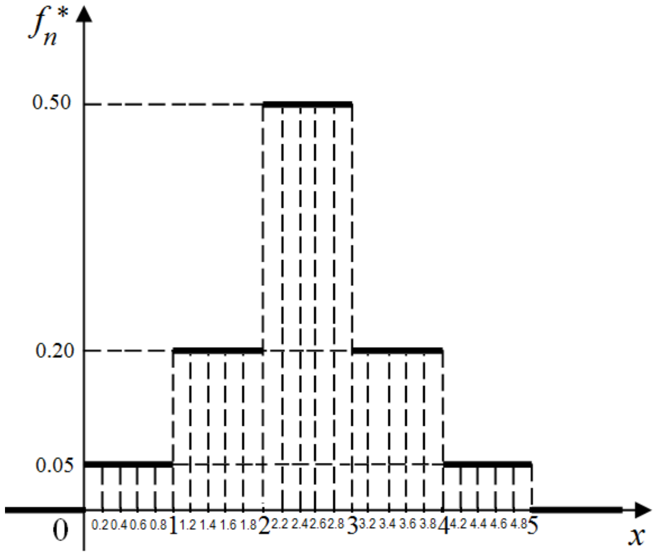


Рис. 2.5.3

Очевидно, при тій самій усередненій щільності $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей, що і в прикладі 2.5.2, статистичні ймовірності попадання в проміжки, отримані подрібненням проміжків із прикладу 2.5.2 на 5 проміжків однакової довжини, в 5 разів меншої, ніж довжина вихідних проміжків, будуть в 5 разів менші, ніж статистичні ймовірності попадання у вихідні проміжки, і будуть, як і раніше, обчислюватися за формулою

$$\widetilde{P}_n^*([a_{i-1}, a_i)) = f_n^*(x)(a_i - a_{i-1}), \ i \in \overline{1,25}.$$

При цьому говорять, що міра $\widetilde{P}_n^*(A)$, $A \in \widetilde{S}$, є продовженням міри $P_n^*(A)$, $A \in S$, із простору S на простір $\widetilde{S}$.

Очевидно, $\widetilde{P}_n^*(A) = P_n^*(A)$, коли $A \in S$. Якщо проміжки $[a_{i-1}, a_i)$, з яких складаються події $A = \bigcup_{i \in I} [a_{i-1}, a_i) \in \widetilde{S}$, $I \subset \{1, 2, \ldots, 25\}$, поділити кожен на якесь число ще дрібніших проміжків однакової довжини, отримаємо новий простір подій $\widetilde{\widetilde{S}}$ і нову ймовірнісну міру $\widetilde{\widetilde{P}}_n^*$

цілком аналогічно до попереднього. Таке подрібнення проміжків $[a_{i-1}, a_i)$ можна продовжувати як завгодно довго до тих пір, поки різниця $h = a_i - a_{i-1}$ стане меншою, ніж будь яке як завгодно мале наперед задане число $\varepsilon > 0$. При цьому в результаті кожного зменшення довжини $h = a_i - a_{i-1}$ проміжків $[a_{i-1}, a_i)$, однакової для всіх *i*, будемо отримувати все нові і нові ймовірнісні простори $(\Omega, S^{(j)}, P_n^{*(j)})$, $j \in \{0,1,2,3,\ldots\}$, (з одним і тим самим Ω).

Очевидно, функція $F_n^*(x)$ набуватиме сталих значень на проміжках $(a_{i-1}, a_i]$, $i \in \overline{1,25}$, і при переході через точку a_i отримуватиме приріст

$$f_n^*(x) \cdot (a_i - a_{i-1}),\ x \in [a_{i-1}, a_i). \tag{2.5.3}$$

Міркуючи аналогічно до того, як це було зроблено в прикладі 2.5.2 при побудові функції $F_n^*(x)$ інтервального розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega = [0,5)$ за інтервалами $[0,1)$, $[1,2)$, $[2,3)$, $[3,4)$, $[4,5)$, в розглядуваному прикладі, коли $a_i - a_{i-1} = 0.2$, $i \in \overline{1,25}$, одержимо:

$F_n^*(x) = 0$, коли $x \le 0.2$, $F_n^*(x) = 0.01$, коли $0.2 < x \le 0.4$,

$F_n^*(x) = 0.02$, коли $0.4 < x \le 0.6$, $F_n^*(x) = 0.03$, коли $0.6 < x \le 0.8$,

$F_n^*(x) = 0.04$, коли $0.8 < x \le 1.0$, $F_n^*(x) = 0.05$, коли $1.0 < x \le 1.2$,

$F_n^*(x) = 0.09$, коли $1.2 < x \le 1.4$, $F_n^*(x) = 0.13$, коли $1.4 < x \le 1.6$,

$F_n^*(x) = 0.17$, коли $1.6 < x \le 1.8$, $F_n^*(x) = 0.21$, коли $1.8 < x \le 2.0$,

$F_n^*(x) = 0.25$, коли $2.0 < x \le 2.2$, $F_n^*(x) = 0.35$, коли $2.2 < x \le 2.4$,

$F_n^*(x) = 0.45$, коли $2.4 < x \le 2.6$, $F_n^*(x) = 0.55$, коли $2.6 < x \le 2.8$,

$F_n^*(x) = 0.65$, коли $2.8 < x \le 3.0$, $F_n^*(x) = 0.75$, коли $3.0 < x \le 3.2$,

$F_n^*(x) = 0.79$, коли $3.2 < x \le 3.4$, $F_n^*(x) = 0.83$, коли $3.4 < x \le 3.6$,

$F_n^*(x) = 0.87$, коли $3.6 < x \le 3.8$, $F_n^*(x) = 0.91$, коли $3.8 < x \le 4.0$,

$F_n^*(x) = 0.95$, коли $4.0 < x \le 4.2$, $F_n^*(x) = 0.96$, коли $4.2 < x \le 4.4$,

$F_n^*(x) = 0.97$, коли $4.4 < x \le 4.6$, $F_n^*(x) = 0.98$, коли $4.6 < x \le 4.8$,

$F_n^*(x) = 0.99$, коли $4.8 < x \le 5.0$, $F_n^*(x) = 1.00$, коли $5.0 < x$,

Графік так визначеної функції $F_n^*(x)$ інтервального розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega = \bigcup_{i=1}^{25} [a_{i-1}, a_i)$, $a_0 = 0$, $a_i - a_{i-1} = 0.2$, $i \in \overline{1,25}$, за інтервалами $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,25}$, із щільністю (див. Рис. 2.5.3)

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \overline{\in} [a_0, a_{25}), \\ 0.05, & \text{коли } x \in [0,1) \bigcup [4,5), \\ 0.20, & \text{коли } x \in [1,2) \bigcup [3,4), \\ 0.50, & \text{коли } x \in [2,3), \end{cases}$$

подано на Рис. 2.5.4.

Нехай $\max\limits_{x \in \Omega} f_n^*(x) = c < \infty$.

Позначимо

$$\max_{\bigcup [a_{i-1}, a_i) \subset \Omega \bigcap (-\infty, x)} P_n^*(\bigcup [a_{i-1}, a_i)) \text{ через } m_*((-\infty, x)),$$

$$\min_{\Omega \bigcap (-\infty, x) \subset \bigcup [a_{i-1}, a_i)} P_n^*(\bigcup [a_{i-1}, a_i)) \text{ через } m^*((-\infty, x)),$$

$$a_i - a_{i-1} \text{ через } h,\ i \in \{1, 2, \ldots, k\}.$$

Очевидно,

$$m_*((-\infty, x)) = \max_{\bigcup [a_{i-1}, a_i) \subset \Omega \bigcap (-\infty, x)} P_n^*(\bigcup [a_{i-1}, a_i)) \le F_n^*(x) \le$$

$$\le \min_{\Omega \bigcap (-\infty, x) \subset \bigcup [a_{i-1}, a_i)} P_n^*(\bigcup [a_{i-1}, a_i)) = m^*((-\infty, x)) \qquad (2.5.4)$$

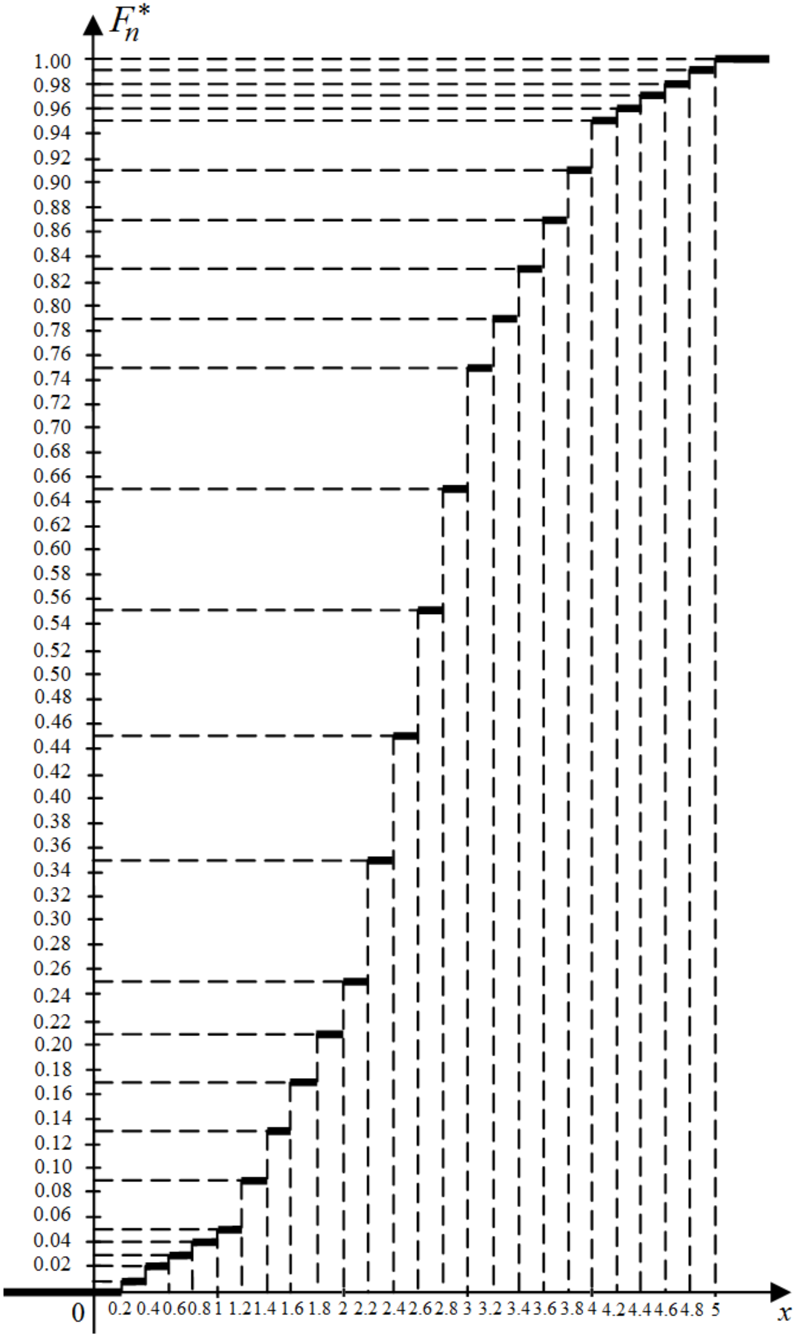
для довільного $x \in (-\infty, \infty)$,

$$m^*((-\infty, x)) - m_*((-\infty, x)) \le c \cdot h,$$

$$m^*((-\infty, x)) - m_*((-\infty, x)) \to 0, \text{ коли } h \to 0. \qquad (2.5.5)$$

Звідси та із (2.5.3), (2.5.4) випливає, що коли $h \to 0$, тоді всі значення функції $F_n^*(x)$ на будь якому із проміжків $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,k}$ (коли $h \to 0$, тоді $k \to \infty$), будуть різнитися між собою не більше, ніж на $c \cdot h$, тому (з врахуванням властивості 4 функції $F_n^*(x)$) $F_n^*(a_i) - F_n^*(a_{i-1}) \to 0$, коли $a_i - a_{i-1} \to 0$.

Зауважимо, що коли при довільних $x \in (-\infty, \infty)$ множини $(-\infty, x)$ є подіями, тобто елементами простору подій S, $(-\infty, x) \in S$, що означає, що як простір елементарних подій розглядається множина $\Omega = (-\infty, \infty)$, тоді формула (2.5.1) набуває вигляду $F_n^*(x) = P_n^*((-\infty, x))$, $x \in (-\infty, \infty)$. В такому разі за виглядом функції



F_n^*
1.00
0.98
0.96
0.94
0.92
0.90
0.88
0.86
0.84
0.82
0.80
0.78
0.76
0.74
0.72
0.70
0.68
0.66
0.64
0.62
0.60
0.58
0.56
0.54
0.52
0.50
0.48
0.46
0.44
0.42
0.40
0.38
0.36
0.34
0.32
0.30
0.28
0.26
0.24
0.22
0.20
0.18
0.16
0.14
0.12
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0
0.2 0.4 0.6 0.8 1 1.2 1.4 1.6 1.8 2 2.2 2.4 2.6 2.8 3 3.2 3.4 3.6 3.8 4 4.2 4.4 4.6 4.8 5
x

Рис. 2.5.4

$F_n^*(x)$ можна з'ясувати, така функція побудована за дискретним (точковим) розподілом статистичних ймовірностей на скінченній множині точок $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \subset \Omega = (-\infty, \infty)$, чи за інтервальним (неперервним) розподілом статистичних ймовірностей на неперервній множині $[a,b) \subset \Omega = (-\infty, \infty)$. Крім того в такому випадку $P_n^*([u,v)) = F_n^*(v) - F_n^*(u)$ для довільних u і v таких, що $[u,v) \subset (-\infty, +\infty)$, $u \in (-\infty, +\infty)$, $v \in (-\infty, +\infty)$, $u \le v$.

Приклад 2.5.4. Для дискретного (точкового) розподілу статистичних ймовірностей на скінченній множині $\{1,2,3,4,5\} \subset \Omega = (-\infty, \infty)$, розглянутого в прикладі 2.5.1, функція розподілу статистичних ймовірностей

$$F_n^*(x) = P_n^*((-\infty, x)),\ (-\infty, x) \in S,\ x \in (-\infty, \infty),$$

буде кусково сталою і матиме той самий вигляд, що і раніше, тобто

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 1, \\ 0.05, & \text{коли } 1 < x \le 2, \\ 0.25, & \text{коли } 2 < x \le 3, \\ 0.75, & \text{коли } 3 < x \le 4, \\ 0.95, & \text{коли } 4 < x \le 5, \\ 1.00, & \text{коли } 5 < x. \end{cases}$$

Графік цієї функції має той самий вигляд, що і на Рис. 2.5.1.

Разом з тим, для інтервального розподілу статистичних ймовірностей на множині $[0,5) \subset \Omega = (-\infty, \infty)$, розглянутого в прикладі 2.5.2, функція розподілу статистичних ймовірностей

$$F_n^*(x) = P_n^*((-\infty, x)) = \int_{-\infty}^{x} f_n^*(t)dt,\ (-\infty, x) \in S,\ x \in (-\infty, \infty)$$

буде неперервною і матиме вигляд

$$F_n^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n^*(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le a_0, \\ f_n^*(x)\cdot(x-a_0), & \text{коли } x \in (a_0, a_1], \\ \sum_{i=1}^{j-1} P_n^*([a_{i-1}, a_i)) + f_n^*(x)(x - a_{j-1}), & \\ & \text{коли } x \in [a_{j-1}, a_j),\ 2 \le j \le k, \\ 1, & \text{коли } a_k < x, \end{cases}$$

тобто для наведених даних буде

$$F_n^*(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 0,\\ 0.05x, & \text{коли } 0<x\le 1,\\ 0.05+0.20(x-1), & \text{коли } 1<x\le 2,\\ 0.25+0.50(x-2), & \text{коли } 2<x\le 3,\\ 0.75+0.20(x-3), & \text{коли } 3<x\le 4,\\ 0.95+0.05(x-4), & \text{коли } 4<x\le 5,\\ 1, & \text{коли } 5<x.\end{cases}$$

Графік останньої функції $F_n^*(x)$ подано на Рис. 2.5.5.

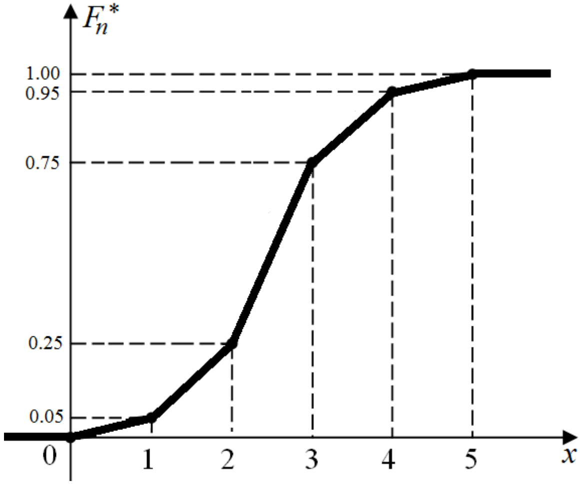


Рис. 2.5.5

Зауважимо, що коли усереднена щільність $f_n^*(x)$ інтервального розподілу статистичних ймовірностей задана на інтервалах $[a_{i-1},a_i)$, $i\in\overline{1,k}$, фіксованої довжини *h*, таких, що $[a_{i-1},a_i)\bigcap[a_{j-1},a_j)=\varnothing$, коли $i\ne j$, $\bigcup\limits_{i=1}^{k}[a_{i-1},a_i)=\Omega$, $a_i-a_{i-1}=h$ (наприклад, на інтервалах довжини $h=1$, як в прикладі 2.5.2, див. Рис. 2.5.2), і $f_n^*(x)\le c<\infty$, $x\in(-\infty,\infty)$, а простір подій S породжується поділом множини Ω на все дрібніші і дрібніші інтервали такі, що довжина найдовшого з таких інтервалів стає все меншою і меншою (див. приклад 2.5.3), тоді функція $F_n^*(x)$ такого інтервального розподілу статистичних ймовірностей, заданого вказаною щільністю $f_n^*(x)$, при все більшому і більшому подрібненні інтервалів, з яких складаються події $A \in S$, все менше і менше відрізнятиметься від неперервної функції $F_n^*(x)$ інтервального розподілу узагальнених статистичних ймовірностей, побудованої за умови, що як події розглядаються всеможливі множини $(-\infty, x)$, $x \in (-\infty, \infty)$, тобто множини $(-\infty, x)$ є елементами простору подій *S* (див. приклади 2.5.3, 2.5.4).

Розподіл узагальнених статистичних ймовірностей такий, *що функція* $F_n^*(x)$ *неперервна* (*це означає*, *що* $(-\infty, x) \in S$ *для довільного* $x \in (-\infty, +\infty)$), *називається неперервним*.

У випадку, коли $(-\infty, u) \in S$, $(-\infty, v) \in S$, $u < v$, $u \in (-\infty, \infty)$, $v \in (-\infty, \infty)$, як випливає з властивостей 1_s-3_s простору подій *S*, $[u, v) = (-\infty, v) - (-\infty, u)$ також є елементом простору подій *S*, тобто $[u, v) \in S$, бо коли $A \in S$ і $B \in S$, то $B \setminus A = B \bigcap \overline{A} = \overline{\overline{B \bigcap \overline{A}}} =$ $= \overline{\overline{B} \bigcup \overline{\overline{A}}} = \overline{\overline{B} \bigcup A} \in S$ за властивостями 1_s-3_s простору подій *S*. Тому, як видно з формули (2.5.2), буде $P_n^*([u, v)) = F_n^*(v) - F_n^*(u)$, бо в розглядуваному випадку для $A \in S$ таких, що $A \subset (-\infty, v)$, та $A \in S$ таких, що $A \subset (-\infty, u)$, буде мати місце рівність $\bigcup\limits_{A \subset (-\infty, v)} A \setminus \bigcup\limits_{A \subset (-\infty, u)} A = (-\infty, v) \setminus (-\infty, u) = [u, v) \in S$.

Зауважимо, що ймовірнісні міри P_n^*, розглянуті в прикладах 2.5.3 і 2.5.4, є гіпотетичні, знайдені за припущенням, що щільність $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей має вигляд (див. Рис. 2.5.2, Рис. 2.5.3)

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \overline{\in} [0, 5), \\ 0.05, & \text{коли } x \in [0, 1) \bigcup [4, 5), \\ 0.20, & \text{коли } x \in [1, 2) \bigcup [3, 4), \\ 0.50, & \text{коли } x \in [2, 3), \end{cases}$$

тобто за припущенням, що щільність розподілу статистичних ймовірностей на проміжках $[0,1)$, $[1,2)$, $[2,3)$, $[3,4)$, $[4,5)$ набуває сталих значень відповідно 0.05, 0.20, 0.50, 0.20, 0.05, і значення 0 за межами проміжка $[0,5)$, що в дійсності може виявитись не так.

Зауважимо, що *якщо статистичні ймовірності попадання у будь-які підмножини* V_i *множини G однакові*, *коли міри цих* *підмножин однакові, тобто* $P_n^*(V_i) = P_n^*(V_j)$, *коли* $m(V_i) = m(V_j)$, $i \neq j$, *тоді розподіл статистичних ймовірностей на множині G називається рівномірним*.

При цьому, якщо множина *G* дискретна (скінченна), тоді як міру підмножини $V \subset G$ розглядатимемо кількість елементів у множині *V*, якщо ж множина *G* є деякий відрізок на числовій прямій чи деяка область на площині (двохвимірному просторі) чи в просторі (тривимірному), тоді як міру множини $V \subset G$ розглядатимемо відповідно суму довжин інтервалів, з яких складено *V*, чи суму площ областей, з яких складено *V*, чи суму об'ємів просторових областей, з яких складено *V*, і т.д.

Зокрема, розподіл статистичних ймовірностей на множині $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, розглянутий в прикладі 2.5.1, не є рівномірним.

Нерівномірним є і інтервальний розподіл ймовірностей на множині $\Omega = [0, 5)$, розглянутий в прикладі 2.5.2.

Якщо розглянути інтервали $[i-1, i)$, $i \in \overline{1,5}$ із прикладу 2.5.2 і поділити кожен з них на 5 інтервалів довжиною 0.2, як це зроблено в прикладі 2.5.3, то статистичні ймовірності попадання в інтервали $[i-1, i)$ довжиною 1 залишаються такими самими, як і задані в інтервальному розподілі із прикладу 2.5.2, і (за припущенням) усереднена щільність $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega = [0, 5)$ на кожному інтервалі $[i-1, i)$, $i \in \overline{1,5}$, набуває сталих значень, відповідно 0.05, 0.20, 0.50, 0.20, 0.05, тобто за припущенням статистичні ймовірності на кожному інтервалі $[i-1, i)$, $i \in \overline{1,5}$, розподілені рівномірно із щільністю $f_n^*(x)$, а тому (за припущенням) статистичні імовірності попадання у дві, складені із підінтервалів довжиною 0.2, підмножини $[\alpha, \beta) \subset [i-1, i)$ і $[\gamma, \delta) \subset [i-1, i)$, $i \in \overline{1,5}$, однакові, тобто $P_n^*([\alpha, \beta)) = P_n^*([\gamma, \delta))$, коли міри (довжини) цих множин $[\alpha, \beta)$ і $[\gamma, \delta)$ однакові, тобто $m([\alpha, \beta)) = m([\gamma, \delta))$, або, що те саме, однакові кількості інтервалів довжиною 0.2, з яких складені множини $[\alpha, \beta)$ і $[\gamma, \delta)$.

Однак припущення про рівномірність розподілу статистичних ймовірностей на інтервалах $[i-1, i)$, $i \in \overline{1,5}$, може виявитись таким, що не узгоджується із реальним розподілом статистичних ймовірностей на множині $\Omega = \bigcup_{i=1}^{5} [i-1, i)$.

Наприклад, насправді розподіл може мати вигляд, поданий в табл. 2.5.1.

Табл. 2.5.1

$[a_{i-1}, a_i)$	[0; 0.2)	[0.2; 0.4)	[0.4; 0.6)	[0.6; 0.8)	[0.8; 1.0)
$P_n^*([a_{i-1}, a_i))$	0.02	0	0.03	0	0
	[1; 1.2)	[1.2; 1.4)	[1.4; 1.6)	[1.6; 1.8)	[1.8; 2.0)
	0.05	0.05	0	0.05	0.05
	[2; 2.2)	[2.2; 2.4)	[2.4; 2.6)	[2.6; 2.8)	[2.8; 3.0)
	0.10	0.12	0.08	0.11	0.09
	[3; 3.2)	[3.2; 3.4)	[3.4; 3.6)	[3.6; 3.8)	[3.8; 4.0)
	0.05	0.05	0.10	0	0
	[4; 4.2)	[4.2; 4.4)	[4.4; 4.6)	[4.6; 4.8)	[4.8; 5.0)
	0.03	0.01	0.01	0	0

На Рис. 2.4.5 подано графік усередненої щільності $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega = [0, 5)$ за інтервалами $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1, 25}$, довжиною 0.2, за припущення, що на інтервалах $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1, 25}$, статистичні ймовірності розподілені рівномірно.

Задачі

2.5.1. Функція $F_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей визначена за формулою (2.5.1). Перевірити, чи правильні твердження:

1. Функція $F_n^*(x)$ дискретного розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ із зростанням x може спадати.

2. Значення функції $F_n^*(x)$ дискретного розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ можна визначити в будь-якій точці проміжка $[x_1, x_k]$.

3. Значення функції $F_n^*(x)$ інтервального розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega = \bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i) = [a_0, a_k)$ можна визначити в будь-якій точці проміжка $[a_0, a_k)$.

4. Функція $F_n^*(x)$ інтервального розподілу статистичних ймовірностей на інтервалі $[a_{i-1}, a_i)$ набуває тим більшого приросту, чим більша усереднена щільність $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей на такому інтервалі.

5. Знаючи функцію $F_n^*(x)$ інтервального розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega = \bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i)$, можна визначити усереднену щільність $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей на інтервалах $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,k}$.

6. Знаючи усереднену щільність $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей на інтервалах $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,k}$, можна визначити функцію $F_n^*(x)$ інтервального розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega = \bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i)$.

7. Знаючи усереднену щільність $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей на інтервалах $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,k}$, можна визначити статистичну ймовірність попадання в будь-який проміжок $[\alpha, \beta)$ такий, що $[\alpha, \beta) \subset \bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i)$.

8. Знаючи функцію $F_n^*(x)$ інтервального розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega = \bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i)$, можна визначити статистичну ймовірність попадання в будь-який проміжок $[\alpha, \beta)$ такий, що $[\alpha, \beta) \subset \bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i)$.

2.4.2. 1. Задано простір Ω елементарних подій $\Omega = \{x_1, x_2, x_3\}$, де x_1, x_2, x_3 – точки на числовій прямій. Побудувати всі можливі простори подій, для кожного з яких задати розподіл статистичних ймовірностей та побудувати відповідні функції розподілу статистичних ймовірностей.

2. Задано неперервну множину $\Omega = \bigcup_{i=1}^{5} [i-1, i)$. Простір S подій породжується поділом множини Ω на підмножини $[i-1, i)$.

Усереднена щільність $f_n^*(x)$ набуває одного і того самого значення на підмножинах $[i-1,i)$. Визначити функцію $F_n^*(x)$ інтервального розподілу статистичних ймовірностей на множині Ω за заданих умов.

3. Який вигляд матиме функція інтервального розподілу статистичних ймовірностей на множині $[0;5)$, заданого щільністю розподілу статистичних ймовірностей

$$f_n^*(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\,\overline{\in}\,[0;5),\\ 0.10, & \text{коли } x\in[0;1)\bigcup[4;5),\\ 0.20, & \text{коли } x\in[1;2)\bigcup[3,4),\\ 0.40, & \text{коли } x\in[2;3),\end{cases}$$

якщо сукупність S породжена поділом множини $[0;5)$:

а) на 10 інтервалів $[a_{i-1},a_i)$, довжиною 0.50, $a_0=0$, $a_{10}=5$, $a_i-a_{i-1}=0.50$, $i\in\overline{1,10}$?

б) на 20 інтервалів $[a_{i-1},a_i)$, довжиною 0.25, $a_0=0$, $a_{20}=5$, $a_i-a_{i-1}=0.25$, $i\in\overline{1,20}$?

в) на 25 інтервалів $[a_{i-1},a_i)$, довжиною 0.20, $a_0=0$, $a_{25}=5$, $a_i-a_{i-1}=0.20$, $i\in\overline{1,25}$?

г) на 50 інтервалів $[a_{i-1},a_i)$, довжиною 0.1, $a_0=0$, $a_{50}=5$, $a_i-a_{i-1}=0.1$, $i\in\overline{1,50}$?

4. За даними із табл. 2.4.1 побудувати функцію $F_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega=[0;5)$.

2.6. Деякі числові характеристики дискретного розподілу статистичних ймовірностей в одновимірному координатному просторі

Приклад 2.6.1. Розглянемо в одновимірному координатному просторі два розподіли статистичних ймовірностей:

$a)$

x_i	0	1	2
$P_n^*(\{x_i\})$	0.1	0.8	0.1

$b)$

$x_i^/$	100	101	102
$P_n^*(\{x_i^/\})$	0.1	0.8	0.1

Ці розподіли відрізняються тим, що кожне із значень $x_i^/$ в розподілі *b*) на 100 більше, ніж в розподілі *a*). В розподілі *a*) статистичні ймовірності розподілені на множині із трьох точок x_1=0, x_2=1, x_3=2, що розташовані не далі, ніж на відстані, рівній 1, від точки x=1, а в розподілі *b*) статистичні ймовірності розподілені так само на множині із трьох точок $x_1^/$ =100, $x_2^/$ =101, $x_3^/$ =102, що віддалені не далі, ніж на відстані 1 від точки $x^/$ =101. Точки $\bar{x}$ =1 та $\bar{x}^/$ =101 природно назвати центрами розсіювання статистичних ймовірностей відповідно для розподілів *a*) та *b*). За ними характеризуються значення, навколо яких зосереджуються спостережені значення.

Нехай проведено n спостережень, в результаті яких дістали спостережені значення $x_{\text{сп }1}$, $x_{\text{сп }2}$, ..., $x_{\text{сп }n}$, на основі яких визначено дискретні розподіли абсолютних частот та відповідних статистичних ймовірностей, подані в таблицях 2.6.1. та 2.6.2.

Табл. 2.6.1

x_i	x_1	x_2	...	x_k
n_i	n_1	n_2	...	n_k

Табл. 2.6.2

x_i	x_1	x_2	...	x_k
$P_n^*(\{x_i\})$	$P_n^*(\{x_1\})$	$P_n^*(\{x_2\})$	...	$P_n^*(\{x_k\})$

Точку, абсциса якої дорівнює середньому арифметичному спостережених значень:

$$m_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{\text{сп }i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i = \sum_{i=1}^{k} x_i P_n^*(\{x_i\}),$$

називають *центром розсіювання* (чи розподілу) статистичних ймовірностей на множині $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$. Очевидно, центр розсіювання буде знаходитися якомога ближче до точок, на які припадає основна маса статистичних ймовірностей. Часто m_n^* позначають також через $\bar{x}$.

Важливою характеристикою розподілу статистичних ймовірностей, окрім центра розсіювання, є також величина, за якою характеризують розсіювання (чи скупченість) статистичних ймовірностей навколо центра розсіювання. До таких характеристик відносяться *дисперсія* розподілу статистичних ймовірностей, а також *середнє квадратичне відхилення.*

Дисперсією дискретного розподілу статистичних ймовірностей називають число

$$D_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{\text{сп } i} - m_n^*)^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - m_n^*)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{k}(x_i - m_n^*)^2 P_n^*(\{x_i\}) .$$

Середнім квадратичним відхиленням називають число $\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*}$.

Приклад 2.6.2. Нехай є два розподіли:

c)

x_i	-1	0	1
$P_n^*(\{x_i\})$	0.1	0.8	0.1

,

d)

$x_i^/$	-10	0	10
$P_n^*(\{x_i^/\})$	0.1	0.8	0.1

.

Очевидно для кожного з цих розподілів $m_n^* = 0$, але в розподілі *d*) розсіювання статистичних ймовірностей навколо центра розсіювання $m_n^* = 0$ помітно більше, ніж в розподілі *c*).

Розглянуті характеристики досить важливі при опрацюванні результатів спостережень. Чим менше розсіювання (дисперсія), тим точнішим, вірогіднішим і надійнішим є усереднений результат спостережень (m_n^*) при достатньо великій кількості спостережень.

В фізичній інтерпретації центр розсіювання є центром мас одиничної маси, розподіленої на множині точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ так, що на точку x_i припадає маса $P_n^*(\{x_i\})$, а дисперсія – це момент інерції цієї одиничної маси відносно центра розсіювання.

Приклад 2.6.3. Якщо розподіл статистичних ймовірностей визначається за таблицями 2.6.3 та 2.6.4.

Табл. 2.6.3

x_i	1	2	3	4	5	6
$k_n(\{x_i\})$	0	1	3	2	4	5

Табл. 2.6.4

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_n^*(\{x_i\})$	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

то $$m_n^* = 1\cdot 0 + 2\cdot\frac{1}{15} + 3\cdot\frac{3}{15} + 4\cdot\frac{2}{15} + 5\cdot\frac{4}{15} + 6\cdot\frac{5}{15} =$$

$$=\frac{1}{15}(1\cdot 0+2\cdot 1+3\cdot 3+4\cdot 2+5\cdot 4+6\cdot 5)=\frac{69}{15}=4\frac{3}{5},$$

$$D_n^*=\frac{1}{15}\left[\left(1-4\frac{3}{5}\right)^2\cdot 0+\left(2-4\frac{3}{5}\right)^2\cdot 1+\left(3-4\frac{3}{5}\right)^2\cdot 3+\right.$$

$$\left.+\left(4-4\frac{3}{5}\right)^2\cdot 2+\left(5-4\frac{3}{5}\right)^2\cdot 4+\left(6-4\frac{3}{5}\right)^2\cdot 5\right]\approx 1.7\,,$$

$$\sigma_n^*=\sqrt{D_n^*}\approx 1.3\,.$$

Задачі

2.6.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. В безкоординатному просторі числові характеристики розподілу статистичних ймовірностей можна визначити через щільність їх розподілу.
2. Для кожного дискретного розподілу статистичних ймовірностей існує центр розсіювання.
3. Координата центра розсіювання статистичних ймовірностей є натуральним числом, коли усі спостережені значення – натуральні числа.
4. Для обчислення дисперсії треба спочатку обчислити координату центра розсіювання статистичних ймовірностей.

2.6.2. 1. Знайти центр розсіювання, дисперсію та середнє квадратичне відхилення дискретного розподілу статистичних ймовірностей $P_n^*(\{x_i\})$:

а)

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P_n^*(\{x_i\})$	0.10	0.20	0.40	0.10	0.10	0.07	0.03

б)

x_i	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1
$P_n^*(\{x_i\})$	0.02	0.10	0.70	0.08	0.04	0.03	0.01	0.01	0.01

в)

x_i	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$P_n^*(\{x_i\})$	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

г)

x_i	-3	-2	-1	0	1	2	3
$P_n^*(\{x_i\})$	0.30	0.10	0.08	0.04	0.08	0.10	0.30

2.7. Деякі числові характеристики інтервального розподілу статистичних ймовірностей в одновимірному координатному просторі

Центром розсіювання статистичних ймовірностей на відрізку $[a,b)$ для інтервального розподілу, що описується усередненою щільністю $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega=[a;b)$ за інтервалами $[a_{i-1};a_i)$, $i\in\overline{1,k}$, називають точку на осі *Ох,* абсциса якої дорівнює

$$\bar{x}=\int_a^b x\,f_n^*(x)\,dx=\sum_{i=1}^k\int_{a_{i-1}}^{a_i} x\,f_n^*(x)\,dx=\sum_{i=1}^k\int_{a_{i-1}}^{a_i} x\,\frac{P_n^*([a_{i-1};a_i))}{h}dx=$$

$$=\sum_{i=1}^k \bar{x}_i P_n^*([a_{i-1};a_i))=\sum_{i=1}^k\frac{1}{n}\bar{x}_i k_n([a_{i-1},a_i))\approx$$

$$\approx\frac{1}{n}\sum_{i=1}^k\sum_{x_{\text{сп}\,j}\in[a_{i-1},a_i)} x_{\text{сп}\,j}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_{\text{сп}\,i}=m_n^*,$$

де $h=a_i-a_{i-1}$, $\bar{x}_i=\int_{a_{i-1}}^{a_i} x\frac{1}{h}dx=\frac{a_i^2-a_{i-1}^2}{2h}=\frac{a_{i-1}+a_i}{2}$, і це число $\bar{x}_i$ наближено дорівнює середньому арифметичному спостережених значень $x_{сп\,j}$, що потрапили в проміжок $[a_{i-1};a_i)$, $k_n([a_{i-1},a_i))$ – кількість спостережених значень $x_{сп\,j}$, що потрапили в проміжок $[a_{i-1},a_i)$.

Дисперсією інтервального розподілу статистичних ймовірностей із усередненою щільністю $f_n^*(x)$, $x\in[a;b)$, ($f(x)=0$, коли $x\,\overline{\in}\,[a,b)$), називають число

$$D_n^*=\int_a^b (x-m_n^*)^2 f_n^*(x)\,dx,$$

а число $\sigma_n^*=\sqrt{D_n^*}$ – називають *середнім квадратичним відхиленням* відповідного інтервального розподілу.

У фізичній інтерпретації центр розсіювання є центром мас одиничної маси, розподіленої на проміжку $[a;b)$ за інтервалами $[a_{i-1},a_i)$ із усередненою щільністю $f_n^*(x)$, а дисперсія – момент інерції цієї маси відносно центра розсіювання.

Приклад 2.7.1. Для розподілу, що визначається за табл. 2.7.1:

Табл. 2.7.1

$[a_{i-1};a_i)$	$\left[0;\frac{1}{10}\right)$	$\left[\frac{1}{10};\frac{2}{10}\right)$	$\left[\frac{2}{10};\frac{3}{10}\right)$	$\left[\frac{3}{10};\frac{4}{10}\right)$	$\left[\frac{4}{10};\frac{5}{10}\right)$
$P_{100}^*([a_{i-1};a_i))$	0.5	0.2	0.1	0.1	0.04
	$\left[\frac{5}{10};\frac{6}{10}\right)$	$\left[\frac{6}{10};\frac{7}{10}\right)$	$\left[\frac{7}{10};\frac{8}{10}\right)$	$\left[\frac{8}{10};\frac{9}{10}\right)$	$\left[\frac{9}{10};1\right)$
	0	0.02	0.01	0.02	0.01

маємо:

$$m_n^* = 0.05\cdot 0.5 + 0.15\cdot 0.2 + 0.25\cdot 0.1 + 0.35\cdot 0.1 + 0.45\cdot 0.04 +$$
$$+ 0.55\cdot 0 + 0.65\cdot 0.02 + 0.75\cdot 0.01 + 0.85\cdot 0.02 + 0.95\cdot 0.01 \approx 0.18,$$

Обчислюючи дисперсію D_n^*, одержимо:

$$D_n^* = \int_a^b (x-m_n^*)^2 f_n^*(x)dx = \sum_{i=1}^k \int_{a_{i-1}}^{a_i} (x-m_n^*)^2 f_n^*(x)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^k \int_{a_{i-1}}^{a_i} (x-m_n^*)^2 \frac{P_n^*([a_{i-1},a_i))}{h} dx = \sum_{i=1}^k \frac{P_n^*([a_{i-1},a_i))}{h} \int_{a_{i-1}}^{a_i} (x-m_n^*)^2 dx .$$

Якщо довжини проміжків $[a_{i-1},a_i)$ досить малі, то значення інтеграла $\int_{a_{i-1}}^{a_i}(x-m_n^*)^2 dx$ наближено дорівнює значенню підінтегральної функції в середній точці проміжка $[a_{i-1},a_i)$, тобто в точці $x=\frac{a_{i-1}+a_i}{2}$, помноженому на довжину проміжка $h=a_i-a_{i-1}$, тобто $\int_{a_{i-1}}^{a_i}(x-m_n^*)^2 dx \approx \left(\frac{a_{i-1}+a_i}{2}-m_n^*\right)^2 \cdot h$, звідки

$$D_n^* \approx \sum_{i=1}^k P_n^*([a_{i-1},a_i))\left(\frac{a_{i-1}+a_i}{2}-m_n^*\right)^2 .$$

Для розподілу, заданого таблицею 2.7.1, одержимо

$$D_n^* \approx (0.05-0.18)^2\cdot 0.50 + (0.15-0.18)^2\cdot 0.20 + (0.25-0.18)^2\cdot 0.10 +$$
$$+(0.35-0.18)^2\cdot 0.10 + (0.45-0.18)^2\cdot 0.04 + (0.55-0.18)^2\cdot 0.00 +$$
$$+(0.65-0.18)^2\cdot 0.02 + (0.75-0.18)^2\cdot 0.01 + (0.85-0.18)^2\cdot 0.02 +$$
$$+(0.95-0.18)^2\cdot 0.01 \approx 0.0375,$$

$$\sigma_n^* = \sqrt{D_n^*} \approx \sqrt{0.0375} \approx 0.194 .$$

Задачі

2.7.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. В безкоординатному просторі координату центра розсіювання статистичних ймовірностей можна визначити, поділивши множину Ω на підмножини H_i, $i \in \overline{1,n}$.

2. В координатному просторі для кожного інтервального розподілу статистичних ймовірностей існує центр розсіювання.

3. Якщо $x_{\text{сп}\, j}$, $j \in \overline{1,\, n}$, – спостережені значення, а $\bar{x}$ – координата центра розсіювання статистичних ймовірностей, то

$$\min_{1 \le j \le n} x_{\text{сп}\ j} \le \bar{x} \le \max_{1 \le j \le n} x_{\text{сп}\ j}.$$

4. Для обчислення дисперсії спочатку треба обчислити координату центра розсіювання статистичних ймовірностей.

2.7.2. Знайти центр розсіювання та дисперсію інтервального розподілу статистичних ймовірностей:

а) заданого таблицею:

$[a_{i-1}, a_i)$	[0,1)	[1,2)	[2,3)	[3,4)	[4,5)	[5, 6)
$P_n^*([a_{i-1}, a_i))$	0.10	0.70	0.10	0.06	0.03	0.01

б) заданого усередненою щільністю розподілу:

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0.20 \text{ при } x \in [0,1) \\ 0.50 \text{ при } x \in [1,2) \\ 0.20 \text{ при } x \in [2,3) \\ 0.10 \text{ при } x \in [3,4) \\ 0 \quad\ \text{при } x \overline{\in} [0,4) \end{cases}$$

2.8. Повторні випробування

Нехай задано простір елементарних подій Ω і деякий простір подій *S*, тобто сукупність S підмножин множини Ω, що задовольняє вимоги 1_s-3_s, а також задана ймовірнісна міра P_n^*, визначена на *S*. Нехай $A \in S$, $A \subset \Omega$ – деяка подія, і проводиться велика кількість серій по *m* випробувань, в кожному з яких спостерігають, відбувається подія *A* чи ні. Нехай за результатами досить великої кількості *n* разів по *m* випробувань встановлено, що і в першому із *m* випробувань, і в другому, і в третьому, і т.д., і в *m*-му подія *A* відбувається з однією і тією самою статистичною ймовірністю $P_n^*(A) = p$, і не відбувається з статистичною ймовірністю $P_n^*(\overline{A}) = 1 - P_n^*(A) = 1 - p = q$. Потрібно визначити ймовірнісну міру події, яка полягає в тому, що подія A у вказаній серії із m випробувань відбувається s разів.

Позначимо через A_i подію, яка полягає в тому, що подія A відбувається в i-му випробуванні із вказаних m випробувань. Будемо вважати, що події A_i пов'язані з імовірнісним простором $(\widetilde{\Omega}, \widetilde{S}, \widetilde{P}_n^*)$ так, що $A_i \in \widetilde{S}$ і $\widetilde{P}_n^*(A_i) = P_n^*(A) = p$ для всіх $i \in \overline{1, m}$, причому події A_i незалежні в сукупності відносно ймовірнісної міри $\widetilde{P}_n^*$. В такому разі повторні випробування називають незалежними. Подія A може відбутись s разів в m випробуваннях одним із варіантів:

$$A_1 A_2 \ldots A_s \overline{A}_{s+1} \overline{A}_{s+2} \ldots \overline{A}_m,\ \overline{A}_1 A_2 \ldots A_s A_{s+1} \overline{A}_{s+2} \ldots \overline{A}_m,\ \ldots,$$
$$\overline{A}_1 \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_{m-s} A_{m-s+1} A_{m-s+2} \ldots A_m.$$

При цьому в силу незалежності подій A_i ймовірність $\widetilde{P}_n^*$ для кожного із вказаних добутків дорівнює добуткові ймовірностей співмножників, а тому дорівнює $p^s q^{m-s}$.

В записі кожного із таких варіантів на s місцях із можливих m місць записується літера A з вказуванням номера її місця, а на інші $(m-s)$ місць записується літера $\overline{A}$ з вказуванням номера її місця. Всіх таких записів може бути стільки, скількома способами із множини із m місць можна вибрати невпорядковану s-елементну підмножину місць для літер A (без риски). Тобто кількість таких записів дорівнює кількості різних невпорядкованих s-елементних підмножин в m-елементній множині, які називаються комбінаціями із m елементів по s елементів, кількість яких позначається через C_m^s і обчислюється за формулою

$$C_m^s = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-(s-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot s} =$$
$$= \frac{m(m-1)(m-2)\ldots \cdot 2 \cdot 1}{(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots s)(m-s)(m-s-1)\ldots \cdot 2 \cdot 1} = \frac{m!}{s!(m-s)!}.$$

Якщо через $B_{m,s}$ позначити подію, яка полягає в тому, що подія A відбувається s разів в серії із вказаних m випробувань, то подію $B_{m,s}$ через A_i і $\overline{A}_j$, $i \neq j$, $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, можна подати так

$$B_{m,s} = A_1 A_2 \ldots A_s \overline{A}_{s+1} \overline{A}_{s+2} \ldots \overline{A}_m + \overline{A}_1 A_2 \ldots A_s A_{s+1} \overline{A}_{s+2} \ldots \overline{A}_m + \ldots +$$
$$+ \overline{A}_1 \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_{m-s} A_{m-s+1} A_{m-s+2} \ldots A_m ,$$

тобто подія $B_{m,s}$ відбувається, коли подія A в серії із m випробувань відбувається s разів за одним із вказаних варіантів. Очевидно, доданки в сумі $B_{m,s}$ попарно несумісні. Тому, враховуючи, що статистична ймовірність кожного такого доданку дорівнює $p^s q^{m-s}$, одержимо

$$\widetilde{P}_n^*(B_{m,s}) = C_m^s p^s q^{m-s}, \; s \in \{0,1,2,\ldots,m\}. \qquad (2.8.1)$$

Формулу (2.7.1) називають формулою Бернуллі.

Зауважимо, що $B_{m,s}$ є підмножиною декартового добутку $\widetilde{\Omega} = \Omega \times \Omega \times \ldots \times \Omega$ множини $\Omega = A + \overline{A}$, помноженої m разів самої на себе, тобто m-го декартового степеня множини Ω. Наприклад,

$$\Omega \times \Omega = (A + \overline{A}) \times (A + \overline{A}) = A \times A + A \times \overline{A} + \overline{A} \times A + \overline{A} \times \overline{A},$$

$$\Omega \times \Omega \times \Omega = A \times A \times A + A \times A \times \overline{A} + A \times \overline{A} \times A + A \times \overline{A} \times \overline{A} + \overline{A} \times A \times A +$$
$$+ \overline{A} \times A \times \overline{A} + \overline{A} \times \overline{A} \times A + \overline{A} \times \overline{A} \times \overline{A}$$ і т.д. (див. Рис. 2.8.1)

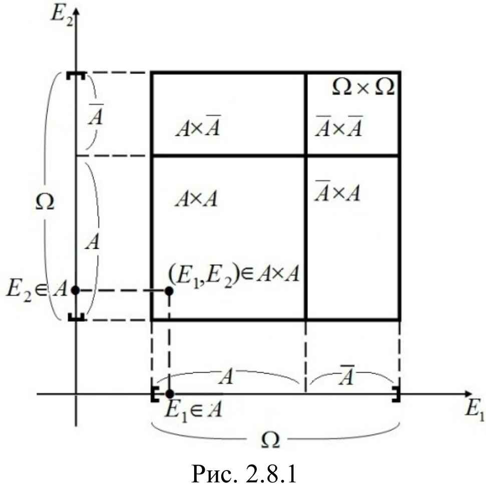


Рис. 2.8.1

Якщо як наслідки розглядуваної серії із m випробувань розглядати кількість відбувань події A в такій серії, тоді за формулою Бернуллі можна отримати розподіл статистичних ймовірностей на множині таких наслідків, поданий в табл. 2.8.1.

Зауважимо, що статистичні ймовірності за формулою Бернуллі (2.8.1) обчислюються так само, як і члени розкладу бінома

Ньютона $(p+q)^m$ за степенями p і q: $(p+q)^m = \sum_{s=0}^{m} C_m^s p^s q^{m-s}$. Тому розподіл імовірнісної міри $\widetilde{P}_n^*$, поданий в табл. 2.8.1, називають біноміальними.

Табл. 2.8.1

s	0	1	2	…	m-1	m
$\widetilde{P}_n^*(B_{m,s}) = C_m^s p^s q^{m-s}$	$C_m^0 p^0 q^m$	$C_m^1 p^1 q^{m-1}$	$C_m^2 p^2 q^{m-2}$	…	$C_m^{m-1} p^{m-1} q^1$	$C_m^m p^m q^0$

Приклад 2.8.1. Якщо $P_n^*(A) = \frac{1}{2}$ і $m = 10$, то ряд розподілу статистичних ймовірностей на множині наслідків серії із 10 випробувань стосовно кількості відбувань події A в такій серії матиме вигляд

s	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\widetilde{P}_n^*(B_{10,s})$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{252}{1024}$	$\frac{210}{1024}$	$\frac{120}{1024}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{10}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

Многокутник цього розподілу статистичних ймовірностей зображено на Рис. 2.8.2.

Якщо подія B полягає в тому, що кількості появ події A в серії із m випробувань є елементами множини $I \subset \{0,1,2,\dots,m-1,m\}$, тоді статистична ймовірність $P_n^*(B)$ такої події B обчислюватиметься за формулою

$$\widetilde{P}_n^*(B) = \sum_{s \in I} \widetilde{P}_n^*(B_{m,s}) = \sum_{s \in I} C_m^s p^s q^{m-s} .$$

Зокрема, якщо подія B полягає в тому, що кількість появ події A в серії із m випробувань буде знаходитись в межах від m_1 до m_2 включно, тоді статистична ймовірність події B обчислюватиметься за формулою

$$\widetilde{P}_n^*(B) = \sum_{s=m_1}^{m_2} \widetilde{P}_n^*(B_{m,s}) = \sum_{s=m_1}^{m_2} C_m^s p^s q^{m-s} .$$

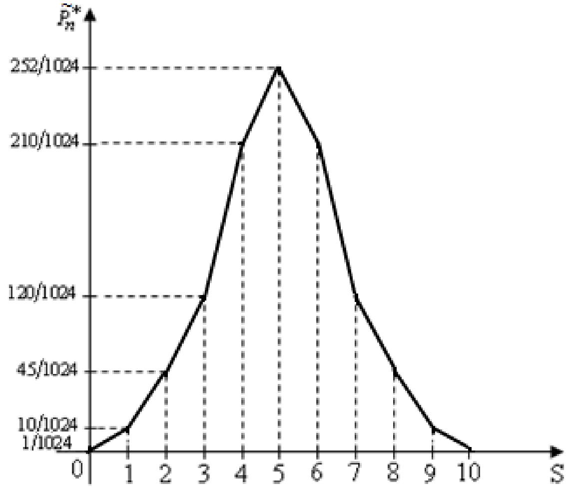


Рис. 2.8.2

Наприклад, якщо за даними прикладу 2.8.1 необхідно обчислити статистичну ймовірність події B, яка полягає в тому, що подія A в розглядуваній серії із 10 випробувань відбудеться непарну кількість разів, тобто $I = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, тоді

$$\widetilde{P}_n^*(B) = \sum_{s \in I} C_{10}^s \left(\frac{1}{2}\right)^s \left(\frac{1}{2}\right)^{10-s} = C_{10}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^9 + C_{10}^3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^7 +$$

$$+ C_{10}^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_{10}^7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right)^3 + C_{10}^9 \left(\frac{1}{2}\right)^9 \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{10}{1024} + \frac{120}{1024} +$$

$$+ \frac{252}{1024} + \frac{120}{1024} + \frac{10}{1024} = \frac{512}{1024} = \frac{1}{2}.$$

Якщо ж необхідно обчислити статистичну ймовірність події B, яка полягає в тому, що в розглядуваній серії із 10 випробувань подія A відбудеться не менше, ніж 4, і не більше, ніж 6 разів, тоді

$$\widetilde{P}_n^*(B) = \sum_{s=4}^{6} C_{10}^s \left(\frac{1}{2}\right)^s \left(\frac{1}{2}\right)^{10-s} = \frac{210}{1024} + \frac{252}{1024} + \frac{210}{1024} = \frac{672}{1024}.$$

Задачі

2.8.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Серії із m випробувань можуть бути пов'язані з різними просторами елементарних подій.

2. Повторні випробування пов'язані з довільною серією з m випробувань.

3. Повторні випробування пов'язані з одним і тим самим

простором елементарних подій.

2.8.2. Знайти статистичну ймовірність того, що у серії з m випробувань подія A відбувається принаймні один раз, якщо статистична ймовірність відбування цієї події у кожному випробуванні дорівнює $p = P_n^*(A) > 0$.

2.8.3. Знайти статистичну ймовірність того, що у серії із 9 підкидань монети герб випадає:

а) 5 разів;

б) 4 рази,

вважаючи, що при кожному підкиданні $P_n^*(\{\Gamma\}) = \dfrac{1}{2}$.

Порівняти ці статистичні ймовірності.

Побудувати многокутник розподілу статистичних ймовірностей $\widetilde{P}_n^*(B_{9,s})$, $s \in \overline{0,\, 9}$.

РОЗДІЛ 3. ВИПАДКОВІ ВЕЛИЧИНИ

3.1. Поняття випадкової величини

Нехай задано дві множини V і W елементів деякої природи. Відповідністю X між множинами V і W називають деяку підмножину X множини впорядкованих пар (v, w), де $v \in V$, $w \in W$. Множину всіх впорядкованих пар (v, w), таких, що $v \in V$, $w \in W$, називають *декартовим добутком* множин V і W, який позначають $V \times W$. При цьому якщо $(v, w) \in X$, то кажуть, що елемент $w \in W$ поставлено у відповідність елементові $v \in V$ за відповідністю X. Множину Q тих елементів $w \in W$, що поставлені у відповідність елементові $v \in V$ за відповідністю X, називають *образом* елемента $v \in V$ за відповідністю X і пишуть $Q = X(v)$, $v \in V$, $Q = X(v) \subset W$. Цей образ $Q = X(v) \subset W$ може містити довільну кількість елементів із W, зокрема бути порожнім. *Образом множини* $G \subset V$ за відповідністю X називають об'єднання образів всіх елементів множини G, тобто $X(G) = \bigcup\limits_{v \in G} X(v)$. *Прообразом елемента* $w \in W$ за відповідністю X називають множину всіх елементів із V, яким поставлено у відповідність елемент $w \in W$. Таку множину елементів із V позначають через $X^{-1}(w)$. *Прообразом множини* $Q \subset W$ елементів із W за відповідністю X називають об'єднання прообразів всіх елементів із Q, тобто $X^{-1}(Q) = \bigcup\limits_{w \in Q} X^{-1}(w)$.

Приклад 3.1.1. Нехай є дві множини

$V = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ і $W = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$.

Тоді множина пар

$$\begin{gathered}
\{(v_1, w_1), (v_1, w_2), (v_1, w_3), (v_1, w_4), (v_1, w_5), (v_1, w_6), \\
(v_2, w_1), (v_2, w_2), (v_2, w_3), (v_2, w_4), (v_2, w_5), (v_2, w_6), \\
(v_3, w_1), (v_3, w_2), (v_3, w_3), (v_3, w_4), (v_3, w_5), (v_3, w_6), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
(v_7, w_1), (v_7, w_2), (v_7, w_3), (v_7, w_4), (v_7, w_5), (v_7, w_6)\}
\end{gathered}$$

буде декартовим добутком $V \times W$ множин V і W (Рис. 3.1.1).

Множиною пар $X = \{(v_1, w_1), (v_2, w_2), (v_3, w_3), (v_4, w_3), (v_5, w_4),$

$(v_6, w_5),(v_7, w_5)\}$ визначається відповідність X між множинами V і W. При цьому

$$X(v_1)=\{w_1\},\ X(v_2)=\{w_2\},\ X(v_3)=\{w_3\},\ X(v_4)=\{w_3\},$$
$$X(v_5)=\{w_4\},\ X(v_6)=\{w_5\},\ X(v_7)=\{w_5\},$$
$$X^{-1}(w_1)=\{v_1\},\ X^{-1}(w_2)=\{v_2\},\ X^{-1}(w_3)=\{v_3, v_4\},\ X^{-1}(w_4)=\{v_5\},$$
$$X^{-1}(w_5)=\{v_6, v_7\},\ X^{-1}(w_6)=\varnothing.$$

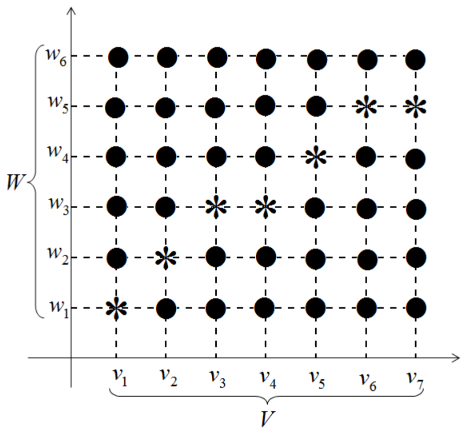


Рис. 3.1.1

Якщо за відповідністю X кожному елементові v із V ставиться у відповідність єдиний елемент w із W, тоді говорять, що відповідність X однозначна. Таку відповідність називають *відображенням* множини V у множину W або *функцією* і пишуть $X\colon V \to W$, або $X(v)=w$, $v \in V$, $w \in W$. Якщо при цьому $X(v_1) \neq X(v_2)$, коли $v_1 \neq v_2$, тоді говорять, що відображення взаємнооднозначне і пишуть $X\colon V \leftrightarrow W$. Множини V і W при цьому називають *еквівалентними*, а відповідність X^{-1} при цьому є відображенням $X^{-1}\colon W \to V$, оберненим до відображення $X\colon V \to W$.

У прикладі 3.1.1 відповідність X є відображенням множини V у множину W, тобто функцією $w = X(v)$, $v \in V$. Разом з тим відповідність X^{-1} в цьому прикладі не є відображенням (функцією), бо за відповідністю X^{-1} не кожному елементові із W ставиться у відповідність єдиний елемент із V (наприклад, $X^{-1}(w_3)=\{v_3, v_4\}$, $X^{-1}(w_5)=\{v_6, v_7\}$).

Зауважимо, що якщо відповідність X не взаємнооднозначна, то не обов'язково для довільного $G \subset V$ має місце рівність $X^{-1}(X(G)) = G$.

Наприклад (див. Рис. 3.1.1), в розглянутому прикладі 3.1.1 $X(v_6) = w_5$, $X^{-1}(w_5) = X^{-1}(X(v_6)) = \{v_6, v_7\} \neq \{v_6\}$. Аналогічно не завжди має місце рівність $X(X^{-1}(Q)) = Q$ для довільного $Q \subset W$.

Якщо відповідність X однозначна, то для довільних $w_1 \in W$ і $w_2 \in W$, $w_1 \neq w_2$, прообрази елементів w_1 і w_2 не перетинаються (не містять спільних елементів), тобто $X^{-1}(w_1) \bigcap X^{-1}(w_2) = \varnothing$. Так само, якщо $Q_1 \subset W$, $Q_2 \subset W$ – дві непорожні підмножини із W такі, що $Q_1 \bigcap Q_2 = \varnothing$, то $X^{-1}(Q_1) \bigcap X^{-1}(Q_2) = \varnothing$, коли X є відображенням, тобто однозначною відповідністю. Якщо відображення X взаємнооднозначне, тобто відображення X^{-1}, як і X, однозначне, то образи двох непорожніх множин $G_1 \subset V$ і $G_2 \subset V$ таких, що не містять спільних елементів, тобто $G_1 \bigcap G_2 = \varnothing$, також не містять спільних елементів, тобто $X(G_1) \bigcap X(G_2) = \varnothing$.

Приклад 3.1.2. Учневі пропонується випадковим чином обрати приз. Для цього він повинен навмання обрати одну із 12 кульок, серед яких 2 зелених, 3 червоних, 3 білих, 2 блакитних, 1 жовта, 1 чорна.

При цьому серед призів є годинник, калькулятор, м'яч, книга, блокнот, олівці, альбом (Рис. 3.1.2).

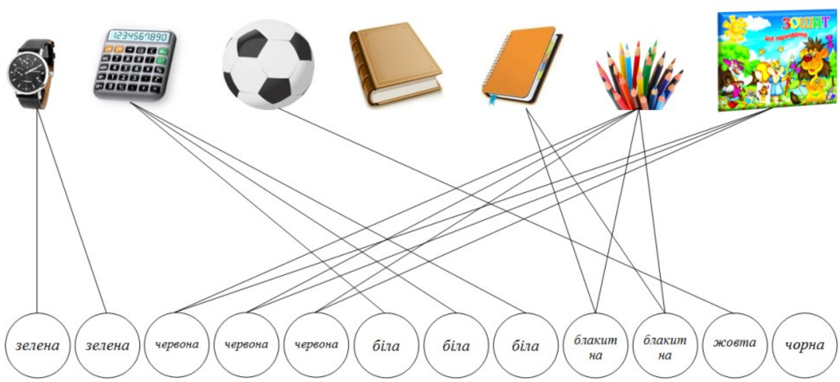


Рис. 3.1.2

Якщо учень вибере зелену кульку, він одержить годинник,
якщо учень вибере червону кульку, він одержить олівці і альбом,
якщо учень вибере білу кульку, він одержить калькулятор,
якщо учень вибере блакитну кульку, він одержить олівці і блокнот,
якщо учень вибере жовту кульку, він одержить м’яч,
якщо учень вибере чорну кульку, він не одержує приз.

Нехай V={зелена, червона, біла, блакитна, жовта, чорна} – множина варіантів вибрати кульку якогось із вказаних шести кольорів, W={годинник, калькулятор, м’яч, книга, блокнот, олівці, альбом} – множина призів. Тоді одержимо

X({зелена})={годинник},
X({червона})={олівці, альбом},
X({біла})={калькулятор},
X({блакитна})={блокнот, олівці},
X({жовта})={м’яч},
X({чорна})=$\varnothing$.

При цьому X({червона})$\bigcap X$({блакитна})={олівці, альбом}$\bigcap$
$\bigcap$ {блокнот, олівці}={олівці} $\neq \varnothing$,
перетини всіх інших пар образів елементів множини V порожні.

Прообразами елементів множини W в даному прикладі будуть:

X^{-1}({годинник})={зелена},
X^{-1}({калькулятор})={біла},
X^{-1}({м’яч})={жовта},
X^{-1}({книга})=$\varnothing$,
X^{-1}({блокнот})={блакитна},
X^{-1}({олівці})={червона, блакитна},
X^{-1}({альбом})={червона}.

При цьому X^{-1}({олівці})$\bigcap$ X^{-1}({блокнот})={блакитна},
X^{-1}({олівці})$\bigcap$ X^{-1}({альбом })={червона},
перетини всіх інших пар прообразів елементів множини W порожні.

В розглядуваному випадку відповідність X між елементами множин V та W неоднозначна. Тому X не є відображенням (функцією).

Приклад 3.1.3. Учневі пропонується випадковим чином обрати собі один із трьох призів – калькулятор, м’яч, книга. Для цього він повинен навмання вибрати одну із семи кульок, серед яких біла, червона, зелена, жовта, блакитна, рожева, коричнева.

Якщо учень вибере червону або блакитну кульку, він одержить калькулятор; якщо учень вибере білу або жовту кульку, він одержить м’яч; якщо учень вибере зелену, або рожеву, або коричневу кульку, він одержить книгу (див. Рис. 3.1.3).

Нехай V={біла, червона, зелена, жовта, блакитна, рожева, коричнева} – множина варіантів вибрати одну кульку якогось із вказаних семи кольорів, W={калькулятор, м'яч, книга} – множина призів.

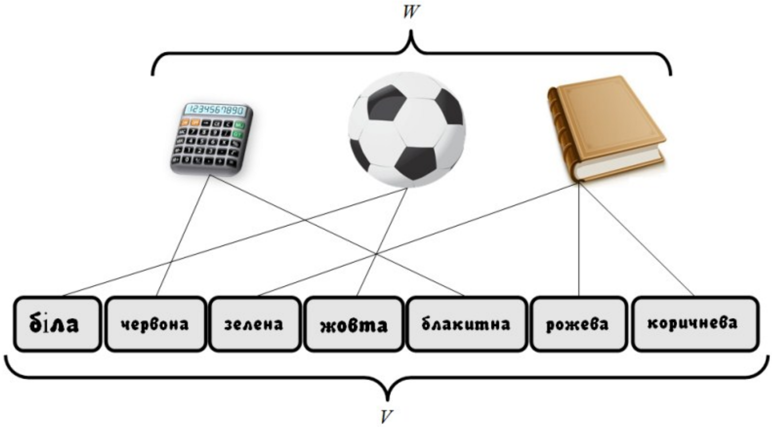


Рис. 3.1.3

Тоді одержимо:

X({біла})=X({жовта})={м’яч},

X^{-1}({м’яч})={біла, жовта},

X({червона})=X({блакитна})={калькулятор},

X^{-1}({калькулятор})={червона, блакитна},

X({зелена})=X({рожева})=X({коричнева})={книга},

X^{-1}({книга})={зелена, рожева, коричнева},

X({біла, жовта})={м’яч},

X({червона, блакитна})={калькулятор},

X({біла, жовта} $\cup$ {червона, блакитна})={м’яч} $\cup$ {калькулятор}=
={м’яч, калькулятор},

X^{-1}({м’яч, книга})= X^{-1}({м’яч}) $\cup$ X^{-1}({книга})=
={біла, жовта} $\cup$ {зелена, рожева, коричнева}=
={біла, жовта, зелена, рожева, коричнева},

X^{-1}({калькулятор, книга})= X^{-1}({калькулятор}) $\cup$ X^{-1}({книга})=
={червона, блакитна} $\cup$ {зелена, рожева, коричнева}=

={червона, блакитна, зелена, рожева, коричнева},

X^{-1}({калькулятор, м'яч})= X^{-1}({калькулятор}) $\cup$ X^{-1}({м'яч})=

={червона, блакитна} $\cup$ {біла, жовта}=

={червона, блакитна, біла, жовта},

X^{-1}({м'яч, книга}) $\cap$ X^{-1}({калькулятор, книга})=

={біла, жовта, зелена, рожева, коричнева} $\cap$ {червона, блакитна, зелена, рожева, коричнева}={зелена, рожева, коричнева}=

= X^{-1}({книга}),

X^{-1}({м'яч, книга}) $\cap$ X^{-1}({калькулятор, м'яч})=

={біла, жовта, зелена, рожева, коричнева} $\cap$

$\cap$ {червона, блакитна, біла, жовта}={біла, жовта}= X^{-1}({м'яч}),

X^{-1}({калькулятор, книга}) $\cap$ X^{-1}({калькулятор, м'яч})=

={червона, блакитна, зелена, рожева, коричнева} $\cap$

$\cap$ {червона, блакитна, біла, жовта}={червона, блакитна}=

= X^{-1}({калькулятор}).

Легко бачити, що прообрази будь яких двох різних підмножин із W, які не містять спільних елементів (не перетинаються), також не містять спільних елементів (не перетинаються).

В даному прикладі відповідність X між елементами множин V={біла, червона, зелена, жовта, блакитна, рожева, коричнева} та W={калькулятор, м'яч, книга} однозначна, оскільки кожному елементові із множини V ставиться у відповідність єдиний елемент із множини W. Тому відповідність X є відображенням (функцією). Разом з тим відповідність X^{-1}, обернена до X, не є однозначною, оскільки в множині W є елементи, яким за відповідністю X^{-1} ставиться у відповідність не один, а кілька елементів:

X^{-1}({м'яч})={біла, жовта}, X^{-1}({калькулятор})={червона, блакитна}, X^{-1}({книга})={зелена, рожева, коричнева}.

Тому відповідність X^{-1} не є відображенням (функцією).

Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) і на множині Ω елементарних подій задано дійсну функцію $X(E), E \in \Omega$, за якою кожному елементові E множини Ω ставиться у відповідність деяке дійсне число $x = X(E)$. Це число $x = X(E)$ (чи відповідна точка на числовій осі) є *образом* елемента E. При цьому може трапитись, що одне і те саме число x поставлене у відповідність кільком елементарним подіям (чи навіть нескінченній їх кількості, якщо, наприклад, задана функція набуває одного і того самого значення, тобто стала, на деякому відрізку).

Множина всіх точок (елементарних подій) $E \in \Omega$, яким поставлено у відповідність на числовій осі одну і ту саму точку x, є *прообразом* точки x. Прообраз точки x позначають символами $X^{-1}(x)$.

Очевидно, щоб знайти прообраз точки x, потрібно знайти множину всіх розв'язків рівняння $X(E) = x$.

Образом деякої множини $A \subset \Omega$ є об'єднання образів всіх елементів множини A, тобто $\bigcup\limits_{E \in A} X(E)$, яке позначають через $X(A)$. Зокрема $X(\Omega) = \Omega_X$ – це множина значень функції $X(E)$, $E \in \Omega$.

Прообразом деякої множини G *точок* є об'єднання прообразів всіх елементів множини G, тобто $\bigcup\limits_{x \in G} X^{-1}(x)$, яке позначають через $X^{-1}(G)$.

Нехай S_X – деяка сукупність підмножин G множини $\Omega_X = X(\Omega)$, яка задовольняє вимоги 1_s-3_s:

1_s. $\Omega_X \in S_X$;

2_s. Якщо $G \in S_X$, то і $\overline{G} = \Omega_X \setminus G \in S_X$;

3_s. Якщо $G_i \in S_X$, $i \in \{1, 2, 3, \ldots\}$, то і $\bigcup\limits_{i \in I} G_i \in S_X$, $I \subset \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Функцію $X(E)$, $E \in \Omega$, називають S / S_X*-вимірною функцією* або S / S_X*-випадковою величиною*, якщо для будь-якої підмножини $G \in S_X$ виявляється $X^{-1}(G) \in S$.

Оскільки при цьому значення $X(E)$ належить до множини $G \in S_X$ тоді й тільки тоді, коли $E \in X^{-1}(G) \in S$, то статистична ймовірність (відносна частота) P_{nX}^* попадання значень $X(E)$ у множину $G \in S_X$ дорівнює статистичній ймовірності (відносній частоті) $P_n^*(X^{-1}(G))$ попадання елементарних подій $E \in \Omega$ у множину $X^{-1}(G) \in S$, тобто $P_{nX}^*(G) = P_n^*(X^{-1}(G))$, $G \in S_X$, $X^{-1}(G) \in S$.

Зауважимо, що P_{nX}^* задовольняє умови 1_p-3_p стосовно S_X.

Тому $(\Omega_X, S_X, P_{nX}^*)$ є *ймовірнісним простором*. При цьому говорять, що *ймовірнісна міра* P_{nX}^* *породжується (генерується)* S/S_X*-випадковою величиною* X *за ймовірнісною мірою* P_n^*, а ймовірнісний простір $(\Omega_X, S_X, P_{nX}^*)$ при заданому S_X породжується (генерується) S/S_X-випадковою величиною X із ймовірнісного простору (Ω, S, P_n^*).

Зауважимо, що коли $S_X = \{\varnothing, \Omega_X\}$, то тоді будь-яка функція $X(E)$, $E \in \Omega$, буде S/S_X-вимірною для будь-якого ймовірнісного простору (Ω, S, P).

Зауважимо також, що коли S – найширша сукупність підмножин множини Ω, $S = \{A : A \subset \Omega\}$, тобто S містить будь які підмножини множини Ω, зокрема і порожню $\varnothing$, то тоді будь яка дійсна функція, задана на Ω, буде S/S_X-вимірною для будь якої сукупності S_X підмножин множини Ω_X, яка задовольняє вимоги 1_s-3_s.

Приклад 3.1.4. Нехай

$$\Omega = \{"1","2","3","4","5","6"\},\ H_1 = \{"1","2","3","4"\},\ H_2 = \{"5"\},$$

$$H_3 = \{"6"\},\ P_n^*(H_1) = 0.10,\ P_n^*(H_2) = 0.30,\ P_n^*(H_3) = 0.60,$$

$$S = \{\varnothing, H_1, H_2, H_3, H_1 + H_2, H_1 + H_3, H_2 + H_3, H_1 + H_2 + H_3 = \Omega\}.$$

Тоді (Ω, S, P_n^*) – ймовірнісний простір.

Нехай на множині $\Omega = \{"1","2","3","4","5","6"\}$ задана функція $X(E)$ наступним чином: $X(E) = 1$, якщо $E \in \{"1","2","3","4"\}$; $X(E) = 2$, якщо $E \in \{"5"\}$; $X(E) = 3$, якщо $E \in \{"6"\}$.

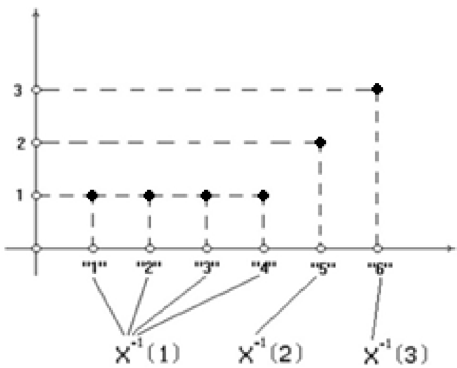


Рис. 3.1.4

Якщо елементарні події "1", "2", "3", "4", "5", "6" подати як точки на числовій осі Ox, то графічно зазначену залежність можна подати так, як показано на Рис. 3.1.4.

Таким чином $X(\Omega)=\Omega_X=\{1,2,3\}$.

Розглянемо таку сукупність S_X підмножин множини $X(\Omega)$:

$$S_X=\{\varnothing,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\}, \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\}\}.$$

Очевидно, ця сукупність задовольняє вимоги 1_s-3_s.

Оскільки одне і те саме число 1 поставлено у відповідність елементарним подіям і "1", і "2", і "3", і "4", прообразом точки 1 є множина $X^{-1}(\{1\})=H_1=\{"1","2","3","4"\}\in S$. Це означає, що статистична ймовірність (відносна частота) того, що функція $X(E)$ набуває значення 1, дорівнює статистичній ймовірності (відносній частоті) попадання в підмножину $H_1=\{"1","2","3","4"\}\in S$, тобто дорівнює 0.10 (бо значення 1 функція $X(E)$ набуває тоді, коли на верхній грані кубика випадає одна з цифр "1", або "2", або "3", або "4").

Аналогічно прообразом точки 2 є одноелементна множина $X^{-1}(\{2\})=H_2=\{"5"\}\in S$, тому статистична ймовірність того, що $X(E)$ набуває значення 2, дорівнює статистичній ймовірності випадання цифри "5" на верхній грані кубика, тобто дорівнює 0.30. Прообразом точки 3 є одноелементна множина $X^{-1}(\{3\})=H_3=$ $=\{"6"\}\in S$, а тому статистична ймовірність того, що функція $X(E)$ набуває значення 3, дорівнює статистичній ймовірності випадання цифри "6" на верхній грані кубика, тобто дорівнює 0.60.

Тепер легко знайти статистичні ймовірності попадання значень $X(E)$ у різні підмножини G множини $X(\Omega)=\Omega_X=\{1, 2, 3\}$, $G\in S_X$. Очевидно, статистична ймовірність попадання значень $X(E)$:

– у підмножину $\{1,2\}\in S_X$ така сама, як статистична ймовірність попадання елементарних подій E в підмножину

$$X^{-1}(\{1,2\})=X^{-1}(\{1\})\cup X^{-1}(\{2\})=\{"1","2","3","4"\}\cup\{"5"\}=$$
$$=\{"1","2","3","4","5"\}\in S,$$

тобто дорівнює 0.40;

– у підмножину $\{1,3\}\in S_X$ така сама, як в підмножину

$$X^{-1}(\{1,3\}) = X^{-1}(\{1\}) \bigcup X^{-1}(\{3\}) = \{"1","2","3","4"\} \bigcup \{"6"\} =$$
$$= \{"1","2","3","4","6"\} \in S\ ,$$
тобто дорівнює 0.70;
– у підмножину $\{2,3\} \in S_X$ така сама, як в підмножину
$$X^{-1}(\{2,3\}) = X^{-1}(\{2\}) \bigcup X^{-1}(\{3\}) = \{"5"\} \bigcup \{"6"\} = \{"5","6"\} \in S\ ,$$
тобто дорівнює 0.90;
– у підмножину $\{1,2,3\} \in S_X$ така сама, як в підмножину
$$X^{-1}(\{1,\ 2,\ 3\}) = X^{-1}(\{1\}) \bigcup X^{-1}(\{2\}) \bigcup X^{-1}(\{3\}) =$$
$$= \{"1","2","3","4"\} \bigcup \{"5"\} \bigcup \{"6"\} = \{"1","2","3","4","5","6"\} = \Omega \in S\ ,$$
тобто дорівнює 1.00.

Як бачимо, прообрази всіх підмножин $G \in S_X$ належать до простору подій S, тобто $X^{-1}(G) \in S$, коли $G \in S_X$, а тому функція $X(E)$, $E \in \Omega$, є S/S_X-вимірною, тобто S/S_X-випадковою величиною.

Таким чином на сукупності
$$S_X = \{\varnothing,\ \{1\}, \{2\}, \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\}\}$$
підмножин множини $X(\Omega) = \{1,\ 2,\ 3\}$ визначено ймовірнісну міру $P^*_{nX}(G)$, $G \in S_X$. Очевидно S_X задовольняє вимоги 1_s-3_s, а $P^*_{nX}(G)$, $G \in S_X$, задовольняє вимоги 1_p-3_p стосовно S_X:

1_p. $P^*_{nX}(A) \geq 0$, $G \in S_X$.

2_p. Якщо $G_i \in S_X$, $i \in 1,2,3,\ldots$, $G_i G_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то
$$P^*_{nX}(\bigcup_i G_i) = \sum_i P^*_{nX}(G_i)\ .$$

3_p. $P^*_{nX}(\Omega_X) = 1$.

Тому $(\Omega_X,\ S_X,\ P^*_{nX})$ є ймовірнісним простором.

Зауважимо, що коли в наведеному прикладі замість розглянутої сукупності S_X обрати сукупність
$$S_X^{(1)} = \{\varnothing, \{1,2\}, \{3\}, \Omega_X\}\text{, або } S_X^{(2)} = \{\varnothing, \{1\}, \{2,3\}, \Omega_X\}\ ,$$
$$\text{або } S_X^{(3)} = \{\varnothing, \{2\}, \{1,3\}, \Omega_X\} \text{ тощо,}$$
кожна з яких входить до S_X, тобто $S_X^{(i)} \subset S_X$, то очевидно розглядувана функція $X(E)$, $E \subset \Omega$, буде і $S/S_X^{(1)}$-вимірною, і $S/S_X^{(2)}$-вимірною, і $S/S_X^{(3)}$-вимірною і т.д., а також

S / S_X-вимірною. Це надає можливість обирати різні сукупності S_X залежно від конкретних умов і потреб.

Приклад 3.1.5. Нехай ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) той самий, що і в попередньому прикладі, а на множині $\Omega = \{"1","2","3","4","5","6"\}$ задано функцію $X(E)$ наступним чином: $X(E) = 1$, якщо $E \in \{"1","3","5"\}$, тобто якщо на верхній грані кубика випадає непарна цифра, і $X(E) = 2$, якщо $E \in \{"2","4","6"\}$, тобто якщо на верхній грані кубика випадає парна цифра (Рис. 3.1.5).

В цьому випадку $X(\Omega) = \Omega_X = \{1, 2\}$.

Розглянемо таку найширшу сукупність S_X підмножин множини $X(\Omega) = \{1,2\}$: $S_X = \{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$.

Оскільки $X^{-1}(\{1\}) = \{"1","3","5"\} \overline{\in} S$, так само, як і $X^{-1}(\{2\}) = \{"2","4","6"\} \overline{\in} S$, то в даному прикладі функція $X(E)$, задана на множині $\Omega = \{"1","2","3","4","5","6"\}$, не є S / S_X-вимірною відносно так заданих S_X і (Ω, S, P), тобто не є S / S_X-випадковою величиною. Для так заданої функції $X(E)$, $E \in \Omega$, на заданому ймовірнісному просторі (Ω, S, P_n^*) неможливо визначити статистичну ймовірність (відносну частоту)

$$P_{nX}^*(\{1\}) = P_n^*(X^{-1}(\{1\})) = P_n^*(\{"1","3","5"\}) \text{ чи}$$

$$P_{nX}^*(\{2\}) = P_n^*(X^{-1}(\{2\})) = P_n^*(\{"2","4","6"\}),$$

бо множини

$$X^{-1}(\{1\}) = \{"1","3","5"\} \overline{\in} S \text{ і } X^{-1}(\{2\}) = \{"2","4","6"\} \overline{\in} S$$

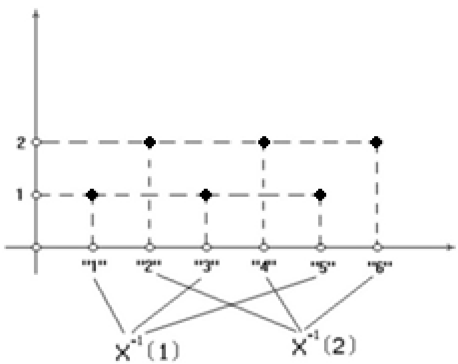


Рис. 3.1.5

виявляються невимірними відносно заданої на S ймовірнісної міри $P_n^*(A)$, $A \in S$, і статистичні ймовірності попадання в такі підмножини за заданих умов визначити неможливо.

Зауважимо, що коли в останньому прикладі розглянути таку сукупність S_{1X} підмножин множини $X(\Omega)$: $S_{1X} = \{\varnothing, \{1,2\}\}$, тоді функція $X(E)$, $E \in \Omega$, виявляється S/S_{1X}-вимірною, бо $X^{-1}(\varnothing) = \varnothing \in S$, $X^{-1}(\{1,2\}) = \Omega \in S$ і

$$P_{nX}^*(\varnothing) = P_n^*(X^{-1}(\varnothing)) = P_n^*(\varnothing) = 0,$$

$$P_{nX}^*(\{1,2\}) = P_n^*(X^{-1}(\{1,2\})) = P_n^*(\Omega) = 1.$$

Оскільки значення $X(E)$ належить до множини $G \in S_X$ лише тоді, коли $E \in X^{-1}(G) \in S$, то статистична ймовірність $P_{nX}^*(G)$ попадання значень $X(E)$ у множину $G \in S_X$ дорівнює статистичній ймовірності $P_n^*(X^{-1}(G))$ попадання елементарних подій $E \in \Omega$ у множину $X^{-1}(G) \in S$, тобто $P_{nX}^*(G) = P_n^*(X^{-1}(G))$.

Приклад 3.1.6. Нехай $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $S = \{\varnothing,\ \Omega,\ \{1, 2, 3, 4\},$ $\{5\},\ \{6\},\ \{1, 2, 3, 4, 5\},\ \{1, 2, 3, 4, 6\},\ \{5, 6\}\}$, а $X(E) = 1$, коли $E \in \{1, 2\}$, $X(E) = 2$, коли $E \in \{3, 4\}$, $X(E) = 3$, коли $E \in \{5, 6\}$. Тоді $\Omega_X = \{1, 2, 3\}$.

Знайдемо сукупність $\widetilde{S}_X$ підмножин G множини Ω_X таку, що матиме місце $X^{-1}(G) \in S$ для кожного $G \in \widetilde{S}_X$, тобто $\widetilde{S}_X = \{G \subset \Omega_X : X^{-1}(G) \in S\}$.

Оскільки

$$X^{-1}(1) = \{1, 2\} \overline{\in} S,\ X^{-1}(2) = \{3, 4\} \overline{\in} S,\ X^{-1}(3) = \{5, 6\} \in S,$$

$$X^{-1}(\{1, 2\}) = X^{-1}(1) \bigcup X^{-1}(2) = \{1,2, 3, 4\} \in S,$$

то $\widetilde{S}_X = \{\varnothing, \Omega_X, \{1, 2\}, \{3\}\}$.

Таким чином, дана функція є $S/\widetilde{S}_X$-вимірною, тобто $S/\widetilde{S}_X$-випадковою величиною. Для даної функції існує єдиний нетривіальний простір $S_X = \widetilde{S}_X$, для якого функція $X(E)$, $E \in \Omega$, є S/S_X-вимірною. При цьому $S_X = \widetilde{S}_X$ не співпадає із найширшою сукупністю підмножин множини Ω_X.

Приклад 3.1.7. Нехай $\Omega = \bigcup_{i=1}^{6} H_i$, $H_i H_j = \varnothing$, $i \neq j$ (Рис. 3.1.6), простір подій $S = \{\varnothing, H_1, ..., H_6, H_1 + H_2, ..., \Omega\}$ – породжений поділом множини Ω на підмножини H_i, $i \in \overline{1,6}$, $P_n^*(H_i)$, $i \in \overline{1,6}$, – задані.

Нехай на множині Ω задана кусково-стала функція $X_1(E)$, $E \in \Omega$: $X_1(\Omega) = \Omega_{X_1} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, яка на кожній із множин H_i набуває сталого значення (Рис. 3.1.6).

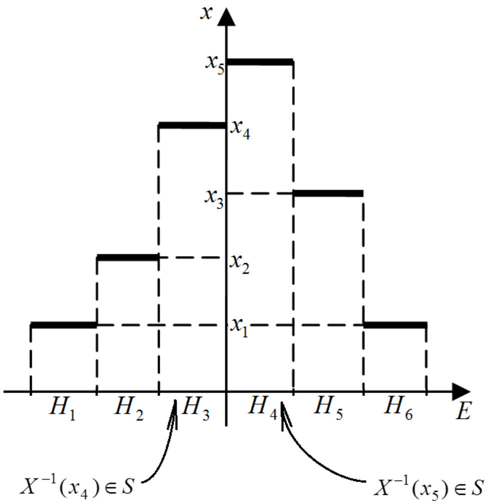


Рис. 3.1.6

Оскільки прообрази всіх елементів x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 множини Ω_{X_1}: $X_1^{-1}(x_1) = H_1 \cup H_6$, $X_1^{-1}(x_2) = H_2$, $X_1^{-1}(x_3) = H_5$, $X_1^{-1}(x_4) = H_3$, $X_1^{-1}(x_5) = H_4$ належать до породженої підмножинами H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6 сукупності S підмножин множини Ω, то можна визначити статистичні ймовірності попадання в множини $\{x_1\}$, $\{x_2\}$, $\{x_3\}$, $\{x_4\}$, $\{x_5\}$, а тому і в будь-які підмножини множини Ω_{X_1}, звідки слідує, що функція $X_1(E)$, $E \in \Omega$, буде S/S_{X_1}-вимірною, тобто S/S_{X_1}-випадковою величиною при будь-якому S_{X_1}, що задовольняє вимоги $1_s - 3_s$.

Нехай S_{X_1} – найширша сукупність підмножин множини Ω_{X_1}, тобто S_{X_1} містить всі підмножини множини Ω_{X_1} (разом з $\varnothing$ і Ω_{X_1}).

Тоді оскільки $X_1^{-1}(G) \in S$ для довільного $G \in S_{X_1}$, $G \subset \Omega_{X_1}$, то така функція $X_1(E)$, $E \in \Omega$, є S / S_{X_1}-вимірною, тобто S / S_{X_1} -випадковою величиною.

Очевидно, існують і інші сукупності S_{X_1} підмножин множини Ω_{X_1}, для яких функція $X_1(E)$ буде S / S_{X_1}-вимірна, наприклад,

$$S_{X_1} = \{\varnothing, H_1, H_2 + H_3 + H_4 + H_5 + H_6, \Omega_{X_1}\},$$

$$S_{X_1} = \{\varnothing,\ H_1 + H_2 + H_3,\ H_4 + H_5 + H_6, \Omega_{X_1}\} \text{ і т.д.}$$

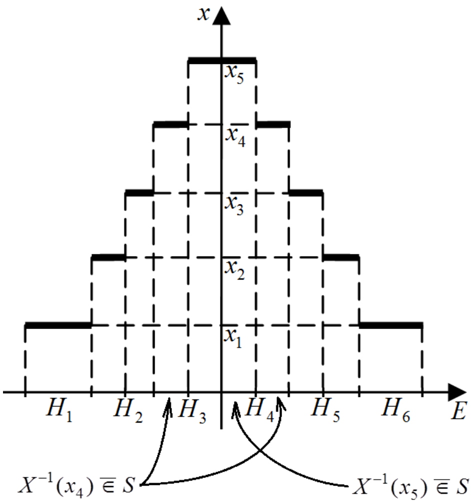


Рис. 3.1.7

Приклад 3.1.8. Нехай, як і в попередньому прикладі, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{6} H_i$, $H_i H_j = \varnothing$, $i \neq j$, $S = \{\varnothing, H_1, ..., H_6, H_1 + H_2, ..., \Omega\}$ – породжена поділом множини Ω на підмножини H_i, $i \in \overline{1,6}$, $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{6} H_i = \Omega$, $P_n^*(H_i)$, $i \in \overline{1,6}$, – задані.

Нехай на множині Ω задана кусково-стала функція $X_2(E)$, $E \in \Omega$, графік якої подано на Рис. 3.1.7 (функція $X_2(E)$ не набуває сталих значень на кожній із множин H_i). При цьому $X_2(\Omega)=\Omega_{X_2}=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}=\Omega_{X_1}$, тобто множина Ω_{X_2} значень функції $X_2(E)$, $E\in\Omega$, така сама, як і множина Ω_{X_1} значень функції $X_1(E)$, $E\in\Omega$, із прикладу 3.1.7.

Нехай як і раніше, S_{X_2} – найширша сукупність підмножин множини Ω_{X_2}, тобто містить всі підмножини множини Ω_{X_2} (разом з $\varnothing$ і Ω_{X_2}).

Оскільки прообрази елементів x_2, x_3, x_4, x_5 складаються з інтервалів, які не входять до сукупності *S*, породженої інтервалами H_1, H_2, H_3, H_4, H_5, H_6, то неможливо визначити статистичні ймовірності попадання в множини $\{x_2\}$, $\{x_3\}$, $\{x_4\}$, $\{x_5\}$, які входять до S_{X_2}, а тому функція $X_2(E)$ не є S/S_{X_2}-вимірна.

Разом з тим, якщо обрати S_{X_2} так:

$$S_{X_2}=\{\varnothing,\{x_1\},\{x_2,x_3\},\{x_4,x_5\},\{x_1\}\bigcup\{x_2,x_3\},\{x_1\}\bigcup\{x_4,x_5\},$$
$$\{x_2,x_3\}\bigcup\{x_4,x_5\},\{x_1\}\bigcup\{x_2,x_3\}\bigcup\{x_4,x_5\}=\Omega_{X_2}\},$$

тоді прообрази всіх елементів так заданого S_{X_2} належатимуть до *S*, а тому в такому разі можна визначити статистичні ймовірності попадання в підмножини $G\in S_{X_2}$:

$$P^*_{nX_2}(\{x_1\})=P^*_n(X_2^{-1}(\{x_1\}))=P^*_n(H_1\bigcup H_6)=P^*_n(H_1)+P^*_n(H_6),$$
$$P^*_{nX_2}(\{x_2,x_3\})=P^*_n(X_2^{-1}(\{x_2,x_3\}))=P^*_n(H_2\bigcup H_5)=P^*_n(H_2)+P^*_n(H_5),$$
$$P^*_{nX_2}(\{x_4,x_5\})=P^*_n(X_2^{-1}(\{x_4,x_5\}))=P^*_n(H_3\bigcup H_4)=P^*_n(H_3)+P^*_n(H_4).$$

Очевидно, існують і інші сукупності S_{X_2} підмножин множини Ω_{X_2}, для яких функція $X_2(E)$ буде S/S_{X_2}-вимірна. Якщо позначити $\{x_1\}=\widetilde{H}_1$, $\{x_2,x_3\}=\widetilde{H}_2$, $\{x_4,x_5\}=\widetilde{H}_3$, тоді задаючи сукупності S_{X_2} у вигляді $S_{X_2}=\{\varnothing,\widetilde{H}_1,\widetilde{H}_2+\widetilde{H}_3,\Omega\}$, $S_{X_2}=\{\varnothing,\widetilde{H}_1+\widetilde{H}_2,\widetilde{H}_3,\Omega\}$ і т.д., будемо щоразу одержувати S/S_{X_2}-вимірну функцію $X_2(E)$, $E\in\Omega$.

Приклад 3.1.9. Нехай $\Omega=\bigcup\limits_{i=1}^{k}H_i$, $H_iH_j=\varnothing$, коли $i\neq j$, $S-$

породжена поділом множини Ω на підмножини H_i, $P_n^*(H_i)$ задані. Нехай задано функцію $X(E)$, $E \in \Omega$, $\Omega_X = X(\Omega)$, $H_{iX} = X(H_i)$. Якщо відображення X: $\Omega \to \Omega_X$ взаємнооднозначне, тоді як S_X можна обрати сукупність, породжену образами H_{iX} множин H_i, $H_{iX} = X(H_i)$. Зрозуміло, що в такому разі для довільного $G \in S_X$, $G = \bigcup_{i \in I} H_{iX}$, $I \subset \{1, 2, \ldots, k\}$, буде

$$X^{-1}(G) = X^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} H_{iX}\right) = \bigcup_{i \in I} X^{-1}(H_{iX}) = \bigcup_{i \in I} H_i \in S,$$

і тому функція $X(E)$, $E \in \Omega$, при так заданих S і S_X буде S / S_X-вимірна, тобто S / S_X-випадкова величина (Рис. 3.1.8).

При цьому $P_{nX}^*(G) = P_n^*(X^{-1}(G)) = P_n^*\left(\bigcup_{i \in I} H_i\right) = \sum_{i \in I} P_n^*(H_i)$.

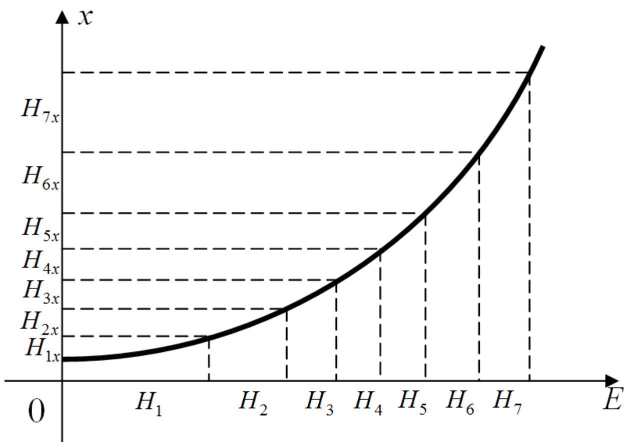


Рис. 3.1.8

Очевидно, виходячи із так побудованого простору S_X, як і раніше, можна побудувати і інші сукупності $\widetilde{S}_X$ підмножин множини Ω_X, які задовольнятимуть вимоги $1_s - 3_s$, і функція $X(E)$ також буде $S / \widetilde{S}_X$-вимірна.

Задачі

3.1.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Для будь-якої функції $X(E)$, $E \in \Omega$, кожна елементарна

подія $E \in \Omega$ має єдиний образ.

2. Для будь-якої функції $X(E) = x \in R$, $E \in \Omega$, кожне число $x \in R$ має прообраз $X^{-1}(x)$, що містить лише один елемент.

3. Якщо функція $X(E)$, $E \in \Omega = [a;b]$, є зростаючою, то прообраз $X^{-1}(x)$ містить лише один елемент для кожного $x \in X([a;b])$.

4. Якщо функція $X(E)$ визначена на просторі Ω елементарних подій, то вона є випадковою величиною.

5. Якщо простір подій S не є найширшим простором для даного простору Ω елементарних подій, то існують функція $X(E)$, $E \in \Omega$, і S_X такі, що $X(E)$ не є S / S_X-випадковою величиною.

3.1.2. Нехай $\Omega = \{Г, Ц\}$. Побудувати ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*), функцію $X(E)$, $E \in \Omega$, і S_X такі, що: а) $X(E)$ є S / S_X-випадковою величиною; б) $X(E)$ не є S / S_X-випадковою величиною.

3.1.3. Навести приклади дискретних та неперервних просторів Ω елементарних подій, відповідних імовірнісних просторів, функцій $X(E)$, $E \in \Omega$, та сукупностей S і S_X підмножин множин відповідно Ω і $\Omega_X = X(\Omega)$ таких, що $X(E)$ є S / S_X-випадковими величинами, і таких, що $X(E)$ не є S / S_X-випадковими величинами.

3.2. Розподіли статистичних ймовірностей на множинах значень випадкових величин та їх числові характеристики

Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P) і функцію $X(E)$, $E \in \Omega$, яка є S / S_X-вимірною, де S_X – деяка сукупність підмножин множини $\Omega_X = X(\Omega)$, що задовольняє вимоги 1_s-3_s.

Якщо побудовано ймовірнісний простір $(\Omega_X, S_X, P_{nX}^*)$, який генерується S / S_X-випадковою величиною X за ймовірнісним простором (Ω, S, P_n^*) та сукупністю S_X підмножин множини Ω_X, що задовольняє вимоги 1_s-3_s, і тим самим для будь-якого $G \in S_X$ визначена $P_{nX}^*(G)$, тоді говорять, що задано розподіл статистичних ймовірностей (відносних частот) на множині Ω_X

значень S/S_X-випадкової величини X.

У випадку дискретного розподілу статистичних ймовірностей на множині Ω_X значень S/S_X-випадкової величини $X(E)$, $E \in \Omega$, цей розподіл можна описати за допомогою ряду розподілу статистичних ймовірностей.

Зауважимо, що у випадку, коли $\Omega_X = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$, де $x_1 < x_2 < ... < x_k$, скінченна, але число k дуже велике, наприклад $k = 10^{1000000}$, а $P^*_{nX}(\{x_i\}) = P^*_n(X^{-1}(\{x_i\}))$ виявляються практично рівними між собою, то на практиці доцільно покласти $\Omega_X = [x_1, x_k + \varepsilon)$ і поділити Ω_X на деяку практично прийнятну кількість m підмножин $H_i = [a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1, m}$, $a_0 = x_1$, $a_m = x_k + \varepsilon$, побудувати нову сукупність $\widetilde{S}_X$ підмножин множини Ω_X, породжену поділом множини Ω_X на підмножини H_i, $i \in \overline{1, m}$, і наближено вважати, що на множині значень $S/\widetilde{S}_X$-випадкової величини X задано інтервальний розподіл узагальнених статистичних ймовірностей $P^*_n(H_i)$, $i \in \overline{1, m}$, причому $P^*_n(H_i)$ рівні між собою при всіх $i \in \overline{1, m}$.

У випадку інтервального розподілу статистичних ймовірностей на множині Ω_X значень S/S_X-випадкової величини $X(E)$, $E \in \Omega$, цей розподіл можна описати за допомогою щільності $f^*_{nX}(x)$ або функції розподілу $F^*_{nX}(x)$ (див. §2.3-§2.5).

Як і раніше, можна обчислити деякі числові характеристики розподілу статистичних ймовірностей на множині Ω_X значень S/S_X-випадкової величини $X(E)$, $E \in \Omega$. При дискретному розподілі статистичних ймовірностей P^*_{nX} величину $m^*_{nX} = \sum_{i=1}^{k} x_i P^*_{nX}(\{x_i\})$ називають центром розсіювання статистичних ймовірностей на множині Ω_X значень S/S_X-випадкової величини $X(E)$, $E \in \Omega$, або *статистичним математичним сподіванням S/S_X-випадкової величини $X(E)$, $E \in \Omega$*, яке позначають також через $M^*_n[X]$.

Величину $D_n^*[X]=\sum_{i=1}^{k}(x_i - M_n^*[X])^2 P_{nX}^*(\{x_i\})$ називають *дисперсією розподілу статистичних ймовірностей на множині* Ω_X *значень* S/S_X*-випадкової величини* X.

При заданій щільності $f_n^*(x)$ розподілу узагальнених статистичних ймовірностей на множині Ω_X значень S/S_X-випадкової величини $X(E)$, $E\in\Omega$, $M_n^*[X]$ і $D_n^*[X]$ визначають за формулами

$$M_n^*[X]=\int_{\Omega_X} x\, f_{nX}^*(x)\,dx,$$

$$D_n^*[X]=\int_{\Omega_X}(x-M_n^*[X])^2 f_{nX}^*(x)\,dx.$$

Приклад 3.2.1. Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) і $X-$ індикатор (або характеристична випадкова величина) події $A\in S$, тобто

$$X(E)=\begin{cases}1, & \text{коли } E\in A,\\ 0, & \text{коли } E\in \overline{A},\end{cases}$$

Тоді $\Omega_X=\{0,1\}$. Як сукупність S_X підмножин множини Ω_X розглядатимемо таку:

$$S_X=\{G\subset\Omega_X : X^{-1}(G)\in S\}=\{\varnothing,\{0\},\{1\},\{0,1\}\}.$$

Очевидно $X(E)$, $E\in\Omega$, S/S_X-вимірна функція. При цьому ймовірнісна міра $P_{nX}^*(G)$, $G\in S_X$, на елементах сукупності S_X набуває значень:

$P_{nX}^*(\varnothing)=P_n^*(X^{-1}(\varnothing))=P_n^*(\varnothing)=0$,

$P_{nX}^*(\{0\})=P_n^*(X^{-1}(\{0\}))=P_n^*(\overline{A})$,

$P_{nX}^*(\{1\})=P_n^*(X^{-1}(\{1\}))=P_n^*(A)$,

$P_{nX}^*(\{0,1\})=P_n^*(X^{-1}(\{0,1\}))=P_n^*(X^{-1}(\{0\})\cup X^{-1}(\{1\}))=$

$=P_n^*(\overline{A}\cup A)=P_n^*(\Omega)=1$.

Ряд розподілу статистичних ймовірностей на множині Ω_X значень S/S_X-випадкової величини X в розглядуваному випадку має вигляд

x_i	0	1
$P_{nX}^*(\{x_i\})$	$P_n^*(\overline{A})$	$P_n^*(A)$

Координата $x_c = m_{nX}^*$ центра розсіювання статистичних ймовірностей на множині Ω_X значень розглядуваної S/S_X-випадкової величини X (статистичне математичне сподівання $M_n^*[X]$ або середнє значення S/S_X-випадкової величини X) дорівнює:

$$x_c = M_n^*[X] = 0 \cdot P_n^*(\overline{A}) + 1 \cdot P_n^*(A) = P_n^*(A).$$

Дисперсія розподілу статистичних ймовірностей на множині Ω_X значень розглядуваної S/S_X-випадкової величини X дорівнює

$$D_n^*[X] = \sum_{i=1}^{k} (x_i - M_n^*[X])^2 P_{nX}^*(\{x_i\}),$$

тобто

$$D_n^*[X] = (0 - P_n^*(A))^2 \cdot P_n^*(\overline{A}) + (1 - P_n^*(A))^2 \cdot P_n^*(A) = (P_n^*(A))^2 \cdot P_n^*(\overline{A}) +$$
$$+ (P_n^*(\overline{A}))^2 \cdot P_n^*(A) = P_n^*(A) \cdot P_n^*(\overline{A})(P_n^*(A) + P_n^*(\overline{A})) = P_n^*(A) P_n^*(\overline{A}).$$

Приклад 3.2.2. Нехай $\Omega = [-1,1) \subset R^1$ поділено на досить велику (однак практично прийнятну) кількість $2k$ досить дрібних проміжків $H_i = [a_{i-1}, a_i)$, однакової міри (довжини) $m(H_i) = \frac{1}{k}$, де $a_{i-1} = -1 + \frac{1}{k}(i-1)$, $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Як простір подій S розглядатимемо всеможливі об’єднання $\bigcup_{i \in I} H_i$, $I \subset \{1, 2, \ldots, 2k\}$, разом з порожньою множиною, тобто $\varnothing \in S$, $\bigcup_{i \in I} H_i \in S$, $I \subset \{1, 2, \ldots, 2k\}$, $\Omega = \bigcup_{i=1}^{2k} H_i \in S$. Нехай проведено досить велику серію із n випробувань, в результаті яких виявилось $P_n^*(H_i) = \frac{1}{2k}$ і тому

$$f_n^*(E) = \frac{P_n^*(H_i)}{m(H_i)} = \frac{1}{2}, \ E \in H_i,$$

для всіх $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, тобто $f_n^*(E) = \frac{1}{2}$, $E \in [-1, 1]$.

Тоді можна вважати, що ймовірнісна міра P_n^* задана на S щільністю розподілу статистичних ймовірностей відносно геометричної міри (довжини) підмножин множини Ω (складених із проміжків H_i):

$$f_n^*(E) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{коли } E \in [-1, 1), \\ 0, & \text{коли } E \overline{\in} [-1, 1). \end{cases}$$

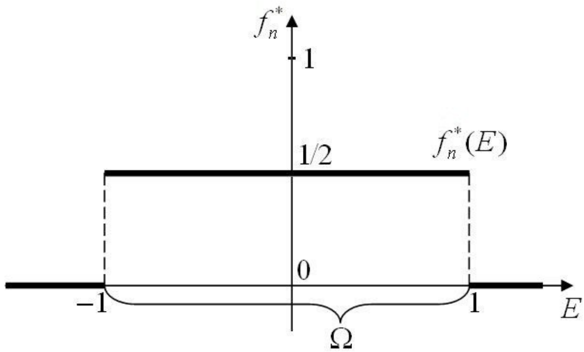


Рис. 3.2.1

При цьому статистичні ймовірності попадання в підмножини (складені із проміжків H_i) $\Delta_i = \bigcup_{H_i \subset \Delta_i} H_i$ і $\Delta_j = \bigcup_{H_i \subset \Delta_j} H_i$ однакової геометричної міри (довжини)

$$m(\Delta_i) = \sum_{H_i \subset \Delta_i} m(H_i) = m(\Delta_j) = \sum_{H_i \subset \Delta_j} m(H_i)$$

виявляються однаковими

$$P_n^*(\Delta_i) = \int_{\Delta_i} f_n^*(E) P(dE) = \frac{1}{2} m(\Delta_i) =$$

$$= P_n^*(\Delta_j) = \int_{\Delta_j} f_n^*(E) P(dE) = \frac{1}{2} m(\Delta_j).$$

Це означає, що розподіл статистичних ймовірностей на множині $\Omega = [-1, 1]$ за проміжками H_i є рівномірним. Графік функції $f_n^*(E)$ подано на Рис. 3.2.1.

Нехай на Ω задано функцію $X(E)$, яка на множинах H_i

набуває сталих значень c_i, $i \in \{1, 2, ..., 2k\}$, серед яких можуть бути однакові, а різних між собою є m значень, нехай це будуть c_1, c_2, …, c_m. Тоді $\Omega_X = \{c_1, c_2, ..., c_m\}$. Як сукупність S_X будемо розглядати найширшу сукупність підмножин множини Ω_X, тобто разом з порожньою множиною $\varnothing$ до сукупності S_X віднесемо всі одноелементні підмножини $\{c_1\}$, $\{c_2\}$, …, $\{c_m\}$ множини Ω_X, всі двохелементні підмножини $\{c_1, c_2\}$, $\{c_1, c_3\}$, …, $\{c_{m-1}, c_m\}$, всі триелементні підмножини, і т.д., всі $(m-1)$-елементні підмножини, а також m-елементну множину $\{c_1, c_2, ..., c_m\} = \Omega_X$. Очевидно, функція $X(E)$ при так заданих S і S_X буде S / S_X-вимірною, тобто S / S_X-випадковою величиною.

При цьому статистична ймовірність появи значення c_j дорівнює статистичній імовірності попадання елементарних подій $E \in \Omega$ в об'єднання множин H_i, на яких функція $X(E)$ набуває такого значення, тобто

$$P_{nX}^*(\{c_j\}) = P_n^*(X^{-1}(\{c_j\})) = P_n^*\left(\bigcup_{X(E)=c_j,\, E \in H_i} H_i \right), \; j \in \{1, 2, ..., m\},$$
$$i \in \{1, 2, ..., 2k\}.$$

Оскільки $P_{nX}^*(\{c_j\})$ визначено для кожного $c_j \in \Omega_X$, $j \in \{1, 2, ..., m\}$, то тим самим визначено розподіл статистичних ймовірностей на множині Ω_X. При цьому для довільного $A \in S_X$, $A = \bigcup_{i \in I} \{c_i\} \subset \Omega_X$, $I \subset \{1, 2, ..., m\}$, будемо мати

$$P_{nX}^*(A) = \sum_{i \in I} P_{nX}^*(\{c_i\}) = \sum_{i \in I} P_n^*(X^{-1}(\{c_i\})).$$

Статистичне математичне сподівання $M_n^*[X]$ випадкової величини $X(E)$, $E \in \Omega$, в розглядуваному випадку буде рівним:

$$M_n^*[X] = \sum_{j=1}^{m} c_j P_{nX}^*(\{c_j\}) = \sum c_j P_n^*\left(\bigcup_{X(E)=c_j,\, E \in H_i} H_i \right).$$

Враховуючи, що на різних множинах H_i функція $X(E)$ може набувати одного і того самого значення, останню рівність можна подати у вигляді

$$M_n^*[X]=\sum_{i=1}^{2k} c_i P_n^*(H_i)=\sum_{i=1,\,E\in H_i}^{2k} X(E) f_n^*(E) m(H_i),$$

або, враховуючи, що $\Omega=[-1,1)$, $f_n^*(E)=\dfrac{1}{2}$, коли $E\in\Omega$, а також, що $m(H_i)=\dfrac{1}{k}$, $i\in\overline{1,2k}$, остаточно одержуємо

$$M_n^*[X]=\sum_{i=1}^{2k} c_i\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{k}=\frac{1}{2k}\sum_{i=1}^{2k} c_i\ ,$$

де c_i – значення, якого набуває функція $X(E)$ на множині H_i.

Приклад 3.2.3. Нехай $\Omega_X=\{x_1,x_2,...,x_r\}$, $x_i<x_{i+1}$, $i\in\overline{1,r-1}$, $r=10^{100000000}$, і нехай статистичні ймовірності $P_n^*(\{x_i\})$ рівні між собою: $P_n^*(\{x_i\})=10^{-100000000}$, $i\in\{1,2,...,r\}$. Крім того нехай виявилось, що в проміжки однакової довжини, які є частинами проміжка $[x_1,x_r)$ попадає приблизно однакова кількість точок x_i, $i\in\overline{1,r}$. Поділимо проміжок $[x_1,x_r)$ на 50 проміжків однакової довжини, $j\in\{1,2,...,50\}$, $\tilde{x}_0=x_1$, $\tilde{x}_{50}=x_r$. Тоді, оскільки припускається, що $P_n^*(\{x_i\})$ рівні між собою, природно вважати, що $P_n^*([\tilde{x}_{j-1},\tilde{x}_j))=\dfrac{1}{50}$ і що центри розсіювання статистичних ймовірностей на проміжках $[\tilde{x}_{j-1},\tilde{x}_j)$ для всіх $j\in\{1,2,...,50\}$ знаходяться посередині цих проміжків, тобто в точках $x_c^{(j)}=\dfrac{\tilde{x}_{j-1}+\tilde{x}_j}{2}$ (див. §2.6). Тоді природно покласти

$$M_n^*[X]=\sum_{j=1}^{50} x_c^{(j)} P_n^*([\tilde{x}_{j-1},\tilde{x}_j))=\frac{1}{50}\sum_{j=1}^{50}\frac{\tilde{x}_{j-1}+\tilde{x}_j}{2}\,.$$

Оскільки всі сусідні точки $x_c^{(j)}$ рівновіддалені між собою на віддаль $\dfrac{1}{50}\cdot(\tilde{x}_{50}-\tilde{x}_0)$, то $\sum_{j=1}^{50}\dfrac{\tilde{x}_{j-1}+\tilde{x}_j}{2}$ є сума 50 членів арифметичної прогресії з першим членом $a_1=\dfrac{\tilde{x}_0+\tilde{x}_1}{2}$ і різницею $\dfrac{1}{50}(\tilde{x}_{50}-\tilde{x}_0)$. Тому останній член прогресії a_{50} дорівнює

$a_{50} = \frac{\tilde{x}_0 + \tilde{x}_1}{2} + \frac{49}{50}(\tilde{x}_{50} - \tilde{x}_0)$. Нагадаємо, що сума k членів арифметичної прогресії з першим членом a_1, різницею d, останнім членом $a_k = a_1 + (k-1)d$, дорівнює $S = \frac{a_1 + a_k}{2} \cdot k$.

Тому сума членів вказаної арифметичної прогресії дорівнює

$$S = \sum_{j=1}^{50} \frac{\tilde{x}_{j-1} + \tilde{x}_j}{2} = \frac{a_1 + a_{50}}{2} \cdot 50 =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 50\left(\frac{\tilde{x}_0 + \tilde{x}_1}{2} + \frac{\tilde{x}_0 + \tilde{x}_1}{2} + \frac{49}{50}(\tilde{x}_{50} - \tilde{x}_0) \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 50(\tilde{x}_0 + \tilde{x}_1 + \frac{49}{50}(\tilde{x}_{50} - \tilde{x}_0)) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 50\left(\tilde{x}_0 + \tilde{x}_0 + \frac{\tilde{x}_{50} - \tilde{x}_0}{50} + 49 \cdot \frac{\tilde{x}_{50} - \tilde{x}_0}{50} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 50(\tilde{x}_0 + \tilde{x}_0 + (\tilde{x}_{50} - \tilde{x}_0)) = \frac{1}{2} \cdot 50(\tilde{x}_0 + \tilde{x}_{50}) = 50 \cdot \frac{\tilde{x}_0 + \tilde{x}_{50}}{2}.$$

Таким чином, $M_n^*[X] = \frac{1}{50} \sum_{j=1}^{50} \frac{\tilde{x}_{j-1} + \tilde{x}_j}{2} = \frac{\tilde{x}_0 + \tilde{x}_{50}}{2}$.

Отже, центр розсіювання статистичних ймовірностей $x_c = M_n^*[X]$ при так заданому розподілі статистичних ймовірностей на множині $\Omega_X = \{x_1, x_2, ..., x_r\}$, $r = 10^{100000000}$, знаходиться в центрі проміжка $[x_1, x_r)$.

Задачі

3.2.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. При заданих Ω, S і $X(E)$, $E \in \Omega$, існує єдина сукупність S_X підмножин множини $\Omega_X = X(\Omega)$ така, що задовольняє вимоги $1_s - 3_s$, і при цьому функція $X(E)$, $E \in \Omega$, буде S/S_X-вимірною, тобто S/S_X-випадковою величиною.

2. При заданих Ω і $X(E)$, $E \in \Omega$, існує сукупність S підмножин множини Ω така, що функція $X(E)$ буде S/S_X-вимірною при довільному S_X, що задовольняє вимоги $1_s - 3_s$.

3. Статистичне математичне сподівання S/S_X-випадкової величини $X(E)$, $E \in \Omega$, можна обчислити, не визначаючи розподіл статистичних ймовірностей на множині $\Omega_X = X(\Omega)$ значень S/S_X-випадкової величини $X(E)$, $E \in \Omega$.

3.2.2. Виконати вправи.

1. Нехай $\Omega_X = \{x_1, x_2, ..., x_r\}$ поділено на 10 підмножин H_1, H_2, H_3, …, H_{10} однакової міри $m(H_i) = \dfrac{x_r - x_1}{10}$, $x_1 = 0$, $x_r = 50$, при цьому виявилось, що статистичні ймовірності на Ω_X за підмножинами H_i розподілені так, як показано в таблиці:

H_i	H_1	H_2	H_3	H_4	H_5	H_6	H_7	H_8	H_9	H_{10}
$P^*_{nX}(H_i)$	0.03	0.04	0.08	0.10	0.40	0.20	0.07	0.04	0.03	0.01

Обчислити центр розсіювання ймовірностей на множині Ω_X, якщо на кожній з множин H_i статистичні ймовірності розподілені рівномірно. Обчислити дисперсію розподілу статистичних ймовірностей за даних умов, вважаючи розподіл дискретним на множині точок, які є центрами підмножин H_i, $i \in \{1, 2, ..., 10\}$, статистичні ймовірності попадання в які дорівнюють $P^*_{nX}(H_i)$.

2. З лука в круглу мішень, радіус якої 50 см, в тірі виконано 100 пострілів. При цьому точок влучення, віддалі яких від центра мішені не перевищували 5 см, виявилось 40, віддалей в межах від 5 см до 10 см – 20, в межах від 10 до 15 см – 10, від 15 см до 20 см – 8, від 20 до 25 – 7, від 25 до 30 – 5, від 30 до 35 – 4, від 35 до 40 – 0, від 40 до 45 – 4, від 45 до 50 – 2. Знайти статистичне математичне сподівання віддалі (усереднену віддаль) точки влучення від центра мішені, вважаючи, що в кожному інтервалі довжиною 5 см статистичні ймовірності розподілені рівномірно.

Обчислити дисперсію розподілу статистичних ймовірностей за даних умов, вважаючи розподіл дискретним на множині точок, які є центрами вказаних інтервалів, статистичні ймовірності попадання в які дорівнюють статистичним ймовірностям попадання в відповідні інтервали.

3.3. Прості випадкові величини

Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*).

Функцію $X = X(E)$, $E \in \Omega$, називають *простою випадковою величиною стосовно ймовірнісного простору* (Ω, S, P_n^*), якщо множина значень цієї функції скінченна, тобто $X(\Omega) = \Omega_X = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, $m \in N$, де числа x_i попарно різні, причому $X^{-1}(\{x_i\}) \in S$ для довільного $x_i \in \Omega_X$, $i \in \overline{1, m}$.

Із наведеного означення випливає, що проста випадкова величина є S/S_X-вимірною функцією для будь-якої сукупності S_X підмножин множини Ω_X, яка задовільняє вимоги 1_s-3_s. Зокрема S_X може бути найширшою сукупністю підмножин множини Ω_X, до якої разом з порожньою множиною і множиною Ω_X входять всі одноелементні, всі двохелементні, всі триелементні, і т.д., всі $(m$-1) -елементні підмножини множини Ω_X.

Якщо $X(E)$ і $Y(E)$, $E \in \Omega$, – прості випадкові величини стосовно ймовірнісного простору (Ω, S, P_n^*), то їх сума $Z(E) = X(E) + Y(E)$, різниця $Z(E) = X(E) - Y(E)$, добуток $Z(E) = X(E) \cdot Y(E)$, частка $Z(E) = X(E) / Y(E)$, $E \in \Omega$, – прості випадкові величини стосовно того самого ймовірнісного простору (Ω, S, P_n^*).

Справді, нехай $\Omega_X = X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$ множина значень простої випадкової величини X, $\Omega_Y = Y(\Omega) = \{y_1, y_2, ..., y_r\}$ – множина значень простої випадкової величини Y. Зрозуміло, що кількість значень величини $Z(E) = X(E) + Y(E)$, $E \in \Omega$, не перевищує $m \cdot r$. При цьому якщо випадкова величина $X(E)$ набуває значення x_j на множині $X^{-1}(x_j) \in S$, а випадкова величина $Y(E)$ набуває значення y_i на множині $Y^{-1}(y_i) \in S$, то на множині $X^{-1}(x_j) \bigcap Y^{-1}(y_i) \in S$ випадкова величина $Z(E)$ набуває значення $x_j + y_i$.

Нехай $\Omega_Z = \{z_1, z_2, ..., z_l\}$, $l \le m \cdot r$, – множина значень величини $Z(E) = X(E) + Y(E)$.

Тоді $Z^{-1}(z_k)=\bigcup\limits_{x_j+y_i=z_k}(X^{-1}(x_j)\bigcap Y^{-1}(y_i))\in S$, $k\in\overline{1,l}$.

Отже $Z(E)$ – проста випадкова величина стосовно ймовірнісного простору (Ω,S,P_n^*). Очевидно, що коли розглянути сукупність S_Z підмножин множини Ω_Z, породжену поділом множини Ω_Z на підмножини $\{z_1\}$, $\{z_2\}$, …, $\{z_k\}$, то для довільного $G\in S_Z$ буде $Z^{-1}(G)\in S$.

Аналогічно розглядаються випадки $Z(E)=X(E)-Y(E)$, $Z(E)=X(E)\cdot Y(E)$, $Z(E)=X(E)/Y(E)$, $(Y(E)\neq 0)$.

За методом математичної індукції легко довести, що сума і добуток довільної скінченної кількості простих випадкових величин $X_k(E)$, $E\in\Omega$, $k\in\overline{1,m}$, стосовно одного і того самого ймовірнісного простору (Ω,S,P_n^*) також є простою випадковою величиною стосовно того самого ймовірнісного простору (Ω,S,P_n^*).

Узагальненням цього є твердження про те, що коли $X_k(E)$, $k\in\overline{1,m}$, – прості випадкові величини стосовно одного і того самого ймовірнісного простору (Ω,S,P_n^*), то будь-яка дійсна функція $f(X_1(E),X_2(E),...,X_m(E)),E\in\Omega$, також є простою випадковою величиною стосовно того самого ймовірнісного простору (Ω,S,P_n^*), за умови, що $(X_1(E),...,X_m(E))$ належить до області визначення $D(f)$ функції f для кожного $E\in\Omega$. Зокрема, якщо $X(E)$ – проста випадкова величина стосовно ймовірнісного простору (Ω,S,P_n^*), то $X^m(E)$, $\sqrt[m]{X(E)}$ (для парного m $X(E)$ повинна бути невід'ємною), $e^{X(E)}$, $\ln X(E)$ (коли $X(E)>0$ для $E\in\Omega$), $\sin X(E)$, $|X(E)|=\sqrt{X^2(E)}$, $\cos X(E)$ тощо також є простими випадковими величинами стосовно того самого ймовірнісного простору (Ω,S,P_n^*).

Приклад 3.3.1. Нехай $\Omega=[0;1)$, $X(E)$ – індикатор події $A=[0;0{,}5)\subset\Omega=[0;1)$, $Y(E)$ – індикатор події $B=[0{,}25;1)$.

Тоді $X^{-1}(1)=A=[0;0{,}5)$, $X^{-1}(0)=\overline{A}=[0{,}5;1)$;

$$Y^{-1}(1)=B=[0{,}25;1),\ Y^{-1}(0)=\overline{B}=[0;0{,}25).$$

Якщо $Z(E)=X(E)+Y(E)$, то

а) $Z(E)=2$, коли $E \in X^{-1}(1)$ і $E \in Y^{-1}(1)$ тобто

$$Z^{-1}(2)=X^{-1}(1)\bigcap Y^{-1}(1)=[0;0,5)\bigcap[0,25;1)=[0,25;0,5).$$

б) $Z(E)=1$, коли $E \in X^{-1}(1)\bigcap Y^{-1}(0)$ або $E \in X^{-1}(0)\bigcap Y^{-1}(1)$, тобто

$$Z^{-1}(1)=(X^{-1}(1)\bigcap Y^{-1}(0))\bigcup(X^{-1}(0)\bigcap Y^{-1}(1))=$$
$$=([0;0,5)\bigcap[0;0,25))\bigcup([0,5;1)\bigcap[0,25;1))=[0;0,25)\bigcup[0,5;1).$$

в) $Z(E)=0$, коли $E \in X^{-1}(0)$ і $E \in Y^{-1}(0)$, тобто

$$Z^{-1}(0)=X^{-1}(0)\bigcap Y^{-1}(0)=[0,5;1)\bigcap[0;0,25)=\varnothing.$$

Таким чином,

$$Z(E)=X(E)+Y(E)=\begin{cases}2, \text{ коли } E\in[0,25;0,5),\\ 1, \text{ коли } E\in[0;0,25)\bigcup[0,5;1).\end{cases}$$

Задачі

3.3.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо множина $\Omega_X=X(\Omega)$ значень функції $X(E)$, $E\in\Omega$, скінченна, то функція $X(E)$ є простою випадковою величиною.

2. Твердження, обернене до 1, правильне.

3. Існують випадкові величини, що не є простими, навіть коли $\Omega_X=X(\Omega)$ скінченна множина: $\Omega_X=\{x_1,x_2,...,x_k\}$.

4. Якщо існують події $A_k\subset\Omega, k\in\overline{1,s}$, для яких $A_iA_j=\varnothing$, коли $i\neq j$, $\sum\limits_{k=1}^{s}A_k=\Omega$ і $X(E)=c_k$, коли $E\in A_k$, $k\in\overline{1,s}$, то $X(E)$, $E\in\Omega$, – проста випадкова величина.

5. Якщо $X_1(E)+X_2(E), E\in\Omega$, – проста випадкова величина, то $X_1(E)$ і $X_2(E)$ – прості випадкові величини.

6. Твердження, обернене до 5, є правильним.

7. Для будь-якої простої випадкової величини $X(E)$ стосовно ймовірнісного простору (Ω,S,P_n^*) функція $Y(E)=\sqrt{X(E)}$ є простою випадковою величиною стосовно того самого ймовірнісного простору.

3.4. Числові характеристики розподілів статистичних ймовірностей на множинах значень простих випадкових величин

Нехай задано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*) та просту випадкову величину $X(E)$, $E \in \Omega$, стосовно цього простору (Ω, S, P_n^*), множина значень якої $\Omega_X = X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$. Тоді за означенням *статистичним математичним сподіванням* $M_n^*(X)$ та *статистичною дисперсією* $D_n^*(X)$ розподілу статистичних ймовірностей на множині значень цієї випадкової величини є числа:

$$M_n^*[X] = \sum_{k=1}^{m} x_k P_{nX}^*(\{x_k\}) = \sum_{k=1}^{m} x_k P_n^*(X^{-1}(x_k)), \quad (3.4.1)$$

$$D_n^*[X] = M_n^*[(X - M_n^*[X])^2] = \sum_{k=1}^{m} (x_k - M_n^*[X])^2 P_{nX}^*(\{x_k\}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} (x_k - M_n^*[X])^2 P_n^*(X^{-1}(x_k)). \quad (3.4.2)$$

Число $M_n^*[X]$ називають також *середнім статистичним значенням* простої випадкової величини X, а число $D_n^*[X]$ – *мірою розсіювання* (або *скупченості*) статистичних ймовірностей на множині значень простої випадкової величини навколо середнього статистичного значення.

Очевидно, $D_n^*[X] \le (\max\limits_{1 \le k \le m} x_k - \min\limits_{1 \le k \le m} x_k)^2$.

Приклад 3.4.1.

1. Якщо $X(E) = c$, $E \in \Omega$, – стала випадкова величина, то $\Omega_X = X(\Omega) = \{c\}$, $X^{-1}(c) = \Omega$, $P_n^*(X^{-1}(c)) = P_n^*(\Omega) = 1$ і тому $M_n^*[c] = c \cdot 1 = c$, $D_n^*[c] = M_n^*[(c-c)^2] = M_n^*[0] = 0$.

2. Якщо $X(E)$, $E \in \Omega$, – індикатор події A, то $\Omega_X = X(\Omega) = \{1, 0\}$, $X^{-1}(1) = A$, $X^{-1}(0) = \overline{A}$, $P_n^*(X^{-1}(1)) = P_n^*(A) = p$, $P_n^*(X^{-1}(0)) = P_n^*(\overline{A}) = 1 - p$.

Тому

$$M_n^*[X] = 1 \cdot p + 0 \cdot (1-p) = p,$$
$$D_n^*[X] = (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot (1-p) = p(1-p)(1-p+p) = p(1-p).$$

Статистичне математичне сподівання та статистична дисперсія простої випадкової величини мають такі властивості:

1. Статистичне математичне сподівання сталої дорівнює цій сталій (див. приклад 3.4.1):
$$M_n^*[c] = c.$$

2. Статистична дисперсія сталої дорівнює нулеві (див. приклад 3.4.1):
$$D_n^*[c] = 0.$$

3. Сталу можна виносити за знак статистичного математичного сподівання простої випадкової величини:
$$M_n^*[cX] = cM_n^*[X].$$

Справді, якщо $\Omega_X = X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_s\}$, а $Y(E) = cX(E)$, $E \in \Omega$, то для $c \neq 0$
$$\Omega_Y = Y(\Omega) = \{cx_1, cx_2, ..., cx_s\},\ Y^{-1}(cx_i) = X^{-1}(x_i),$$
$$P_n^*(Y^{-1}(cx_i)) = P_n^*(X^{-1}(x_i)),\ i \in \{1, 2, ..., s\},$$
тому
$$M_n^*[Y] = M_n^*[cX] = \sum_{i=1}^{s} cx_i P_n^*(Y^{-1}(cx_i)) = \sum_{i=1}^{s} cx_i P_n^*(X^{-1}(x_i)) =$$
$$= c\sum_{i=1}^{s} x_i P_n^*(X^{-1}(x_i)) = cM_n^*[X].$$

4. За знак статистичної дисперсії стала виноситься в квадраті:
$$D_n^*[cX] = c^2 D_n^*[X].$$

Справді, враховуючи властивість 3, одержимо:
$$D_n^*[cX] = M_n^*[(cX - M_n^*[cX])^2] = M_n^*[(cX - cM_n^*[X])^2] =$$
$$= M_n^*[c^2(X - M_n^*[X])^2] = c^2 M_n^*[(X - M_n^*[X])^2] = c^2 D_n^*[X].$$

5. Статистичне математичне сподівання суми простих випадкових величин відносно одного і того самого ймовірнісного простору (Ω, S, P_n^*) *дорівнює сумі їх статистичних математичних сподівань*:
$$M_n^*[X+Y] = M_n^*[X] + M_n^*[Y].$$

Справді, нехай

$$Z(E) = X(E) + Y(E),\ E \in \Omega,$$
$$\Omega_X = X(\Omega) = \{x_1,\ x_2,\ \ldots, x_s\},\ \Omega_Y = Y(\Omega) = \{y_1,\ y_2,\ \ldots, y_m\},$$
$$X^{-1}(x_j) \neq \varnothing,\ j \in \overline{1,\ s},\ Y^{-1}(y_i) \neq \varnothing,\ i \in \overline{1,\ m}.$$

Зрозуміло, що $\bigcup\limits_{j=1}^{s} X^{-1}(x_j) = \Omega$, $\bigcup\limits_{i=1}^{m} Y^{-1}(y_i) = \Omega$,

$$\left(\bigcup_{j=1}^{s} X^{-1}(x_j)\right) \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{m} Y^{-1}(y_i)\right) = \bigcup_{j=1}^{s} \bigcup_{i=1}^{m} \left(X^{-1}(x_j) \bigcap Y^{-1}(y_i)\right) = \Omega.$$

Серед множин $X^{-1}(x_j) \bigcap Y^{-1}(y_i)$, $i \in \overline{1,\ m}$, $j \in \overline{1,\ s}$, можуть бути порожні, а також такі, для яких $x_j + y_i$ однакові між собою. Розглянемо серед значень $x_j + y_i$ усі попарно різні значення. Позначимо їх через z_k, $k \in \overline{1,\ r}$, де $r \leq m \cdot s$. При цьому

$$Z^{-1}(z_k) = \bigcup_{x_j + y_i = z_k} X^{-1}(x_j) \bigcap Y^{-1}(y_i),\ k \in \overline{1,\ r},\ \bigcup_{k=1}^{r} Z^{-1}(z_k) = \Omega.$$

Оскільки

$$X^{-1}(x_j) \bigcap X^{-1}(x_{j_1}) = \varnothing, \text{ коли } j \neq j_1,$$
$$Y^{-1}(y_i) \bigcap Y^{-1}(y_{i_1}) = \varnothing, \text{ коли } i \neq i_1,$$

то

$$\left(X^{-1}(x_j) \bigcap Y^{-1}(y_i)\right) \bigcap \left(X^{-1}(x_{j_1}) \bigcap Y^{-1}(y_{i_1})\right) = \varnothing,$$

коли $i \neq i_1$ або $j \neq j_1$.

Тому

$$P_n^*(Z^{-1}(z_k)) = P_n^*\left(\bigcup_{x_j + y_i = z_k} X^{-1}(x_j) \bigcap Y^{-1}(y_i)\right) = \sum_{x_j + y_i = z_k} P_n^*\left(X^{-1}(x_j) \bigcap Y^{-1}(y_i)\right),$$

Визначаючи $M_n^*[Z]$, враховуючи, що $P_n^*\left(X^{-1}(x_j) \bigcap Y^{-1}(y_i)\right) = 0$, коли $X^{-1}(x_j) \bigcap Y^{-1}(y_i) = \varnothing$, одержимо

$$M_n^*[Z] = \sum_{k=1}^{r} z_k P_n^*(Z^{-1}(z_k)) = \sum_{k=1}^{r} z_k P_n^*\left(\bigcup_{x_j + y_i = z_k} \left(X^{-1}(x_j) \bigcap Y^{-1}(y_i)\right)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{s} (x_j + y_i)\, P_n^*\left(X^{-1}(x_j) \bigcap Y^{-1}(y_i)\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} y_i \sum_{j=1}^{s} P_n^*\left(X^{-1}(x_j) \bigcap Y^{-1}(y_i)\right) + \sum_{j=1}^{s} x_j \sum_{i=1}^{m} P_n^*\left(X^{-1}(x_j) \bigcap Y^{-1}(y_i)\right) =$$

$$=\sum_{i=1}^{m} y_i P_n^*(\bigcup_{j=1}^{s} X^{-1}(x_j)\bigcap Y^{-1}(y_i))+\sum_{j=1}^{s} x_j P_n^*(\bigcup_{i=1}^{m} X^{-1}(x_j)\bigcap Y^{-1}(y_i))=$$

$$=\sum_{i=1}^{m} y_i P_n^*(Y^{-1}(y_i)\bigcap(\bigcup_{j=1}^{s} X^{-1}(x_j)))+\sum_{j=1}^{s} x_j P_n^*(X^{-1}(x_j)\bigcap(\bigcup_{i=1}^{m} Y^{-1}(y_i)))=$$

$$=\sum_{i=1}^{m} y_i P_n^*(Y^{-1}(y_i))+\sum_{j=1}^{s} x_j P_n^*(X^{-1}(x_j))=M_n^*[Y]+M_n^*[X].$$

За методом математичної індукції можна довести, що

$$M_n^*[\sum_{i=1}^{k} X_i]=\sum_{i=1}^{k} M_n^*[X_i],\ k\in N.$$

6. Статистичне математичне сподівання лінійної комбінації простих випадкових величин X *та* Y *відносно одного і того самого ймовірнісного простору* (Ω, S, P_n^*) *дорівнює цій самій лінійній комбінації їх статистичних математичних сподівань*:

$$M_n^*[aX+bY]=aM_n^*[X]+bM_n^*[Y].$$

Ця властивість випливає із властивостей 3 та 5. За методом математичної індукції можна показати, що

$$M_n^*[\sum_{i=1}^{k} a_i X_i]=\sum_{i=1}^{k} a_i M_n^*[X_i].$$

Зокрема

$$M_n^*[aX+bY+c]=aM_n^*[X]+bM_n^*[Y]+c,$$

$$M_n^*[\sum_{i=1}^{k} a_i X_i+b]=\sum_{i=1}^{k} a_i M_n^*[X_i]+b.$$

7. Якщо $X[E]\ge 0$, $E\in\Omega$, то $M_n^*[X]\ge 0$.

Ця властивість випливає з означення статистичного математичного сподівання.

8. Якщо $X(E)\ge Y(E)$, $E\in\Omega$, де $X(E)$, $Y(E)$ – прості випадкові величини відносно одного і того самого ймовірнісного простору (Ω, S, P_n^*), то $M_n^*[X]\ge M_n^*[Y]$.

Ця властивість випливає з властивостей 6 та 7, оскільки

$$M_n^*[X-Y]=M_n^*[X]-M_n^*[Y]\ge 0.$$

Означення. Якщо X і Y – прості випадкові величини і для довільних $x_j\in X(\Omega)=\Omega_X=\{x_1, x_2, ..., x_s\}$, $j\in\overline{1,s}$, і довільних

$y_i \in Y(\Omega) = \Omega_Y = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$, $i \in \overline{1,m}$, має місце рівність $P_n^*(X^{-1}(x_j) \bigcap Y^{-1}(y_i)) = P_n^*(X^{-1}(x_j)) \cdot P_n^*(Y^{-1}(y_i))$, то прості випадкові величини X і Y називаються незалежними стосовно ймовірнісної міри P_n^*.

9. Статистичне математичне сподівання добутку незалежних простих випадкових величин X та Y відносно одного і того самого ймовірнісного простору (Ω, S, P_n^*) дорівнює добуткові їх математичних сподівань:

$$M_n^*[X \cdot Y] = M_n^*[X] \cdot M_n^*[Y].$$

Справді, нехай $Z = X \cdot Y$, $\Omega_X = X(\Omega) = \{x_1, x_2, ..., x_s\}$, $\Omega_Y = Y(\Omega) = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$, $\Omega_Z = Z(\Omega) = \{z_1, z_2, ..., z_r\}$, $r \le m \cdot s$.

Тоді

$$M_n^*[Z] = \sum_{k=1}^{r} z_k P_n^*(Z^{-1}(z_k)) = \sum_{k=1}^{r} z_k P_n^*(\bigcup_{x_j \cdot y_i = z_k} (X^{-1}(x_j) \bigcap Y^{-1}(y_i))) =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} z_k \sum_{x_j y_i = z_k} P_n^*(X^{-1}(x_j) \bigcap Y^{-1}(y_i)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} z_k \sum_{x_j y_i = z_k} P_n^*(X^{-1}(x_j)) P_n^*(Y^{-1}(y_i)) =$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \sum_{x_j y_i = z_k} x_j y_i P_n^*(X^{-1}(x_j)) P_n^*(Y^{-1}(y_i)) =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{s} x_j y_i \, P_n^*(X^{-1}(x_j)) P_n^*(Y^{-1}(y_i)) =$$

$$= \sum_{j=1}^{s} x_j P_n^*(X^{-1}(x_j)) \cdot \sum_{i=1}^{m} y_i P_n^*(Y^{-1}(y_i)) = M_n^*[X] \cdot M_n^*[Y].$$

10. Статистична дисперсія суми незалежних простих випадкових величин X та Y відносно одного і того самого ймовірнісного простору (Ω, S, P_n^*) дорівнює сумі їх дисперсій:

$$D_n^*[X + Y] = D_n^*[X] + D_n^*[Y].$$

Справді, за означенням статистичної дисперсії

$$D_n^*[X + Y] = M_n^*[(X + Y - M_n^*[X + Y])^2] =$$

$$= M_n^*[((X - M_n^*[X]) + (Y - M_n^*[Y]))^2] =$$

$$= M_n^*[(X - M_n^*[X])^2 + 2(X - M_n^*[X])(Y - M_n^*[Y]) + (Y - M_n^*[Y])^2] =$$

$$= M_n^*[(X - M_n^*[X])^2 + 2M_n^*[(X - M_n^*[X])(Y - M_n^*[Y])] +$$
$$+ M_n^*[(Y - M_n^*[Y])^2] = D_n^*[X] + D_n^*[Y],$$
оскільки
$$M_n^*[(X - M_n^*[X])(Y - M_n^*[Y])] =$$
$$= M_n^*[X \cdot Y - YM_n^*[X] - XM_n^*[Y] + M_n^*[X] \cdot M_n^*[Y]] = M_n^*[X] \cdot M_n^*[Y] -$$
$$- M_n^*[Y] \cdot M_n^*[X] - M_n^*[X] \cdot M_n^*[Y] + M_n^*[X] \cdot M_n^*[Y] = 0,$$
бо X і Y незалежні прості випадкові величини.

11. Статистична дисперсія лінійної комбінації (*з коефіцієнтами* a *і* b) *незалежних простих випадкових величин* X *та* Y *відносно одного і того самого ймовірнісного простору* (Ω, S, P_n^*) *дорівнює лінійній комбінації їх статистичних дисперсій з коефіцієнтами* a^2 *і* b^2:
$$D_n^*[aX + bY] = a^2 D_n^*[X] + b^2 D_n^*[Y].$$

Ця властивість випливає з властивостей 10 та 4.

Дана властивість має місце для лінійної комбінації будь-якої скінченної кількості попарно незалежних випадкових величин X_j відносно одного і того самого ймовірнісного простору (Ω, S, P_n^*), $j \in \overline{1, r}$:
$$D_n^* \left[\sum_{j=1}^{r} a_j X_j \right] = \sum_{j=1}^{r} a_j^2 \, D_n^*[X_j].$$

12. Якщо X *– невід'ємна проста випадкова величина відносно ймовірнісного простору* (Ω, S, P_n^*), *число* $\varepsilon > 0$ *і множина* $A_\varepsilon = \{E \in \Omega : X(E) \geq \varepsilon\}$, *то* A_ε *є подією, для якої має місце нерівність П.Л. Чебишова*:
$$P_n^*(A_\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} M_n^*[X].$$

Справді, якщо
$$\Omega_X = X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}, \text{ де } 0 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_m,$$
то для фіксованого $\varepsilon > 0$ знайдемо найменший номер n_0, для якого $x_{n_0} \geq \varepsilon$. Тоді $x_k \geq \varepsilon$, коли $k \geq n_0$, а множина $A_\varepsilon = \bigcup_{k=n_0}^{m} X^{-1}(x_k)$ є подією, бо $X^{-1}(x_k)$ події. При цьому

$$M_n^*[X] = \sum_{k=1}^{m} x_k P_n^*(X^{-1}(x_k)) \geq \sum_{k=n_0}^{m} x_k P_n^*(X^{-1}(x_k)) \geq \varepsilon \sum_{k=n_0}^{m} P_n^*(X^{-1}(x_k)) =$$

$$= \varepsilon P_n^*(\bigcup_{k=n_0}^{m}(X^{-1}(x_k)) = \varepsilon P_n^*(A_\varepsilon).$$

Отже,

$$M_n^*[X] \geq \varepsilon P_n^*(A_\varepsilon), \text{ тобто } P_n^*(A_\varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} M_n^*[X].$$

Якщо подію A_ε, яка полягає у тому, що випадкова величина X набуває значення, не меншого ніж ε, позначити через $(X \geq \varepsilon)$, тоді нерівність П.Л. Чебишова можна записати у вигляді $P_n^*(X \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon} M_n^*[X]$.

Зокрема

$$P_n^*(|X - M_n^*[X]| \geq \varepsilon) =$$

$$= P_n^*((X - M_n^*[X])^2 \geq \varepsilon^2) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} M_n^*[(X - M_n^*[X])^2] = \frac{1}{\varepsilon^2} D_n^*[X].$$

Нерівність

$$P_n^*(|X - M_n^*[X]| \geq \varepsilon) \leq \frac{D_n^*[X]}{\varepsilon^2}$$

також називають нерівністю П.Л. Чебишова.

Задачі

3.4.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. Якщо $X(E)$, $E \in \Omega$, – проста випадкова величина відносно ймовірнісного простору (Ω, S, P_n^*), то $D_n^*[X] = M_n^*[X^2] - (M_n^*[X])^2$.

2. Якщо $X(E)$ – проста випадкова величина відносно ймовірнісного простору (Ω, S, P_n^*) і $P_n^*(\{E \in \Omega : X(E) \neq c\}) = 0$ для деякої константи c, то $M_n^*[X] = c$.

3. Якщо $X(E)$ – з твердження 2, то $D_n^*[X] = 0$.

4. Для будь-яких простих випадкових величин X та Y відносно одного і того самого ймовірнісного простору (Ω, S, P_n^*) $M_n^*[X \pm Y] = M_n^*[X] \pm M_n^*[Y]$.

5. Якщо $M_n^*[X] \geq M_n^*[Y]$, то $X \geq Y$.

6. Для будь-яких простих випадкових величин X та Y відносно одного і того самого ймовірнісного простору (Ω, S, P_n^*) $D_n^*[X+Y] = D_n^*[X] + D_n^*[Y]$.

7. Нерівність Чебишова має місце для будь-якої простої випадкової величини.

3.4.2. Знайти статистичне математичне сподівання і статистичну дисперсію розподілу статистичних ймовірностей на множині значень випадкової величини X, якщо:

1. $X(E_i) = i$, коли $E_i = "i", "i" \in \{"1","2","3","4","5","6"\} = \Omega$, а $P_n^*(E_i) = \dfrac{1}{6}$, $i \in \overline{1,6}$.

2. $\Omega_X = X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5\}$, $P_n^*(x_i) = C_m^{x_i} (\dfrac{1}{2})^{x_i} (\dfrac{1}{2})^{m-x_i}$, $x_i \in \Omega_X$, $m = 5$, $i \in \{0,1,2,3,4,5\}$.

3. $\Omega_X = X(\Omega) = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $P_n^*(x_i) = \dfrac{a^{x_i}}{x_i!} e^{-a}$, $x_i \in \Omega_X$, $i \in \overline{0,10}$.

3.5. Поняття про метод статистичних випробувань (метод Монте-Карло)

Досить часто виникають задачі про визначення характеристик деяких процесів, перебіг яких не є детермінованим і залежить від випадкових факторів. Для таких задач розробляють спеціальні *імітаційні моделі* і імітуючи (як правило з використанням комп'ютера) більш чи менш точно перебіг реальних процесів, виконують спостереження за перебігом імітованих процесів. *Усереднені результати спостережень використовують для наближеного визначення шуканих характеристик досліджуваних процесів*. У цьому й полягає суть *методу статистичних випробувань*, який називають також *методом Монте-Карло.* Імітацію перебігу недетермінованих реальних процесів за допомогою імітаційних моделей називають *статистичним моделюванням*.

У деяких випадках метод Монте-Карло є єдиним, за яким можна дістати наближені розв'язки задач, які не можна проаналізувати іншими аналітичними чи чисельними методами. Якщо, наприклад, треба спроектувати мережу зв'язку (Рис. 3.5.1) так, щоб відсоток відмов запитам на обслуговування не перевищував заданого, коефіцієнт використання каналів зв'язку був не меншим заданого, час чекання в черзі на обслуговування не перевищував заданого тощо, коли відомі розподіли ймовірностей на множині випадкових моментів часу, в які надходять запити на обслуговування у кінцеві пункти, розподіли ймовірностей на множині довжин випадкових проміжків часу обслуговування запитів, то метод Монте-Карло цілком можна застосувати для розв'язування такої задачі. Метод Монте-Карло можна використати і для розв'язування багатьох задач, які детерміновані і для розв'язування яких відомі інші чисельні або аналітичні методи.

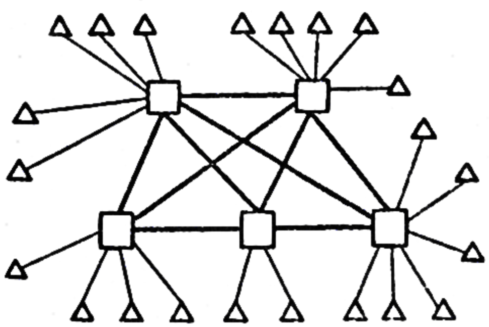


Рис. 3.5.1

Розглянемо такий приклад. Нехай потрібно обчислити площу деякої досить складної плоскої фігури G (Рис. 3.5.2, а). Вибравши відповідний масштаб, побудуємо квадрат

$$W = \{(x, y) : 0 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1\},$$

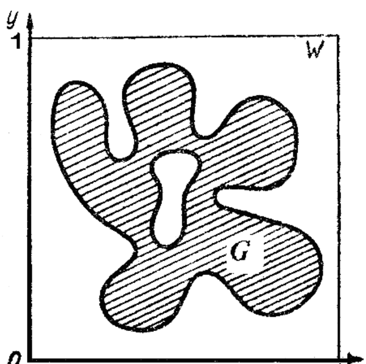


Рис. 3.5.2, а)

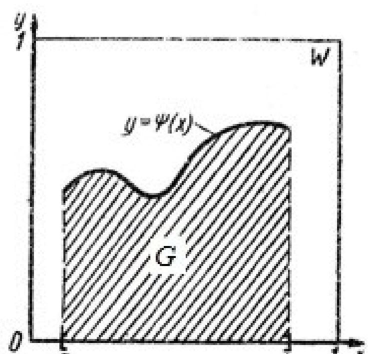


Рис. 3.5.2, б)

який повністю охоплює розглядувану фігуру. У множині W навмання вибиратимемо точки (x, y) так, щоб будь-які з таких точок були *рівноможливі*, тобто щоб розподіл статистичних ймовірностей на множині W при досить великих n був *рівномірним*.

Проведемо досить велику серію випробувань, щоразу навмання вибираючи випадкову точку (x, y) з множини W, і знайдемо статистичну ймовірність $P^*_{n\,(X,Y)}(G)$ попадання точки (x, y) в область G, що дорівнює відношенню числа випробувань, в яких точка (x, y) виявилась в області G, до числа всіх випробувань.

Внаслідок статистичних випробувань неможливо перебрати всі точки множини W, проте для досить великої вибірки можна скласти майже точне уявлення про те, яку частину відносно міри (площі) множини W становить міра (площа) підмножини G. Така частина при досить великих n практично дорівнюватиме

$$P^*_{n\,(X,Y)}(G) = \frac{k_n(G)}{k_n(W)} \approx \frac{m(G)}{m(W)}, \tag{3.5.1}$$

де $k_n(G)$ – кількість точок (x, y), що попали в множину G, $k_n(W)$ – кількість всіх точок (x, y), навмання вибраних у множині W. Тому наближено можна вважати

$$m(G) = m(W) \cdot P^*_{n\,(X,Y)}(G).$$

Розглянутий метод наближеного обчислення площі фігури можна застосовувати до наближеного обчислення визначеного інтеграла $\int\limits_a^b \psi(x)dx$ (Рис. 3.5.2, б).

Цей самий інтеграл можна обчислити за методом Монте-Карло і інакше. Розглянемо випадкову величину $Y = \psi(X)$, де аргумент X – випадкова величина з рівномірним розподілом статистичних ймовірностей на проміжку $[a, b]$, щільність якого при досить великих n з достатньою точністю можна подати у вигляді

$$f^*_{nX}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & \text{коли } x \in [a; b], \\ 0, & \text{коли } x \overline{\in} [a; b]. \end{cases}$$

Тоді (при досить великих n) з достатньою точністю має місце рівність

$$M_n^*[Y]=\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x)f_{nX}^*(x)dx=\int_a^b\psi(x)\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b\psi(x)dx.$$

Звідси

$$\int_a^b\psi(x)dx=(b-a)M_n^*[Y].$$

Остання формула є однією із форм теореми про середнє значення функції $\psi(x)$.

Оскільки наближене значення інтеграла $\int_a^b\psi(x)dx$ можна знайти також за формулою прямокутників $\int_a^b\psi(x)dx\approx\sum_{i=1}^{n}\psi(\widetilde{x}^{(i)})h$, де $h=\dfrac{b-a}{n}$, $x^{(i+1)}=x^{(i)}+h$, $i=0,1,2,\ldots,n$; $x_0=a$, $x_0+nh=b$, $\widetilde{x}^{(i)}$ – деяка точка з відрізка $[x^{(i)},x^{(i+1)}]=[x^{(i)},x^{(i)}+h]$, то наближено значення математичного сподівання $M[Y]$ випадкової величини $Y=\psi(X)$ з рівномірним розподілом статистичних ймовірностей на множині значень випадкової величини X (на відрізку $[a,b)$), з достатньою точністю при досить великому n можна знайти за формулою $M[Y]=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b\psi(x)dx\approx\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi(\widetilde{x}_i)$.

Наближене значення $M[Y]$ можна дістати і так: виконати серію n випробувань, в результаті яких спочатку вибрати навмання аргумент $x_{i\text{ сп}}\in[a,b)$, а потім дістати спостережене значення $y_{i\text{ сп}}=\psi(x_{i\text{ сп}})$ випадкової величини Y, де $x_{i\text{ сп}}$, $i\in\overline{1,n}$, – спостережені значення випадкової величини X з рівномірним розподілом ймовірностей на відрізку $[a,b]$, за якими здобуто значення $y_{i\text{ сп}}=\psi(x_{i\text{ сп}})$, $i\in\overline{1,n}$.

Тоді $M_n^*[Y]=\overline{Y}_n=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_{i\text{сп}}$, і оскільки

$$M_n^*[Y]=\overline{Y}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}y_{i\text{ сп}}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi(x_{i\text{ сп}}),$$

то

$$\int_a^b \psi(x)dx \approx M_n^*[Y]\cdot m([a,b)) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi(x_{i\ \text{сп}})$$

(порівняйте з формулою прямокутників для наближеного обчислення визначеного інтеграла $\int_a^b \psi(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n}\psi(\tilde{x}^{(i)})h$, де $h = \frac{b-a}{n}$).

Розглянемо інший приклад (задача Бюффона).

На дощату підлогу навмання кидається голка довжини l. Потрібно знайти статистичну ймовірність того, що голка падає на щілину між двома сусідніми дошками, якщо ширина дошки t, а розподіл статистичних ймовірностей на множині пар

$$W = \{(x,\varphi): -\frac{t}{2} \le x \le \frac{t}{2}, 0 \le \varphi \le \pi\},$$

за результатами досить великої серії із n випробувань виявився з достатньою точністю практично рівномірним, де x відхилення центра голки від найближчої щілини (прямої MN), φ – кут, утворений голкою з цією щілиною (Рис. 3.5.3, а). При цьому кут відлічується від додатного (зліва направо) напрямку прямої MN проти годинникової стрілки. Тоді положення голки відносно прямої MN можна охарактеризувати парою чисел (x,φ).

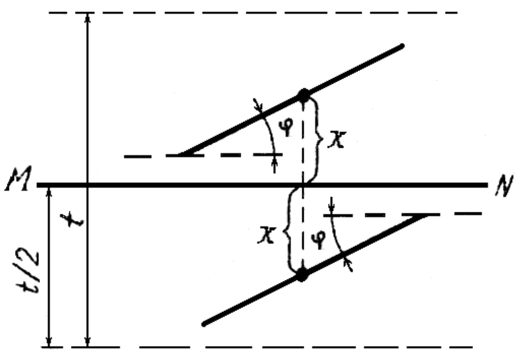


Рис. 3.5.3, а

Голка перетне щілину (пряму *MN*), якщо $|x| < \frac{l}{2}\sin\varphi$, тобто $-\frac{l}{2}\sin\varphi \le x \le \frac{l}{2}\sin\varphi$ (див. Рис. 3.5.3, а).

Нехай G – подія, яка полягає в тому, що голка перетне пряму *MN*. Множина *W* всіх можливих пар (x,φ) та множина пар (x,φ), якими визначається подія G, зображені на Рис. 3.5.3, б.

Площа фігури G дорівнює

$$2\int_0^{\pi} \frac{l}{2}\sin\varphi d\varphi = -l\cos\varphi|_0^{\pi} = 2l,$$

а площа фігури *W* дорівнює $t\pi$. Тоді, враховуючи, що

$$P^*_{n\,(X,\Phi)}(G) = \frac{k_n(G)}{k_n(W)} \approx \frac{m(G)}{m(W)},$$

дістаємо $P^*_{n\,(X,\Phi)}(G) = \frac{2l}{t\pi}$.

Якщо провести досить велику серію випробувань, у кожному з яких фіксувати, перетинає чи ні голка щілину *MN*, то відношення

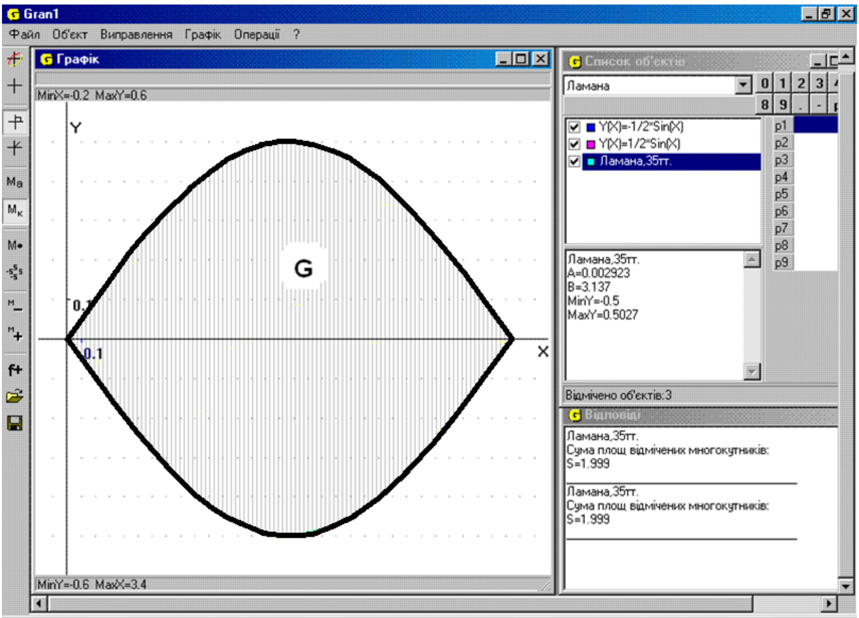


Рис. 3.5.3, б

числа m випробувань, в яких голка перетинає щілину, до числа n усіх випробувань, є статистична ймовірність події G, яка при досить великих n мало відхиляється від числа $\frac{2l}{t\pi}$, і тому при досить великому числі випробувань наближено можна вважати $\frac{m}{n} = \frac{2l}{t\pi}$. З останньої рівності зокрема одержуємо $\pi = \frac{2nl}{mt}$.

Слід зазначити, що на практиці метод Монте-Карло застосовують тоді, коли не вимагається висока точність результату, оскільки в протилежному разі доведеться виконати занадто великі серії випробувань, що іноді здійснити досить важко. Відомо, наприклад, що для того щоб збільшити точність у 10 разів, тобто дістати ще одну правильну цифру в результаті, треба збільшити кількість випробувань приблизно в 100 разів. Зрозуміло, що дуже великої точності досягти нелегко навіть за допомогою комп'ютера. Проте багато практично важливих задач можна розв'язати з достатньою точністю, застосовуючи метод статистичних випробувань.

Розглянемо задачу про визначення довжини кривої, зображеної на Рис. 3.5.4, *а.* Звичайними методами знайти довжину цієї кривої досить важко. Скористаємося методом Монте-Карло і задачею Бюффона. Якщо уявити, що пофарбована голка падала на підлогу багато разів, залишаючи щоразу на підлозі слід, то зрештою ці сліди зіллються в деяку лінію досить складної конфігурації. Якщо кидати голку n разів і вона перетне щілину m разів, то можна вважати $\frac{m}{n} = \frac{2l}{t\pi}$. Крім того, довжина L лінії, що утворилась із слідів голки при n випробуваннях, дорівнює nl.

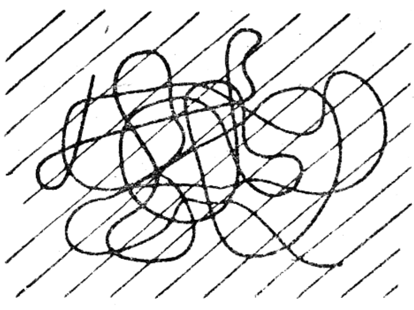


Рис. 3.5.4, а

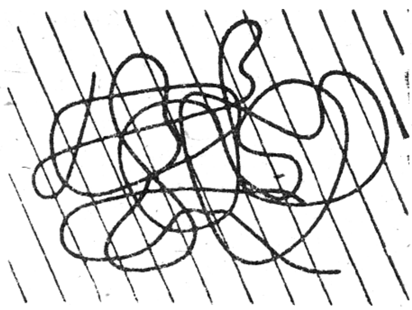


Рис. 3.5.4, б

Звідси

$$L = \frac{mt\pi}{2} \tag{3.5.2}$$

Цю формулу використовують так. На задану лінію накладають розлінований прозорий папір з нанесеними на нього паралельними лініями, відстань між якими *t*, і підраховують кількість перетинів із заданою лінією. За формулою (3.5.2) знаходять величину L. По-різному розміщуючи набір паралельних ліній (Рис. 3.5.4, б), кілька разів визначають довжину L, а за остаточний результат беруть середнє арифметичне здобутих значень.

Застосовуючи метод статистичних випробувань на практиці, треба мати можливість діставати випадкову точку M із заданим розподілом ймовірностей на деякій множині W. Цей розподіл може бути дискретним чи неперервним залежно від того, який реальний процес вивчається.

Засіб, за допомогою якого дістають значення випадкової величини X із заданим одновимірним розподілом ймовірностей, називають *генератором* (датчиком) випадкових чисел. При кожному зверненні до такого датчика дістають деяке значення випадкової величини X. Кожне звернення до датчика можна тлумачити як проведення випробування, а результати всіх цих проведень випробування – як статистичний матеріал. Датчики випадкових чисел можуть бути реалізовані у вигляді деяких фізичних приладів, а також у вигляді деяких алгоритмів для знаходження значень випадкової величини, що вивчається.

На практиці при обчисленнях за допомогою комп'ютера часто випадкові числа дістають за спеціальними досить швидкодіючими алгоритмами (такі числа називають *псевдовипадковими)*.

Щоб дістати випадкову точку з рівномірним розподілом ймовірностей на множині

$$W = \{(x, y) : x \in [0,1], y \in [0,1]\},$$

знаходять послідовно два випадкові значення за допомогою датчика випадкових чисел з рівномірним розподілом ймовірностей на відрізку $[0,1]$.

Є багато методів для знаходження псевдовипадкових чисел з різними розподілами ймовірностей (особливо з рівномірним розподілом). Сьогодні у всі мови програмування високого рівня поряд з іншими стандартними функціями ($\sin(x)$, $\cos(x)$, $\log(x)$, $\exp(x)$ і т. д.) включається й датчик випадкових чисел (функція

$rnd(x)$), що є одним із свідчень про те, наскільки важливими є для практики і які широкі застосування мають методи теорії ймовірностей та математичної статистики.

Задачі

5.3.1. Перевірити, чи правильні твердження:

1. За допомогою імітаційної моделі можна отримати точні характеристики відповідного реального процесу.
2. Метод Монте-Карло – це метод дослідження реальних процесів за допомогою імітаційних моделей.
3. Статистичне моделювання – це те саме, що й метод Монте-Карло.
4. Метод Монте-Карло застосовний лише для недетермінованих задач.
5. Генератор випадкових чисел – це засіб одержання значень, що:

   а) є довільними і ні від чого не залежними;

   б) є значеннями фіксованої випадкової величини із заданим одновимірним розподілом ймовірностей.
6. Для будь-якої дискретної випадкової величини можна побудувати генератор її значень.
7. Генератор випадкових чисел можна побудувати лише для дискретної випадкової величини.

3.6. Поняття про закон великих чисел

Інтуїтивно зрозуміло, що чим довша серія із n випробувань, за якою визначена статистична ймовірність $P_n^*(A)$ деякої події $A \subset \Omega$, $A \in S$, тим з більшою впевненістю можна стверджувати, що і в майбутніх досить довгих серіях подібних випробувань подія A відбуватиметься із відносною частотою (статистичною ймовірністю), близькою до статистичної ймовірності, визначеної за результатами досить великої кількості вже проведених випробувань.

Якщо провести досить велику кількість m досить довгих серій по n випробувань, в яких спостерігається одна і та сама подія A, і в кожній i-й серії із n випробувань визначити статистичні ймовірності $P_{ni}^*(A)$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, то в переважній більшості при досить великих n і m швидше за все статистичні ймовірності

$P^*_{ni}(A)$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$ досить мало відрізнятимуться одна від одної і зосереджуватимуться в досить малому околі деякого числа $P^*(A) \in [0,1]$.

В цьому і полягає *сутність закону великих чисел*. Найчастіше як $P^*(A)$ обирають середнє арифметичне спостережених статистичних ймовірностей $P^*_{ni}(A)$, $i \in \{1, 2, ..., m\}$, тобто покладають $P^*(A) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} P^*_{ni}(A)$.

Це число $P^*(A)$ є *узагальненою статистичною ймовірністю* випадкової події A.

Очевидно $P^*(A)$ задовольняє всі вимоги (аксіоми) щодо статистичної ймовірності, зокрема вимоги $1_p - 3_p$, а тому є ймовірнісною мірою.

Зауважимо, що узагальнені статистичні ймовірності завжди обчислюють з певною наперед заданою точністю Δ. Якщо вдається визначити $P^*(A)$ для всіх подій $A \in S$ і в межах заданої точності узгодити Ω, S і P^*, то тим самим буде побудовано ймовірнісний простір (Ω, S, P^*). Для цього ймовірнісного простору будуть правильними всі твердження, що стосуються розглянутих раніше ймовірнісних просторів (Ω, S, P^*_n), якщо в них замінити P^*_n на P^*.

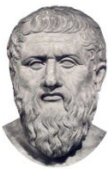
Слід підкреслити, що $P^*(A)$, $A \in S$, – *гіпотетична ймовірнісна міра, що вводиться на основі припущення, яке базується на статистичних даних* – результатах великої кількості *m* досить довгих серій по *n* випробувань. Разом з тим, ніяк неможливо довести, що в наступних випробуваннях подія *A* відбуватиметься з відносною частотою (статистичною ймовірністю), яка дорівнюватиме $P^*(A)$. Наприклад, неможливо довести, що відносна частота випадання герба при великій кількості підкидань реальної монети буде рівною $\frac{1}{2}$, що відносна частота випадання кожної грані реального грального кубика при великій кількості підкидань буде рівною $\frac{1}{6}$ і т.д.

Наведені міркування цілком узгоджуються з думкою одного з творців теорії ймовірностей Я. Бернуллі, який писав: «Що не дано нам вивести *apriori* (тобто наперед передбачити до проведення досліду), те принаймні можна дістати *aposteriori* (тобто з численних спостережень результатів подібних дослідів). Тому можна передбачити, що деяке явище згодом може відбутися у стількох же випадках, у скількох воно раніше було відмічене як таке, що відбулося за подібних умов. Цей емпіричний спосіб визначення числа випадків за спостереженнями не новий і не незвичайний, тому усі дотримуються його у повсякденній практиці».

Історичні відомості

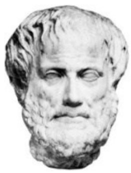
Демокріт

Проблеми дослідження випадкових явищ хвилювали людство ще у сивій давнині. Так, видатні давньогрецькі філософи *Демокріт* (460-370 р.р. до н.е.), *Платон* (428-348р.р. до н.е.), *Арістотель* (384-322 р.р. до н.е.) та інші розмірковували над неминучими та випадковими явищами. Вельми загальні висловлювання щодо випадкових явищ робили мислителі стародавніх Китаю, Індії та Близького Сходу.



Платон

Про випадкові експерименти з підки-данням гральних кубиків писали у 1220-1250 роках *Річард де Форніваль* (1200-1250), у 1487 році *Лука Пачолі* (1445-1515), у 1526 році *Джироламо Кардано* (1501-1576), у 1556 році *Ніколло Тарталья* (1449-1557), а також видатний італійський вчений *Галілео Галілей* (1564-1642), який, мабуть, першим розглянув випадкові похибки, що виникають у деяких експериментах.



Арістотель

Поняття ідеалізованого випадкового експерименту ввів у 1918 році відомий німецький математик *Ріхард Мізес* (1883-1953), а множину Ω, як модель множини наслідків випадкового випробування, і випадкову подію, як підмножину простору Ω, ввів у 1936 році видатний російський математик *Андрій Миколайович Колмогоров* (1903-1987).

Л. Пачолі

До кінця XIX століття не виникало питання про необхідність строгого математич-ного означення «випадкової події». З давніх давен математики оперували з випадковими подіями (знаходили суми подій, добутки та протилежні до них події), спираючись лише на інтуїтивне, часто досить суб'єктивне уявлення про них. Лише після того, як теорія ймо-вірностей досягла досить високого рівня застосувань, виникла потреба в її логічному обґрунтуванні. Про це свідчить, зокрема, одна із славетних математичних проблем (шоста

Д. Кардано

Н. Тарталья

Г. Галілей

Р. Мізес

А.М. Колмогоров

Д. Гільберт

С.Н. Бернштейн

проблема, пов'язана з аксіоматичним обґрунтуванням математичних теорій, включаючи теорію ймовірностей) видатного німецького математика *Давіда Гільберта* (1862-1943), сформульованих ним на II Міжнародному конгресі математиків (Париж, 1900 р.). У 1917 році відомий російський математик *Сергій Натанович Бернштейн* (1880-1968) навів чітке математичне тлумачення випадкової події як елемента так званої бульової алгебри.

Основні вимоги 1_s-3_s до сукупності S подій ввів у 1936 році Андрій Миколайович Колмогоров.

Галілео Галілей розумів сутність поняття ймовірності, як числа, від якого мало відхиляються найбільша кількість відносних частот спостережених випадкових похибок вимірювання певної величини.

У роботах англійських математиків *Джона Граунта* (1620-1675) і *Вільяма Петті* (1623-1687), опублікованих у 1662 та 1682 роках і присвячених політичній арифметиці для дослідження випадкових соціальних явищ, мабуть уперше було суттєво використано поняття відносної частоти випадкової події.

Сутність поняття статистичної ймовірності розкрита у 1693 році видатним швейцарським математиком *Якобом Бернуллі* (1654-1705), який писав: «*Що не дано нам вивести apriori* (тобто наперед передбачити до проведення досліду), *те принаймні можна дістати aposteriori*, *тобто з численних спостережень результатів подібних дослідів*. Тому *можна передбачати, що деяке явище згодом зможе відбутися у стількох же випадках, у скількох воно раніше було відмічене як таке, що відбулося за подібних умов...*».

Уявлення про правила обчислення ймовірності суми подій є вже у роботах, опублікованих у 1663 році відомим англійським астрономом *Едмондом Галлеєм* (1656-

Д. Граунт

В. Петті

Я. Бернуллі

Е. Галлей

Б. Спіноза

1742). У роботах, здійснених *Якобом Бернуллі* у 1693 році та *Миколою Бернуллі* (1687-1759) у 1718 році, сформульовано правила обчислення ймовірності протилежної події та суми подій.

Термін «ймовірність» мабуть першим використав відомий філософ *Бенедикт Спіноза* (1632–1677) у назві однієї із своїх робіт: «Допис про математичну ймовірність», проте ніякого означення ймовірності у цій роботі нема.

У своїй роботі «Книга про гру в кості» *Джероламо Кардано* кілька разів пропонував розглянути відношення m/n, яке іноді називають «класичним означенням ймовірності», проте важливість цього відношення він не помітив.

Недосконала форма «класичного означення» ймовірності введена у 1693 році *Якобом Бернуллі* у трактаті «Мистецтво припущень». Чітке «класичне означення» ймовірності з вимогою рівноможливості усіх шансів ввів у 1812 р. видатний французький вчений *П'єр Лаплас* (1749–1827) у трактаті «Аналітична теорія ймовірностей».

Видатні швейцарські вчені *Даніїл Бернуллі* (1700–1782) та *Леонард Ейлер* (1707–1782) зробили значний внесок у застосування теорії ймовірностей у демографії. Вони фактично започаткували основи сучасної демографії.

Статистичний та емпіричний підхід до формування поняття ймовірності розвинув англійський математик *Рональд Фішер* (1890–1962) та німецький математик *Ріхард Мізес*.

Після виходу книги відомого французького математика *Жозефа Бертрана* (1822–1900) «Числення ймовірностей», опублікованої у 1899 році, математики звернули увагу на недосконаліть існуючих означень ймовірності і на необхідність логічного обґрунтування теорії ймовірностей.

Визначальні властивості ймовірностей

$1_P – 3_P$ ввів у 1936 році *Андрій Миколайович Колмогоров*. Тому властивості 1_s-3_s та 1_P-3_P називають *системою аксіом теорії ймовірностей А.М. Колмогорова*.

Відомий американський математик *Уільям Феллер* (1906–1970) вважав, що у 30-х роках XX століття лише у Радянському Союзі теорія ймовірностей розвивалася як справжня математична наука, що стало можливим після створення А.М. Колмогоровим аксіоматичної теорії ймовірностей. Завдяки цьому теорія ймовірностей перейшла від етапу напівмістичних міркувань, які переважали ще у 20-х роках XX ст., до сучасного етапу розвитку.

Чітке формулювання теореми про ймовірність суми подій:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

міститься у роботі англійського математика *Томаса Байєса* (1702-1761), опублікованій лише у 1763 році. Т. Байєс по суті ввів також поняття умовної ймовірності і визначив, що

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B/A) = P(B)\cdot P(A/B).$$

Поняття незалежності подій введено англійським математиком *Абрахамом Муавром* (1667-1773), який також чітко сформулював правило знаходження ймовірності добутку подій.

Формулу повної ймовірності першим у 1795 році навів *П'єр Лаплас* у своєму трактаті «Дослід філософії теорії ймовірностей». У цьому ж трактаті він вперше навів і формулу, яку зараз називають *формулою Байєса*, проте швидше за все Байєс не знав цієї формули.

Поняття випадкової величини по суті використовували вже у 1654 році засновники теорії ймовірностей видатні французькі математики *Блез Паскаль* (1623-1662) та *П'єр Ферма* (1601-1665). Випадкові похибки вимірювань, введені *Галілео Галілеєм* у першій половині XVII століття, також є одним з


П. Лаплас


Д. Бернуллі


Л. Ейлер


Р. Фішер


Ж. Бертран


У. Феллер

Т. Байєс

А. Муавр

Б. Паскаль

П. Ферма

С. Пуассон

К. Гаусс

перших прикладів випадкових величин.

Поняття простої випадкової величини по суті введено у 1832 році відомим французьким математиком *Симоном Пуассоном* (1781-1840) в роботі «Про ймовірність середніх результатів спостережень», проте сам термін «випадкова величина» вперше зустрічається у роботах видатного російського математика *Пафнутія Львовича Чебишова* (1821-1894).

Строге означення випадкової величини ввів наприкінці 20-х років XX століття *Андрій Миколайович Колмогоров*.

По суті уявлення про розподіл ймовірностей на певній (досить простій) множині виникли ще у сивій давнині. Проте чітке розуміння сутності поняття функції розподілу ймовірностей та класифікація розподілів сформувалися лише наприкінці XIX століття і на початку XX століття після побудови строгої теорії міри (теорії вимірювання довжин, площ, об'ємів, мас тощо) завдяки працям відомих французьких математиків *Каміла Жордана* (1838-1892), *Еміля Бореля* (1871-1956) та *Анрі Лебега* (1875-1941). *Олександр Михайлович Ляпунов* (1857-1918) у 1900 році першим ввів по суті сучасне означення функції розподілу ймовірностей. Лише після того, як *Андрій Миколайович Колмогоров* побудував аксіоматичну теорію ймовірностей, стало можливим введення строгих означень, зокрема й означення функції розподілу ймовірностей.

Окремі випадки неперервних та абсолютно неперервних розподілів ймовірностей першими досліджували англійський математик *Абрахам Муавр* у 1733 році, німецький математик *Карл Гаусс* (1777-1855) у 1809 році та французький математик *П'єр Лаплас* у 1812 році. Важливі результати, пов'язані з функціями розподілу ймовірностей, належать російському математику *Пафнутію Львовичу Чебишову* та його учням *Маркову Андрію Андрійо-*

вичу (1856-1922) і *Ляпунову Олександру Михайловичу*.

Класифікація функцій розподілу ймовірностей на дискретні, неперервні, абсолютно неперервні та сингулярні зустрічається у дослідженнях багатьох математиків, які у XX столітті розвивали загальну теорію міри, фундаментальні основи якої належать французькому математику *Анрі Лебегу*.

Значні результати, пов'язані з розподілами ймовірностей, належать відомим українським математикам *Йосипові Іллічу Гіхману* (1918-1985), *Володимиру Семеновичу Королюку* (1925), *Анатолію Володимировичу Скороходу* (1930-2011), *Михайлу Йосиповичу Ядренку* (1932-2004) та іншим.

Значний вплив на розвиток основ теорії ймовірностей мав трактат видатного нідерландського вченого *Християна Гюйгенса* (1629-1695) «Про розрахунки в азартних іграх», виданий у 1657 році. У цьому трактаті вперше вводиться поняття математичного сподівання для деяких простих випадкових величин, множини значень яких складаються з двох або трьох чисел.

Микола Бернуллі у 1709 році вивчав математичні сподівання простих випадкових величин з довільною скінченною множиною значень.

Середнє квадратичне відхилення увійшло в математику завдяки працям *Галілео Галілея*, *Абрахама Муавра*, *Леонарда Ейлера*, *Карла Гаусса* та *П'єра Лапласа*.

Математичне сподівання і дисперсію довільної випадкової величини наприкінці XIX століття систематично вивчали *Пафнутій Львович Чебишов* та його учні *Андрій Андрійович Марков* та *Олександр Михайлович Ляпунов*.

П.Л. Чебишов першим довів властивості математичного сподівання суми та добутку і

К. Жордан

Е. Борель

А. Лебег

П.Л. Чебишов

О.М. Ляпунов

А.А. Марков

В.С. Королюк

Й.І. Гіхман

А.В. Скороход

М.Й. Ядренко

Х. Гюйгенс

дисперсії суми випадкових величин, проте опубліковані ці доведення лише у 1913 році у відомому підручнику *А.А. Маркова* «Числення ймовірностей». У цьому підручнику уперше введено поняття незалежних випадкових величин.

Повторні незалежні випробування та біноміальні ймовірності розглядалися ще на початку розвитку теорії ймовірностей.

Якоб Бернуллі був одним з перших, хто систематично досліджував біноміальні ймовірності. Тому його ім'ям названо формулу для обчислення біноміальних ймовірностей, а схему повторних незалежних випробувань, в кожному з яких ймовірність події *A* не змінюється, названо *схемою Бернуллі*.

Джероламо Кардано ще у першій половині XVI століття мав уявлення про закон великих чисел. Наприкінці XVII століття у роботах *Едмунда Галлея* з теорії ймовірностей зустрічаються міркування, що нагадують закон великих чисел. *Якоб Бернуллі* наприкінці XVII століття використав біноміальні ймовірності для обґрунтування закону великих чисел, проте суттєве узагальнення і обґрунтоване доведення цього закону навів у 1867 році *Пафнутій Львович Чебишов*. Саму назву «закон великих чисел» ввів у 1837 році відомий французький математик *Симон Пуассон*.

Важливі результати, пов'язані з законом великих чисел, належать французькому математику *Емілю Борелю* та російським математикам *Андрію Миколайовичу Колмогорову*, *Олександру Яковичу Хінчину* (1894-1959), *Валерію Івановичу Глівенку* (1897-1940) та *Борису Володимировичу Гнєденку* (1912-1995).

Біноміальні ймовірності використовують для проведення так званого статистичного (або вибіркового) контролю якості продукції, що випускається у великих обсягах. Пріоритет у такому практичному застосуванні теорії ймо-

О.Я. Хінчин

Б.В. Гнеденко

М.В. Остроградський

Ж. Бюффон

К. Пірсон

Е. Пірсон

вірностей належить відомому російському математику українського походження *Михайлу Васильовичу Остроградському* (1801-1862), який у 1846 році опублікував роботу, присвячену такому застосуванню.

Рівномірний дискретний розподіл ймовірностей по суті використовувався ще на початку виникнення стохастичних ідей та методів.

Геометричний розподіл ймовірностей пов'язаний із запропонованою *Якобом Бернуллі* схемою послідовних випробувань для випадку, коли ці випробування проводяться доти, поки не відбудеться дана подія.

Свій розподіл *Симон Пуассон* запропонував у 1837 році. Він також довів теорему про наближення $P(B_{n,m}) \approx e^{-a_m}\dfrac{a_n^m}{m!}$.

Рівномірний неперервний розподіл ймовірностей по суті вперше згадується у 1692 році у перекладі книги *Християна Гюйгенса* «Про розрахунки в азартних іграх». Цей розподіл суттєво використовував французький вчений *Жорж Бюффон* (1707-1788).

Систематично і ефективно рівномірний неперервний розподіл ймовірностей використовував *П'єр Лаплас*. Він у 1809 році за допомогою випадкових величин X з рівномірними розподілами ймовірностей на відрізку $[-h; h]$ довів інтегральну граничну теорему, яку задовго до нього у 1722 році довів для $p = \dfrac{1}{2}$ *Абрахам Муавр* за допомогою власної локальної граничної теореми.

Поняття ймовірнісних просторів по суті використовували вже засновники теорії ймовірностей, проте чіткі відповідні означення з'явилися лише у XX столітті після створення сучасних теорії міри та теорії ймовірностей.

Формули, пов'язані з обчисленням


Ю. Нейман

кількостей різноманітних розміщень, перестановок, сполучень вивчаються у розділі математики, який називається «Комбінаторика». Тому і згадані формули називають комбінаторними. Засновниками комбінаторики були *Блез Паскаль* і *П'єр Ферма*. Значний вклад у розвиток комбінаторики внесли *Готфрід Лейбніц*, *Якоб Бернуллі*, *Леонард Ейлер* і багато інших вчених.

Зміст

Навчальне видання

Мирослав Іванович Жалдак

Геннадій Олександрович Михалін

Іванна Михайлівна Біляй

ПОЧАТКИ СТОХАСТИКИ

Факультативний курс для учнів старшої школи