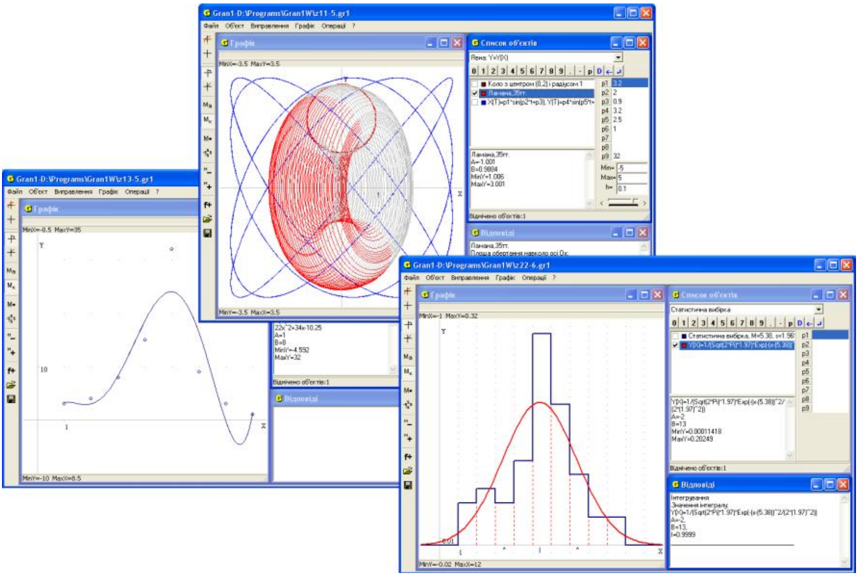
М.І. Жалдак
Ю.В. Горошко
Є.Ф. Вінниченко

МАТЕМАТИКА
З КОМП'ЮТЕРОМ



М. І. Жалдак, Ю. В. Горошко, Є. Ф. Вінниченко

Математика з комп'ютером

Посібник для вчителів

Видання третє, доповнене

Схвалено рішенням Вченої ради Національного педагогічного університету імені М.П. Драгоманова

Київ, НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2015

УДК 519.6 (075)
ББК 22.1
Ж 24

Схвалено рішенням Вченої ради Національного педагогічного
університету імені М.П. Драгоманова
(протокол №7 від 24 лютого 2015 року)

Рецензенти: д-р пед. наук, проф. В.І. Клочко;
д-р ф-м. наук, проф. М.В. Працьовитий;
д-р пед. наук, проф. Ю.В. Триус.

М.І. Жалдак, Ю.В. Горошко, Є.Ф. Вінниченко.
Ж 24 Математика з комп'ютером. Посібник для вчителів. – 3-тє вид. – К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2015. – 315 с.

У посібнику розглянуто можливості використання комп'ютера для супроводу навчання математики в середніх навчальних закладах. На численних прикладах демонструється розв'язування за допомогою комп'ютера різного роду задач з алгебри і початків аналізу, геометрії, елементів стохастики, що зводяться до відшукання розв'язків рівнянь і нерівностей та їх систем, дослідження функцій, обчислення визначених інтегралів, статистичного опрацювання експериментальних даних та ін. Посібник призначений для вчителів математики та інформатики, може бути корисний також учням старших класів, СПТУ, студентам педагогічних училищ і молодших курсів вищих навчальних закладів, де вивчається математика.

ISBN 978-966-660-542-2

УДК 519.6 (075)
ББК 22.1

Передмова

Впровадження в навчальний процес сучасних засобів пошуку, збирання, зберігання, опрацювання, подання, передавання різноманітних повідомлень відкриває широкі перспективи гуманітаризації освіти і гуманізації навчального процесу, поглиблення і розширення теоретичної бази знань і надання результатам навчання практичної значущості, активізації пізнавальної діяльності, створення умов для повного розкриття творчого потенціалу дітей з врахуванням їхніх вікових особливостей і життєвого досвіду, індивідуальних нахилів, запитів і здібностей.

Разом з тим виникає цілий ряд проблем, що стосуються змісту, методів, організаційних форм і засобів навчання, обов'язкових рівнів знань з різних навчальних предметів, яких має досягти кожна дитина.

В даному посібнику ставиться мета розкрити деякі аспекти використання засобів сучасних інформаційних технологій в процесі навчання математики в середніх навчальних закладах з різними ухилами навчання.

Разом з тим вчителю не нав'язується ніяка методика подання навчального матеріалу, закріплення і контролю знань, конкретний зміст, методи, засоби й організаційні форми навчання, співвідношення між самостійною роботою учнів і роботою разом із вчителем, між індивідуальними і колективними формами роботи та ін. Все це вчитель повинен визначити сам з врахуванням своїх власних позицій і уподобань, специфіки умов, в яких перебігає навчальний процес, індивідуальних особливостей окремих учнів і класного колективу.

Ясно, що неможливо і немає необхідності всіх дітей однаково навчати і навчити, сформувати в кожної дитини одні й ті самі знання, уміння і навички в різних предметних галузях, домагатись від дітей обов'язкового досягнення одного й того самого рівня розвитку логічного і творчого мислення, однакового сприймання різних проявів навколишньої дійсності. Це стосується і навчання математики, методів розв'язування задач, побудови й аналізу математичних моделей різноманітних процесів і явищ, інтерпретації та узагальнення результатів такого аналізу.

Сьогодні розроблено вже значну кількість програмних засобів, використання яких дозволяє розв'язувати за допомогою комп'ютера досить широке коло математичних задач різних рівнів складності. Це такі програмні засоби, як *Derive*, *Gran1*, *Gran-2D*, *Gran-3D*, *DG*, *Maple*, *Mathematika*, *MathLab*, *Maxima*, *Numeri*, *Reduce*, *Statgraph* і ін. Причому одні з них орієнтовані на фахівців досить високої кваліфікації в галузі математики, інші – на учнів середніх навчальних закладів чи студентів вищих навчальних закладів, які лише почали вивчати шкільний курс математики чи основи вищої математики.

Найбільш придатними для підтримки навчання математики в середніх навчальних закладах видаються комплект програм *GRAN* (*Gran1*, *Gran-2D*, *Gran-3D*) і *Derive*. Названі програмні засоби прості у використанні, оснащені досить зручним і “люб’язним” інтерфейсом, максимально наближеним до інтерфейсу найбільш поширених програм загального призначення (систем опрацювання текстів, управління базами даних, електронних таблиць, графічних і музичних редакторів і ін.), контекстно-чутливою допомогою. Від користувача не вимагається володіння значним обсягом спеціальних знань з інформатики, основ обчислювальної техніки, програмування тощо, за винятком найпростіших понять, цілком доступних для учнів середніх класів.

Використання подібних програм дає можливість учневі розв’язувати окремі задачі, не знаючи відповідного аналітичного апарату, методів і формул, правил перетворення виразів тощо. Наприклад, учень може розв’язувати рівняння і нерівності та їх системи, не знаючи формул для відшукання коренів, методу виключення змінних, методу інтервалів тощо, обчислювати похідні та інтеграли, не пам’ятаючи їх таблиць, досліджувати функції, не знаючи алгоритмів їх дослідження, відшукувати оптимальні розв’язки найпростіших задач лінійного і нелінійного програмування, не використовуючи симплекс-метод, градієнтні методи і т.д. Разом з тим, завдяки можливостям графічного супроводу комп’ютерного розв’язування задачі, учень чітко і легко буде розв’язувати досить складні задачі, впевнено володіти відповідною системою понять і правил. Використання програмних засобів зазначеного типу дає можливість у багатьох випадках зробити розв’язування задачі настільки ж доступним, як просте розглядання рисунків чи графічних зображень. Застосування відповідних програмних засобів перетворює окремі розділи і методи математики в “математику для всіх”, що стають доступними, зрозумілими, легкими і зручними для використання, а той, хто розв’язує задачу, стає користувачем математичних методів, можливо не володіючи їх будовою і обґрунтуванням, аналогічно до того, як він використовує інші комп’ютерні програми (текстові, графічні, музичні редактори, електронні таблиці, бази даних, операційні системи, експертні системи), не знаючи, як і за якими принципами вони побудовані, якими мовами програмування описані, які теоретичні положення покладено в їх основу.

З іншого боку за такого підходу до навчання математики даються наочні уявлення про поняття, що вивчаються, розвивається образне мислення, просторова уява, з’являються можливості досить глибоко проникнути в сутність досліджуваного явища, неформально розв’язувати задачу. За такого підходу на передній план виступає з’ясування проблеми, постановка задачі, розробка відповідної математичної моделі, матеріальна інтерпретація отриманих за допомогою комп’ютера результатів. Усі технічні операції щодо опрацювання побудованої математичної моделі, реалізації методу відшукання розв’язку, оформлення і подання результатів опрацювання вхідних даних покладаються на комп’ютер.

Важко переоцінити корисність використання програмних засобів зазначеного типу і в процесі поглибленого вивчення математики. Можливість провести необхідний чисельний експеримент, швидко виконати потрібні обчислення чи графічні побудови, перевірити ту чи іншу гіпотезу, випробувати той чи інший метод розв’язування задачі, вміти проаналізувати і пояснити результати, отримані за допомогою комп’ютера, з’ясувати межі можливостей використання комп’ютера чи обраного методу розв’язування задачі мають надзвичайне значення під час вивчення методів математики.

Уже з наведеного видно, як може змінюватися (причому в досить широкому діапазоні) зміст і структура навчальної діяльності учнів в процесі навчання математики залежно від специфіки обраної ними предметної галузі, спрямованості навчання, індивідуальних нахилів і здібностей. Комп’ютерна підтримка навчання математики з використанням програмних засобів зазначеного типу дає значний педагогічний ефект, полегшуючи, розширюючи і поглиблюючи вивчення і розуміння методів математики на відповідних рівнях у середніх навчальних закладах з найрізноманітнішими ухилами в навчанні – гуманітарного спрямування, СПТУ різних профілів, середніх загальноосвітніх школах, гімназіях, ліцеях, класах і закладах з поглибленим вивченням природничо-математичних дисциплін. Природно, і програми курсів математики, і глибина вивчення відповідних понять, законів, методів, аналітичного апарату можуть істотно різнитися між собою.

Не торкаючись детально всіх тем, досліджуваних в курсі математики загальноосвітньої школи, разом з тим можна зауважити, що комп’ютерні програми згаданого типу можуть бути використані практично на всіх уроках математики, починаючи вже з п’ятих-шостих класів, зокрема під час вивчення системи координат на прямій і на площині, планіметрії, поняття функції, елементарних функцій і їх властивостей, методів розв’язування рівнянь і нерівностей і їх систем, елементів теорії границь числових послідовностей, диференціального і інтегрального числень і їх застосувань, елементів теорії ймовірностей і математичної статистики. Зрозуміло, що окрім програм зазначеного типу вчитель за необхідності може використовувати різного роду тренажери, програми для контролю знань, збирання статистичних даних стосовно навчального процесу і їх опрацювання тощо. Використання таких програм дає змогу вчителеві значно інтенсифікувати спілкування з учнями й учнів між собою, більше уваги приділити задачам на доведення, на постановку задач, побудову їх математичних моделей, розробку і дослідження методів розв'язування задач, дослідження розв'язків, логічний аналіз умов задач, пошук нестандартних підходів до розв'язування задач, виявленню закономірностей, яким підкоряються досліджувані процеси і явища, перекласти на комп'ютер рутинні, чисто технічні і нецікаві операції, ручне виконання яких практично не розвиває інтелект дитини, а часто навіть, навпаки, гасить його, коли дитина уподібнюється до робота чи комп'ютера, виконуючи замість нього обчислювальні, графічні й інші технічні операції.

Разом з тим, використання комп'ютера в навчальному процесі має бути педагогічно виваженим, побудованим на засадах гармонійного поєднання педагогічних надбань минулого та сучасних інформаційно-комунікаційних технологій.

Зрозуміло, що заняття з математики, орієнтовані на використання засобів навчання згаданих типів, мають проводитися у відповідним чином оснащеному досить досконалими технічними і програмними засобами класі. У таких класах повинні вивчатися всі навчальні предмети, а не тільки основи інформатики й обчислювальної техніки. Це у свою чергу буде сприяти розширенню і поглибленню міжпредметних зв'язків, інтеграції окремих навчальних предметів, їх взаємопроникненню і взаємовпливу, що зрештою дасть можливість в окремих навчальних закладах чи класах оволодівати елементами сучасних інформаційно-комунікаційних технологій і інформатичної культури під час вивчення різних навчальних дисциплін, а не лише окремого, майже ізольованого від інших, навчального курсу "Основи інформатики та обчислювальної техніки".

У даному посібнику досить детально розглядається програмний засіб *GRAN1* в обсязі, що відповідає програмі курсу математики загальноосвітньої школи. Названий засіб призначений насамперед для розв'язування певних класів задач графічними методами і може бути віднесений до так званих програм-розв'язувачів.

У посібнику описуються правила роботи з програмою *GRAN1*, розробленою спеціально для комп'ютерної підтримки навчання шкільного курсу математики. Аналізуються можливості використання програми під час вивчення різних розділів математики в загальноосвітній школі, СПТУ, педагогічних училищах, середніх навчальних закладах гуманітарного спрямування.

До всіх параграфів посібника дається значна кількість прикладів, наочних графічних зображень, задач і вправ для самостійного виконання, запитання для самоконтролю.

Передбачається, що користувач володіє найпростішими навичками роботи з відповідним чином оснащеним комп'ютером, що функціонує під управлінням операційної системи Windows або Linux.

§1. Початок роботи з програмою. Звернення до послуг програми

Програма *GRAN1* призначена для графічного аналізу функцій, звідки і походить її назва (GRaphic ANalysis).

Для роботи з програмою необхідно проінсталювати програму на жорсткий диск (вінчестер). Обов'язково слід записати на диск файли *gran1.exe* і *gran1.lng* (загальним обсягом близько 1 мегабайта), а також бажано, щоб на диску були наявні файли допомоги *gran1.hlp* та *gran1.cnt* (загальним обсягом близько одного мегабайта).

Надалі "вказати ім'я файлу", "звернутися до послуги" і т.п. буде означати – встановити вказівник імен файлів чи послуг (з використанням клавіш управління курсором чи маніпулятора "мишка") на потрібне ім'я в переліку файлів, пункт меню чи піктограму, і натиснути клавішу *Enter* чи ліву клавішу "мишки".

Після запуску програми на екрані з'явиться зображення, показане на Рис. 1.1. У верхньому рядку екрану знаходиться "головне меню" – перелік "послуг", до яких можна звернутися в процесі роботи з програмою. В разі звернення до деякого пункту головного меню з'являється перелік пунктів (послуг) відповідного підменю (Рис. 1.2).

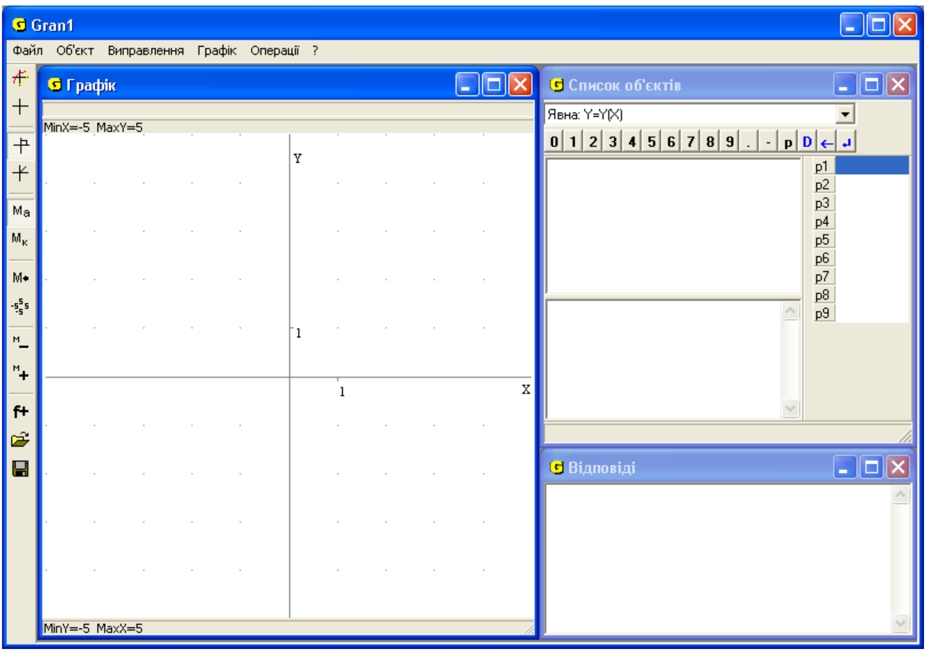


Рис. 1.1

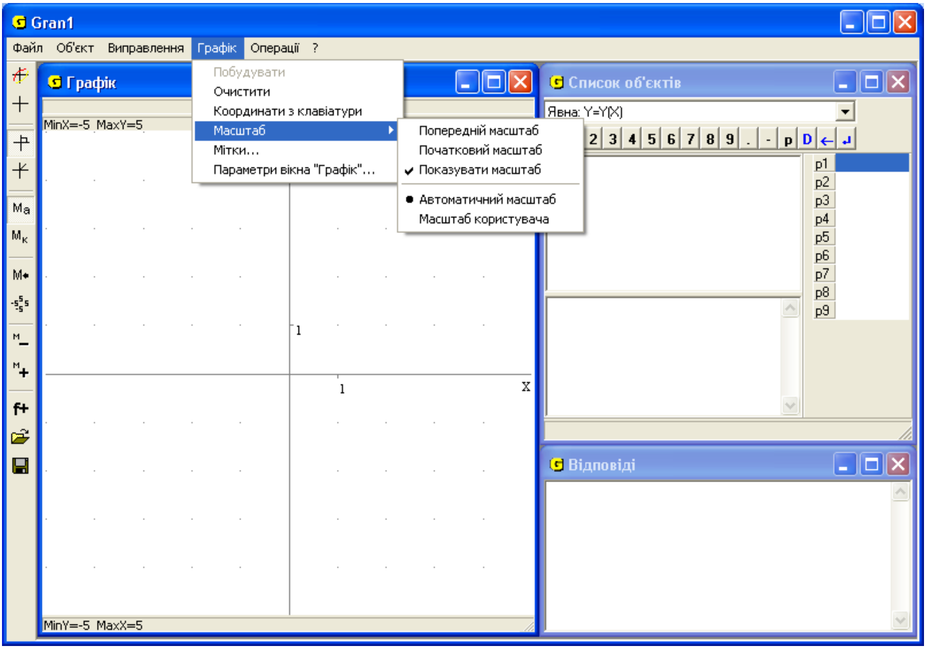


Рис. 1.2

Пункти підменю у свою чергу можуть розгалужуватися на підпункти, перелік яких з’являється в разі звернення до відповідного пункту підменю.

Домовимось в подальшому звернення до підпункту певного пункту меню записувати однією командою, відокремлюючи символом “ / ” назви пунктів та підпунктів. Наприклад, звернення до підпункту “Вилучити” пункту “Об’єкт” будемо позначати “Об’єкт / Вилучити”.

Назви підпунктів підменю, використання яких у даний момент не є коректним, подані блідішим кольором. Наприклад, використання підпунктів “Об’єкт / Змінити...”, “Об’єкт / Вилучити” на самому початку роботи з програмою некоректне, оскільки ще не введено ніяких даних і немає чого змінювати чи вилучати.

Програма оснащена контекстно-чутливою допомогою. Якщо вказівник встановлено на назву певної послуги, то за натискання клавіші *F1* з’являється допоміжне вікно із стандартним інтерфейсом системи допомоги Windows, у якому подаються короткі відомості про призначення зазначеної послуги і про правила її використання (Рис. 1.3). Файл допомоги також можна викликати, використовуючи послугу “? / Допомога” головного меню.

На самому початку роботи з програмою необхідно встановити деякі параметри, обравши послугу “Виправлення / Налагодження параметрів програми…”. Тут здійснюється вибір мови, якою будуть відображатися всі повідомлення в програмі, а також точність обчислень, які виконуються за програмою – кількість десяткових знаків в числах, що змінюється від 0 до 6 (Рис. 1.4).

За необхідності відмовитися від роботи з щойно обраною послугою і повернутися до головного меню програми використовується клавіша *Esc*. З тією ж метою можна використати кнопку закривання допоміжного вікна або кнопку “Скасувати” (Рис. 1.4).

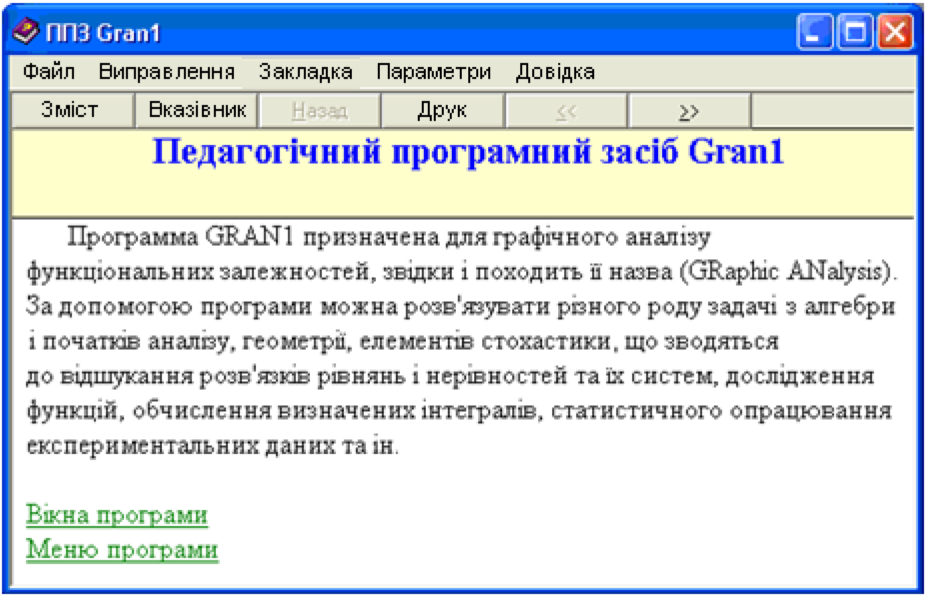


Рис. 1.3

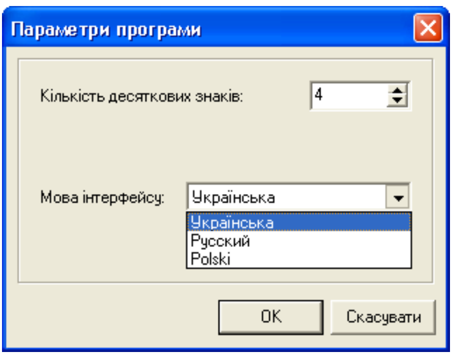


Рис. 1.4

Виконання послуги "Виправлення / Скопіювати" залежить від того, яке вікно є поточним під час звернення до неї. У випадку, коли поточним є вікно "Графік", до буфера обміну заноситься зображення координатної площини разом з побудованими графіками. Якщо поточним є вікно "Список об'єктів", то до буфера обміну буде занесений текст, що був відмічений в цьому вікні. Якщо ж ніякий текст не було відмічено, до буфера обміну буде занесена назва поточного об'єкта. В разі, коли поточним є вікно "Відповіді", до буфера обміну заноситься текст, що був в ньому відмічений.

В разі звернення до послуги "Виправлення / Скопіювати поточне вікно" до буфера обміну заноситься повне зображення поточного вікна програми.

Щоб зберегти створені за допомогою програми об'єкти у файлі на зберігаючому пристрої, необхідно звернутися до послуги "Файл / Зберегти" або "Файл / Зберегти як…". Якщо об'єкти зберігаються вперше, то в разі звернення до будь-якої з цих послуг на запит програми у стандартному вікні збереження файлів системи Windows необхідно вказати ім'я файлу та цільовий каталог. Якщо файл раніше зберігався, то в разі звернення до послуги "Файл / Зберегти" переписуються всі об'єкти у той самий файл.

В разі необхідності зберегти заново створені об'єкти, або такі, що вже раніше зберігалися, у файлі з іншою назвою, слід скористатись послугою головного меню "Файл / Зберегти як…", що також призведе до появи стандартного запиту Windows, де необхідно вказати нове ім'я файлу та цільовий директорій.

До імен файлів, що записуються на зберігаючий пристрій, за замовчуванням додається розширення імені ".gr1", що відповідає назві програми "GRAN1".

Записаний файл можна завантажити в програму, скориставшись послугою "Файл / Завантажити". На стандартний запит системи Windows, що з'явиться в разі звернення до вказаної послуги, необхідно вказати ім'я файлу, в якому було збережено об'єкти. Ім'я робочого файлу (тобто файлу, в якому збережено або з якого завантажено об'єкти) виводитиметься у заголовку головного вікна програми.

Звернення до послуги головного меню "Файл / Новий" призведе до вилучення всіх раніше створених об'єктів, тобто буде виконано підготовку до нового сеансу роботи.

Розміри та положення вікон програми можна змінювати. Щоб змінити розміри вікна, необхідно встановити курсор мишки на межі обраного вікна, натиснути ліву клавішу мишки, і, утримуючи її натиснутою, перемістити межу вікна в потрібному напрямку. Крім того необхідно звернути увагу на пункт меню "Виправлення / Авторозміри вікон". Якщо встановлено відмітку ☑, то зміна розміру одного з вікон веде до автоматичної зміни розміру інших так, щоб вікна займали все робоче поле екрану. Якщо відмітку ☑ знято, то вікна можуть накладатись одне на одне. Перенесення вікна в інше місце здійснюється як звичайно. В разі звернення до послуги "Виправлення / Початкові розміри та положення вікон" всі розміри вікон (головного вікна програми та трьох робочих) та їх розташування повертаються в початковий стан.

Для завершення роботи з програмою необхідно звернутися до пункту меню "Файл / Вихід" або "натиснути" кнопку закривання головного вікна програми. Якщо під час роботи з програмою було створено об’єкти, що не були збережені у файлі, то з’явиться повідомлення про необхідність зберегти дані.

Запитання для самоконтролю

1. Скільки пунктів є в головному меню програми? Як називаються ці пункти?
2. Що і де з’явиться на екрані, якщо встановити вказівник пунктів головного меню на деякий пункт і натиснути клавішу Enter?
3. Які дії необхідно виконати, щоб звернутися до деякого підпункту деякого підменю?
4. Скільки підпунктів у підменю пункту “Операції”? Як називаються ці підпункти?
5. Як довідатися, чи коректним є звернення до підпункту деякого підменю в даний момент часу?
6. Як звернутися до потрібного пункту меню, використовуючи маніпулятор “мишка”?
7. Як звернутися до потрібного підпункту підменю в зазначеному пункті головного меню, використовуючи маніпулятор “мишка”?
8. Як довідатися про призначення того чи іншого пункту деякого підменю?
9. Як відмовитися від виконання обраної послуги?

§2. Введення даних

Перш ніж вводити вирази чи таблиці, за якими характеризують деяку залежність між змінними, необхідно вказати тип задання залежності у вікні “Список об’єктів” (на екрані вгорі праворуч, Рис. 1.1, Рис. 2.1). Для цього слід перейти у дане вікно. Це можна зробити за допомогою “мишки”, натиснувши ліву клавішу “мишки”, коли її курсор знаходиться в полі вікна, або обравши пункт меню “Об’єкт / Список об’єктів”.

Саме вікно складається з трьох частин (Рис. 2.1). В верхній частині вікна знаходиться список, що розкривається, де наведено перелік із восьми можливих типів залежностей:

- *Явна:* $Y = Y(X)$ – залежність між змінними x і y задана у вигляді $y = y(x)$, де $y(x)$ деякий вираз від змінної x (явне задання залежності);
- *Параметрична:* $Y = Y(T)$, $X = X(T)$ – залежність між змінними x і y задана через параметр t: $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, де $\varphi(t)$, $\phi(t)$ – деякі вирази від змінної (параметра) t (параметричне задання залежності);
- *Полярна:* $R = R(F)$ – залежність задана в полярних координатах у вигляді $r = \rho(\varphi)$, де $\rho(\varphi)$ – вираз від змінної φ, r – полярний радіус точки на площині, φ – полярний кут (відкладається від полярної осі до полярного радіуса проти годинникової стрілки), причому зв’язок між полярними і відповідними декартовими координатами x і y можна визначити, виходячи з формул $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$;

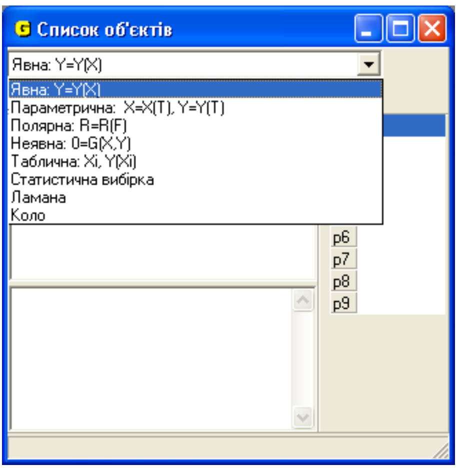


Рис. 2.1

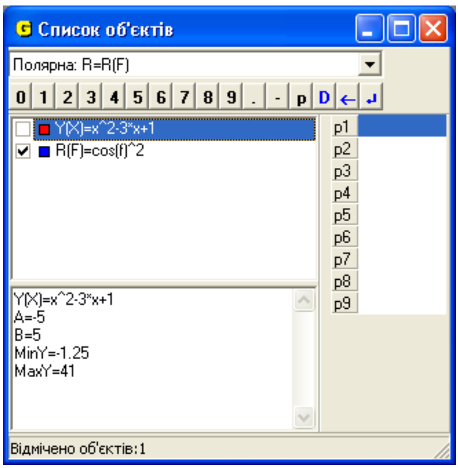


Рис. 2.2

- *Неявна:* $0 = G(X,Y)$ – залежність між змінними x і y задана неявно у вигляді $G(x, y) = 0$, де $G(x, y)$ – деякий вираз від змінних x і y (неявне задання залежності);
- *Таблична:* $Xi, Y(Xi)$ – залежність задана таблично (в такому разі за програмою будується поліном наперед вказаного степеня не вище 7, яким найкраще в розумінні середнього квадратичного відхилення наближається таблично задана залежність);
- *Статистична вибірка* – задається та досліджується статистична вибірка;
- *Ламана* – залежність між змінними x і y визначається за допомогою ламаної лінії.
- *Коло* – задається коло.

Обрати тип залежності можна за допомогою маніпулятора “мишка”, розкривши список, або за допомогою клавіш управління курсором, встановивши за допомогою клавіші *Tab* вказівник на списку, що розкривається.

Вказаний останнім тип задання залежності фіксується, а у всіх залежностей, що вводяться заново, буде такий тип задання доти, поки він не буде змінений. Якщо ніякий тип не вказано, то за замовчуванням автоматично встановлюється тип $y = y(x)$ (Явна).

Усі залежності, що вводяться, можуть бути будь-якого з перелічених типів задання в довільних поєднаннях.

В другій частині вікна “Список об’єктів” знаходиться список виразів всіх введених об’єктів. Розрізняються поняття поточного об’єкта та відміченого об’єкта. Поточним є об’єкт, на вираз якого встановлено вказівник. Відмічений об’єкт позначається відміткою ☑. Встановити або зняти відмітку можна за допомогою “мишки” (або клавіші “Пропуск” клавіатури), для чого досить встановити курсор мишки на місце перемикача і натиснути її ліву клавішу.

Для кожного об’єкта вказаний його тип і колір графіка залежності, що відповідає цьому об’єкту. На Рис. 2.2 біжучим є перший з двох об’єктів, що описується за явно заданою залежністю, а відмічений – другий, що описується за залежністю, заданою в полярних координатах.

Під час виконання більшості операцій над об’єктами (знаходження розв’язків системи рівнянь та нерівностей, обчислення інтегралів, перетворень ламаних тощо) відповідні операції виконуються лише над відміченими об’єктами. Якщо відмічених об’єктів немає, операції виконуються над поточним об’єктом.

За необхідності раніше введену залежність можна змінити, використовуючи послугу “Об’єкт / Змінити...”. В такому разі за програмою автоматично контролюється, щоб тип задання нової залежності був той самий, що й у змінюваної. Тут також можна змінити раніше вказані межі відрізка, на якому задана залежність між змінними. Якщо ж необхідно змінити не тільки вираз залежності, але і тип задання залежності, раніше введену залежність слід вилучити, для чого призначена послуга “Об’єкт / Вилучити”. Вилучаються всі відмічені об’єкти. За допомогою послуги “Об’єкт / Вилучити останній” можна вилучити останній об’єкт із списку, незалежно від того, відмічений він, чи ні.

В цій частині вікна можна викликати контекстне меню (Рис. 2.3), натиснувши праву кнопку “мишки”. Більшість пунктів цього меню співпадає з послугами пункту “Об’єкт” головного меню. Однак крім того є ще два пункти: “Відмітити все”, за допомогою якого можна відмітити всі об’єкти у вікні, та “Зняти відмітки” – знімаються відмітки із всіх об’єктів у вікні.

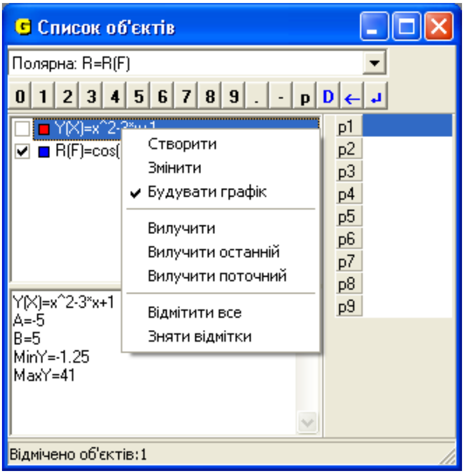


Рис. 2.3

Крім того за допомогою пункту "Будувати графік" цього меню можна визначити, чи буде побудовано графік поточного об’єкта у вікні "Графік" (графік будується, якщо відповідний пункт меню відмічено відміткою ☑), а також, в разі необхідності, встановити чи зняти цю відмітку.

В третій частині вікна знаходяться відомості про поточний об’єкт. Наприклад, для залежності, заданої в декартових координатах, це вираз залежності, відрізок, на якому задана залежність, максимальне та мінімальне значення функції на даному відрізку в разі явного задання залежності або меж зміни координат за неявного задання залежності і т.п. (Рис. 2.2).

Ці відомості можна переглянути, використовуючи полоси прокручування у вікні або клавіші управління курсором. Оскільки відомості подані у вікні за допомогою звичайного тексту, то використовуючи “мишку” або клавіші управління курсором, можна відмітити весь текст або його частину, а потім занести до буфера обміну для використання в інших програмах.

Робота з буфером обміну може здійснюватись через головне меню (пункт “Виправлення”), контекстне меню або через клавіатуру. Доступні такі послуги:

- *Вирізати*. Текст буде занесено до буфера обміну з одночасним вилученням із вікна (комбінація клавіш “CTRL+X” клавіатури).
- *Копіювати*. Текст буде занесено до буфера обміну (комбінація клавіш “CTRL+C” клавіатури).
- *Вставити*. Застосовується за необхідності вставити текст із буфера обміну (комбінація клавіш “CTRL+V” клавіатури).
- *Вилучити*. Вилучається відмічений текст (клавіша “DEL” клавіатури).
- *Відмітити все*. Відмічається весь текст у вікні.

Використовувати буфер обміну можна і для перенесення одержаних за допомогою програми графіків. Для цього потрібно перейти до вікна “Графік”, встановити курсор мишки в будь якому місці у вікні і натиснути її ліву клавішу. В результаті вікно “Графік” стане поточним. Потім за допомогою послуги “Виправлення / Копіювати” зображення з вікна заноситься до буфера обміну.

В четвертій частині вікна (праворуч) міститься список “динамічних параметрів” та засоби роботи з ними.

В разі звернення до послуг, що пов’язані з введенням нових даних або із зміною введених раніше, в допоміжному вікні, що відповідає виконуваній дії, з’являється панель введення даних одного з двох можливих типів.

Перший тип використовується в тих випадках, коли потрібно ввести вираз, до якого входять числа, змінні, функції та арифметичні знаки (Рис. 2.4), наприклад в разі звернення до послуг “Об’єкт / Створити” під час задання функціональних залежностей, “Операції / Калькулятор” та інших.

Другий тип використовується для введення виключно числових даних (Рис. 2.5), наприклад, в разі звернення до послуг “Об’єкт / Створити” під час створення статистичної вибірки або ламаної, “Операції / Інтеграли / Інтеграл...”, “Графік / Параметри вікна “Графік”” та інших.

Для використання панелі введення даних курсор повинен бути встановлений в рядку введення даних. Переміщувати курсор можна за допомогою маніпулятора "мишка" або за допомогою клавіші *Tab* клавіатури.

На початку рядка введення в залежності від типу даних, що вводяться, можуть з'являтися різні написи, наприклад:

- $Y(X) = X$ – під час введення виразу $f(x)$ в разі явного задання залежності $y = f(x)$;
- $0 = X$ – під час введення виразу $G(x, y)$, аргументами якого є змінні x і y;
- $MinX$, $MaxX$, $MinY$, $MaxY$ – під час введення масштабу користувача (вказуванні меж вздовж осі Ox та осі Oy, в яких будуть подані графічні зображення);
- $A = -5$, $B = 5$ – під час введення меж відрізка, на якому буде розглядатися залежність;
- *Вираз:* – під час введення виразу, значення якого необхідно обчислити в разі звернення до послуги "Операції / Калькулятор", та ін.

Крім того в рядку введення можуть бути подані значення змінних або вирази, передбачені в програмі чи введені раніше. Якщо нема необхідності змінювати ці значення або вирази, достатньо натиснути на клавіатурі клавішу *Enter* або встановити курсор "мишки" на панелі введення даних на кнопку "ОК" та натиснути ліву клавішу "мишки". Після цього відповідний вираз, межі зміни аргументу та деякі додаткові характеристики, що залежать від типу об'єкта, з'являються у вікні "Список об'єктів" (Рис. 2.2).

Введення нових даних може здійснюватися за допомогою клавіатури та за допомогою "мишки".

За допомогою клавіатури всі необхідні символи вводяться як звичайно – слід набрати потрібний набір символів. Числові значення і вирази записуються за правилами, близькими до прийнятих в найбільш поширених мовах програмування (*BASIC*, *Pascal* і ін.). Усі допустимі позначення функцій і операцій показані на панелі введення даних (Рис. 2.4).

В записах числових значень дробова частина, якщо вона є, відокремлюється від цілої крапкою. Арифметичні операції позначаються знаками:

+	– додавання,
–	– віднімання,
*	– множення,
/	– ділення,
^	– піднесення до степеня.

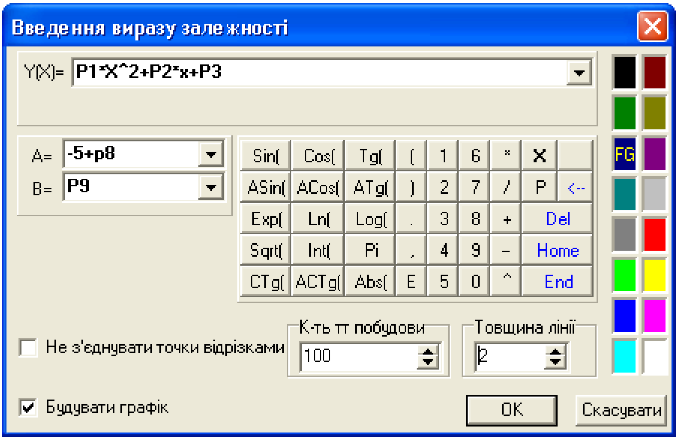


Рис. 2.4

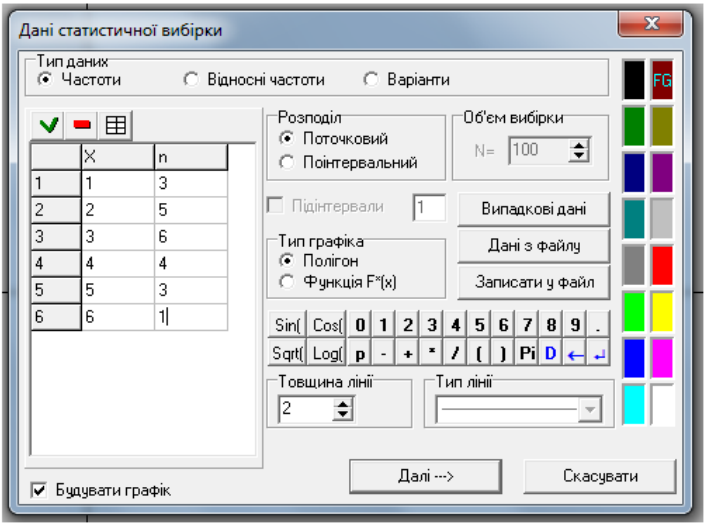


Рис. 2.5

Пріоритети (порядок виконання) операцій загальноприйняті. Бажаний порядок виконання операцій може бути вказаний за допомогою дужок. Вираз, поданий в дужках, розглядається як єдине ціле і обчислюється в першу чергу. Всередині дужок можуть бути інші вирази, подані також в дужках. Обов'язково кожній відкриваючій (лівій) дужці повинна відповідати закриваюча (права) дужка.

До виразів можуть бути включені також позначення (які розглядаються як неподільні символи) деяких функцій. Всі вони подані на панелі введення даних (Рис. 2.4):

Sin – *sin* (синус),

Cos – *cos* (косинус),
Tg – *tg* (тангенс),
Ctg – *ctg* (котангенс),
Asin – *arcsin* (арксинус),
Acos – *arccos* (арккосинус),
Atg – *arctg* (арктангенс),
Actg – *arcctg* (арккотангенс),
Exp – експонента (e^x),
Log – логарифм за довільною основою
(основа та аргумент логарифма вказуються в дужках через кому. Наприклад, $Log(x, x+3)$ означає $\log_x(x+3)$),
Ln – логарифм натуральний (за основою e),
Abs – абсолютна величина,
Int – ціла частина аргументу,
Sqrt – корінь квадратний,
Pi – число π (= 3.141592654).

На панелі введення даних також можуть бути наявні кілька кнопок, які відповідають наступним клавішам управління курсором:
← – *Back Space* (вилучення символа ліворуч від курсора),
Del (*D*) – *Delete* (вилучення символа праворуч від курсора),
Home – *Home* (переміщення курсора на початок рядка),
End – *End* (переміщення курсора в кінець рядка),
↵ – *Enter* (введення значення та перенесення курсора).

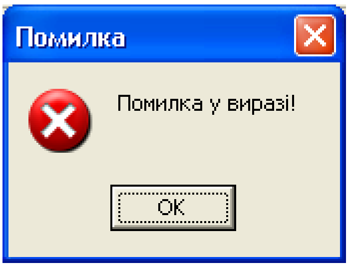


Рис. 2.6

Якщо під час введення допущена помилка в одному з рядків введення, то виводиться відповідне повідомлення (Рис. 2.6), після чого курсор переміщується в рядок, де міститься неправильний вираз. Цей вираз необхідно відредагувати (внести зміни), використовуючи звичайні засоби редагування:

- за необхідності вилучити символ ліворуч від курсора використовується клавіша *Back Space* (←); після вилучення

символа всі інші, розташовані правіше від курсора, і сам курсор зміщуються вліво на одну позицію;
- за необхідності вилучити символ у позиції, де розташований курсор, використовується клавіша *Delete*;
- за необхідності вставити символ у позицію, де розташований курсор, досить натиснути на клавіатурі відповідну клавішу; в такому разі всі символи, розташовані в позиції курсора і правіше, зміщуються на одну позицію вправо (у програмі не передбачено скасування режиму вставляння символів у рядку введення);
- за необхідності переміщувати курсор вздовж рядка введення можна за допомогою клавіш управління курсором (“←”, ”→”).

Після того, як значення чи вираз набрано з клавіатури чи відредаговано, слід натиснути клавішу *Enter* або відповідну кнопку в допоміжному вікні. Це буде означати, що щойно набраний чи відредагований вираз введено до запам’ятовуючого пристрою комп’ютера і з відповідним об’єктом можна продовжувати роботу (будувати графік, виконувати раніше обрану операцію і т.д.).

За допомогою “мишки” дані вводяться з використанням панелі введення даних. Курсор “мишки” встановлюється на потрібний символ на панелі введення даних і натискається ліва клавіша “мишки”, після чого зазначений символ з’являється в рядку введення. Після того, як всі необхідні символи введені, слід “натиснути” кнопку “ОК” (або ↲), тобто курсор “мишки” встановити на зображення кнопки “ОК” (або на зображення кнопки ↲) і далі натиснути ліву клавішу “мишки”.

За необхідності відредагувати набір символів у рядку введення слід за допомогою “мишки” вказати потрібну позицію, після чого з’являється вказівник позицій у рядку введення в позиції, вказаній за допомогою курсора “мишки”. Якщо на зазначене місце потрібно вставити новий символ, за допомогою “мишки” слід вказати відповідний символ на панелі введення даних. Якщо символ потрібно вилучити, слід вказати на пункт “←” або “*Del*” на панелі введення даних. Щоб відмовитися від послуги (чи припинити її виконання) і перейти до головного меню, досить натиснути кнопку “Скасувати” чи на клавіатурі клавішу *Esc*.

До виразів, що вводяться, можуть бути включені деякі із параметрів $P1$, $P2, \ldots,$ $P9$, значення яких в подальшому відображаються в таблиці, що розташована в правій частині вікна "Список об’єктів". Кожен рядок таблиці відповідає одному з динамічних параметрів, які можуть бути використані у виразах під час створення об’єктів окремих типів. Якщо жоден з параметрів не використаний – таблиця порожня (Рис. 2.2). Для параметрів, які в даний час використовуються, у відповідних рядках таблиці подаються поточні значення цих параметрів

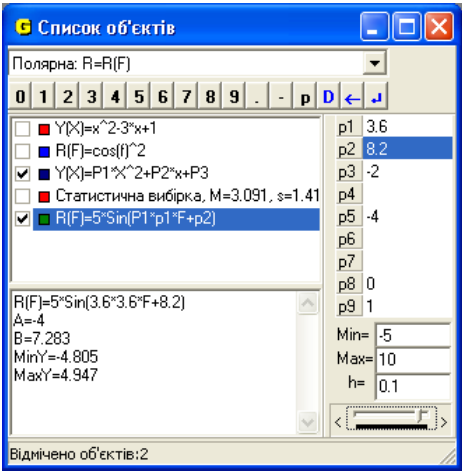


Рис. 2.7

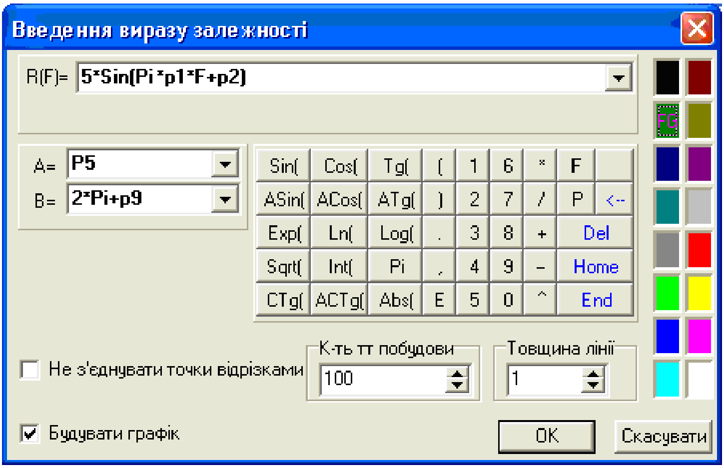


Рис. 2.8

(Рис. 2.7). Якщо ж параметр не використаний в жодному з об'єктів – відповідний рядок порожній.

Значення відміченого параметра можна змінювати за допомогою повзунка, що розташований під вікном, в якому подані значення параметрів. Якщо побудовані графіки, що відповідають тим чи іншим введеним виразам, до яких входить деякий параметр, то в разі змінювання значення параметра графіки негайно (динамічно) перебудовуються у відповідності до значення параметра. Межі і крок *h* зміни відміченого параметра можна задавати, використовуючи панель введення даних, що міститься над переліком значень параметрів (Рис. 2.7). Щоб відмітити деякий (один з дев'яти) параметр, досить встановити курсор мишки на відповідний рядок і натиснути ліву клавішу мишки. Один і той самий параметр може входити до кількох виразів. В разі зміни значення параметра перебудовуються графіки всіх залежностей, до виразів яких входить параметр. Щоб ввести параметр до деякого виразу, потрібно за допомогою панелі введення даних (Рис. 2.8) ввести спочатку літеру P , а потім відповідну цифру (від 1 до 9).

До виразів для меж відрізка задання залежності також можуть входити параметри $P1$, $P2$, … , $P9$ (Рис. 2.8). Однак потрібно слідкувати, щоб нижня межа не перевищувала верхню.

Запитання для самоконтролю

1. Які типи задання залежності між змінними передбачені в програмі GRAN1?
2. Як вказати потрібний тип задання залежності між змінними?
3. Які відомості розміщені у вікні “Список об’єктів”?
4. Чи можна спочатку ввести вираз, а потім вказати тип задання залежності між змінними?
5. Яким буде тип задання залежності між змінними, якщо не змінювати у вікні “Список об’єктів” тип залежності ?
6. Як вказати потрібний тип залежності між змінними, використовуючи маніпулятор “мишка”?
7. Чи повинні різні залежності між змінними мати один і той самий тип задання?
8. Як можна перевірити, який вираз було щойно введено? Де його можна прочитати?
9. Які позначення операцій і функцій допустимі у записах виразів? Де їх усі можна побачити?
10. Як визначаються пріоритети виконання операцій?
11. Як вводяться дані з клавіатури без використання панелі введення даних, поданої на екрані?
12. Як вводяться дані з використанням панелі введення даних, поданої на екрані?
13. Як до виразів вводяться змінні параметри $P1$, $P2$, … , $P9$?
14. Як можна відредагувати раніше введені вирази:
    а) з використанням клавіатури?
    б) без використання клавіатури?
15. Чи можна вважати, що вираз введено до пам’яті комп’ютера, якщо його набрано з клавіатури і зображення виразу з’явилося на екрані в рядку введення?
16. Як можна відмовитися від послуги чи припинити її виконання, якщо звернення до послуги вже розпочато?

§3. Координатна площина. Декартові та полярні координати

Відразу після завантаження програми GRAN1 у вікні "Графік" з'являється координатна площина з координатною сіткою, вузли якої помічені точками. На осях абсцис (горизонтальній) і ординат (вертикальній) вказано значення поділок, за якими визначаються масштаби вздовж цих осей (Рис. 1.1 та ін.). Ці масштаби можна змінити за допомогою послуги "Графік / Масштаб / Масштаб користувача" (Рис. 3.1).

В разі звернення до пункту "Графік / Масштаб" можна обрати один з двох підпунктів: "Автоматичний масштаб" та "Масштаб користувача".

У режимі "Автоматичний масштаб" за програмою автоматично добирається масштаб вздовж осей Ox та Oy залежно від меж, у яких змінюються абсциси й ординати під час конкретних побудов.

У режимі "Масштаб користувача" можна встановити довільні межі вздовж осей Ox і Oy, у яких будуть будуватися зображення. Досить звернутися до цього пункту меню і далі у вікні "Властивості вікна "Графік"" на закладинці "Масштаб" (Рис. 3.2) ввести мінімальне ($MinX$) і максимальне ($MaxX$) значення координат вздовж осі Ox, а також мінімальне ($MinY$) і максимальне ($MaxY$) значення координат вздовж осі Oy, які бажано мати під час побудови зображень (графіків, гістограм, ламаних і т.д.). Тип масштабування: автоматичний масштаб чи масштаб користувача – також можна змінити за допомогою кнопок панелі інструментів, що розташована ліворуч від вікна "Графік". Кнопка "Ма" відповідає вибору автоматичного масштабу, а кнопка "Мк" – масштабу користувача.

Мінімальне та максимальне значення координат для обох координатних осей також відображаються у вікні "Графік", якщо послугу "Графік / Масштаб / Показувати масштаб" відмічено міткою ☑ (Рис. 1.1, Рис. 1.2 та ін.). Зліва вгорі в окремому рядкові подано $MinX$ та $MaxY$, а зліва знизу $MinY$ та $MaxX$. Відображення параметрів масштабу вмикається або вимикається за допомогою послуги "Графік / Масштаб / Показувати масштаб". Наявність мітки ☑ свідчить про ввімкнене відображення масштабу (Рис. 3.1).

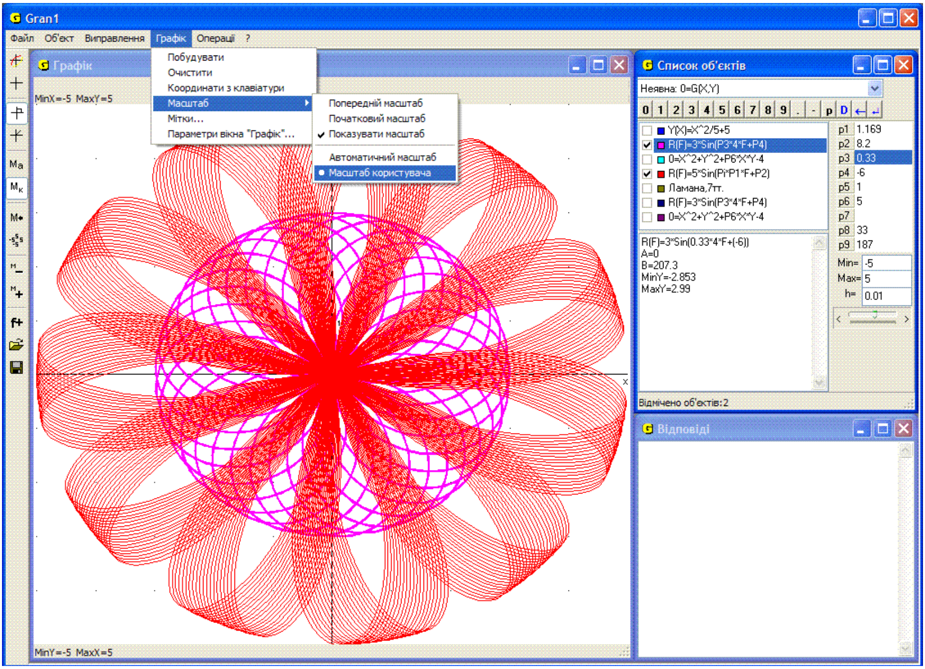


Рис. 3.1

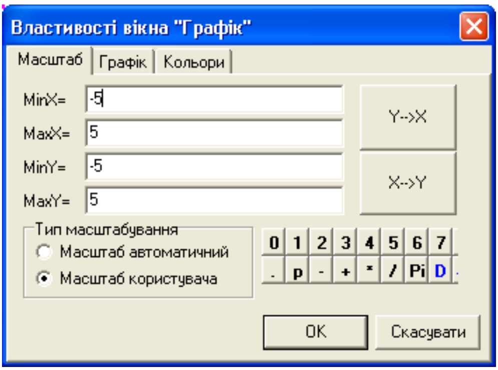


Рис. 3.2

Змінити масштаб можна за допомогою “мишки”, збільшивши деяку частину вікна “Графік” до розмірів усього вікна. Для цього у вікні “Графік” необхідно вказати дві протилежні вершини прямокутника, в який потрібно заключити частину зображення, що збільшується: встановити курсор “мишки” в обрану точку, натиснути ліву клавішу “мишки” та, не відпускаючи її, перевести курсор в іншу точку – протилежну вершину прямокутника, після чого ліву клавішу “мишки” відпустити.

Як тільки буде зафіксовано другу вершину прямокутника, у вікні “Графік” будується збільшена до розмірів усього вікна частина зображення, що була заключена в прямокутник. Крім того автоматично змінюються відповідним чином і масштаби вдовж осей Ox та Oy. Така операція використовується за необхідності уточнити вид графіка в деякій його частині, координати характерних його точок тощо.

В разі потреби фрагмент збільшеного зображення також можна збільшити, як і раніше.

На панелі інструментів знаходяться кнопки “M_+” та “M_-”, за допомогою яких також можна змінювати масштаб. За допомогою кнопки “M_+” (збільшити масштаб) значення кожного параметра масштабу збільшується вдвічі, за допомогою кнопки “M_-” (зменшити масштаб) – зменшується вдвічі. В разі необхідності за допомогою послуги “Графік / Масштаб / Попередній масштаб” можна повернутися до попереднього масштабу. Для цього також призначена кнопка “$M_{\leftarrow}$” панелі інструментів.

За замовчуванням масштаб встановлюється згідно Рис. 3.2 ($MinX = -5$, $MaxX = 5$, $MinY = -5$, $MaxY = 5$) – так званий “початковий масштаб”. Цей масштаб можна встановити, звернувшись до послуги “Графік / Масштаб / Початковий масштаб” або “натиснувши” кнопку  на панелі інструментів.

Викликати допоміжне вікно “Властивості вікна “Графік”” також можна, використовуючи послугу “Графік / Параметри вікна “Графік””, оскільки встановлення параметрів вікна не обмежується тільки встановленням масштабу.

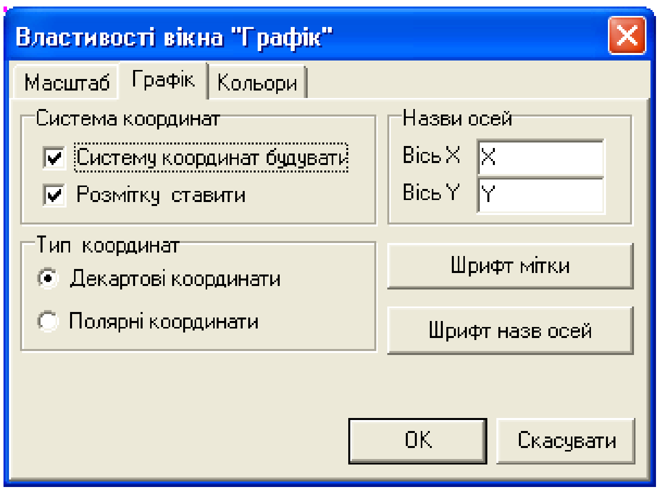


Рис. 3.3

На закладинці “Графік” (Рис. 3.3) містяться наступні пункти:

- зображати осі координат чи ні;
- чи зображати вузли координатної сітки;
- позначення осей абсцис і ординат (для розв’язування окремих задач буває необхідно називати ці осі не X та Y, а іншим чином);
- тип системи координат;
- встановлення типу та розміру шрифтів, що використовуються для написання міток та розмітки осей координат.

Використовуючи закладинку “Кольори”, можна змінити колір фону, тексту, координатних осей та інших елементів (Рис. 3.4). Обраний колір позначається літерами “FG”.

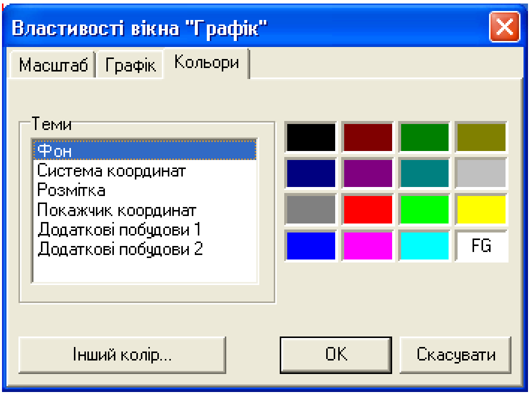


Рис. 3.4

У декартовій системі координат положення точки на площині визначається її проекціями на вісь Ox (абсциса) і на вісь Oy (ордината).

У полярній системі координат положення точки на площині визначається її відстанню від початку координат (полярний радіус) і кутом між додатнім напрямом полярної осі (горизонтальної напівпрямої, що виходить з початку координат і напрямлена вправо) і відрізком, що з’єднує розглядувану точку з початком координат. Цей кут (полярний кут) відкладається від полярної осі проти годинникової стрілки і змінюється в межах від 0 до 2π.

Щоб вказати бажаний тип координат, слід на закладинці “Графік” допоміжного вікна “Властивості вікна “Графік”” встановити перемикач на потрібний пункт: “Декартові координати” чи “Полярні координати” (Рис. 3.3). Якщо вказано тип “Полярні координати”, то позначення координатних осей відсутнє, хоча при цьому не забороняється будувати осі чи вузли декартової системи координат.

Вказати тип координат можна також за допомогою кнопок панелі інструментів.

Визначити координати деякої точки на площині можна одним з двох способів, в залежності від того, використовується “мишка” чи клавіатура:

- ➢ перемістити вказівник “мишки” у вікно “Графік”. В такому разі у вікні з’являється курсор (у вигляді хрестика), центр якого співпадає з кінчиком вказівника “мишки”, а вгорі зліва у графічному вікні подаються координати точки, в яку встановлено вказівник (Рис. 3.5). Якщо переміщувати “мишку”, то одночасно переміщується курсор і відповідно змінюються координати точки, в якій знаходиться курсор, доки вказівник “мишки” знаходиться у вікні “Графік”. Якщо вказівник “мишки” виходить за межі вікна, курсор або фіксується в останньому положенні, або зникає;
- ➢ звернутись до послуги “Графік / Координати з клавіатури”. В такому разі відбувається перехід до вікна “Графік”. З’являється курсор, управління яким здійснюється за допомогою клавіш управління курсором клавіатури: “←”, “→”, “↑”, “↓”. Якщо курсор доходить до межі вікна, то він автоматично переміщується на протилежну межу вікна.

У такий спосіб можна знайти координати наперед визначеної точки або ж встановити курсор в точку з наперед вказаними координатами.

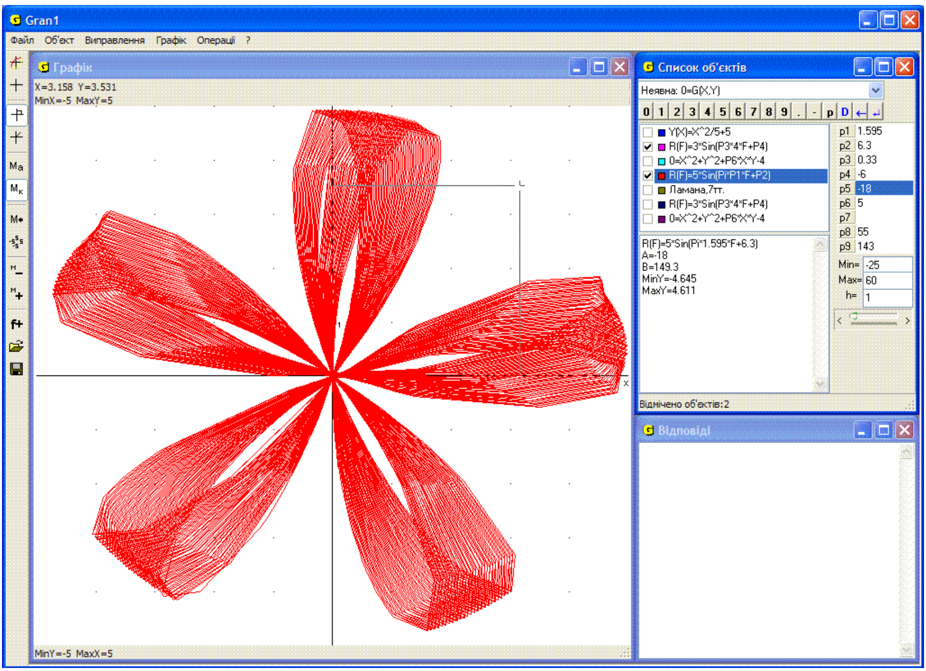


Рис. 3.5

В разі використання декартової системи координат вигляд вікна “Графік” показано на Рис. 3.5: зображені осі координат (якщо їх зображення не вимкнене), а від курсора опущені перпендикуляри на осі (навіть якщо самі осі і не зображені). Координати X та Y точки, в якій знаходиться курсор, відображаються у спеціально відведеному рядку у вікні “Графік” (вгорі зліва). На Рис. 3.5 $X = 3.158$, $Y = 3.531$.

В разі використання полярної системи координат вигляд вікна “Графік” змінюється: курсор з’єднується відрізком з початком координат, а в рядку координат вікна “Графік” відображаються полярні координати точки – полярний радіус ρ, який в програмі позначається літерою R, та полярний кут φ в радіанах та градусах, що позначається літерою F (Рис. 3.6). На Рис. 3.6 $\rho = 5.36$, $\varphi = 0.905$ (51.85°).

Від полярних координат до декартових і навпаки можна перейти, використовуючи формули:

$$x = r\cos\varphi;\ \ y = r\sin\varphi;\ \ r = \sqrt{x^2 + y^2};\ \ \varphi = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}.$$

За використання послуг програми GRAN1 необхідність у відповідних обчисленнях відпадає.

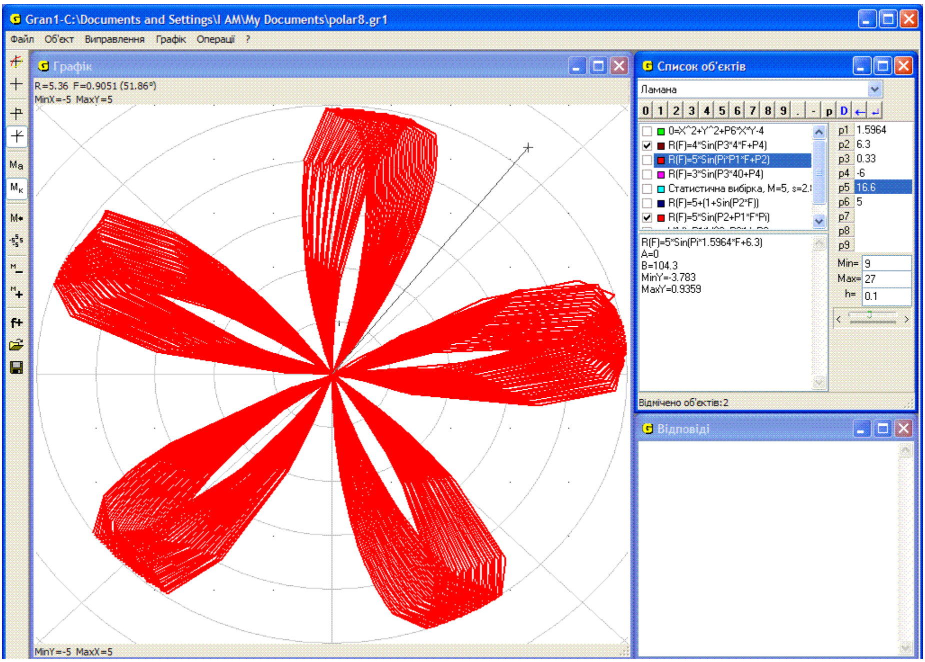


Рис. 3.6

Запитання для самоконтролю

1. Як встановити масштаби вздовж осей Ox і Oy ?
2. Як можна змінити масштаб вимірювання полярного кута?
3. Чи можна не подавати зображення координатних осей? Як змінити назви осей?
4. Як змінити колір фону, осей, тексту?
5. Як можна визначити декартові або полярні координати деякої точки?
6. Як встановити курсор в точку з заданими координатами?
7. Як можна знайти полярні координати точки, знаючи її декартові координати? Як знайти декартові координати точки, знаючи її полярні координати?
8. Чи може полярний кут набувати значення: - 2? 4? 2?

§4. Ламана лінія. Довжина ламаної

За необхідності побудувати ламану лінію потрібно спочатку вказати тип залежності між змінними *x* і *y* “Ламана”, для чого досить вказати відповідний тип у вікні “Список об’єктів” (Рис. 4.1).

Потім необхідно звернутися до послуги “Об’єкт / Створити” або натиснути кнопку “**f+**” на панелі інструментів. В результаті з’являється вікно “Координати вершин ламаної” (Рис. 4.2).

Для того, щоб ввести вершини ламаної, можна використати клавіатуру, “мишку” або прочитати координати вершин із текстового файлу.

Для введення координат вершин ламаної за допомогою клавіатури використовується таблиця введення. Координати вершин вводяться парами: абсциса в стовпці X, ордината в стовпці Y. Перехід до наступної вершини здійснюється натисненням клавіші “Enter” (або клавіш управління курсором). Порядкові номери вершин відображаються в таблиці зліва. Загальна кількість вершин ламаної не повинна перевищувати 10000. Зліва вгорі над таблицею розташовані три кнопки:

- кнопка  використовується, коли потрібно вставити нову вершину між тими, що були введені раніше. Для цього потрібно встановити курсор в рядок, наступний за тим, після якого необхідно вставити координати нової вершини, та “натиснути” кнопку . В результаті з’являється пара нових порожніх клітин, в які записують координати нової вершини;

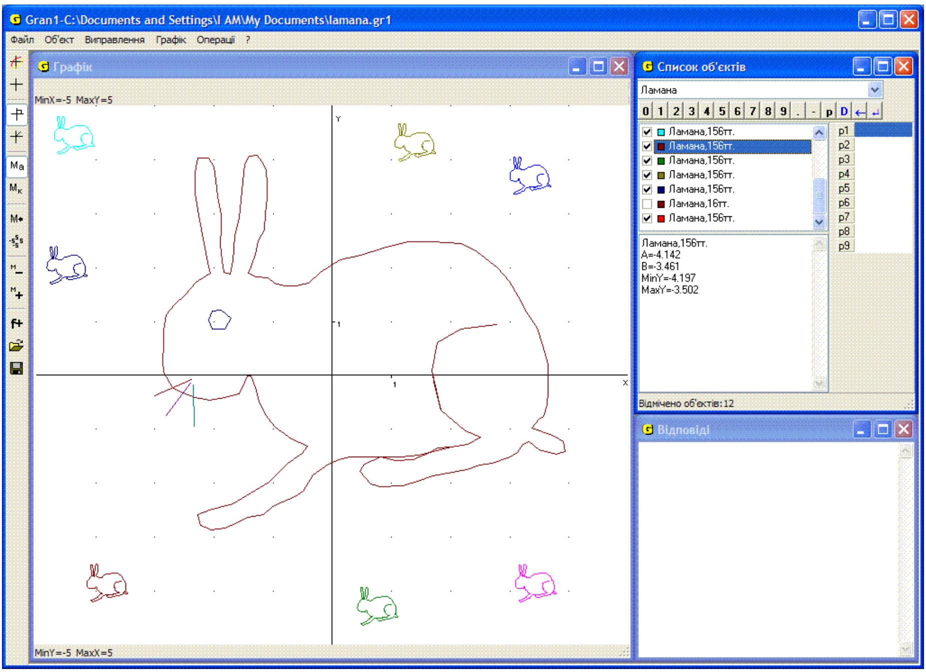


Рис. 4.1

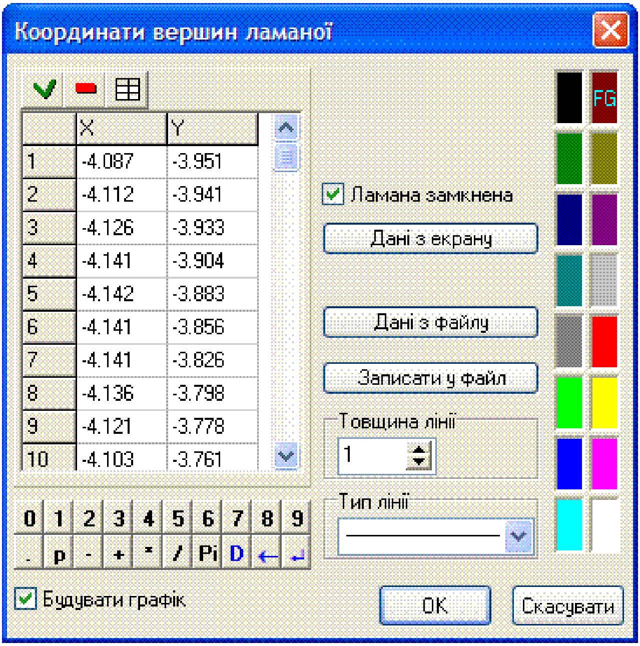

Координати вершин ламаної
X
Y
1 -4.087 -3.951
2 -4.112 -3.941
3 -4.126 -3.933
4 -4.141 -3.904
5 -4.142 -3.883
6 -4.141 -3.856
7 -4.141 -3.826
8 -4.136 -3.798
9 -4.121 -3.778
10 -4.103 -3.761
Ламана замкнена
Дані з екрану
Дані з файлу
Записати у файл
Товщина лінії
Тип лінії
Будувати графік
OK
Скасувати

Рис. 4.2

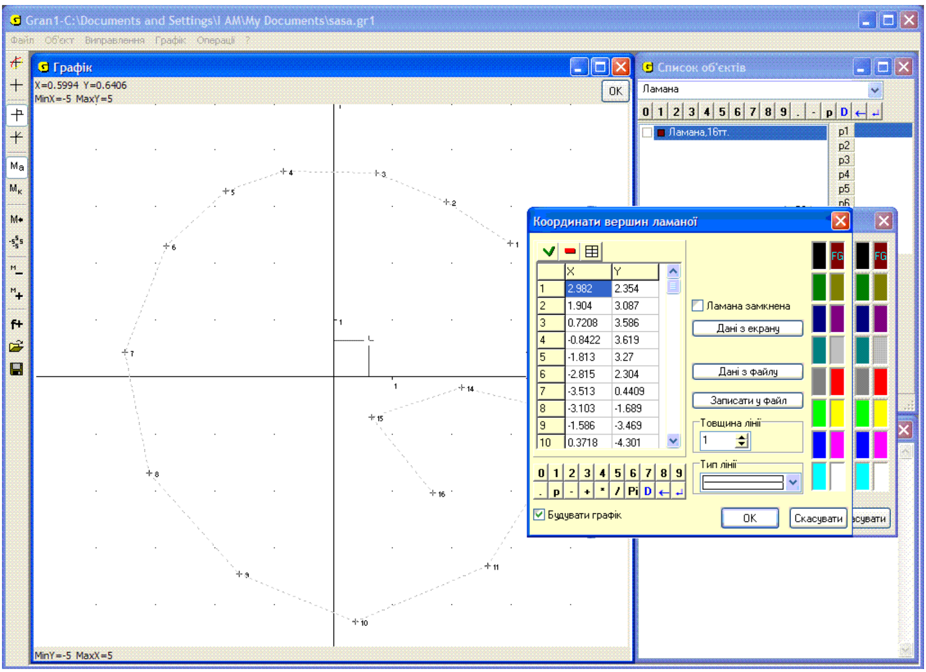

Gran1-C:\Documents and Settings\I AM\My Documents\sasa.gr1
Графік
X=0.5994 Y=0.6406
MinX=-5 MaxY=5
MinY=-5 MaxX=5
Список об'єктів
Ламана
Координати вершин ламаної
1 2.982 2.354
2 1.904 3.087
3 0.7208 3.586
4 -0.8422 3.619
5 -1.813 3.27
6 -2.815 2.304
7 -3.513 0.4409
8 -3.103 -1.689
9 -1.586 -3.469
10 0.3718 -4.301
Ламана замкнена
Дані з екрану
Дані з файлу
Записати у файл
Товщина лінії
Тип лінії
Будувати графік
OK
Скасувати

Рис. 4.3

- кнопка використовується для вилучення вершини, яка була введена раніше. Для цього потрібно встановити курсор в одну з клітинок рядка, де містяться координати вершини, яку потрібно вилучити, та “натиснути” кнопку . Рядок вилучається, а всі наступні рядки, зміщуються вгору;
- кнопка використовується для очищення всієї таблиці.

Після введення координат вершин ламаної слід вказати колір ламаної, для чого потрібно переставити вказівник “FG” (Рис. 4.2) у відповідне положення. Після натиснення кнопки “ОК” буде сформовано новий об’єкт типу “Ламана”, а у вікні “Список об’єктів” з’явиться його ім’я у вигляді “Ламана, 165 тт.” (Рис. 4.3), в якому також вказано, із скількох ланок складена ламана.

Якщо відмітку “Ламана замкнена” (Рис. 4.2) встановлено, то створюється замкнена ламана, тобто ламана, в якій перша та остання вершини з’єднані. В протилежному випадку ламана не замкнена. Якщо під час введення ламаної ввести лише дві вершини, утвориться відрізок, яким з’єднуються дві вказані точки.

Вершини ламаної можна вводити “з екрану”, використовуючи маніпулятор “мишка”. Для цього необхідно у вікні “Координати вершин ламаної” “натиснути” кнопку “Дані з екрану” (Рис. 4.2), після чого розкривається вікно “Графік” в зміненому вигляді (Рис. 4.3).

Від стандартного воно відрізняється наявністю кнопки “ОК” в правому верхньому куті. Для введення вершин ламаної необхідно почергово встановити курсор в потрібні точки, натискуючи кожного разу ліву клавішу “мишки”. Кожна вершина мітиться хрестиком, поруч з яким вказується номер вершини. Встановлюючи курсор почергово у вершини ламаної та фіксуючи його в кожній з них, одержимо набір вершин ламаної (Рис. 4.3). Після введення останньої вершини ламаної необхідно “натиснути” кнопку “ОК” вгорі праворуч у вікні “Графік”.

Після “натиснення” кнопки ОК номери вершин та їх координати подаються у таблиці в допоміжному вікні “Координати вершин ламаної” (Рис. 4.2, Рис. 4.3). В разі потреби координати точок можна відкоригувати, додати рядки (скориставшись кнопкою) чи вилучити рядки (скориставшись кнопкою). Після “натиснення” кнопки ОК у вікні “Координати вершин ламаної” створення об’єкта буде завершено. Далі з об’єктом можна виконувати операції, передбачені в програмі – будувати графіки, змінювати об’єкт та інші.

Якщо потрібно вставити нові точки всередину списку, слід обрати послугу "Об'єкт змінити", далі у вікні "Координати вершин ламаної" вказати на рядок, перед яким потрібно вставити новий (встановити курсор мишки на рядок і натиснути її ліву клавішу), після чого "натиснути" кнопку ✓. В результаті номери вказаного і всіх наступних рядків будуть збільшені на 1, а на місці вказаного з'явиться порожній рядок, в який можна вводити координати точки, що додається.

Якщо рядок потрібно вилучити, слід вказати на нього, після чого "натиснути" кнопку ▬. В результаті вказаний рядок вилучається, а номери всіх наступних зменшуються на 1.

Коригування Ламаної можна здійснювати також "з екрану". Для цього потрібно звернутись до послуги "Об'єкт / Змінити", після чого з'явиться допоміжне вікно "Координати вершин ламаної", в якому слід звернутись до послуги "Дані з екрану" (Рис. 4.2, Рис. 4.3). В результаті з'явиться допоміжне вікно "Графік", в якому будуть зображені вершини ламаної (Рис. 4.4). Встановивши курсор на потрібну точку (точка буде заключена в квадратну рамку), потрібно викликати контекстне меню (натиснувши праву клавішу "мишки").

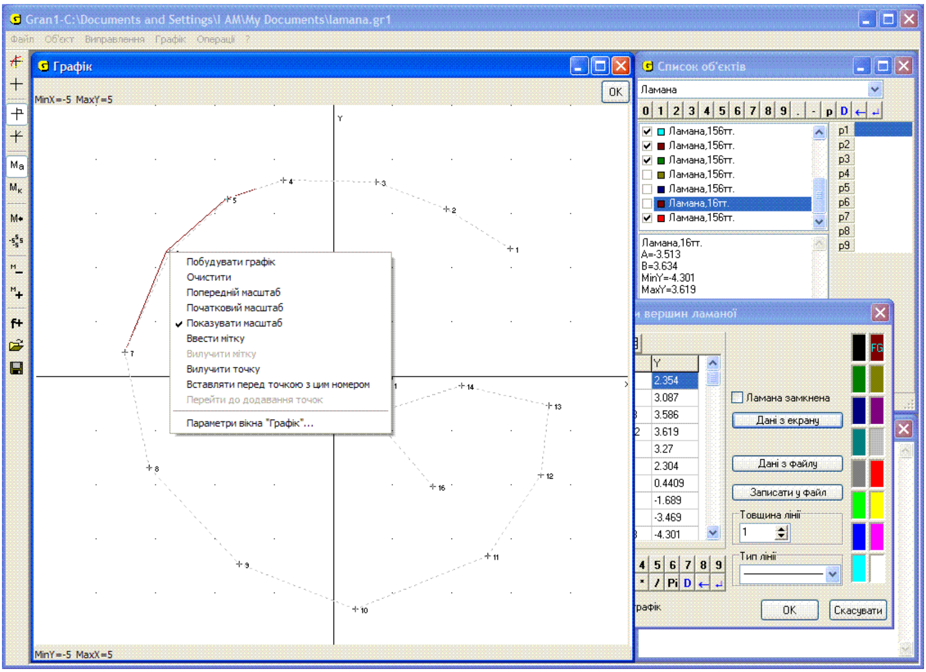


Рис. 4.4

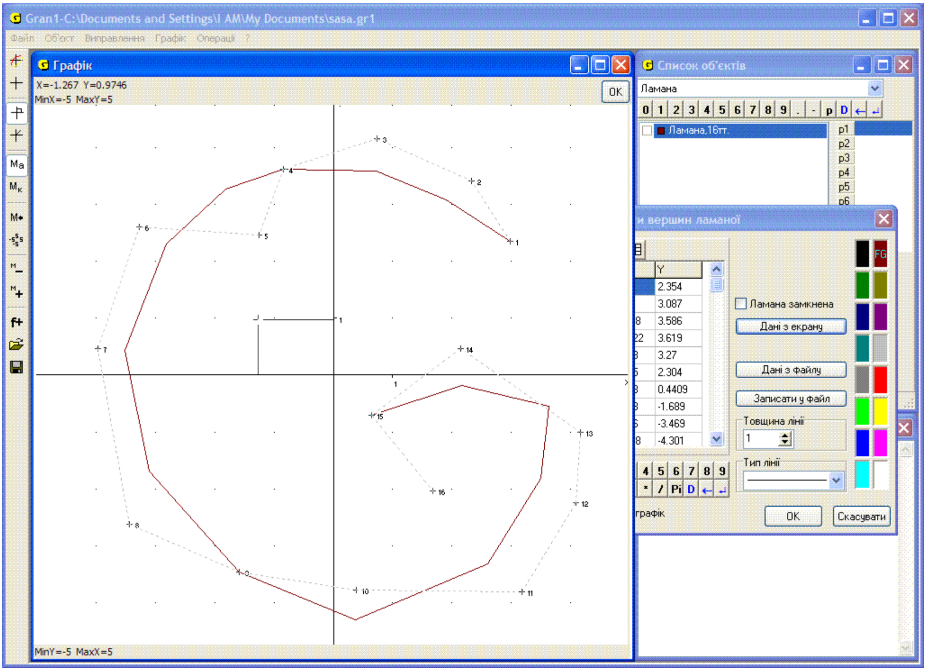
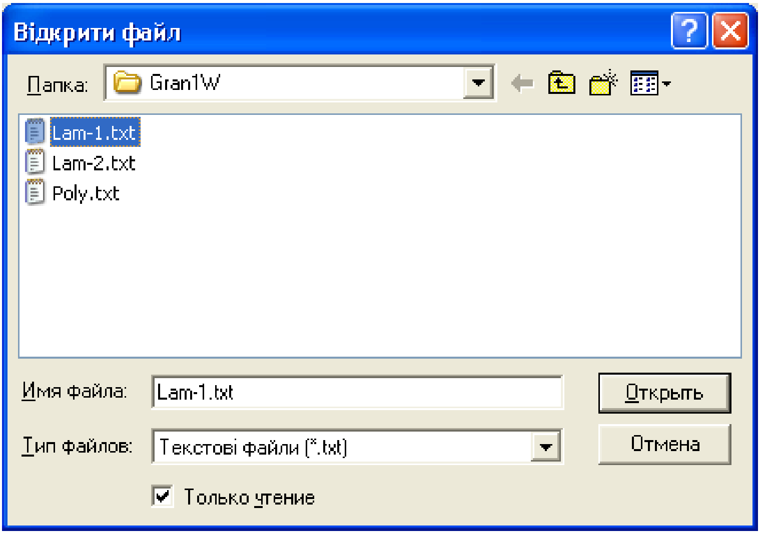


Рис. 4.5

Далі слід звернутись до послуги “Вставляти перед точкою з цим номером”, якщо будуть вставлятися нові точки, або ж до послуги “Вилучити точку”, якщо вказану точку потрібно вилучити. Вставити перед точкою з вказаним номером можна кілька точок. В такому разі щоразу номери наступних точок збільшуються на 1. В разі вилучення точки номери всіх наступних зменшуються на 1.

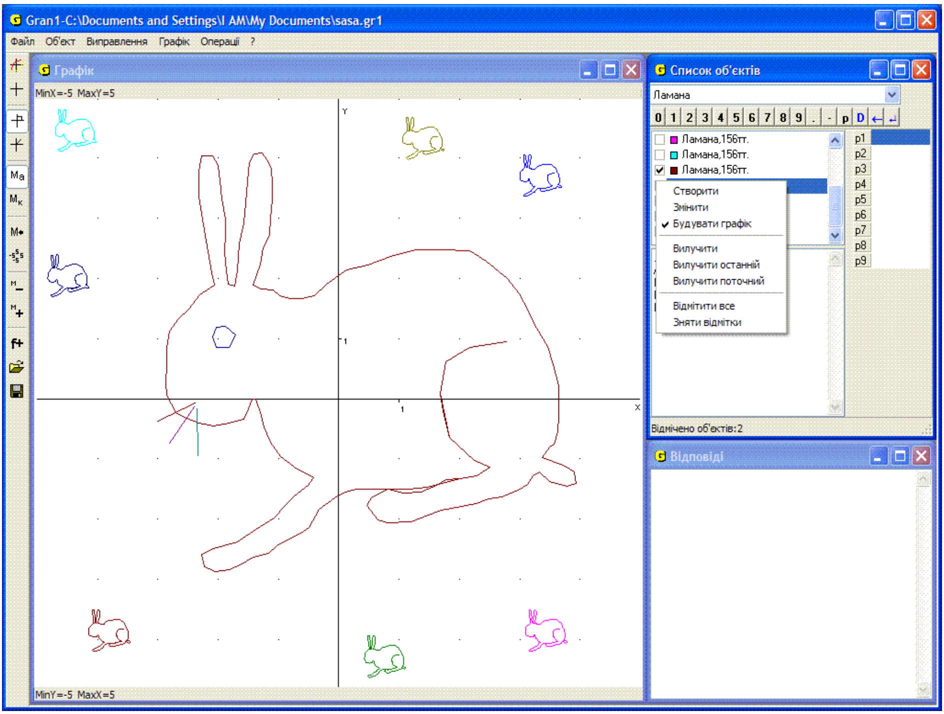
Точки також можна переміщувати на екрані, для чого після звернення до послуги “Об’єкт / Змінити” досить встановити курсор “мишки” на точку, яку необхідно переміщувати, натиснути ліву клавішу “мишки” і, утримуючи її, перемістити “мишку” в потрібному напрямі. Після відпускання лівої клавіші “мишки” точку буде переміщено на нове місце (Рис. 4.5). У вікні “Графік” різними кольорами подаються вихідна та змінена ламані. Відповідним чином після “натискання” кнопки “ОК” змінюються і координати зміщених точок (що подаються у вікні “Координати вершин ламаної”).

Під час створення ламаної можна вводити координати вершин з дискового файлу. Це можна зробити, скориставшись кнопкою “Дані з файлу” у допоміжному вікні “Координати вершин ламаної” (Рис. 4.2). В такому разі відкривається стандартне допоміжне вікно, в якому необхідно вказати потрібний файл (Рис. 4.6).



Відкрити файл
Папка: Gran1W
Lam-1.txt
Lam-2.txt
Poly.txt
Имя файла: Lam-1.txt
Открыть
Тип файлов: Текстові файли (*.txt)
Отмена
Только чтение

Рис. 4.6



Gran1-C:\Documents and Settings\I AM\My Documents\sasa.gr1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
MinX=-5 MaxY=5
MinY=-5 MaxX=5
Список об'єктів
Ламана
Ламана,15бт.
Ламана,15бт.
Ламана,15бт.
Створити
Змінити
Будувати графік
Вилучити
Вилучити останній
Вилучити поточний
Відмітити все
Зняти відмітки
Відмічено об'єктів:2
Відповіді

Рис. 4.7

Файл даних є звичайним текстовим файлом, в якому окремими рядками записані пари координат вершин ламаної. Цей файл можна створити за допомогою будь-якого текстового редактора. Якщо ламана створена одним із способів, що наведені вище, то координати її вершин можна записати в текстовий файл, використовуючи кнопку “Записати в файл” у допоміжному вікні “Координати вершин ламаної” (Рис. 4.2, Рис. 4.3).

Після того, як всі вершини ламаної введені, можна одержати її графічне зображення, для чого необхідно звернутися до послуги “Графік / Побудувати”. В результаті у вікні “Графік” будуть побудовані графічні образи лише тих об’єктів, для яких відмічено міткою ☑ пункт “Будувати графік” у допоміжному вікні “Координати вершин ламаної” (Рис. 4.2). Побудувати графіки можна також “натиснувши” кнопку  на панелі інструментів.

Якщо об’єктів кілька, то скориставшись контекстним меню, яке викликається натисненням правої кнопки “мишки”, коли курсор встановлено у вікні “Список об’єктів”, можна одразу поставити або зняти відмітки біля позначень всіх об’єктів, що знаходяться у вікні (Рис. 4.7).

Графіки побудованих об’єктів можна стерти, скориставшись послугою меню “Графік / Очистити” або натиснувши кнопку  на панелі інструментів. Щоб відновити стерті графіки, слід скористатись послугою “Графік / Побудувати”.

За необхідності обчислити довжину ламаної чи її ділянки можна скористатися послугою “Операції / Операції з ламаними / Довжина ламаної...” (Рис. 4.8). Під час звернення до цієї послуги з’являється допоміжне вікно для введення номерів вершин ламаної (Рис. 4.9). В цьому вікні слід вказати номери першої “N1=” та останньої “N2=” вершин ламаної, між якими знаходиться ділянка, довжину якої необхідно обчислити. Однак номер вершини не може бути меншим за 1 та більшим за кількість вершин ламаної.

Якщо ламана замкнена, то перебирання точок “зациклюється”, тобто після найбільшого номера слідує номер 1 і т.д. Під час обчислення довжини ланки замкненої ламаної обхід вершин ламаної здійснюється в порядку їх введення із зациклюванням від найбільшого номера до найменшого. Це дає змогу обчислити довжину будь-якої ланки замкненої ламаної, зберігаючи незмінним напрям обходу її контуру. Якщо необхідно обчислити повну довжину замкненої ламаної (периметр многокутника), необхідно як початковий та кінцевий номери вершин ланки ламаної вказати один і той самий номер.

Для незамкненої ламаної номер початкової вершини ланки ламаної повинен бути меншим, ніж номер кінцевої. Якщо номери вершин вказані некоректно (першим вказано більший номер, ніж другий), то з’являється повідомлення про помилку “Неправильно задано номери вершин”, після чого слід повторити введення номерів вершин.

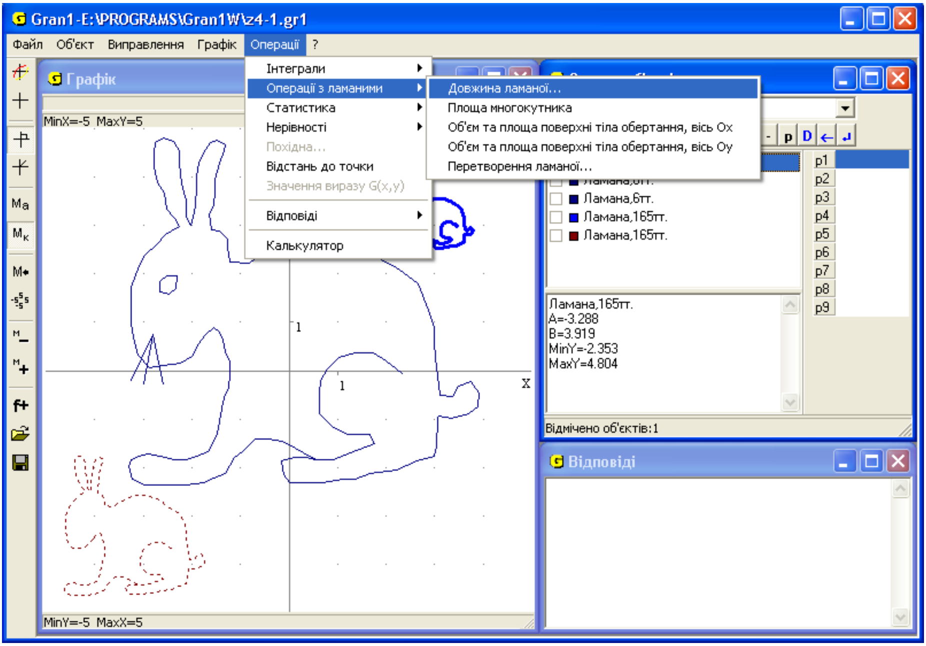


Рис. 4.8

Після коректного введення номерів вершин вказана ланка ламаної замальовується кольором, вказаним в пункті "Додаткові побудови 1" закладинки "Кольори" вікна "Властивості вікна "Графік"" (Рис. 3.4). У вікні "Відповіді" з'являється нове повідомлення з написом "Довжина ламаної" (Рис. 4.10), в якому вказані номери початкової та кінцевої вершин ланки ламаної та довжина цієї ланки. Перейти до цього вікна можна з використанням маніпулятора "мишка" або обравши послугу "Операції / Відповіді / Перегляд відповідей" (Рис. 4.11).

Повідомлення, що подаються у вікні "Відповіді" – це звичайний текст, тому, відмітивши весь текст або його частину, можна занести його до буфера обміну для використання в інших програмах.

За необхідності внести зміни до ламаної, що була створена раніше, слід звернутися до послуги "Об'єкт / Змінити", після чого знову з'явиться вікно введення вершин ламаної (Рис. 4.2). В даному разі вказівник у вікні "Список об'єктів" повинен бути встановлений на потрібному об'єкті типу "Ламана". В таблицю координат вершин будуть занесені координати вершин поточної ламаної. Можна виправити координати будь-якої вершини, вилучити окремі вершини, вилучивши з таблиці відповідні рядки, або додати нові вершини, вставляючи їх між іншими, згідно з наведеними вище правилами.

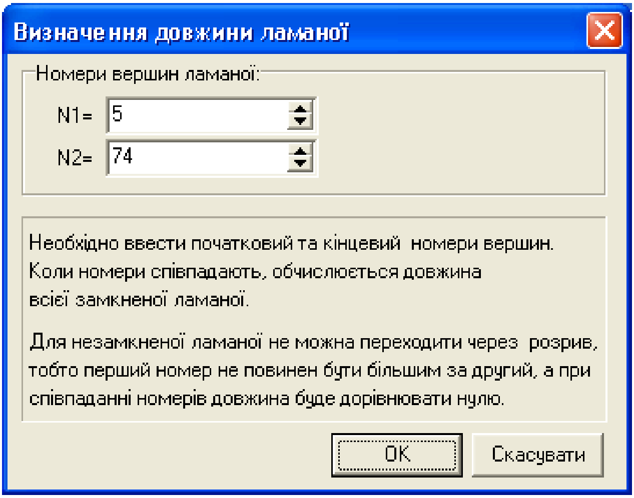


Рис. 4.9

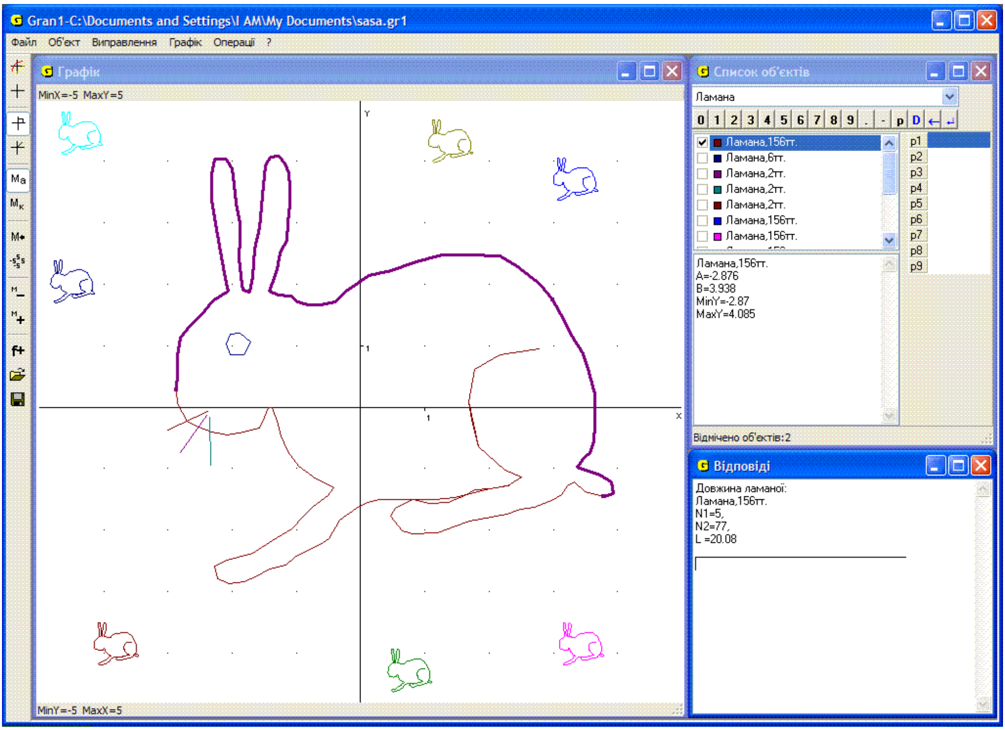


Рис. 4.10

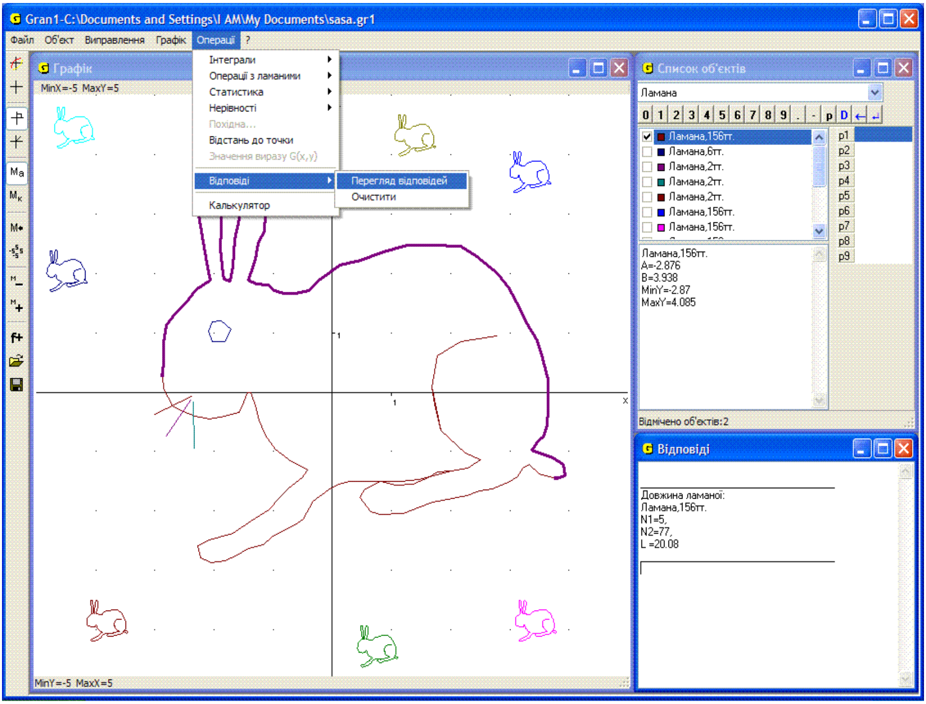


Рис. 4.11

Запитання для самоконтролю

1. Який тип залежності між координатами x і y потрібно встановити перед введенням координат набору вершин ламаної лінії?
2. Скільки вершин може міститися в таблиці, за допомогою якої подають ламану лінію?
3. Як вказати, розглядається замкнена чи незамкнена ламана?
4. Як вказати, що введення вершин ламаної закінчено?
5. Як довідатися, із скількох ланок складена ламана?
6. Як обчислити довжину деякої ділянки ламаної?
7. Як обчислити периметр многокутника, поданого замкненою ламаною?
8. Як обчислити довжину сторони многокутника між вершинами, вказаними першою і останньою?
9. Як ввести таблицю із заздалегідь підготовленого файлу?
10. Як ввести таблицю з екрану?
11. Як можна внести зміни до раніше введеної таблиці?
12. Що відбудеться, якщо під час звернення до послуги “Об’єкт / Змінити” вказати, що ламана замкнена, якщо раніше була зазначена незамкнена (і навпаки), а в самій таблиці нічого не змінювати?
13. Як побудувати зображення тільки деяких ламаних, позначення яких вказані у вікні “Список об’єктів”?
14. Як відмітити позначення ламаних, зображення яких необхідно побудувати?

15. Як, використовуючи операції над ламаною, обчислити відстань між двома точками?

Вправи для самостійного виконання

1. Ввести ламані із заздалегідь підготовлених файлів і визначити кількість вершин в них і довжину кожної з них.
2. Ввести з екрану ламану з 10 вершинами, а потім, використовуючи послугу "Об'єкт / Змінити", вставити ще дві вершини між 3-ю і 4-ю та між 7-ю і 8-ю вершинами, не вводячи заново раніше введені вершини.
3. Побудувати графіки 1-ї і 3-ї ламаної, якщо введені 5 різних ламаних.
4. Ввести з екрану чотири різні ламані такі, щоб після побудови їх графіків утворилося слово "ПЛІТ".
5. Трикутник заданий координатами своїх вершин: (0, 0), (3, 4), (4, 2). Побудувати на екрані зображення цього трикутника й обчислити довжини всіх його сторін, а також периметр.
6. Ввести з екрану довільну замкнену ламану з не менш ніж 20 вершинами й обчислити її довжину.

§5. Перетворення ламаної

Для виконання деяких операцій над ламаними лініями можна скористатися послугою “Операції / Операції з ламаними / Перетворення ламаної...” (Рис. 5.1). Операції виконуються над поточним об’єктом типу “Ламана”. В разі звернення до послуги з’являється допоміжне вікно з трьома закладинками: “Деформація”, “Поворот”, “Пар. перенесення” (паралельне перенесення) (Рис. 5.2).

За необхідності здійснити деформацію ламаної слід перейти до закладинки “Деформація” (Рис. 5.2) і ввести коефіцієнт деформації dx вздовж осі Ox та коефіцієнт деформації dy вздовж осі Oy. Введення здійснюється з клавіатури або з використанням панелі введення даних. Після введення коефіцієнтів необхідно “натиснути” кнопку “ОК”. В результаті створюється новий об’єкт – ламана, у якої координати x_i усіх вершин множаться на dx, а координати y_i – на dy. Нова ламана створюється на основі поточної незалежно від того, чи побудоване її зображення у вікні “Графік”.

Якщо $dx=-1$, $dy=1$, отримається фігура, симетрична до вихідної відносно осі Oy, якщо $dx=1$, $dy=-1$ – відносно осі Ox, $dx=-1$, $dy=-1$ – відносно початку координат. Якщо $|dx|=|dy|$, то отримається фігура, подібна до вихідної (Рис. 5.3).

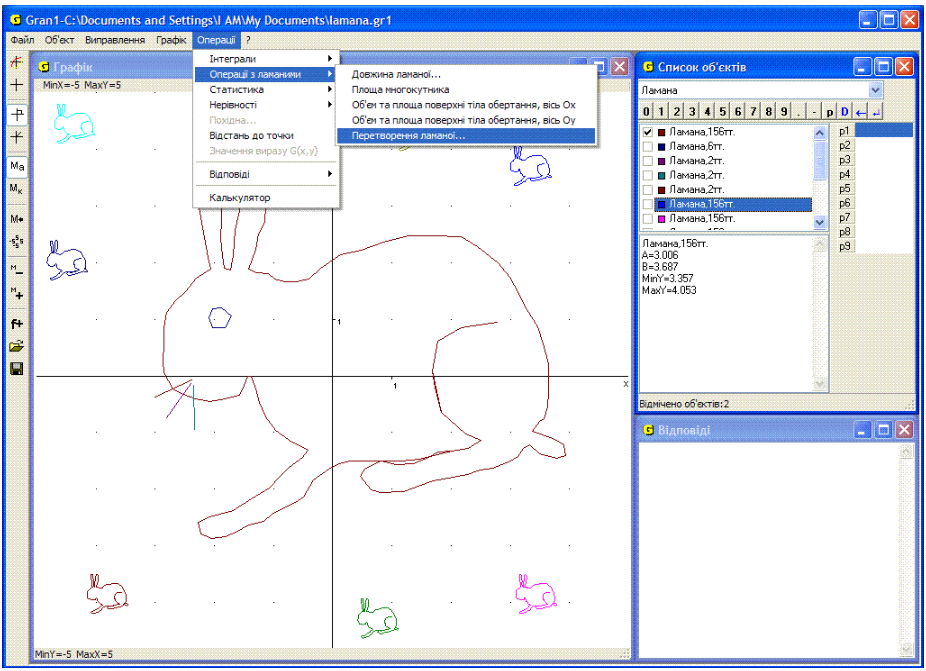


Рис. 5.1

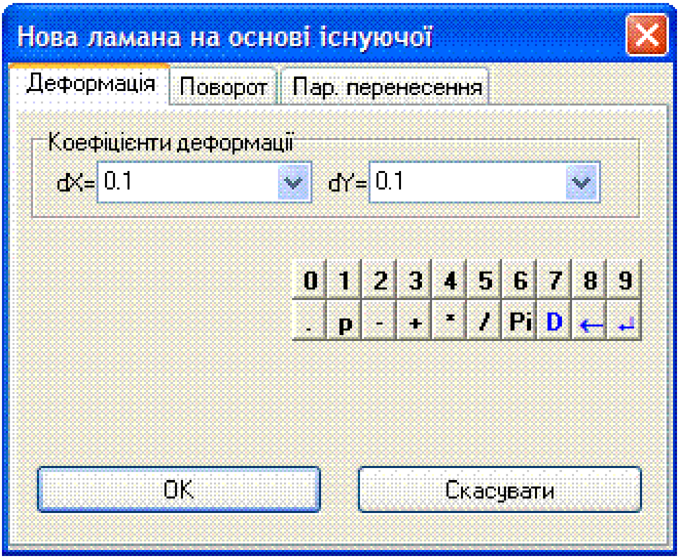

Нова ламана на основі існуючої
Деформація
Поворот
Пар. перенесення
Коефіцієнти деформації
dX= 0.1
dY= 0.1
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
. p - + * / Pi D
OK
Скасувати

Рис. 5.2

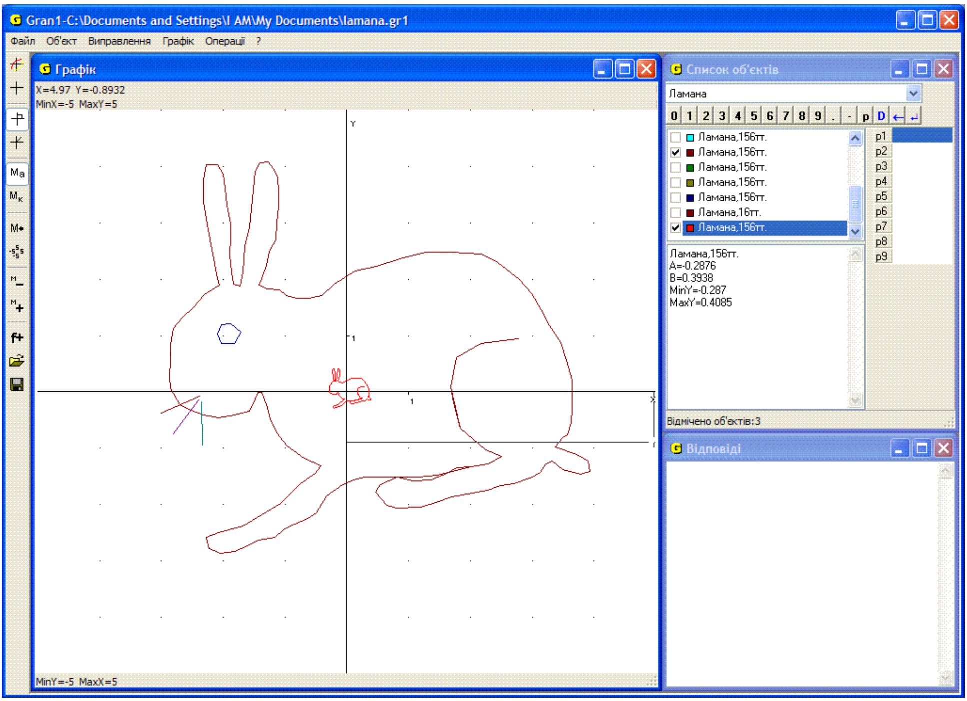

Gran1-C:\Documents and Settings\I AM\My Documents\lamana.gr1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
X=4.97 Y=-0.8932
MinX=-5 MaxY=5
MinY=-5 MaxX=5
Список об'єктів
Ламана
Ламана,156тт.
Ламана,156тт.
Ламана,156тт.
Ламана,156тт.
Ламана,156тт.
Ламана,16тт.
Ламана,156тт.
p1 p2 p3 p4 p5 p6 p7 p8 p9
Ламана,156тт.
A=-0.2876
B=0.3938
MinY=-0.287
MaxY=0.4085
Відмічено об'єктів:3
Відповіді

Рис. 5.3

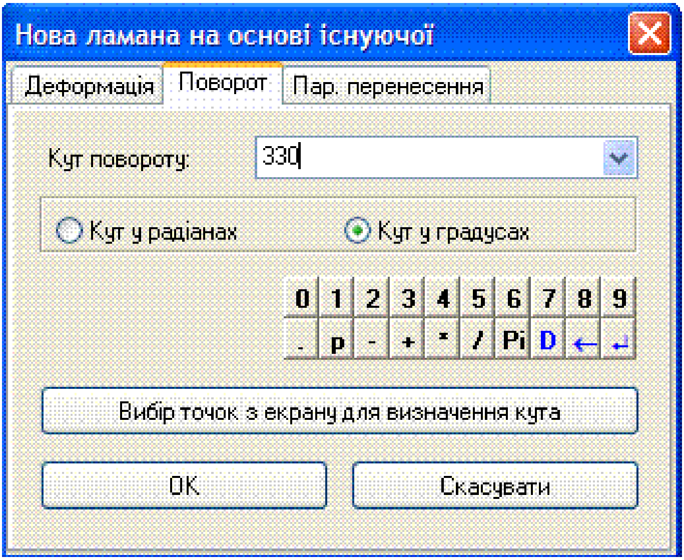


Рис. 5.4

За необхідності здійснити поворот ламаної слід перейти до закладинки “Поворот” і вказати значення кута повороту ламаної навколо початку координат (Рис. 5.4). Значення кута вводиться з клавіатури, панелі введення або з екрану.

“Натиснення” кнопки “ОК” приводить до створення нового об’єкта – ламаної, яка одержується з вказаної після повороту.

В такому разі для відміченої ламаної відбувається поворот системи координат на вказаний кут ($-\gamma$) (за годинниковою стрілкою), а сама ламана відносно системи координат повертається на кут γ (проти годинникової стрілки з центром повороту в початку координат).

Щоб вказати кут повороту з клавіатури, слід ввести значення кута повороту у відповідний рядок, яке вводиться так само, як і будь-які інші числа. Кут повороту можна вказувати в радіанах (прийнято за замовчуванням) або в градусах. Вибір одиниці вимірювання здійснюється за допомогою маніпулятора “мишка” або клавіш управління курсором (Рис. 5.4).

Якщо координати x, y деякої вершини подати через її полярні координати:

$$x = \rho\cos\alpha,\ y = \rho\sin\alpha,$$

то після повороту системи координат на кут γ нові координати цієї вершини будуть

$$x' = \rho\cos(\alpha - \gamma),\ \ y' = \rho\sin(\alpha - \gamma),$$

тобто нові координати (x', y') через вихідні (x, y) можна виразити в такий спосіб:

$$x' = \rho\cos\alpha\cos\gamma + \rho\sin\alpha\sin\gamma = x\cos\gamma + y\sin\gamma,$$

$$y' = \rho\sin\alpha\cos\gamma - \rho\cos\alpha\sin\gamma = -x\sin\gamma + y\cos\gamma.$$

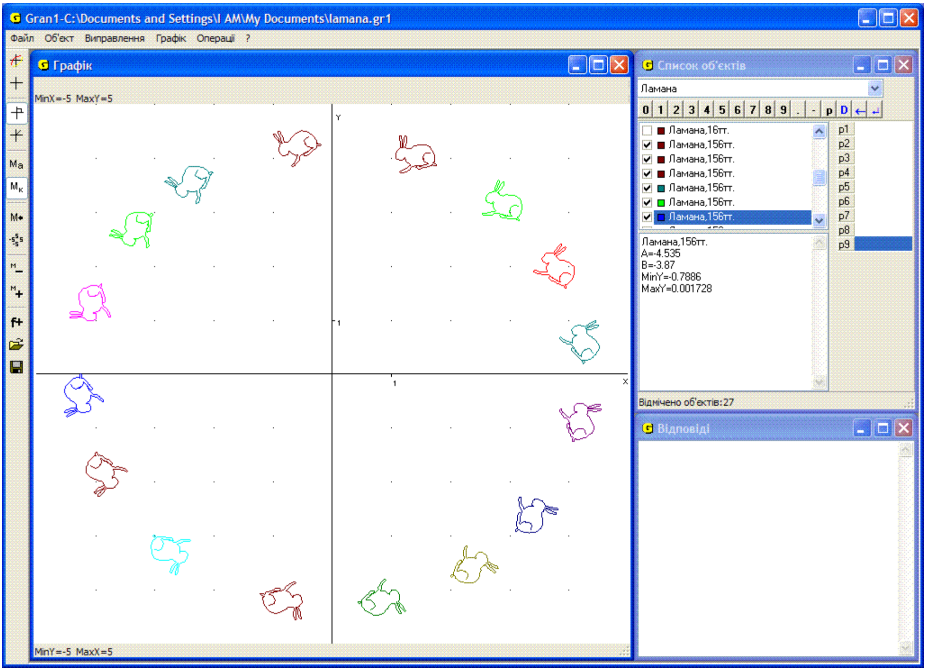


Рис. 5.5

Аналогічно, щоб виразити вихідні координати (x, y) деякої вершини через її нові координати (x', y'), досить повернути нову систему координат на кут $(-\gamma)$. Якщо кут між радіус-вектором точки (x', y') і віссю Ox' дорівнює α', тоді $x' = \rho\cos\alpha'$, $y' = \rho\sin\alpha'$, а після повороту системи координат на кут $(-\gamma)$ (на кут γ за годинниковою стрілкою) одержимо:

$$x = \rho\cos(\alpha' + \gamma) = \rho\cos\alpha'\cos\gamma - \rho\sin\alpha'\sin\gamma = x'\cos\gamma - y'\sin\gamma,$$

$$y = \rho\sin(\alpha' + \gamma) = \rho\sin\alpha'\cos\gamma + \rho\cos\alpha'\sin\gamma = x'\sin\gamma + y'\cos\gamma.$$

За вказаними формулами обчислюються нові координати x_i', y_i' вершин перетвореної ламаної, виходячи з координат (x_i, y_i) вершин вихідної ламаної, і в такий спосіб отримується нова ламана, що являє собою результат повороту вихідної ламаної на кут γ з центром повороту в початку системи координат xOy. На Рис. 5.5 показані результати повороту деякої ламаної на різні кути.

Кут повороту можна задати і з екрану, “натиснувши” попередньо кнопку “Вибір точок з екрану для визначення кута” (Рис. 5.4). Після звернення до цієї послуги на екрані з’являється координатний курсор, з’єднаний відрізком прямої з початком координат, та розмітка полярної системи координат. Встановивши курсор послідовно у дві різні точки на площині, можна задати тим самим кут між радіусами-векторами цих точок, чим і визначається кут повороту попередньо вказаної фігури навколо початку координат (Рис. 5.6). Вибір точок здійснюється аналогічно до того, як задаються вершини ламаної з екрану: вказуються дві точки, після чого потрібно натиснути кнопку “OK” у вікні “Графік” (Рис. 5.6).

В такому разі у верхньому лівому куті вікна “Графік” вказуються полярні координати точок 1 і 2, тобто полярний радіус і полярний кут (а не різниця полярних кутів точок 2 і 1, тобто кут на який здійснюється поворот). Після встановлення точок 1 і 2 слід “натиснути” кнопку OK в правому верхньому кутку вікна “Графік”, після чого з’явиться допоміжне вікно “Нова ламана на основі існуючої”, в рядку “Кут повороту” якого подано кут, на який повертатиметься ламана (різниця полярних кутів точок 2 і 1) (Рис. 5.4). В разі потреби кут повороту можна підкоригувати. Далі слід “натиснути” кнопку “OK” у цьому допоміжному вікні. В результаті буде створено новий об’єкт – нова ламана, отримана на основі раніше відміченої, а потім також побудовано графічне зображення так отриманого об’єкта.

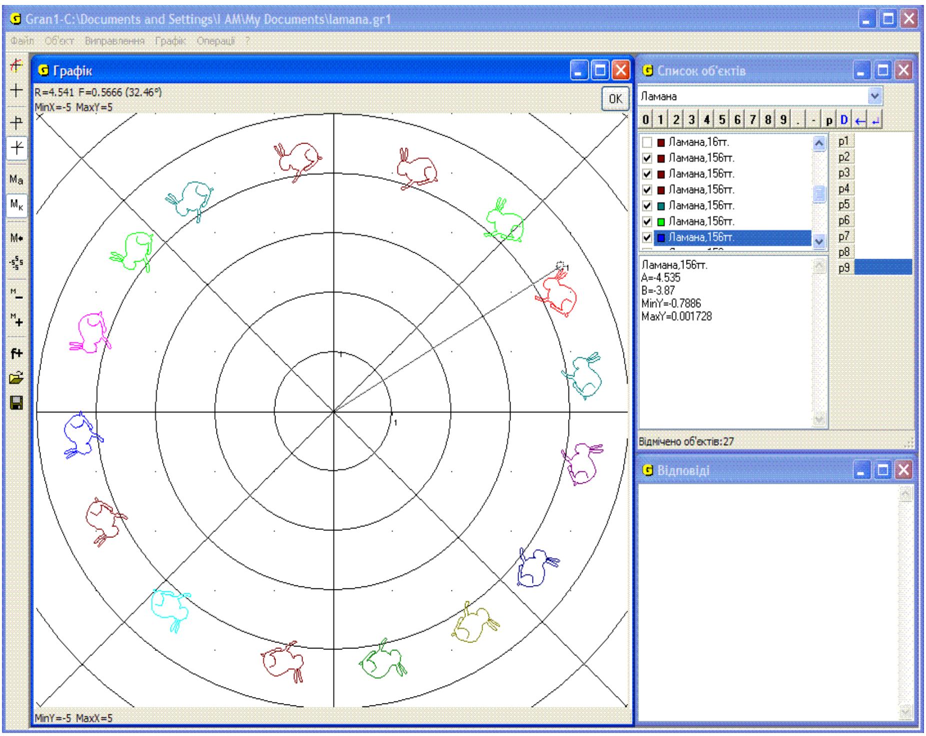


Рис. 5.6

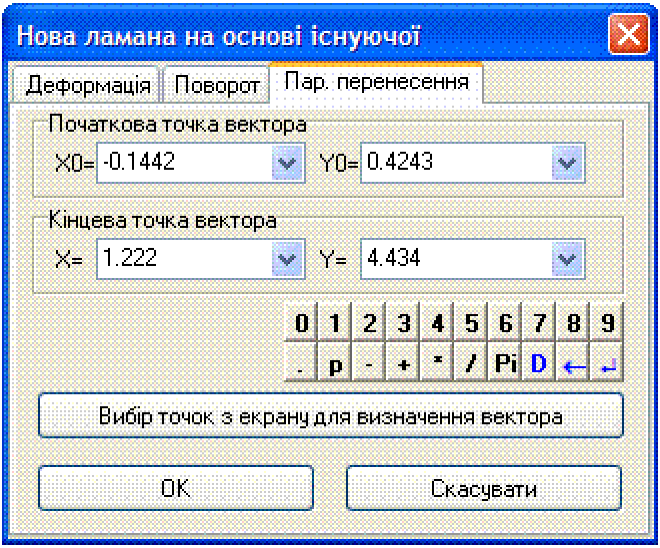

Нова ламана на основі існуючої
Деформація
Поворот
Пар. перенесення
Початкова точка вектора
X0= -0.1442
Y0= 0.4243
Кінцева точка вектора
X= 1.222
Y= 4.434
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
. p - + * / Pi D
Вибір точок з екрану для визначення вектора
OK
Скасувати

Рис. 5.7

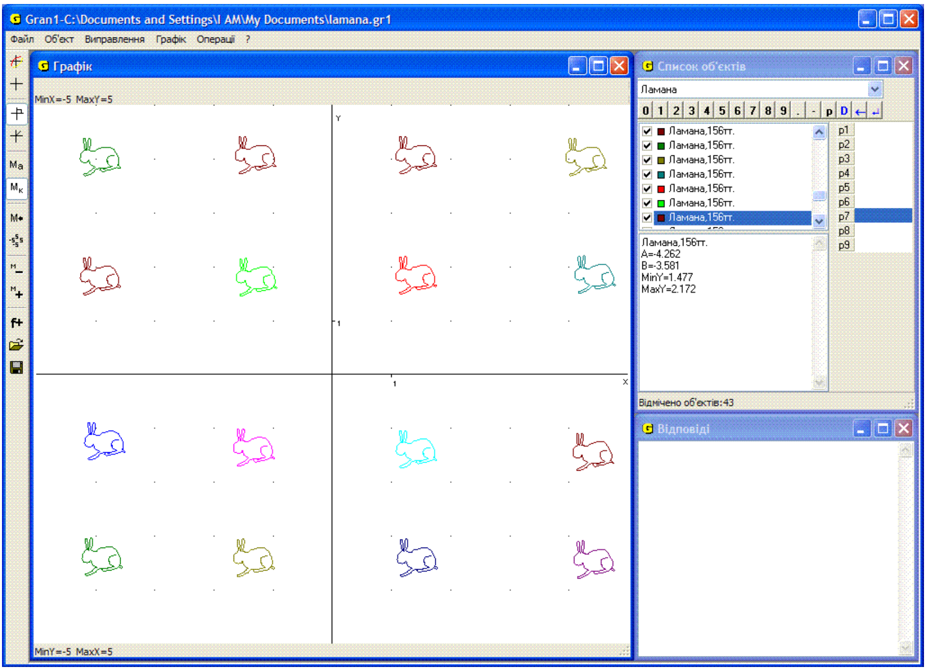

Gran1-C:\Documents and Settings\I AM\My Documents\lamana.gr1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
MinX=-5 MaxY=5
MinY=-5 MaxX=5
Список об'єктів
Ламана
Ламана,156тт.
A=-4.262
B=-3.581
MinY=1.477
MaxY=2.172
Відмічено об'єктів:43
Відповіді

Рис. 5.8

Якщо вказати третю точку, то перша зникне, друга перенумерується в першу, а третя буде вважатись другою. Якщо ж кількість вказаних точок буде менша двох, з'явиться попередження "Необхідно відмітити 2 точки".

В разі звернення до закладинки "Паралельне перенесення" слід ввести координати початкової та кінцевої точок, через які визначається вектор перенесення. В полі "Початкова точка вектора" вводяться початкові координати (x_0, y_0) якої-небудь точки, а в полі "Кінцева точка вектора" – нові координати (x, y) точки, в яку необхідно перемістити точку (x_0, y_0) (Рис. 5.7). Натиснувши кнопку "ОК", одержимо нову ламану (Рис. 5.8), всі вершини якої (x_i', y_i') отримуються з вершин (x_i, y_i) вихідної ламаної додаванням приростів $\Delta x = x - x_0$ до абсцис x_i і $\Delta y = y - y_0$ до ординат y_i.

Після натиснення кнопки "Вибір точок з екрану для визначення вектора" можна обрати початкову та кінцеву точки вектора, почергово вказавши їх на координатній площині так само, як це робилось під час задання з екрану кута повороту. Можна вказати лише одну точку – початкову точку вектора, а іншу ввести з клавіатури чи з панелі введення даних.

На Рис. 5.8 можна побачити кілька ламаних, одержаних в результаті паралельного перенесення однієї з них на різні вектори.

Слід пам'ятати, що вихідна ламана, яка перетворюється, залишається в пам'яті комп'ютера незмінною, а результат перетворення розміщується в кінці списку об'єктів, крім того колір лінії встановлюється автоматично.

Запитання для самоконтролю

1. Які перетворення ламаної можна виконати, використовуючи послуги програми GRAN1?
2. Як вказати позначення ламаної, яку передбачається перетворювати?
3. Як одержати ламану, симетричну до даної відносно:
   осі Ox? осі Oy? початку координат?
4. Як одержати фігуру, подібну до даної?
5. Як здійснити паралельне перенесення ламаної з використанням клавіатури для введення даних?
6. Чи зберігається перетворювана ламана як окремий об'єкт?
7. Як вказати кут, на який необхідно повернути ламану?
8. Чи можна вказувати від'ємний кут повороту?
9. Чи можна вказати коефіцієнт подібності, кут повороту або вектор перенесення, не користуючись клавіатурою?

10. Як, використовуючи послуги програми GRAN1, повернути ламану навколо довільної точки координатної площини?

Вправи для самостійного виконання

1. Побудувати відрізок, яким з’єднуються дві довільні точки на екрані.
2. Повернути відрізок, отриманий в результаті виконання вправи 1:
   - на кут $\frac{\pi}{3}$,
   - на кут $120°$.
3. З відрізків, отриманих в результаті виконання вправ 1 і 2, побудувати два паралелограми, використовуючи паралельне перенесення.
4. Побудувати довільну ламану, а потім виконати операції її деформації з коефіцієнтами: $dx = 1,\ dy = -1$; $dx = -1,\ dy = 1$; $dx = -1,\ dy = -1$; $dx = 2,\ dy = 2$; $dx = 0.2,\ dy = -2$; $dx = -0.5, dy = -2$; $dx = -0.2, dy = -0.4$.
5. Побудувати трикутник з вершинами (1, 1), (1, 4), (3, 2). Використовуючи послуги програми GRAN1, побудувати трикутники, що отримуються із заданого: поворотом на 20° навколо вершини (1,1); поворотом на $\frac{1}{2}$ навколо вершини (1, 4); поворотом на $\frac{\pi}{4}$ навколо вершини (3, 2); поворотом на π навколо початку координат; деформацією з коефіцієнтами: $dx = 1, dy = -1$; $dx = 0.2, dy = 0.2$; $dx = -2, dy = -2$; $dx = -2, dy = 1$.

§6. Площа многокутника. Кути многокутника

За необхідності обчислити площу многокутника, обмеженого деякою замкненою ламаною (без самоперетинань) з довільною кількістю вершин (не більше 10000), можна скористатися послугою “Операції / Операції з ламаними / Площа многокутника” (Рис. 6.1). Для цього необхідно попередньо відмітити позначення ламаної у вікні “Список об’єктів”. Якщо жодна з ламаних не відмічена, обчислюється площа многокутника для поточного об’єкта (коли цей об’єкт – замкнена ламана). В разі обчислення площі многокутника у вікні “Відповіді” з’являється повідомлення, в якому вказані відомості про ламану і площа многокутника (Рис. 6.2). Коли відповідний многокутник зображений у вікні “Графік”, він заштриховується.

Якщо у вікні “Список об’єктів” відмічено кілька замкнених ламаних, то обчислюються площі кожного з многокутників, що обмежені цими ламаними, а одержані результати додаються. У вікні “Відповіді” виводяться відомості про всі ламані та сума їх площ (Рис. 6.3). В разі накладання окремих частин многокутників, спільні ділянки можуть не заштриховуватися.

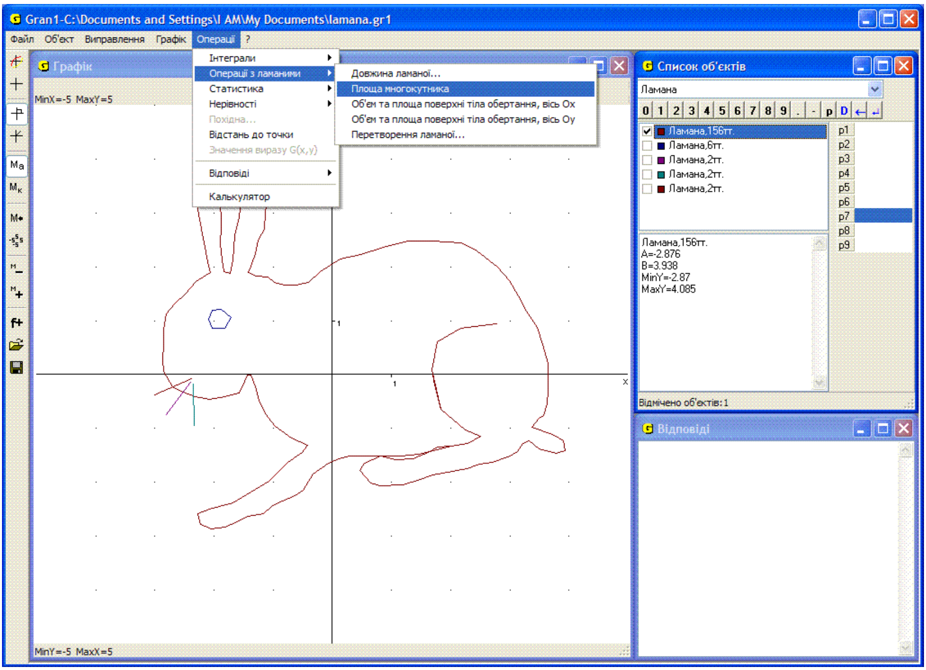


Рис. 6.1

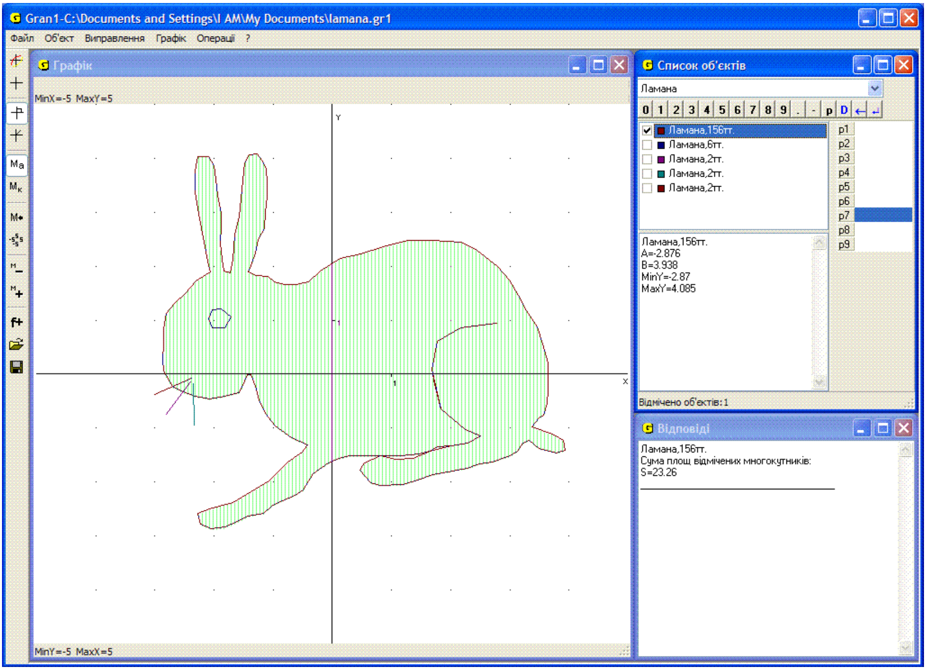

Gran1-C:\Documents and Settings\I AM\My Documents\lamana.gr1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
MinX=-5 MaxY=5
MinY=-5 MaxX=5
Список об'єктів
Ламана
Ламана,156тт.
Ламана,6тт.
Ламана,2тт.
Ламана,2тт.
Ламана,2тт.
Ламана,156тт.
A=-2.876
B=3.938
MinY=-2.87
MaxY=4.085
Відмічено об'єктів:1
Відповіді
Ламана,156тт.
Сума площ відмічених многокутників:
S=23.26

Рис. 6.2

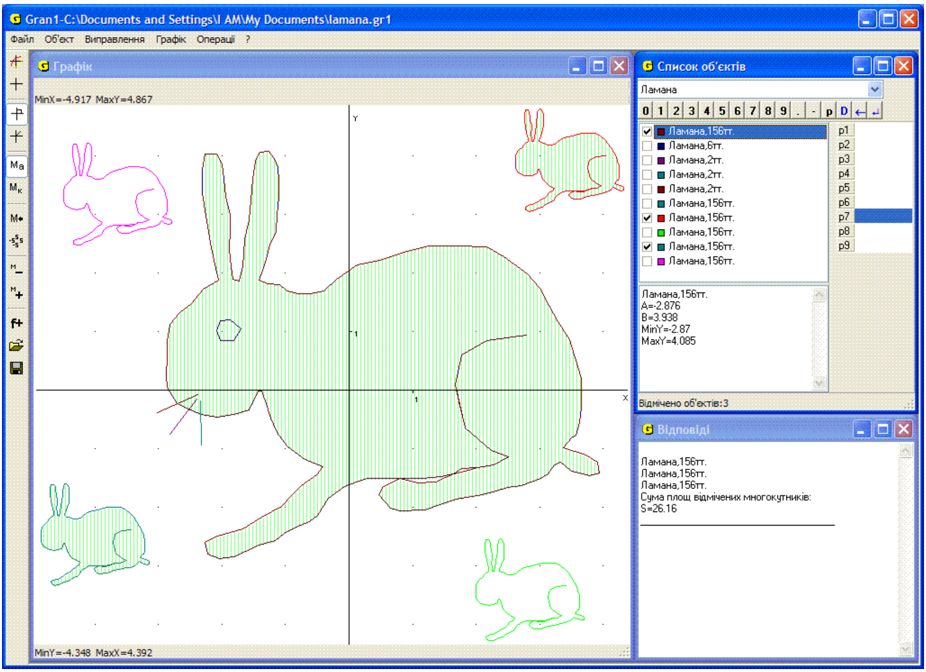

Gran1-C:\Documents and Settings\I AM\My Documents\lamana.gr1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
MinX=-4.917 MaxY=4.867
MinY=-4.348 MaxX=4.392
Список об'єктів
Ламана
Ламана,156тт.
Ламана,6тт.
Ламана,2тт.
Ламана,2тт.
Ламана,2тт.
Ламана,156тт.
Ламана,156тт.
Ламана,156тт.
Ламана,156тт.
Ламана,156тт.
Ламана,156тт.
A=-2.876
B=3.938
MinY=-2.87
MaxY=4.085
Відмічено об'єктів:3
Відповіді
Ламана,156тт.
Ламана,156тт.
Ламана,156тт.
Сума площ відмічених многокутників:
S=26.16

Рис. 6.3

Приклади

1. Обчислити площу трикутника з вершинами (1, 1), (4, 2), (3, 4).

Встановивши у вікні “Список об’єктів” тип об’єкта “Ламана”, звернемося до послуги “Об’єкт / Створити”, введемо вказані вершини ламаної з клавіатури, з панелі введення даних чи з екрану (краще з клавіатури чи з панелі введення даних), та вкажемо, що ламана замкнена (за необхідності можна також вказати колір лінії) (Рис. 6.4). Далі, звернувшись до послуги “Графік / Побудувати”, побудуємо графічне зображення введеної ламаної. За допомогою послуги “Графік / Масштаб / Масштаб користувача” можна дібрати відповідний масштаб для одержання найбільш зручного зображення. Звернувшись потім до послуги “Операції / Операції з ламаними / Площа многокутника”, одержимо відповідь у вікні “Відповіді” – площа даного трикутника дорівнює $S = 3.5$ (Рис. 6.5).

2. Координати вершин замкненого многокутника визначаються за формулами $\left(x_i, \sqrt{1 - x_i^{\,2}}\right)$. Обчислити площу замкненого 29-кутника, абсциси й ординати вершин якого подані в таблиці:

x_i	-1	-0.995	-0.99	-0.98	-0.95	-0.9	-0.8	-0.7	-0.6
y_i	0	0.10	0.14	0.20	0.31	0.44	0.60	0.71	0.80

x_i	-0.5	-0.4	-0.3	-0.2	-0.1	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
y_i	0.87	0.92	0.95	0.98	0.99	1	0.99	0.98	0.95	0.92	0.87

x_i	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.98	0.99	0.995	1
y_i	0.80	0.71	0.60	0.44	0.31	0.20	0.14	0.10	0

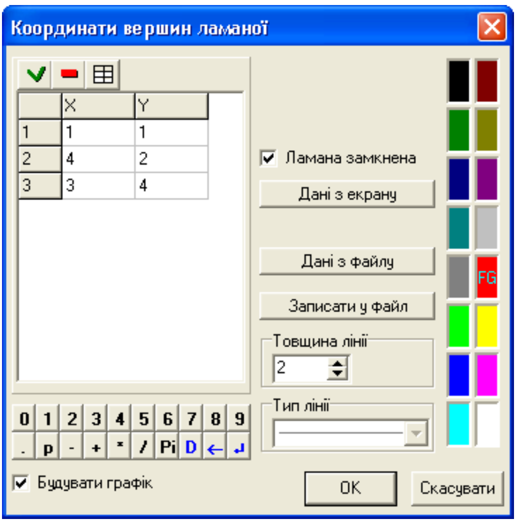
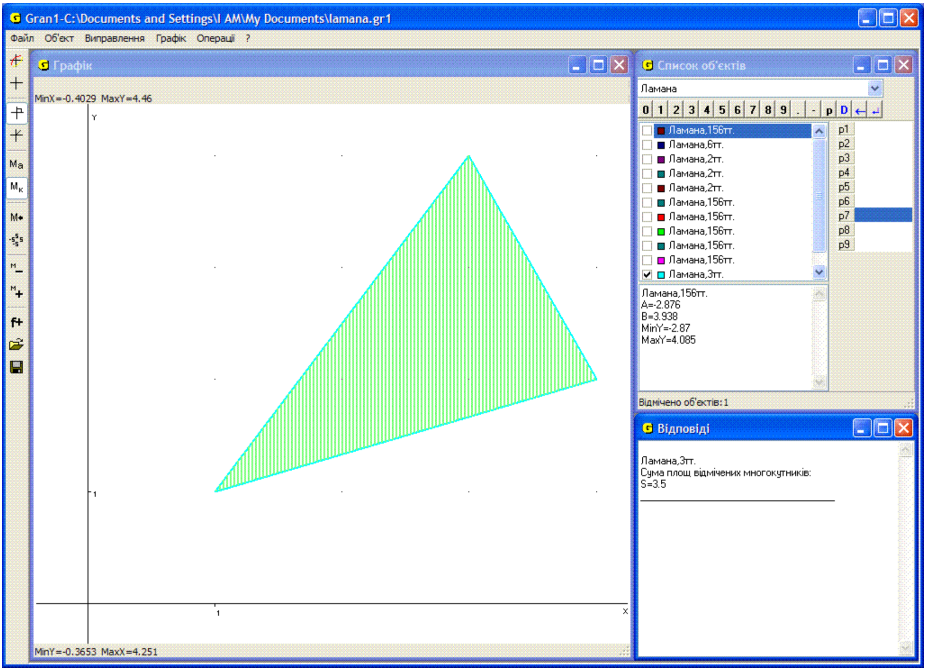
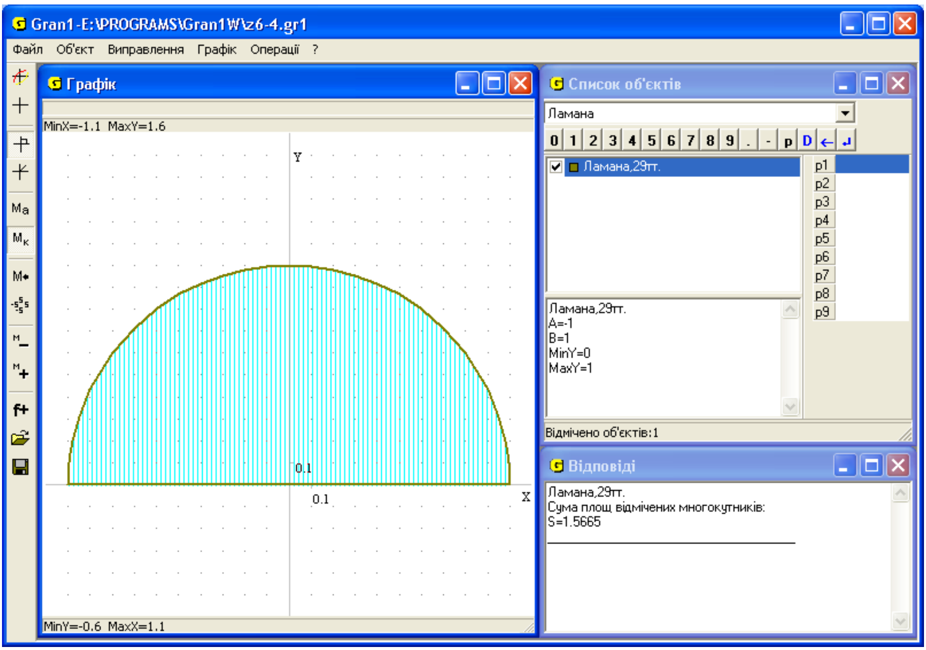


Рис. 6.4



Gran1-C:\Documents and Settings\I AM\My Documents\lamana.gr1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
MinX=-0.4029 MaxY=4.46
Y
1
1
X
MinY=-0.3653 MaxX=4.251
Список об'єктів
Ламана
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 . - p D
Ламана,156тт.
Ламана,6тт.
Ламана,2тт.
Ламана,2тт.
Ламана,2тт.
Ламана,156тт.
Ламана,156тт.
Ламана,156тт.
Ламана,156тт.
Ламана,156тт.
Ламана,3тт.
p1
p2
p3
p4
p5
p6
p7
p8
p9
Ламана,156тт.
A=-2.876
B=3.938
MinY=-2.87
MaxY=4.085
Відмічено об'єктів:1
Відповіді
Ламана,3тт.
Сума площ відмічених многокутників:
S=3.5

Рис. 6.5



Gran1-E:\PROGRAMS\Gran1W\z6-4.gr1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
MinX=-1.1 MaxY=1.6
Y
0.1
0.1
X
MinY=-0.6 MaxX=1.1
Список об'єктів
Ламана
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 . - p D
Ламана,29тт.
p1
p2
p3
p4
p5
p6
p7
p8
p9
Ламана,29тт.
A=-1
B=1
MinY=0
MaxY=1
Відмічено об'єктів:1
Відповіді
Ламана,29тт.
Сума площ відмічених многокутників:
S=1.5665

Рис. 6.6

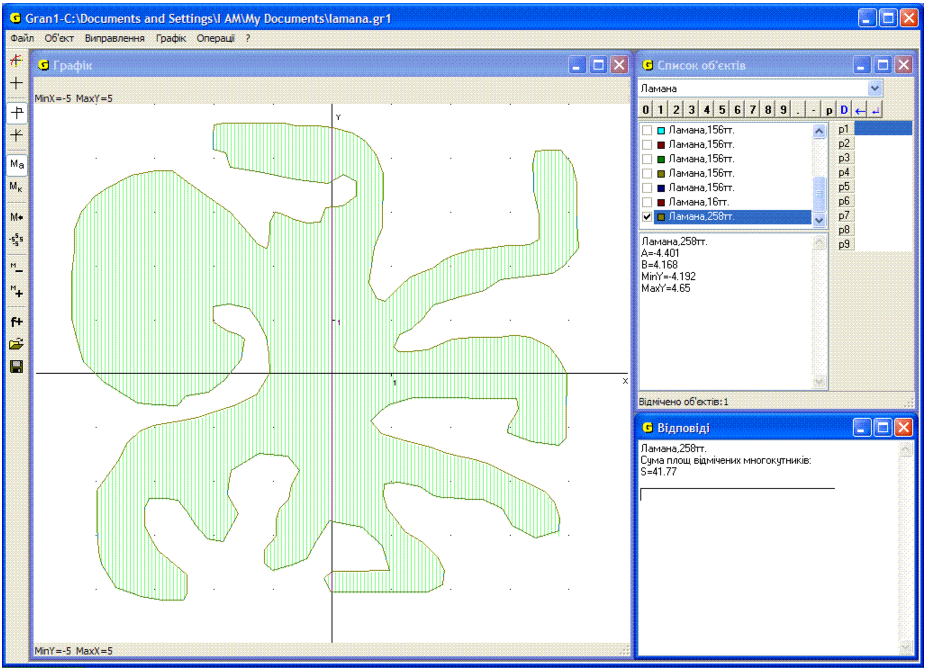


Рис. 6.7

Встановивши тип залежності “Ламана”, введемо нову замкнену ламану із зазначеними 29 вершинами і побудуємо її зображення, звернувшись до послуги “Графік / Побудувати”. Скориставшись потім послугою “Операції / Операції з ламаними / Площа многокутника”, одержимо: площа розглянутого 29-кутника дорівнює 1.5665≈1.57 (Рис. 6.6).

Зауважимо, що знайдена площа наближено дорівнює площі півкруга радіуса 1, тобто $\dfrac{\pi}{2}$.

3. З екрану введені 258 вершин замкненої ламаної. Знайти площу многокутника, обмеженого цією ламаною.

Побудувавши зображення заданої ламаної і звернувшись до послуги “Операції / Операції з ламаними / Площа многокутника”, одержимо – площа розглянутого многокутника дорівнює 41.77 (Рис. 6.7).

За необхідності визначити кут при деякій вершині многокутника досить спочатку виконати паралельне перенесення цього многокутника так, щоб розглядувана вершина збіглася з початком координат. Потім, встановивши тип координат “Полярні координати” за допомогою послуги “Графік / Параметри вікна “Графік”” на закладинці “Графік”, потрібно визначити кути, утворені сторонами многокутника, що виходять із зазначеної вершини (після паралельного перенесення – з початку координат), з віссю Ox, і знайти їх різницю. В результаті одержимо необхідний кут.

Інший шлях – після перенесення розглянутої вершини в початок координат виконати поворот многокутника так, щоб напрямок однієї із сторін, що виходить з розглянутої вершини (після паралельного перенесення – з початку координат) збігся з напрямком осі Ox. Для цього зручно під час звернення до закладинки "Поворот" послуги "Операції / Операції з ламаними / Перетворення ламаної..." натиснути кнопку "Вибір точок з екрану для визначення кута" і вказати початковий напрямок радіуса-вектора, через який визначається кут повороту, так, щоб він збігався з напрямком однієї із сторін, яка виходить з розглянутої вершини, а кінцевий напрямок – з напрямком осі Ox. Після повороту, встановивши полярні координати за допомогою послуги "Графік / Параметри вікна "Графік"" на закладинці "Графік", можна визначити кут, утворений іншою стороною, що виходить з розглянутої вершини, з віссю Ox (а значить і з першою стороною).

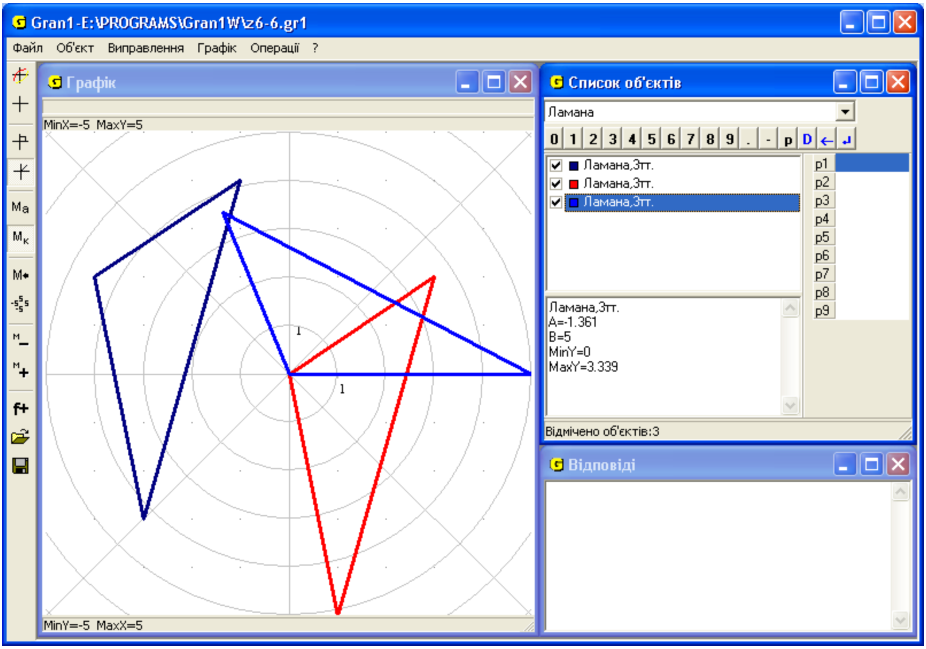
Кут повороту можна ввести і з клавіатури після паралельного перенесення, попередньо встановивши тип координат "Полярні координати" за допомогою послуги "Графік / Параметри вікна "Графік"".

4. Визначити кути трикутника з вершинами (-4, 2), (-3, -3), (-1, 4).

Побудуємо замкнену ламану з вказаними вершинами. Перенесемо одна за однією вершини в початок координат, використовуючи паралельне перенесення, і повернемо отримані трикутники до співпадання напрямку однієї із сторін, що виходить з початку координат, з напрямком осі Ox. Встановивши тип координат "Полярні координати" за допомогою послуги "Графік / Параметри вікна "Графік"", одержимо (Рис. 6.8): кут при вершині (-4, 2) дорівнює 1.96 радіан (112.3^o) (Рис. 6.8); кут при вершині (-3,-3) дорівнює 0.48 радіан (27.3^o); кут при вершині (-1, 4) дорівнює 0.70 радіан (40.4^o).

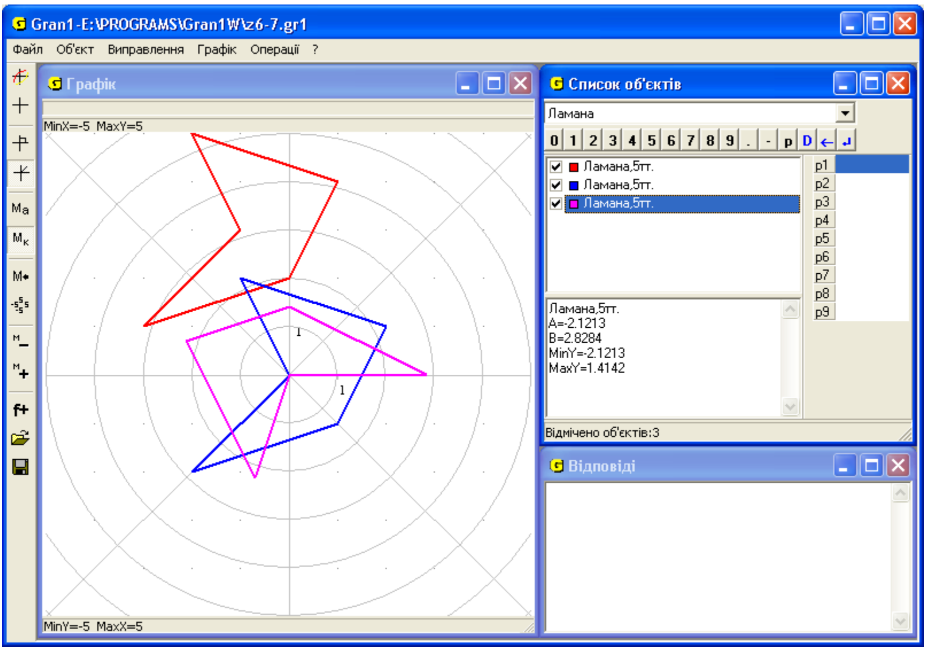
5. Визначити кути п'ятикутника з вершинами (-3, 1), (0, 2), (1, 4), (-2, 5), (-1, 3).

Побудувавши п'ятикутник із вказаними вершинами, послідовно визначимо кути при кожній з вершин, використовуючи в разі необхідності послугу "Поворот" пункту "Операції / Операції з ламаними / Перетворення ламаної". Одержимо: кут при вершині (-3, 1) дорівнює 0.47 (≈27^o); кут при вершині (0, 2) дорівнює 2.36 (≈135.2^o); кут при вершині (1, 4) дорівнює 1.43 (≈82^o); кут при вершині (-2, 5) дорівнює 0.78 (≈44.7^o); кут при вершині (-1, 3) дорівнює 4.40 (≈251.8^o) (Рис. 6.9).



Gran1-E:\PROGRAMS\Gran1W\z6-6.gr1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
MinX=-5 MaxY=5
MinY=-5 MaxX=5
Список об'єктів
Ламана
Ламана,3тт.
Ламана,3тт.
Ламана,3тт.
Ламана,3тт.
A=-1.361
B=5
MinY=0
MaxY=3.339
Відмічено об'єктів:3
Відповіді

Рис. 6.8



Gran1-E:\PROGRAMS\Gran1W\z6-7.gr1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
MinX=-5 MaxY=5
MinY=-5 MaxX=5
Список об'єктів
Ламана
Ламана,5тт.
Ламана,5тт.
Ламана,5тт.
Ламана,5тт.
A=-2.1213
B=2.8284
MinY=-2.1213
MaxY=1.4142
Відмічено об'єктів:3
Відповіді

Рис. 6.9

Запитання для самоконтролю

1. Чи обов'язково потрібно побудувати многокутник перш, ніж звертатися до послуги "Операції / Операції з ламаними / Площа многокутника"?
2. Скільки вершин повинна містити ламана, якою обмежується многокутник, площу якого необхідно обчислити?
3. Чи можуть у ламаної, якою обмежується многокутник, площа якого обчислюється з використанням послуги "Операції / Операції з ламаними / Площа многокутника", бути самоперетинання?
4. Як, використовуючи послугу "Операції / Операції з ламаними / Площа многокутника", обчислити площу трикутника? паралелограма? трапеції? довільного чотирикутника? п'ятикутника?
5. Чи повинен многокутник, площа якого обчислюється з використанням послуги "Операції / Операції з ламаними / Площа многокутника", бути опуклим?
6. Чи можна використовувати послугу "Операції / Операції з ламаними / Площа многокутника", якщо координати вершин введені з екрану? з файлу?
7. Як обчислити площі окремих многокутників, що утворюються в разі самоперетинання ламаної?
8. Скільки вершин повинно бути у ламаної, щоб могло відбутися самоперетинання?

Вправи для самостійного виконання

1. Обчислити площі наступних многокутників: трикутника з вершинами (-1, 3), (3, -2), (4, 5); трапеції з вершинами (0, 0), (2, 5), (4, 5), (6, 0); паралелограма з вершинами (0, 0), (0, 3), (4, 4), (4, 7).
2. Обчислити площу, обмежену замкненою ламаною з вершинами (0, 0), (0, 5), (4, 0), (4, 6), якщо вершини вказані в порядку їх обходу.
3. Обчислити площу, обмежену замкненою ламаною, координати вершин якої набувають значень $\left(x_i, \frac{1}{x_i}\right)$, якщо абсциси x_i набувають значень 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
4. Обчислити площу, обмежену незамкненою ламаною з вершинами з вправи 3, та прямими $x = 1, x = 7, y = 0$.
5. Обчислити площі многокутників, одержуваних із зазначених у вправах 1–4 їх деформацією з коефіцієнтами: $dx = 1,\ dy = 2$; $dx = 2, dy = 2$; $dx = -2,\ dy = 1$; $dx = -2, dy = -2$.
6. Визначити кути многокутників, заданих через координати вершин в порядку їх обходу: (-1, -4), (-4, 2), (4, 4); (0, 0), (4, 1), (1, 4); (-4, -4), (4, -2), (3, 4), (-4, 3), (0, 2), (-2, -1); (4, 4), (4, 7), (0, 3).
7. Знайти суму кутів многокутника з вершинами, вказаними в порядку їх обходу: (-5, -4), (0, -3), (-5, 4), (2, -1), (5, 2), (2, 2), (0, 5), (-2, 2), (-5, 2), (-2, -1).

§7. *Найпростіші планіметричні задачі на побудову. Розв'язування трикутників*

Для розв'язування багатьох планіметричних задач на побудову необхідно мати можливість побудувати коло заданого радіуса і з заданим центром, або коло із заданим центром і деякою точкою на колі, або коло, що проходить через три заданих точки і т.п. Маючи можливість будувати такі кола, а також відрізки прямих, якими з'єднуються задані точки, виконувати паралельне перенесення і поворот відрізків і ламаних, можна розв'язувати планіметричні задачі, для розв'язування яких традиційно використовувалися циркуль і лінійка.

Для побудови кола з використанням послуг програми GRAN1 слід встановити тип об'єкта "Коло" у вікні "Список об'єктів". В разі звернення до послуги "Об'єкт / Створити" з'являється допоміжне вікно з двома закладинками.

Перша із закладинок використовується для задання кола за координатами центра кола та радіусом. Необхідно ввести координати центра кола в рядках "X0=" і "Y0=" та радіус в рядку "R=" з клавіатури або з використанням панелі введення даних (координати центра та радіус кола можуть бути задані через параметри $P1$, $P2$, … , $P9$) (Рис. 7.1). Рядки, в яких вводяться координати та радіус, являють собою списки, що розкриваються, і в разі створення кількох кіл всі попередні значення координат центрів та радіусів заносяться до цих списків.

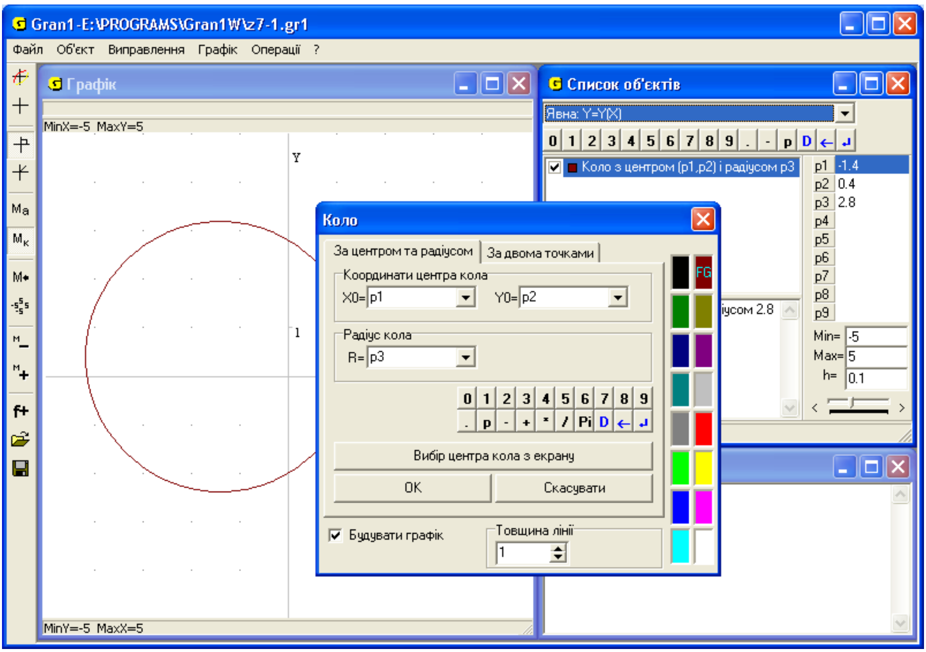


Рис. 7.1

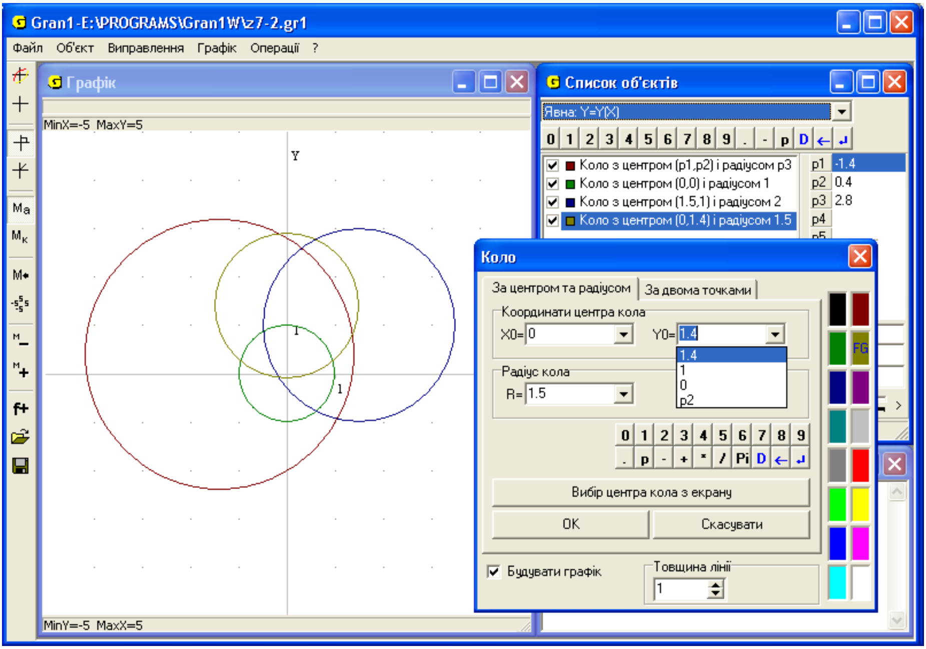


Рис. 7.2

Тому при повторному створенні кола координати центра або радіус можна вводити з використанням даних з цього списку (Рис. 7.2). Для кожного рядка введення створюється окремий список значень. Використовуючи кнопку “Вибір центра кола з екрану”, можна вказати центр кола на координатній площині за допомогою мишки або клавіатури.

Використання другої закладинки вікна “Коло” дозволяє створити коло за координатами центра і будь-якої точки на колі (Рис. 7.3).

Для цього необхідно ввести координати центра кола в рядках “X0=” і “Y0=” та координати точки на колі в рядках “X1=” і “Y1=” з клавіатури, з використанням панелі введення даних або із списку, якщо раніше створювались інші кола. Крім того координати обох точок можуть бути задані через параметри $P1$, $P2$, … , $P9$.

Вказати обидві точки можна і з екрану, скориставшись кнопкою “Вибір точок з екрану”. Після “натиснення” кнопки “Вибір точок з екрану” необхідно у вікні “Графік” координатний курсор встановити і зафіксувати спочатку в центрі кола, а потім в деякій точці на колі (аналогічно до того, як вводились з екрану точки під час задання ламаної, вектора перенесення ламаної тощо).

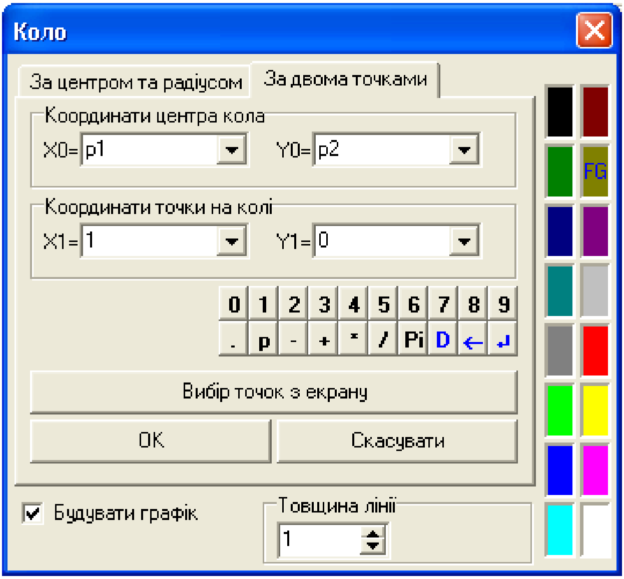

Коло
За центром та радіусом
За двома точками
Координати центра кола
X0= p1
Y0= p2
Координати точки на колі
X1= 1
Y1= 0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
. p - + * / Pi D
FG
Вибір точок з екрану
OK
Скасувати
Будувати графік
Товщина лінії
1

Рис. 7.3

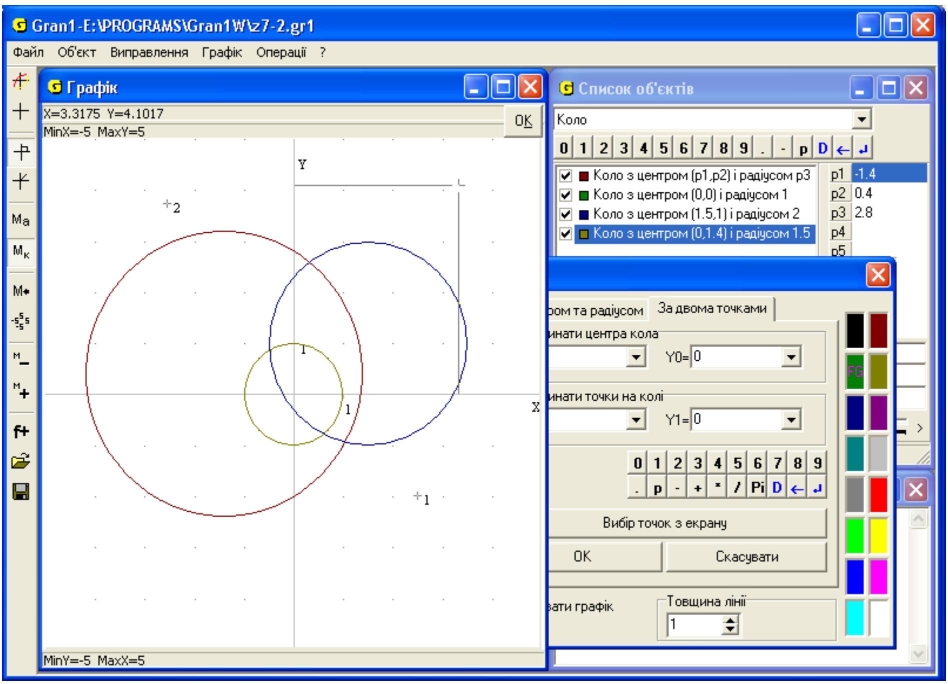

Gran1-E:\PROGRAMS\Gran1W\z7-2.gr1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
X=3.3175 Y=4.1017
MinX=-5 MaxY=5
OK
Y
X
MinY=-5 MaxX=5
Список об'єктів
Коло
Коло з центром (p1,p2) і радіусом p3
Коло з центром (0,0) і радіусом 1
Коло з центром (1.5,1) і радіусом 2
Коло з центром (0,1.4) і радіусом 1.5
p1 -1.4
p2 0.4
p3 2.8
p4
p5
ром та радіусом
За двома точками
инати центра кола
Y0= 0
инати точки на колі
Y1= 0
Вибір точок з екрану
OK
Скасувати
вати графік
Товщина лінії
1

Рис. 7.4

Після “натиснення” кнопки “ОК” в правому верхньому куті вікна “Графік” створюється новий об’єкт – коло, для якого у вікні “Список об’єктів” виводяться координати центра, радіус, найменше і найбільше значення кожної з координат (Рис. 7.4).

Після введення нового об’єкта типу “Коло” можна одержати його графічне зображення, для чого досить звернутися до послуги “Графік / Побудувати”. Слід мати на увазі, що під час побудови кіл масштаби вздовж осей Ox і Oy повинні бути однаковими, тому що в іншому випадку на екрані буде зображений деякий овал. Цієї умови бажано дотримуватися під час побудови графічних образів і інших об’єктів.

В процесі розв’язування деяких задач зручним може виявитися використання послуги “Операції / Відстань до точки”. В разі звернення до цієї послуги необхідно вказати дві точки (аналогічно до введення вершин ламаної з екрану). Під час переміщення на екрані вказівника “мишки” визначається відстань від точки, що була зафіксована раніше, до точки, в якій знаходиться вказівник. На початку першою точкою вважається початок координат, другою – точка, де знаходиться вказівник. Сама відстань вказується в лівому верхньому куті вікна “Графік”. Якщо було тип координат встановлено “Декартові координати”, вказуються координати x, y позиції вказівника та відстань R між точками, якщо ж обрано тип координат “Полярні координати”, то вказуються полярні координати точки, в якій знаходиться вказівник, а також відстань R між точками.

Під час переміщення вказівника на екрані (з використанням клавіш управління курсором або маніпулятора “мишка”) автоматично змінюються координати другої точки і відстань від неї до першої. В разі натиснення лівої кнопки “мишки” фіксується перша точка в позиції вказівника і в подальшому відстань буде обчислюватися від цієї нової точки до точки, в якій знаходиться вказівник (Рис. 7.5). В разі “Натиснення” кнопки “ОК” (у правому верхньому куті вікна “Графік”) переривається виконання даної послуги.

Послугу “Операції / Відстань до точки” зручно використовувати в разі відшукання точки деякої множини, найменш віддаленої від заданої точки, наприклад точки на прямій, на деякій кривій і т.д., найменш віддаленої від точки, що не лежить на цій прямій чи кривій. Це дає можливість визначити, наприклад, основу перпендикуляра, опущеного з заданої точки на пряму, висоти трикутника, паралелограма і т.д.

Слід мати на увазі, що якщо масштаби вздовж осей Ox і Oy неоднакові, то точка на деякій прямій, найменш віддалена від точки поза цією прямою, візуально не буде лежати на перпендикулярі, опущеному на пряму з точки поза прямою.

На Рис. 7.5 точка, від якої обчислюється відстань, відмічена літерою “А”. Такі мітки зручно використовувати для спрощення читання рисунка під час розв’язування задач. Як мітка використовується один або кілька символів. Поставити мітку можна одним з двох способів:

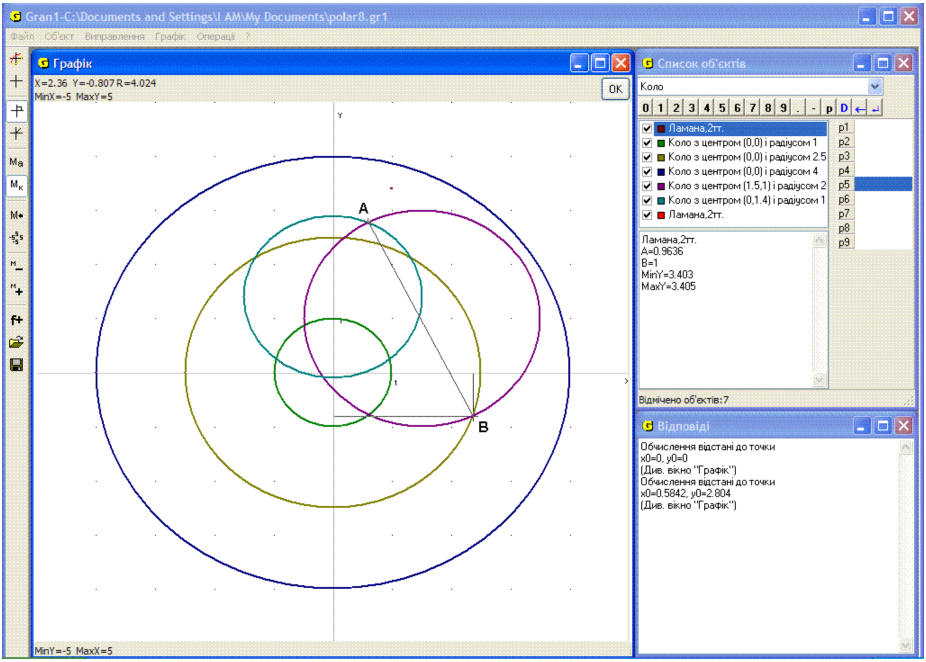

Gran1-C:\Documents and Settings\I AM\My Documents\polar8.gr1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
X=2.36 Y=-0.807 R=4.024
MinX=-5 MaxY=5
OK
Y
A
B
1
MinY=-5 MaxX=5
Список об'єктів
Коло
Ламана,2тт.
Коло з центром (0,0) і радіусом 1
Коло з центром (0,0) і радіусом 2.5
Коло з центром (0,0) і радіусом 4
Коло з центром (1.5,1) і радіусом 2
Коло з центром (0,1.4) і радіусом 1
Ламана,2тт.
p1
p2
p3
p4
p5
p6
p7
p8
p9
Ламана,2тт.
A=0.9636
B=1
MinY=3.403
MaxY=3.405
Відмічено об'єктів:7
Відповіді
Обчислення відстані до точки
x0=0, y0=0
(Див. вікно "Графік")
Обчислення відстані до точки
x0=0.5842, y0=2.804
(Див. вікно "Графік")

Рис. 7.5

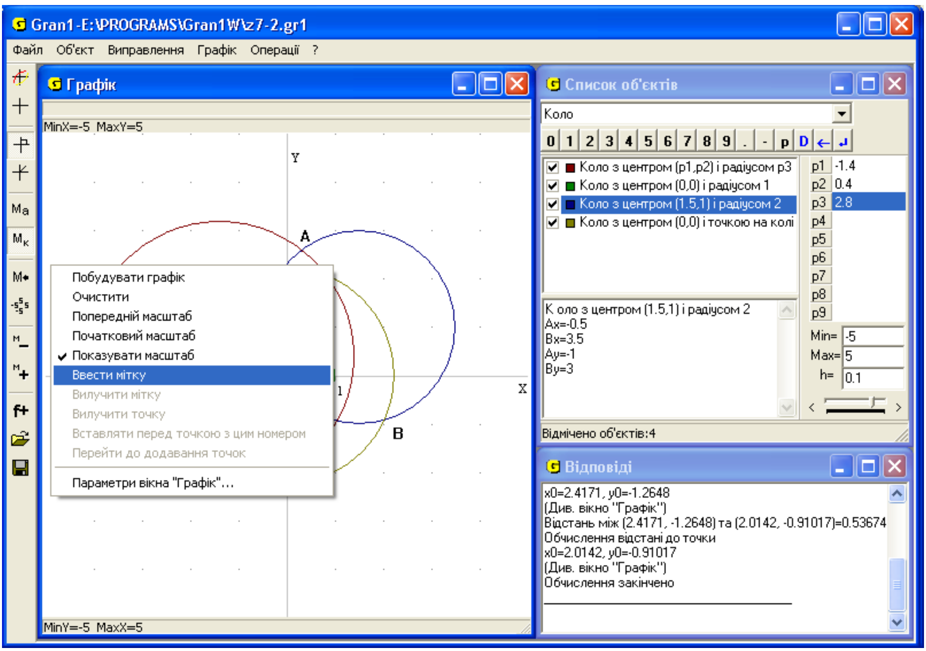

Gran1-E:\PROGRAMS\Gran1W\z7-2.gr1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
MinX=-5 MaxY=5
Y
A
B
X
1
Побудувати графік
Очистити
Попередній масштаб
Початковий масштаб
Показувати масштаб
Ввести мітку
Вилучити мітку
Вилучити точку
Вставляти перед точкою з цим номером
Перейти до додавання точок
Параметри вікна "Графік"...
MinY=-5 MaxX=5
Список об'єктів
Коло
Коло з центром (p1,p2) і радіусом p3
Коло з центром (0,0) і радіусом 1
Коло з центром (1.5,1) і радіусом 2
Коло з центром (0,0) і точкою на колі
p1 -1.4
p2 0.4
p3 2.8
p4
p5
p6
p7
p8
p9
К оло з центром (1.5,1) і радіусом 2
Ax=-0.5
Bx=3.5
Ay=-1
By=3
Min= -5
Max= 5
h= 0.1
Відмічено об'єктів:4
Відповіді
x0=2.4171, y0=-1.2648
(Див. вікно "Графік")
Відстань між (2.4171, -1.2648) та (2.0142, -0.91017)=0.53674
Обчислення відстані до точки
x0=2.0142, y0=-0.91017
(Див. вікно "Графік")
Обчислення закінчено

Рис. 7.6

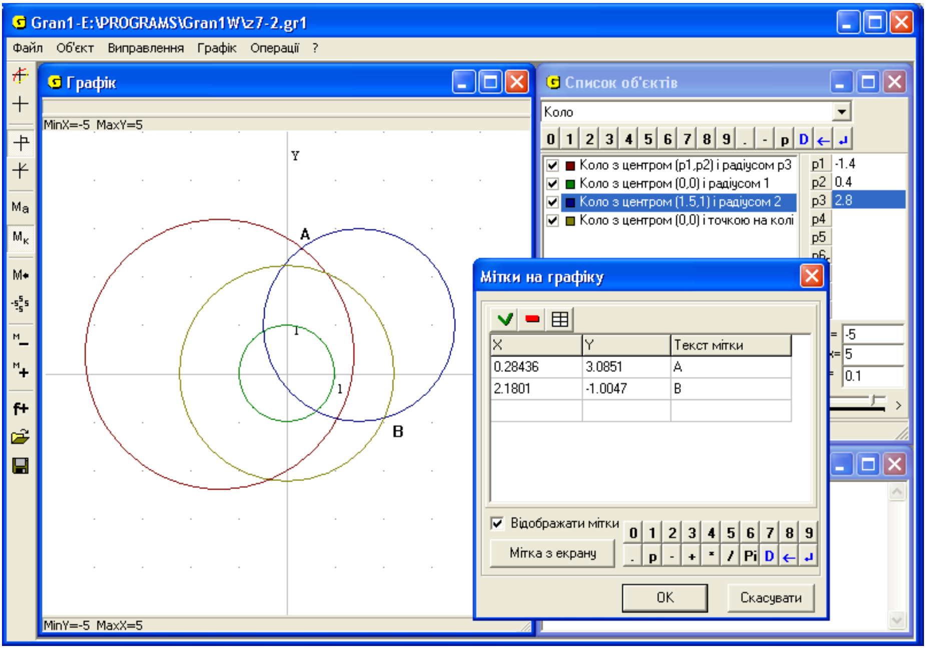


Рис. 7.7

- в будь-якому місці вікна “Графік”, використовуючи контекстне меню, яке викликається в разі натиснення правої кнопки “мишки” (Рис. 7.6). Розташування мітки (координати лівого верхнього кута напису) співпадає з координатами точки, в якій було встановлено вказівник перед зверненням до даної послуги;
- за допомогою послуги “Графік / Мітки…”. В даному разі з’являється допоміжне вікно “Мітки на графіку”, в якому знаходиться таблиця міток (Рис. 7.7). В стовпцях “X” і “Y” пишуться координати лівого верхнього кута напису.

За будь-якої зміни масштабу мітки залишаються на екрані, відповідним чином зміщуючись у вікні “Графік” в залежності від того, як вибрано масштаб. Не впливає на написання міток і вибір об’єктів, зображення яких будуються у вікні “Графік”. Разом з об’єктами мітки можна зберігати в файлі на диску.

Приклади

1. На екрані побудовані три відрізки – ламані, з двома вершинами кожна. Побудувати трикутник, довжини сторін якого дорівнюють довжинам заданих відрізків (Рис. 7.8).

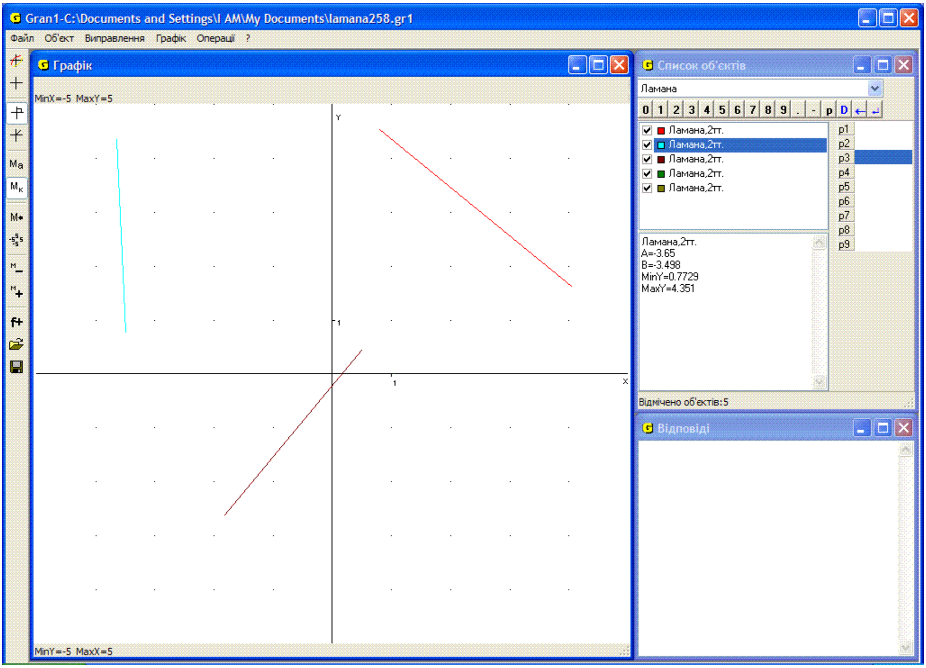

Gran1-C:\Documents and Settings\I AM\My Documents\lamana258.gr1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
MinX=-5 MaxY=5
MinY=-5 MaxX=5
Список об'єктів
Ламана
Ламана,2тт.
Ламана,2тт.
A=-3.65
B=-3.498
MinY=0.7729
MaxY=4.351
Відмічено об'єктів:5
Відповіді

Рис. 7.8

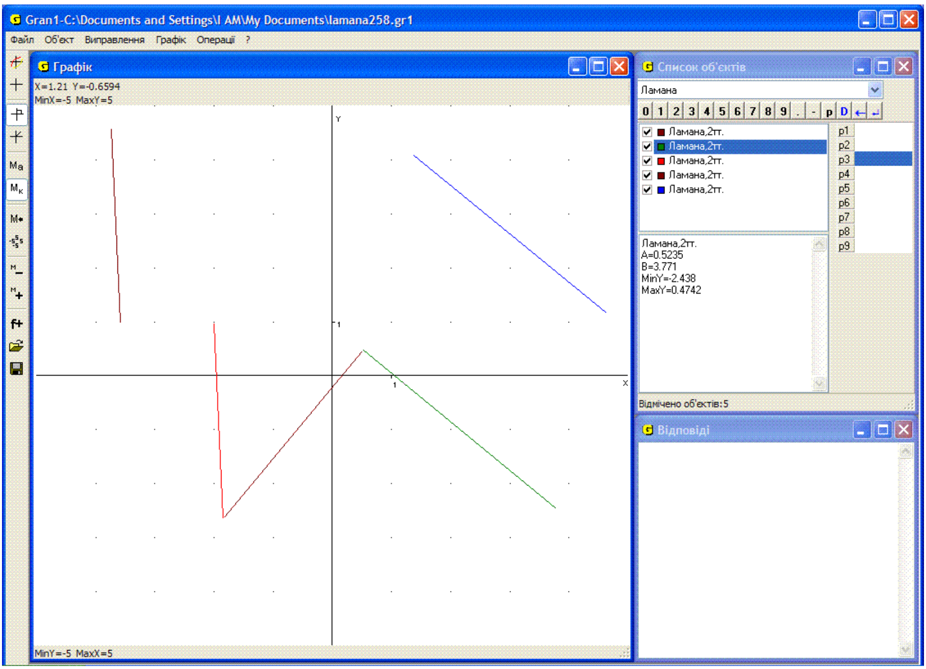

Gran1-C:\Documents and Settings\I AM\My Documents\lamana258.gr1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
X=1.21 Y=-0.6594
MinX=-5 MaxY=5
MinY=-5 MaxX=5
Список об'єктів
Ламана
Ламана,2тт.
A=0.5235
B=3.771
MinY=-2.438
MaxY=0.4742
Відмічено об'єктів:5
Відповіді

Рис. 7.9

Використовуючи паралельне перенесення (за допомогою послуги “Операції / Операції з ламаними / Перетворення ламаної”), сумістимо один з кінців якого-небудь з відрізків з яким-небудь кінцем будь-якого іншого відрізка, а один з кінців третього відрізка з яким-небудь з кінців, що залишився вільним, одного з двох попередніх відрізків (Рис. 7.9). Вилучимо тепер (знявши мітки  біля пункту “Будувати графік” в контекстних меню відповідних об’єктів у вікні “Список об’єктів”, спочатку встановивши вказівник на позначення кожного такого об’єкта, тобто зробивши його поточним) вихідні відрізки, образи яких отримані з використанням паралельного перенесення. Далі побудуємо два кола з центрами в кінцях відрізка, до якого приєднані два інші, і які проходять через вільні кінці відрізків, що виходять з центрів (Рис. 7.10).

Якщо ці кола перетинаються, то за їх центрами разом із точкою перетину визначаються вершини шуканого трикутника. Вилучимо тепер відрізки, які не з’єднують центри кіл, і побудуємо нову замкнену ламану з вершинами у вказаних точках (центрах і точці перетину кіл) (Рис. 7.10). Це і буде шуканий трикутник (таких трикутників існує два) (Рис. 7.11).

2. Задано довжини сторін трикутника: 3, 4, 5. Визначити площу трикутника, кути і висоти.

Не обмежуючи загальності, можна вважати, що одна з вершин трикутника збігається з початком координат (0, 0).Тоді вибравши на осі Ox точку з абсцисою, рівною довжині однієї із сторін трикутника, побудуємо два кола з так визначеними центрами на осі Ox і радіусами, рівними за довжиною двом сторонам, що залишилися. Через точку перетину цих кіл визначається третя вершина трикутника. Ордината цієї точки буде висотою трикутника, опущеної на сторону, відкладену вздовж осі Ox. Створивши об’єкт ламана (ламана повинна бути замкнена), побудуємо трикутник з так визначеними вершинами і потім звернемося до послуги “Операції / Операції з ламаними / Площа многокутника”. В результаті одержимо – площа даного трикутника дорівнює $S \approx 6$ (Рис. 7.12).

Висота, опущена на сторону довжиною 5, відкладену вздовж осі Ox, дорівнює 2.39 (Рис. 7.13), кут при вершині, яка співпадає з початком координат, наближено дорівнює 0.64 радіан (36.7°) (Рис. 7.14).

Будемо суміщати одна після іншої вершини трикутника з початком координат, розташовуючи одну із сторін вздовж осі Ox (використовуючи операції паралельного перенесення та повороту послуги “Операції / Операції з ламаними / Перетворення ламаної...”).

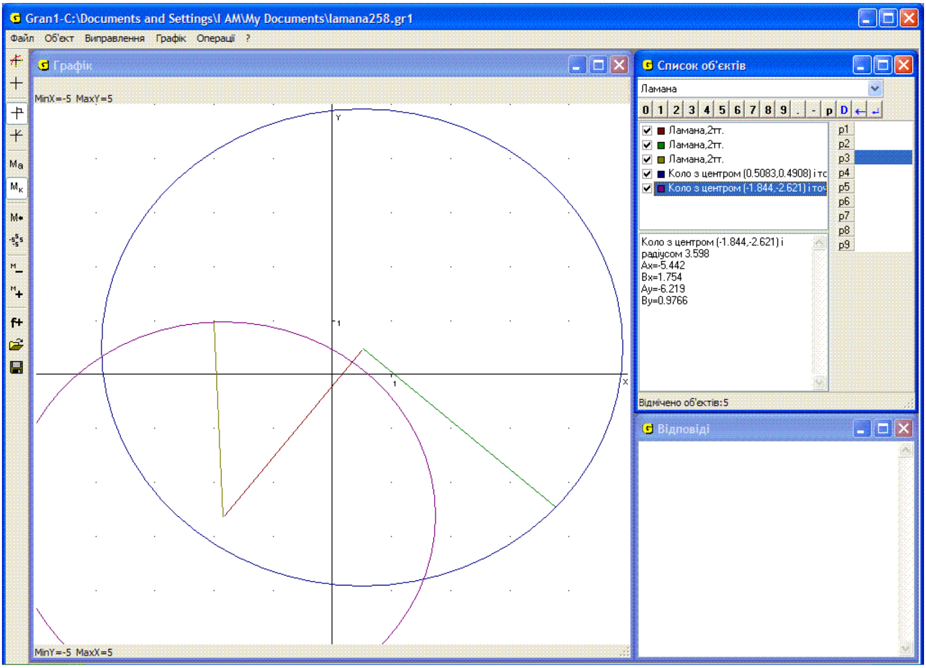


Рис. 7.10

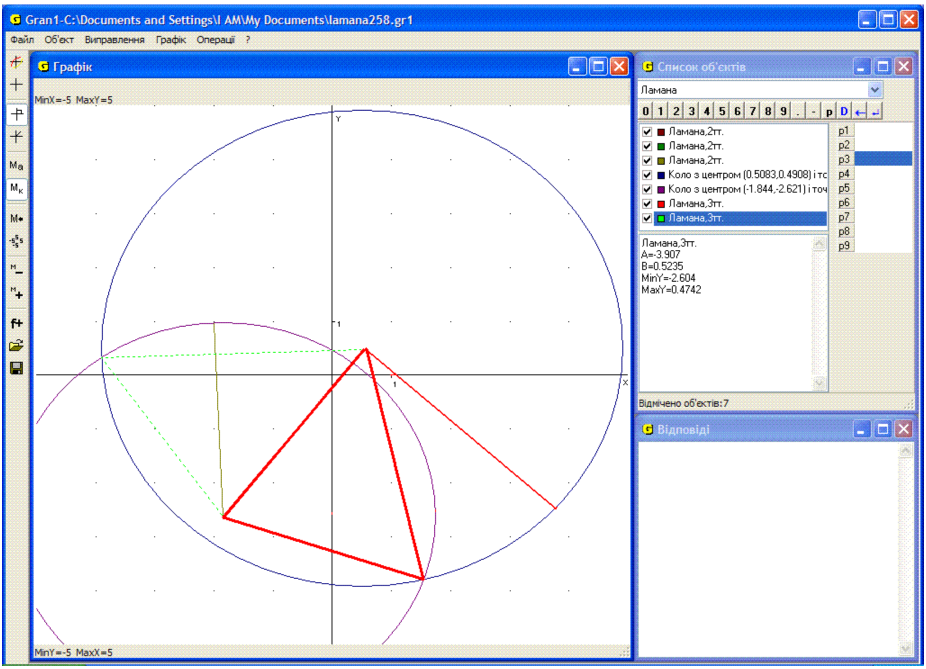


Рис. 7.11

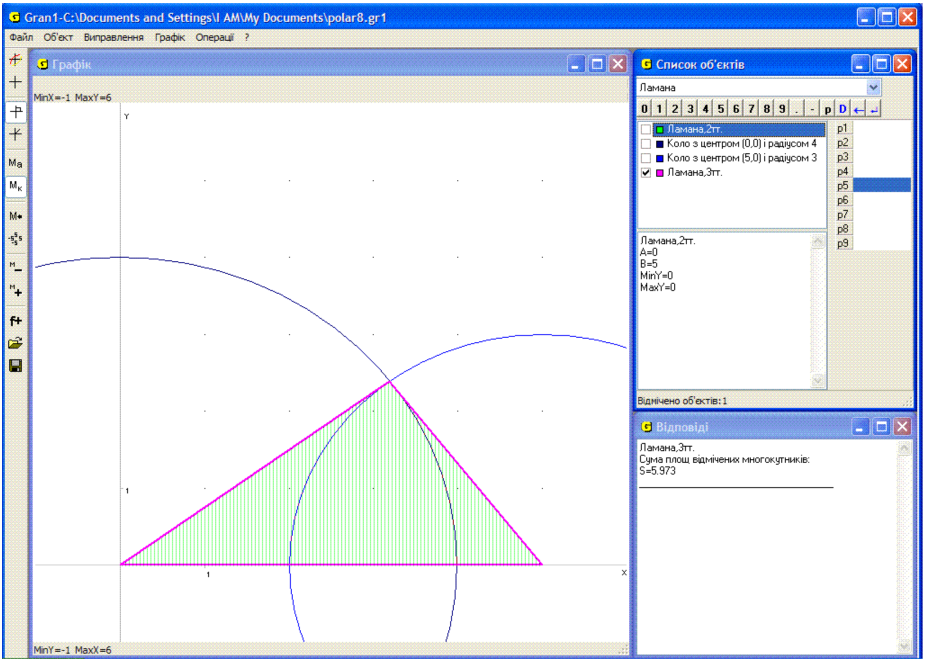


Рис. 7.12

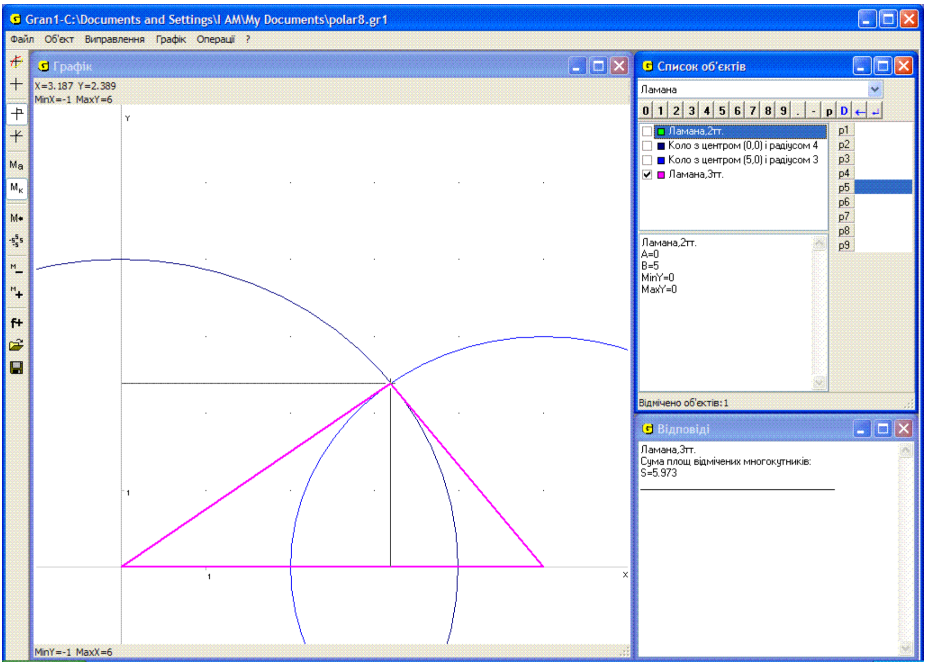


Рис. 7.13

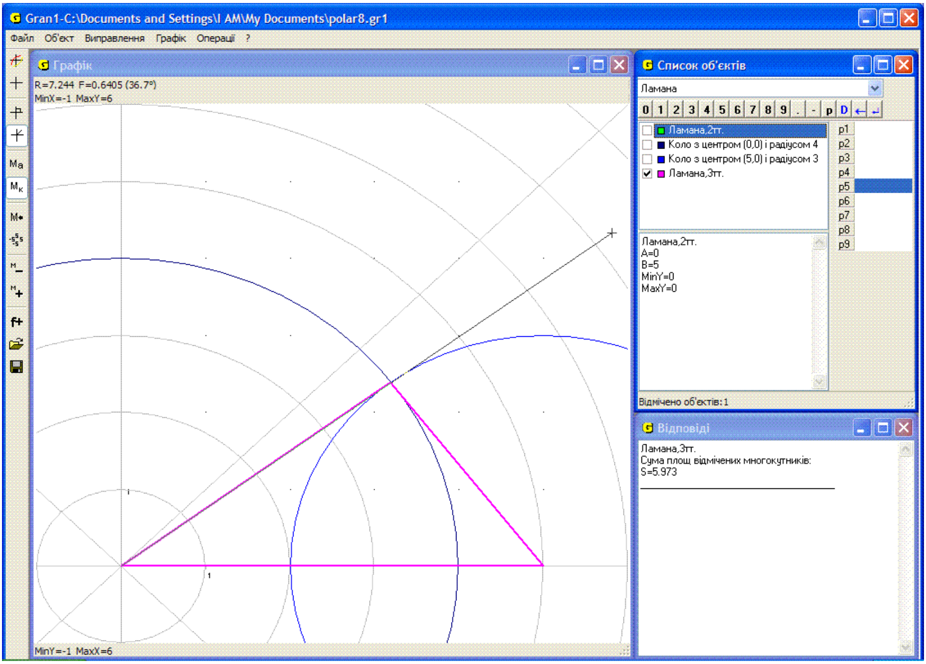


Рис. 7.14

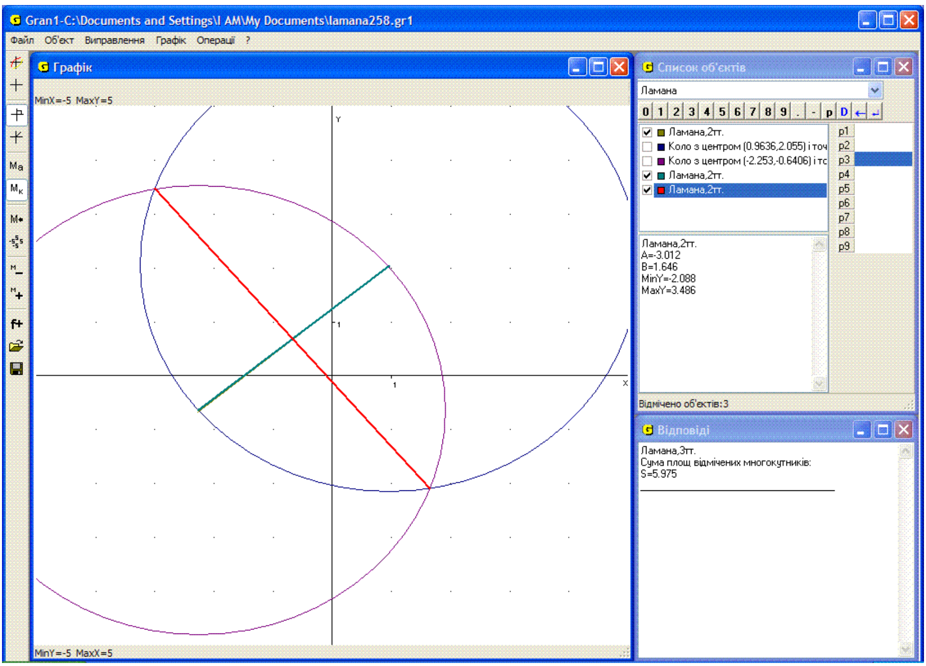


Рис. 7.15

Знайдемо: висота, опущена на сторону довжиною 5, дорівнює 2.39, на сторону довжиною 4 – 3, на сторону довжиною 3 – 4, до сторони довжиною 5 прилягають кути величиною 0.93 і 0.64, до сторони довжиною 4 – 1.57 і 0.64, до сторони довжиною 3 – 1.57 і 0.93.

3. На екрані побудований відрізок. Необхідно побудувати відрізок, перпендикулярний до заданого, що проходить через його середину.

Побудувавши два кола однакового радіуса (не меншого половини довжини заданого відрізка) з центрами в кінцях відрізка, побудуємо нову ламану (із двома вершинами), що проходить через точки перетину вказаних кіл. Це і буде шуканий перпендикуляр (Рис. 7.15).

4. На екрані зображені деяка пряма лінія і точка поза нею. Потрібно побудувати перпендикуляр до прямої, що проходить через задану точку.

Використовуючи послуги програми GRAN1, цю задачу можна розв'язати різними способами. Один з них – з центром у заданій точці поза прямою провести коло таке, щоб воно перетинало пряму в двох точках. Відрізок (хорду) між точками перетину поділити навпіл (як у прикладі 3), вказуючи як центри кіл (x_0, y_0) кінці отриманої хорди, а як точки (x_1, y_1) на колі – задану точку поза прямою. Побудувавши відрізок (нову ламану з двома вершинами), яким з'єднуються точки перетину таких двох кіл, одержимо шуканий перпендикуляр (Рис. 7.16).

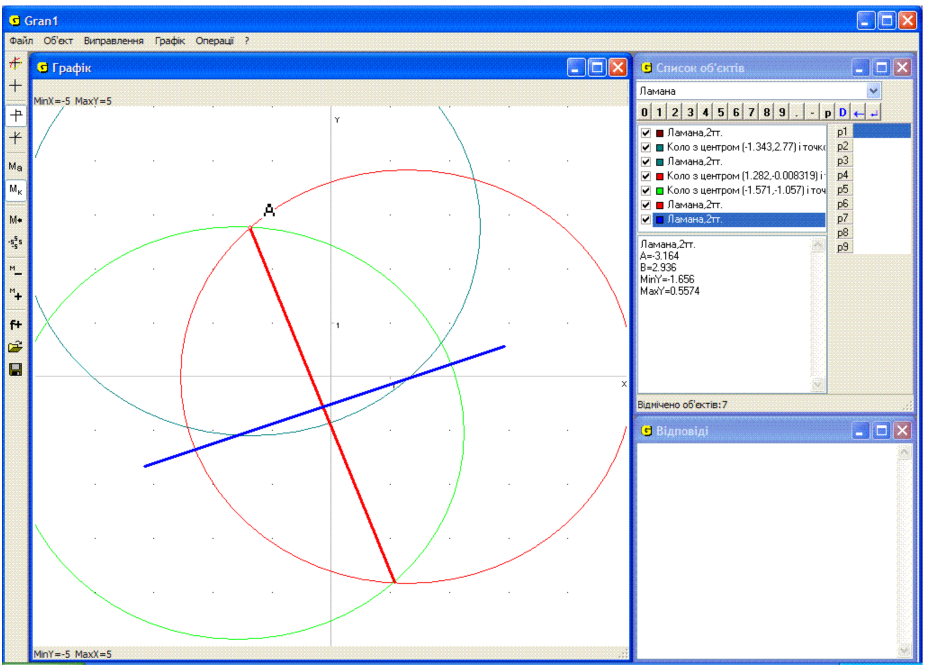


Рис. 7.16

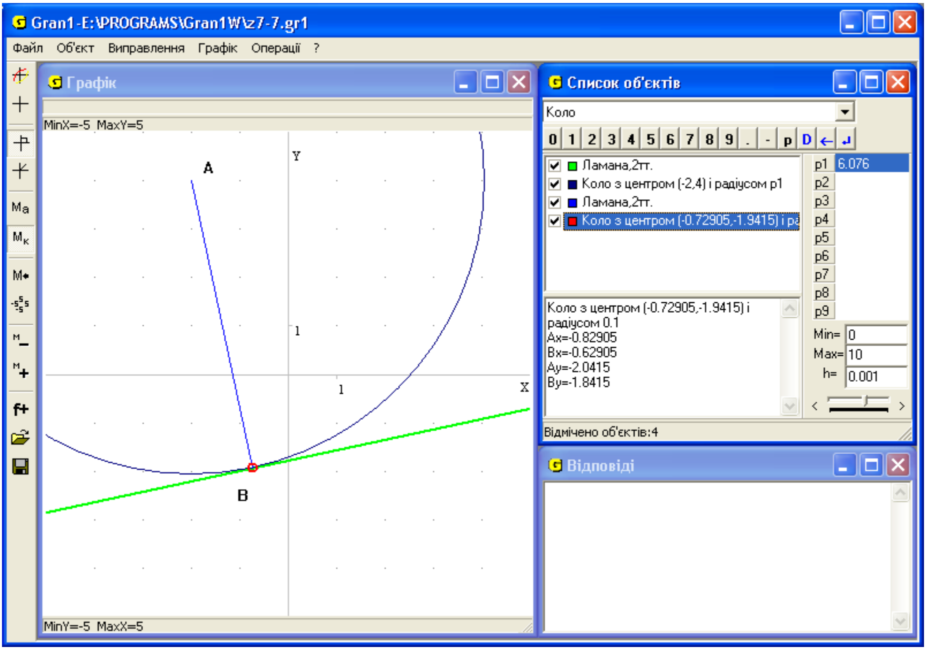


Рис. 7.17

Інший спосіб – використовуючи послугу "Операції / Відстань до точки", вкажемо як першу – задану точку поза прямою, а другу будемо вибирати на прямій. Переміщуючи другу точку вздовж прямої, знайдемо таку з них, що буде найменш віддалена від точки поза прямою. Це і буде основа шуканого перпендикуляра. Побудова перпендикуляра здійснюється як і раніше (Рис. 7.17).

Третій спосіб – точку B на прямій, через яку проходить шуканий перпендикуляр, можна визначити і як точку, в якій коло деякого радіуса з центром в точці A дотикається до заданої прямої.

Задавши коло з центром в точці A і радіусом $P1$, та добираючи параметр $P1$ так, щоб коло дотикалося до заданої прямої, знайдемо точку B (Рис. 7.17).

5. На заданому відрізку знайти точку, найменш віддалену від заданої точки поза відрізком.

Очевидно розв'язком буде точка, що лежить на відрізку і на колі найменшого радіуса з центром у заданій поза відрізком точці і яке з відрізком має спільну точку. Шукану на відрізку точку (тим самим і радіус кола) можна визначити, використовуючи послугу "Операції / Відстань до точки" або задавши коло з центром у заданій точці і радіусом $P1$ та дібравши параметр $P1$ так, щоб коло мало з відрізком спільну точку і крім того радіус кола був найменшим (Рис. 7.18).

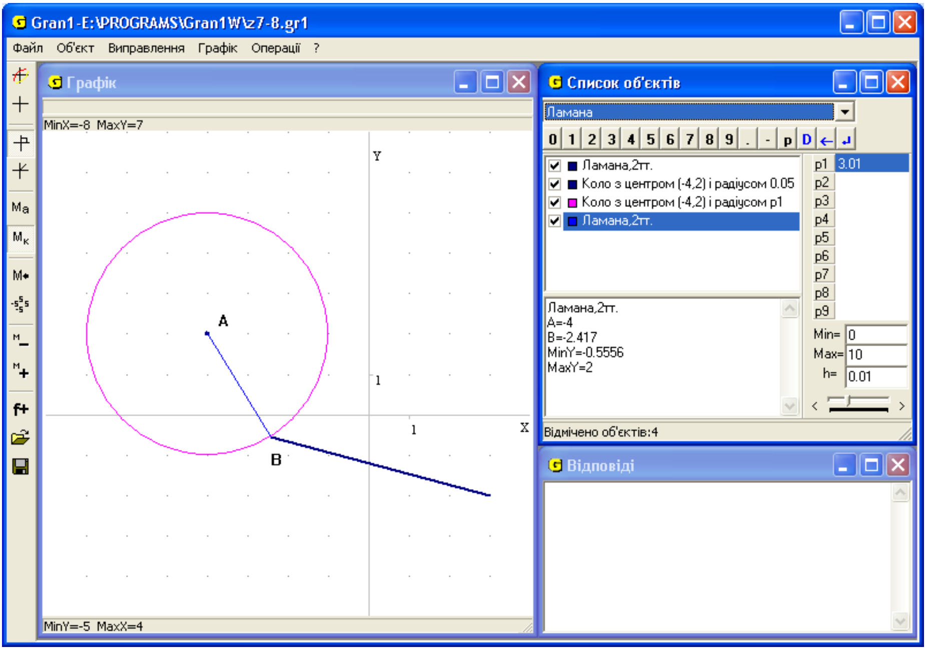


Рис. 7.18

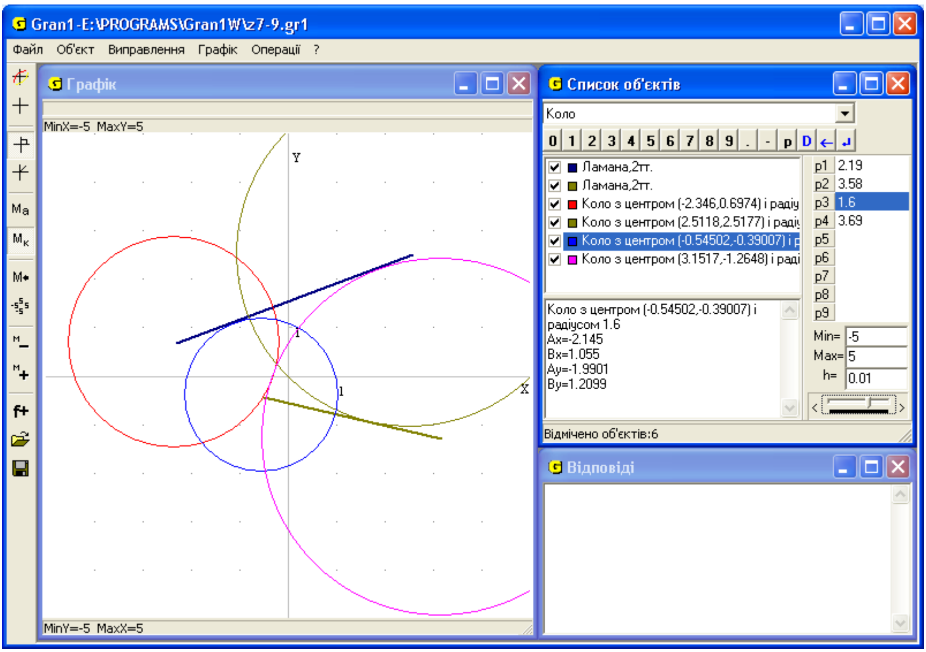


Рис. 7.19

6. На екрані зображені два відрізки. Потрібно знайти відстань між ними, тобто найменшу серед відстаней між двома точками, одна з яких лежить на одному відрізку, а інша – на іншому.

Очевидно, якщо відрізки перетинаються, то відстань між ними дорівнює нулеві. Якщо відрізки не перетинаються, тоді потрібно визначити відстань від обох кінців одного з них до іншого, і навпаки. З так знайдених 4-х чисел вибрати найменше. Це і буде відстань між відрізками (Рис. 7.19). У заданому прикладі одержимо $\rho \approx 1.60$.

7. На екрані зображені трикутник і п’ятикутник, задані координатами своїх вершин. Потрібно знайти відстань між замкненими областями, обмеженими зазначеними ламаними лініями (без самоперетинів), тобто найменшу серед відстаней між двома точками, що лежать в різних областях.

Очевидно, що якщо в областях, обмежених замкненими ламаними лініями, є спільні точки, тобто їх контури перетинаються (мають принаймні одну спільну точку) чи одна область (разом із межею) лежить всередині іншої, тоді відстань між ними дорівнює нулеві. Якщо ж області не перетинаються (спільних точок немає), то обчисливши відстані всіх сторін межевої ламаної однієї з них до всіх сторін іншої межевої ламаної і вибравши найменшу серед них, знайдемо відстань між так заданими областями.

В наведеному прикладі обчислимо відстані кожної з трьох сторін трикутника до всіх п’яти сторін п’ятикутника і виберемо найменше з так отриманих 15 чисел. В результаті одержимо 1.56. Це і буде шукана відстань (Рис. 7.20).

8. Задано кут за допомогою ламаної з двох відрізків. Потрібно побудувати бісектрису так утвореного кута.

Провівши коло з центром у спільній точці обох відрізків і яке перетинає обидва відрізки, побудуємо два кола з центрами в точках перетину першого кола і відрізків, які проходять через спільну точку відрізків. З’єднавши точки перетину двох останніх кіл, одержимо відрізок, що лежить на шуканій бісектрисі (Рис. 7.21).

9. До кола деякого радіуса побудувати дотичні, що проходять через задану точку поза колом.

Поділивши пополам відрізок між центром кола O і заданою точкою A поза ним, проведемо коло з центром O_1 в середині цього відрізка і яке проходить через центр заданого кола і точку поза ним. Точки перетину кіл C і D будуть шуканими точками дотику (Рис. 7.22).

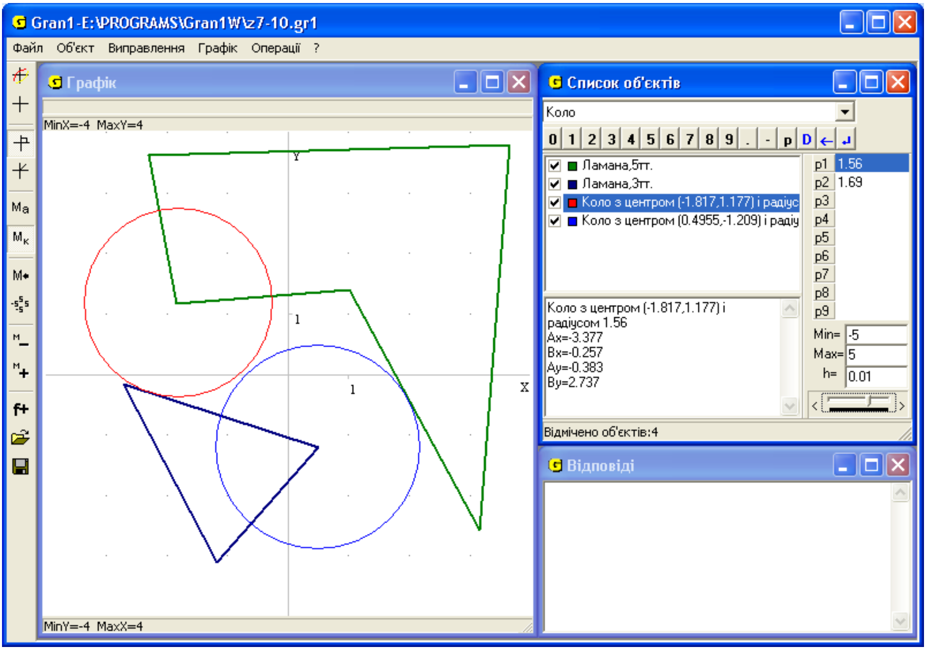


Рис. 7.20

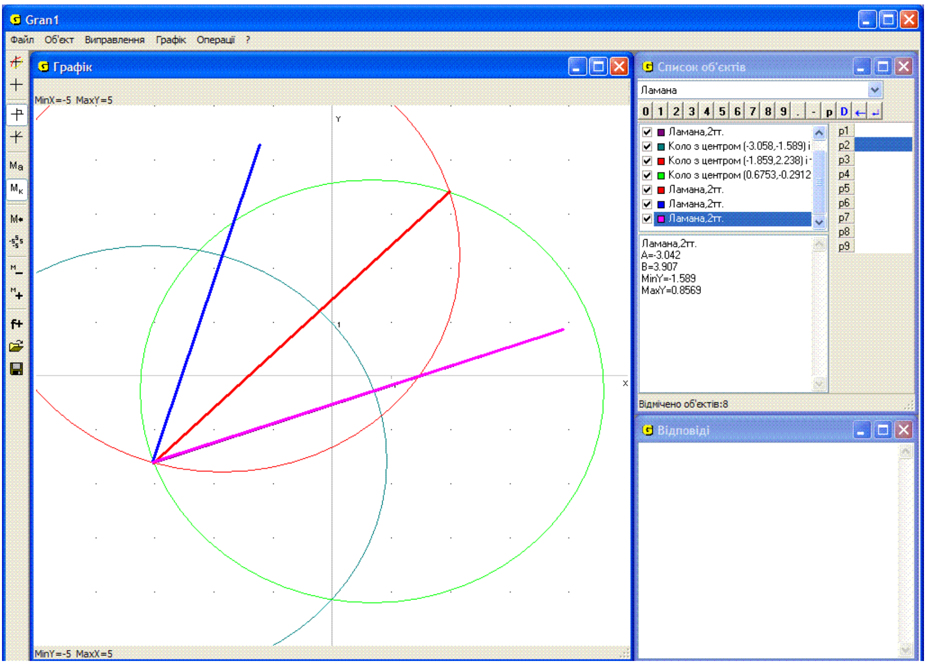


Рис. 7.21

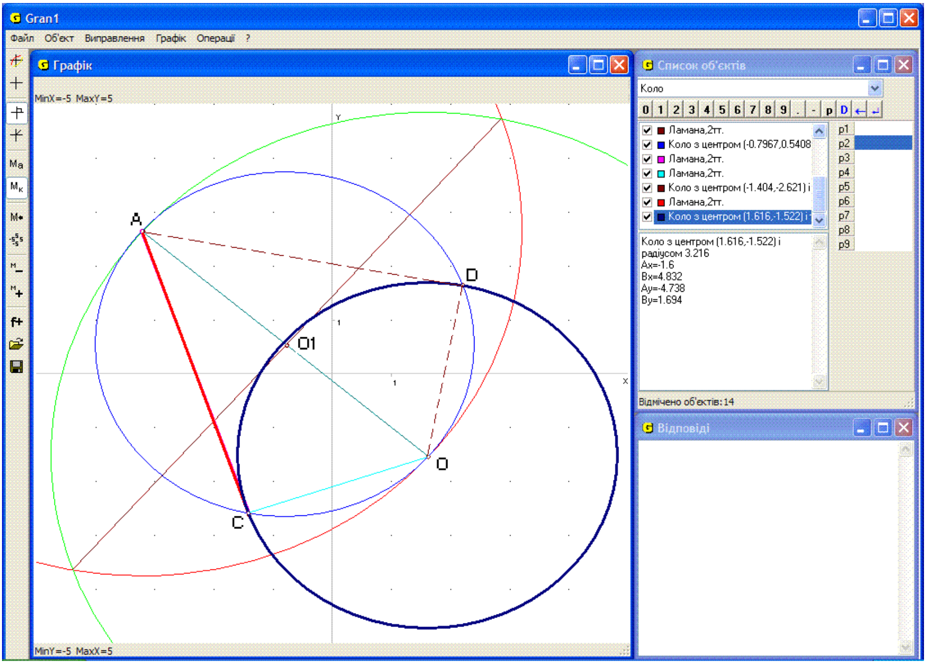


Рис. 7.22

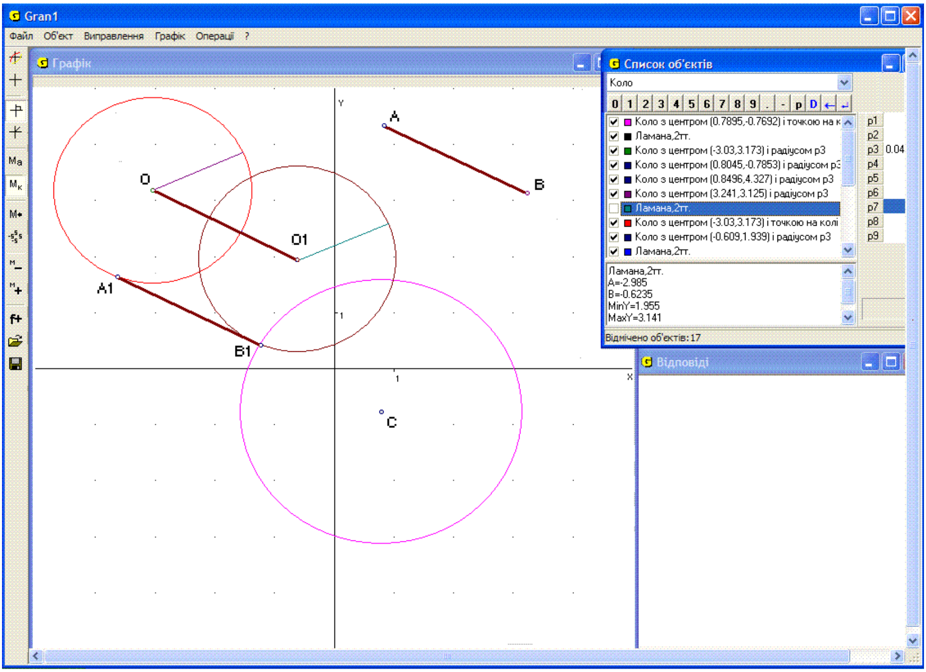


Рис. 7.23

10. Дано два кола і відрізок. Побудувати відрізок з кінцями на заданих колах, рівний заданому за довжиною і паралельний до заданого відрізка.

Здійснимо паралельне перенесення заданого відрізка AB так, щоб один з його кінців збігся з центром одного з кіл O. З центром на іншому кінці $O1$ перенесеного відрізка побудуємо коло такого самого радіуса, як і з центром на першому кінці.

Якщо так побудоване (паралельно перенесене) коло має з іншим заданим колом хоча б одну спільну точку, тоді перенесемо паралельно заданий відрізок так, щоб один його кінець лежав у спільній точці зазначених кіл $B1$, а інший ($A1$) – на колі, яке переносили паралельно до заданого відрізка на відстань, рівну довжині заданого відрізка. Очевидно, це можна зробити (Рис. 7.23).

Якщо спільних точок дві, то одержуються два відповідні розв’язки, якщо спільна точка одна (дотик ззовні чи зсередини) – розв’язок єдиний, якщо спільних точок немає, то розв’язків не існує.

11. Побудувати рівносторонній трикутник так, щоб його вершини лежали на трьох заданих паралельних прямих.

Нехай такий трикутник побудований. Позначимо паралельні прямі згори донизу літерами k, l, m. Відповідні вершини трикутника, що лежать на цих прямих, позначимо A, B, C. Проведемо через вершину B, що лежить на середній прямій l, перпендикулярну пряму n до заданих паралельних прямих, і позначимо через α кут між прямою n та стороною трикутника AB. Тоді кут між стороною BC і прямою n буде дорівнювати $180^\circ - (\alpha + 60^\circ)$. Позначимо відстань від верхньої до середньої прямої через x, від нижньої до середньої через y, довжину сторони шуканого трикутника через a. Тоді

$$x = a\cos\alpha,\ \ y = a\cos(180^\circ - (\alpha + 60^\circ)) = -a\cos(\alpha + 60^\circ) =$$

$$= -a(\cos\alpha\cos 60^\circ - \sin\alpha\sin 60^\circ) = -a\left(\frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha\right) =$$

$$= a\sin 60^\circ \sin\alpha - a\frac{1}{2}\cos\alpha,$$

$$\frac{y}{x} = \sin 60^\circ tg\alpha - \frac{1}{2},\quad tg\alpha = \frac{\frac{y}{x} + \frac{1}{2}}{\sin 60^\circ} = \frac{2y + x}{2x\sin 60^\circ}.$$

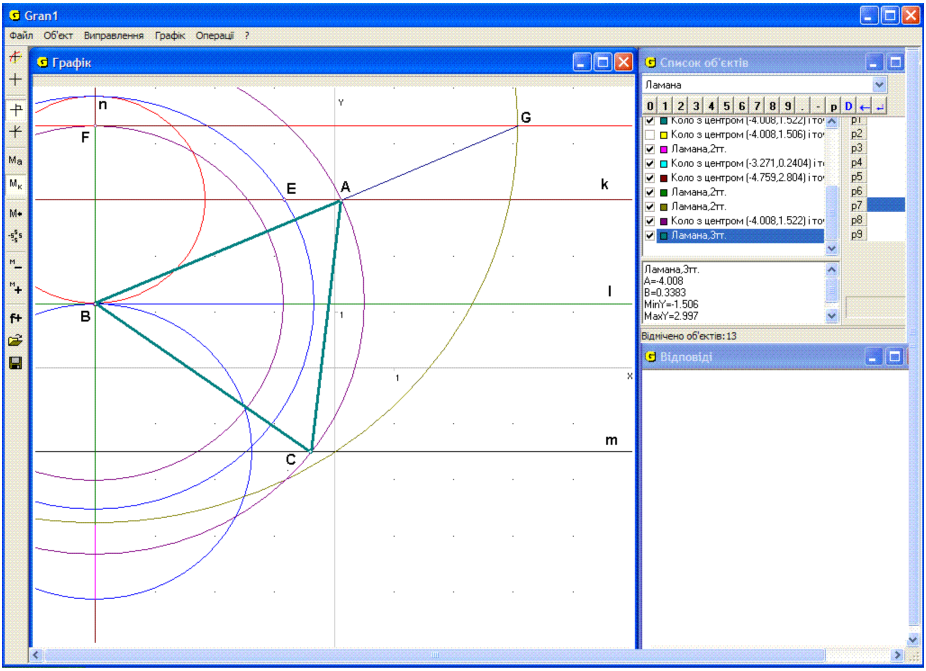


Рис. 7.24

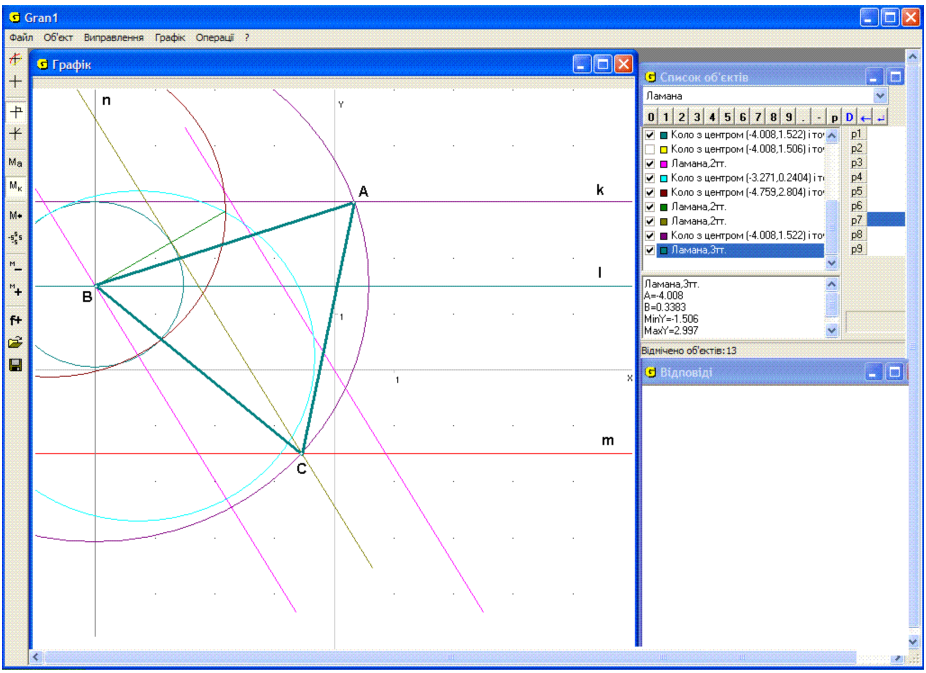


Рис. 7.25

Проведемо з центром у точці B перетину прямих l та n коло радіуса $2x$. Тоді відстань від перпендикуляра до точки E – перетину кола з верхньою прямою k буде дорівнювати $2x\sin 60°$. Проведемо з центром у тій самій точці B коло радіуса $2x\sin 60°$ і зробимо відмітку над верхньою прямою на вказаному перпендикулярі – точку F. Через точку F проведемо пряму, паралельну до заданих, і на так побудованій прямій зробимо відмітку колом радіуса $2y+x$ з центром в точці F – одержимо точку G. З'єднавши отриману точку G з точкою B, одержимо відрізок, кут між яким та вказаним перпендикуляром n дорівнюватиме α. Як точка перетину відрізка BG з верхньою із трьох заданих прямих k визначається вершина A шуканого трикутника. Побудувавши тепер коло з центром у вершині B на середній прямій і яке проходить через вершину A на верхній прямій, одержимо вершину C шуканого трикутника на нижній прямій як точку перетину вказаного кола з нижньою прямою (Рис. 7.24).

Інший варіант розв'язування цієї задачі може бути таким. Виберемо вершину трикутника на середній прямій в початку координат. Повернемо тепер верхню пряму навколо вершини B трикутника на середній прямій на кут $300°$ (на $60°$ за годинниковою стрілкою). Як точка перетину повернутої прямої з нижньою прямою визначається друга вершина C шуканого трикутника. Провівши коло з центром в вершині B, що проходить через вершину C трикутника, знайдемо третю вершину A трикутника на верхній прямій як точку перетину цієї прямої з вказаним колом (Рис. 7.25).

12. Задано три точки, що не лежать на одній прямій і є основами висот деякого трикутника. Потрібно побудувати такий трикутник.

Нехай задано точки A, B, C. Виберемо одну з цих точок (наприклад, точку A) і з'єднаємо її з двома точками, що залишилися. Продовжимо тепер кожен відрізок у протилежну сторону від обраної точки, відклавши на ньому відстань до третьої точки, яка не лежить на цьому відрізку. Одержимо точки D і E (Рис. 7.26).

Побудуємо тепер серединні перпендикуляри до відрізків, один з яких з'єднує дві точки із трьох заданих, що залишилися не з'єднаними, а другий – дві не з'єднані точки, отримані за заданими вказаним вище способом (відрізки BC і DE на Рис. 7.26). З центром у точці O перетину цих перпендикулярів побудуємо коло, яке проходить через кінці зазначених відрізків. Кінці діаметра, який проходить через обрану точку A, будуть вершинами шуканого трикутника (точки K і L).

Третю вершину M трикутника знаходимо як точку перетину продовжень катетів KC і LB прямокутних трикутників KLB і KLC, що спираються на зазначений діаметр, як на гіпотенузу, і вершини прямих кутів яких співпадають з заданими точками B і C (Рис. 7.27).

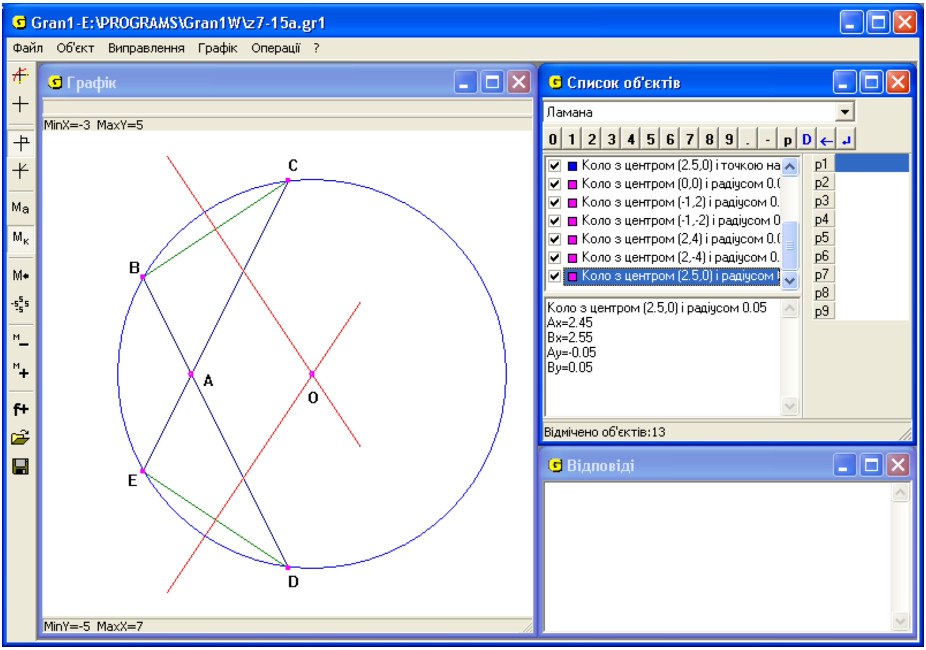


Рис. 7.26

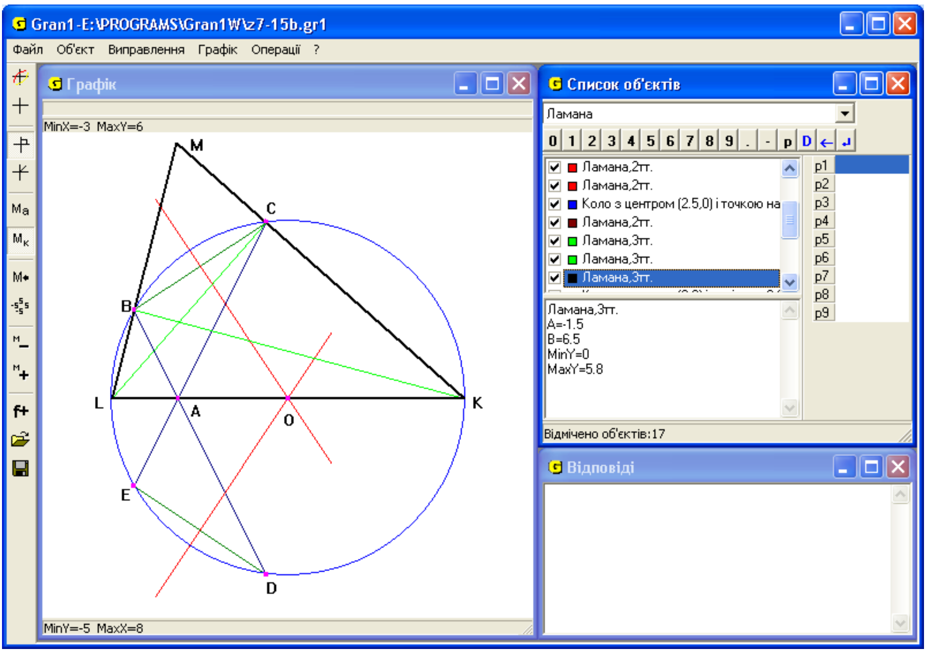


Рис. 7.27

Можна показати, що відрізок, яким з’єднується так отримана третя вершина з першою із заданих точок, перпендикулярний до вказаного діаметра кола. Якщо за першу точку вказати довільну з трьох заданих точок, утвориться той самий трикутник, тому задача має єдиний розв’язок.

13. Побудувати трикутник, якщо задані його медіани.

Побудуємо спочатку трикутник ABC зі сторонами, рівними заданим медіанам (Рис. 7.28). Вибравши яку-небудь точку, відкладемо в обидві сторони від неї відрізки, паралельні і рівні за довжиною сторонам побудованого трикутника. На одержаних шести відрізках є одна спільна точка, а з’єднавши ламаною інші кінці цих відрізків, отримаємо шестикутник $KLMNPQ$ з центром в обраній точці.

З’єднавши які-небудь три вершини шестикутника через одну, одержимо трикутник, медіани якого будуть у півтора рази довші заданих – ΔKPM на рисунку. Провівши через центр шестикутника пряму, паралельну до будь-якої сторони зазначеного трикутника, до перетину з двома іншими його сторонами, одержимо шуканий трикутник KRS (Рис. 7.28).

14. Побудувати трикутник за заданими стороною і медіанами до двох інших сторін.

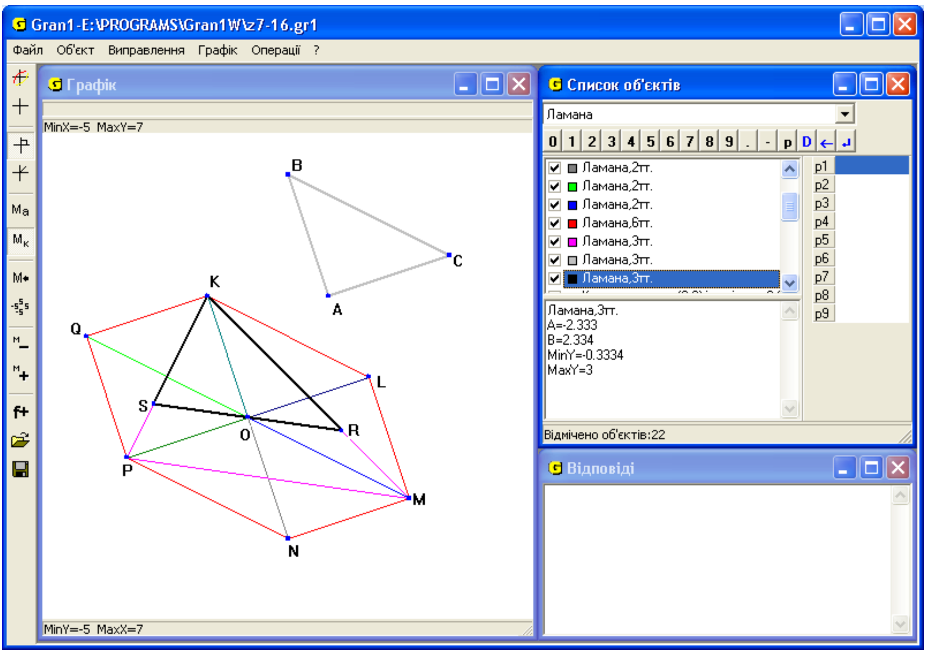


Рис. 7.28

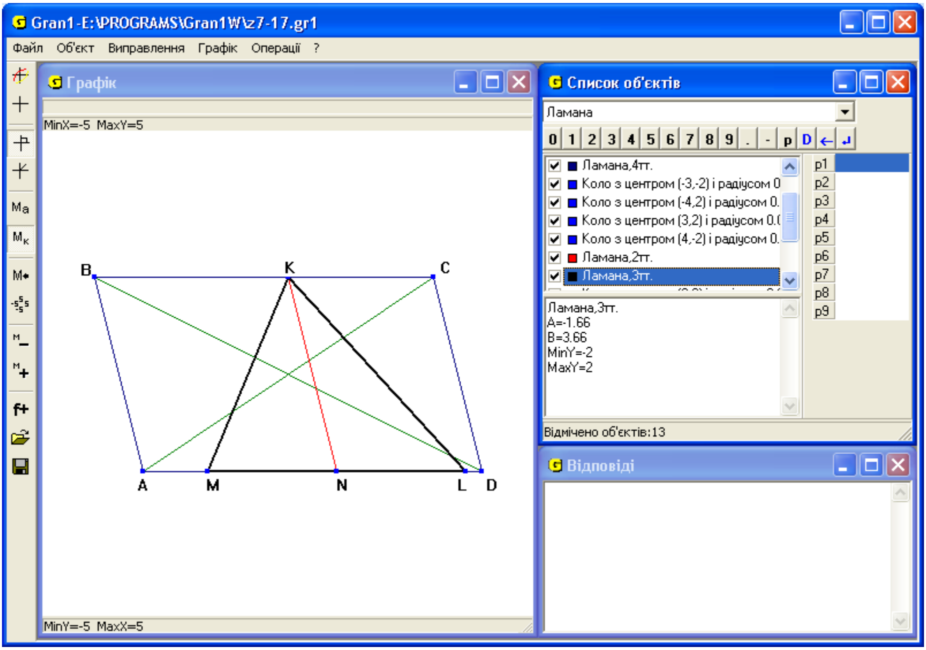


Рис. 7.29

Побудуємо паралелограм $ABCD$ з діагоналями, рівними подвоєним медіанам, і стороною, довжина якої дорівнює $\frac{3}{2}$ від довжини даної сторони (Рис. 7.29).

На стороні паралелограма зазначеної довжини беремо довільну точку K як одну з вершин шуканого трикутника і через неї проводимо пряму KN, паралельну до двох інших сторін, до перетину з протилежною стороною. На цій стороні від точки перетину в обидві сторони відкладаємо відрізки LN та NM довжиною $\frac{a}{2}$. Через так отримані дві точки визначаються ще дві вершини шуканого трикутника KLM (Рис. 7.29).

Інший шлях – будуємо паралелограм зі сторонами довжиною, рівною медіанам, і діагоналлю довжиною, рівною $\frac{3}{2}$ довжини заданої сторони. Відкладемо на цій діагоналі від одного з її кінців відрізок довжиною a і для так отриманої точки побудуємо їй симетричну відносно вершини паралелограма, що не лежить на діагоналі. Ця точка і кінці зазначеного відрізка довжиною a і будуть вершинами шуканого трикутника.

Запитання для самоконтролю

1. Як, використовуючи послуги програми GRAN1:
   - побудувати: коло? відрізок? кут?
   - знайти відстань від заданої точки до іншої заданої точки? до прямої? до відрізка? до кола? до межі трикутника? до незамкненої ламаної?
   - знайти середину відрізка? середину дуги?
   - побудувати бісектрису кута? медіани трикутника?
   - визначити кути трикутника? висоти трикутника? площу трикутника?
2. Як, використовуючи послуги програми GRAN1, наближено знайти найменшу відстань між точками двох ліній, які не перетинаються?
3. Чи можна використовувати послугу "Операції / Відстань до точки", якщо у вікні "Графік" масштаби вздовж осей Ox і Oy неоднакові?

Вправи для самостійного виконання

1. Задано трикутник через координати його вершин: (-3, -4), (4, 4), (-4, 3). Визначити: довжини сторін трикутника; периметр; кути; висоти; медіани; площу. Як зміняться результати, якщо трикутник деформувати з коефіцієнтами: $dx = 0.5, dy = 1$; $dx = 1, dy = 0.5$; $dx = 0.5, dy = 0.5$.
2. Задано два відрізки через координати їх кінців: (1, 1), (3, 2) та (2, 2), (4, 5). Побудувати паралелограм зі сторонами, рівними за довжиною і паралельними заданим відрізкам, і обчислити його площу, кути, висоти, довжини діагоналей, периметр.
3. Побудувати кола, описані навколо трикутників із прикладу 1 і вписані в них. Знайти координати їх центрів і радіуси.
4. Побудувати трикутник за двома сторонами a і b і медіаною m_a, проведеною до сторони a.
5. Побудувати трикутник за кутом A, висотою h_a і бісектрисою l_a, проведеними з вершини A.
6. Визначити довжину дотичної, проведеної до заданого кола з заданої точки поза колом , а також відстань від заданої точки поза колом до центра кола і відстань між точками дотику. Як буде змінюватися відстань між точками дотику, якщо точку поза колом поступово наближати до центра кола.
7. Побудувати трикутник за його висотою h і медіаною m, проведеними з однієї вершини, і радіусом r описаного кола.
8. Побудувати прямокутний трикутник за катетом a і різницею m між гіпотенузою та іншим катетом.
9. Побудувати трикутник за двома сторонами a і b і медіаною m_c, проведеною до третьої сторони.
10. Побудувати трикутник за двома сторонами a і b і висотою h_a.
11. Задано відрізок і дві точки. Знайти відстані від цих точок до відрізка, а також відстані точок від прямої, на якій лежить заданий відрізок.

§8. Побудова графіків залежностей. Обчислення значень виразів

Для побудови графіків залежностей між змінними (різних типів задання) і виконання деяких інших операцій над побудованими графічними об’єктами призначено пункт “Графік”.

Підпункт “Побудувати” використовується в разі необхідності побудувати графіки однієї чи кількох введених залежностей. Якщо графік деякої введеної залежності будувати не потрібно, тоді за допомогою маніпулятора “мишка” слід зняти мітку ☑ біля пункту “Будувати графік” у контекстному меню для даного об’єкта або у вікні “Введення виразу залежності” (Рис. 8.2, Рис. 8.3), звернувшись до послуги “Об’єкт / Змінити”. Залежності, проти позначення яких стоїть знак ☑ у вікні “Список об’єктів”, будуть враховуватись під час виконання операцій над об’єктами.

Вирази залежностей подаються у вікні “Список об’єктів” символами того самого кольору, що і відповідні їм графіки, зображувані у вікні “Графік”. Кількість об’єктів не обмежується (обмежується лише апаратними ресурсами комп’ютера).

Для задання явної залежності між змінними x та y в декартовій системі координат необхідно спочатку встановити тип задання залежності “Явна: Y=Y(X)” у вікні “Список об’єктів” (Рис. 8.1). Потім слід звернутися до послуги “Об’єкт / Створити” або натиснути кнопку “f+” на панелі інструментів.

В результаті з’являється допоміжне вікно “Введення виразу залежності”. В рядок “Y(X)=” потрібно ввести вираз залежності (Рис. 8.2). Цей рядок належить до списку, що розкривається, і під час створення нової залежності відповідний вираз заноситься до цього списку. Тому при створенні наступної залежності можна вводити вираз з використанням даних з цього списку (Рис.8.3). Якщо вираз записано неправильно, то буде виведено повідомлення про помилку.

Явна залежність задається на певному завжди скінченному відрізку. У вікні “Введення виразу залежності” в рядку “A=” необхідно вказати вираз, за яким визначається лівий кінець відрізка, а в рядку “B=” – вираз, за яким визначається правий кінець відрізка. Слід мати на увазі, що повинна виконуватись умова $A < B$. В разі невиконання цієї умови виводиться повідомлення про помилку.

Введення даних можна здійснити як з клавіатури, так і за допомогою “мишки”, використовуючи панель введення даних, що подана в допоміжному вікні (Рис. 8.2, Рис. 8.3).

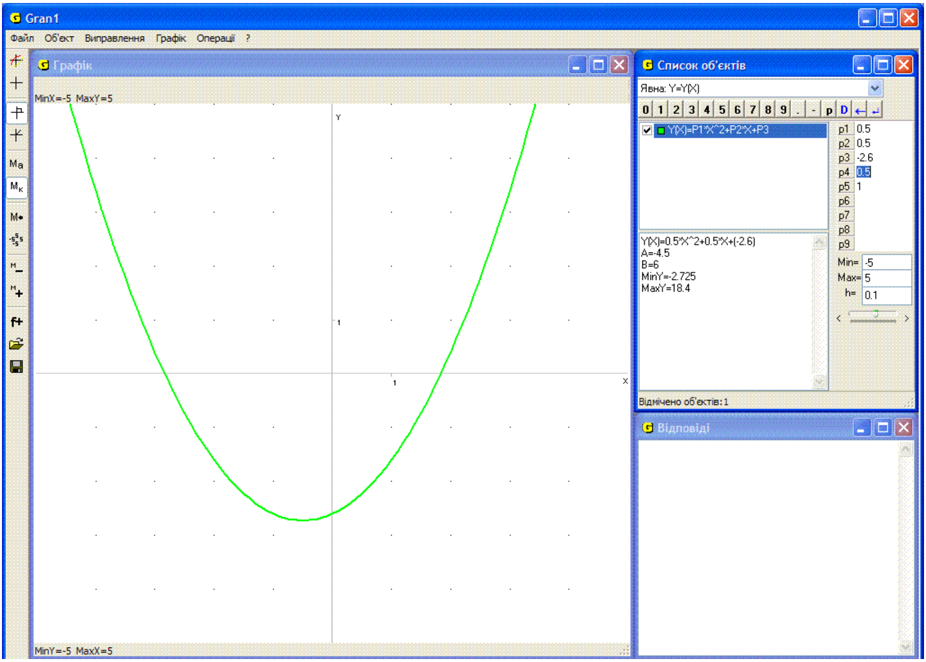

Gran1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
MinX=-5 MaxY=5
Y
X
1
1
MinY=-5 MaxX=5
Список об'єктів
Явна: Y=Y(X)
Y(X)=P1*X^2+P2*X+P3
p1 0.5
p2 0.5
p3 -2.6
p4 0.5
p5 1
p6
p7
p8
p9
Y(X)=0.5*X^2+0.5*X+(-2.6)
A=-4.5
B=6
MinY=-2.725
MaxY=18.4
Min= -5
Max= 5
h= 0.1
Відмічено об'єктів:1
Відповіді

Рис. 8.1

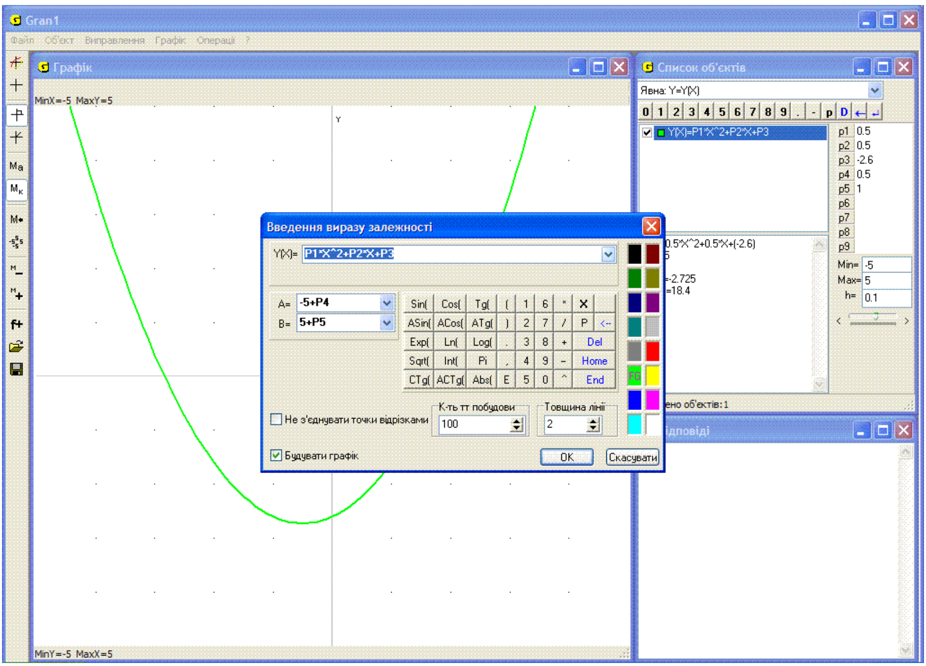

Gran1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
MinX=-5 MaxY=5
MinY=-5 MaxX=5
Список об'єктів
Явна: Y=Y(X)
Y(X)=P1*X^2+P2*X+P3
p1 0.5
p2 0.5
p3 -2.6
p4 0.5
p5 1
Min= -5
Max= 5
h= 0.1
Введення виразу залежності
Y(X)= P1*X^2+P2*X+P3
A= -5+P4
B= 5+P5
Sin(Cos(Tg(
ASin(ACos(ATg(
Exp(Ln(Log(
Sqrt(Int(Pi
CTg(ACTg(Abs(E
Del
Home
End
Не з'єднувати точки відрізками
К-ть тт побудови
100
Товщина лінії
2
Будувати графік
OK
Скасувати
Відповіді

Рис. 8.2

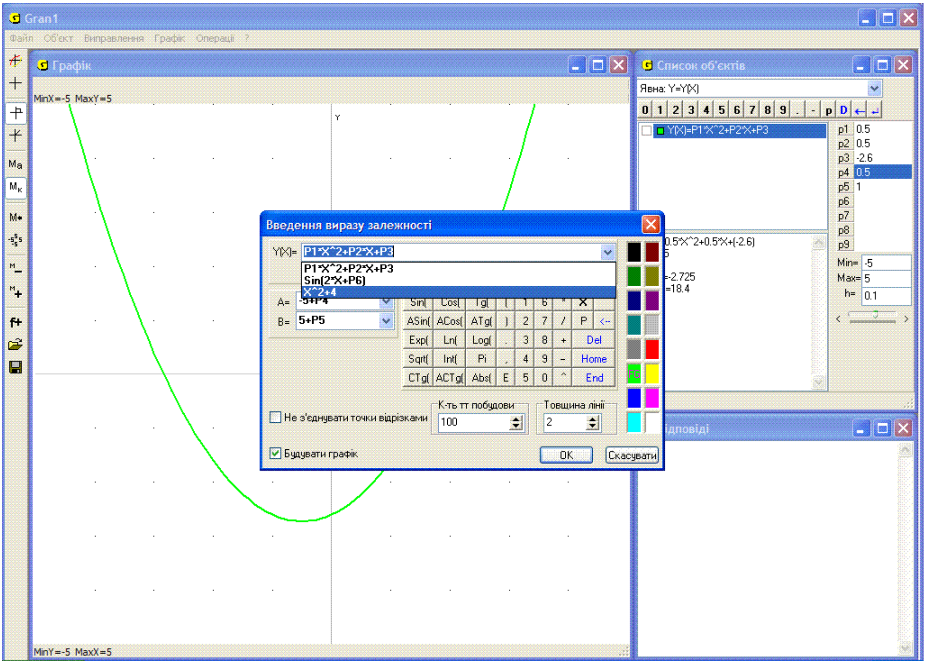


Рис. 8.3

Як до виразів залежностей, так і до виразів, за якими визначаються межі задання залежностей, можуть входити параметри $P1$, $P2$, … , $P9$ (Рис. 8.2). В разі змінювання значень цих параметрів (за допомогою повзунка чи введення значень з панелі введення даних) відповідним чином змінюються вирази залежностей та межі їх задання.

Якщо потрібно зафіксувати об’єкт за деяких значень параметрів, слід звернутись до послуги *Об’єкт / Новий об’єкт з зафіксованими параметрами*. В результаті створюється новий об’єкт з фіксованими значеннями параметрів, а в попередньому значення параметрів можна далі змінювати.

Після введення виразу можна вказати колір, яким у вікні “Графік” буде подано графік залежності, для чого необхідно встановити перемикач “FG” у відповідне положення (вказавши потрібний колір курсором “мишки”) та товщину лінії графіка (Рис. 8.2).

В допоміжному вікні також вказується кількість точок побудови графіка (від 10 до 1000, за замовчуванням 100). Потрібно зазначити, що із збільшенням кількості точок побудови швидкість обчислень і побудов графіків зменшується. Разом з тим зі зменшенням кількості точок побудови зменшується точність графічних побудов.

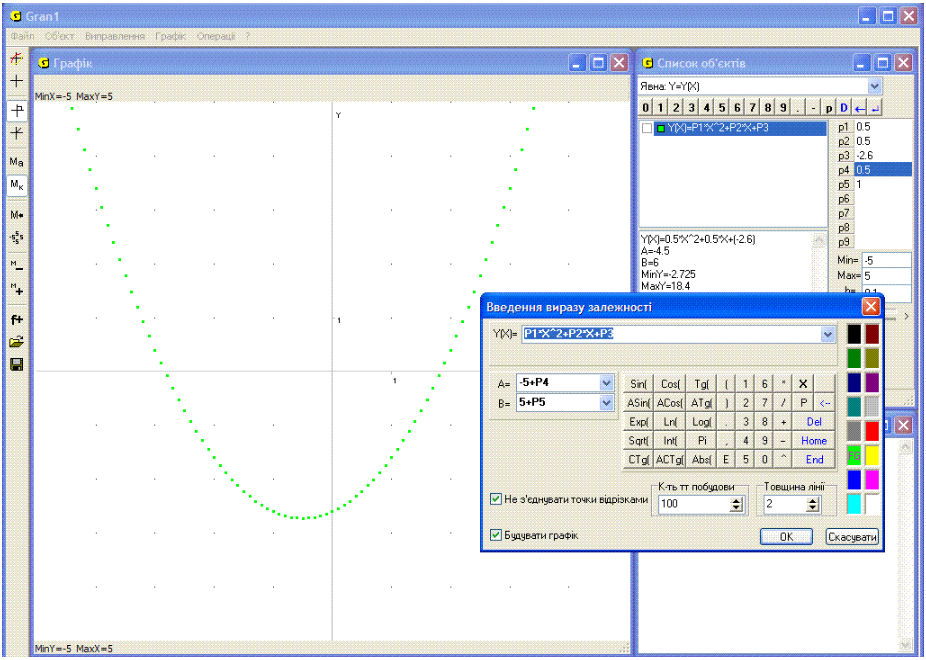

Gran1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
MinX=-5 MaxY=5
MinY=-5 MaxX=5
Список об'єктів
Явна: Y=Y(X)
Y(X)=P1*X^2+P2*X+P3
p1 0.5
p2 0.5
p3 -2.6
p4 0.5
p5 1
Y(X)=0.5*X^2+0.5*X+(-2.6)
A=-4.5
B=6
MinY=-2.725
MaxY=18.4
Min= -5
Max= 5
Введення виразу залежності
Y(X)= P1*X^2+P2*X+P3
A= -5+P4
B= 5+P5
Sin(Cos(Tg(ASin(ACos(ATg(Exp(Ln(Log(Sqrt(Int(Pi CTg(ACTg(Abs(
Del Home End
Не з'єднувати точки відрізками
К-ть тт побудови
100
Товщина лінії
2
Будувати графік
OK
Скасувати

Рис. 8.4

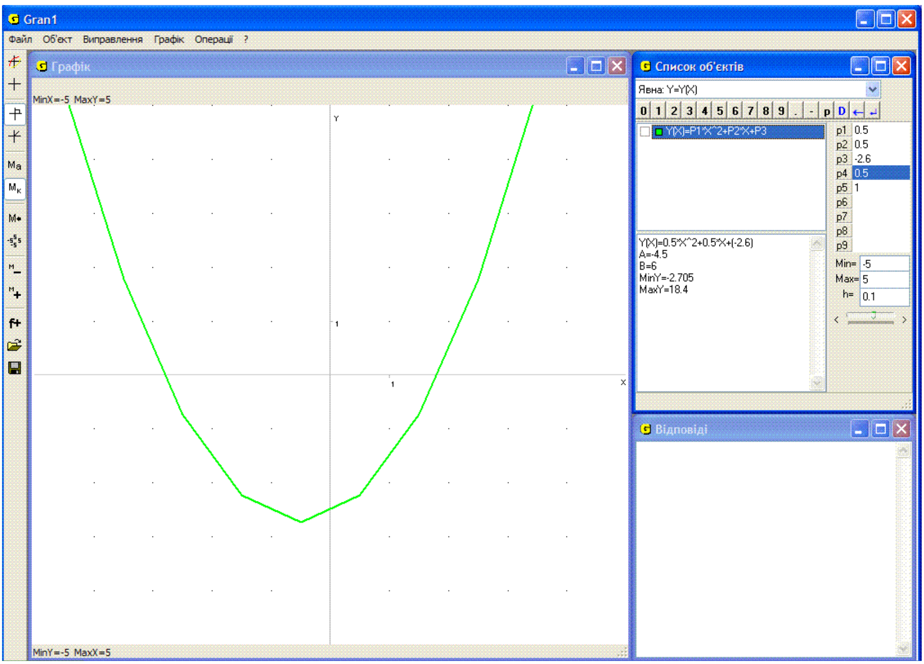

Gran1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
MinX=-5 MaxY=5
MinY=-5 MaxX=5
Список об'єктів
Явна: Y=Y(X)
Y(X)=P1*X^2+P2*X+P3
p1 0.5
p2 0.5
p3 -2.6
p4 0.5
p5 1
Y(X)=0.5*X^2+0.5*X+(-2.6)
A=-4.5
B=6
MinY=-2.705
MaxY=18.4
Min= -5
Max= 5
h= 0.1
Відповіді

Рис. 8.5

Іноді зручно не будувати весь графік, а прорисовувати лише вузлові точки. В цьому випадку потрібно встановити мітку ☑ поруч з написом “Не з’єднувати точки відрізками” (Рис. 8.4).

На Рис. 8.1 подано неперервний графік залежності $y = 0.7x^2 - 2.4x - 1.7$ (100 точок на графіку з’єднані відрізками прямих), на Рис. 8.4 – набір точок на графіку тієї самої залежності, не з’єднаних відрізками прямих, а на Рис. 8.5 графік тієї самої залежності, але кількість точок побудови дорівнює 10.

Якщо до виразів залежностей, графіки яких побудовано, входять якісь із параметрів $P1$, $P2$, … , $P9$, або до виразів задання меж відрізків входять такі параметри, то із змінюванням значень якогось із параметрів відповідні графіки автоматично перебудовуються.

Якщо за деяких значень параметрів звернутись до послуги “*Об’єкт / Новий об’єкт з фіксованими параметрами*”, то створюється новий об’єкт з фіксованими значеннями параметрів, а також фіксується відповідний графік. На Рис. 8.6 базовим є перший об’єкт. Наступні об’єкти отримані з першого змінюванням значень одного з параметрів $P1$, $P2$, $P3$ та створенням відповідного об’єкта за фіксованих значень параметрів.

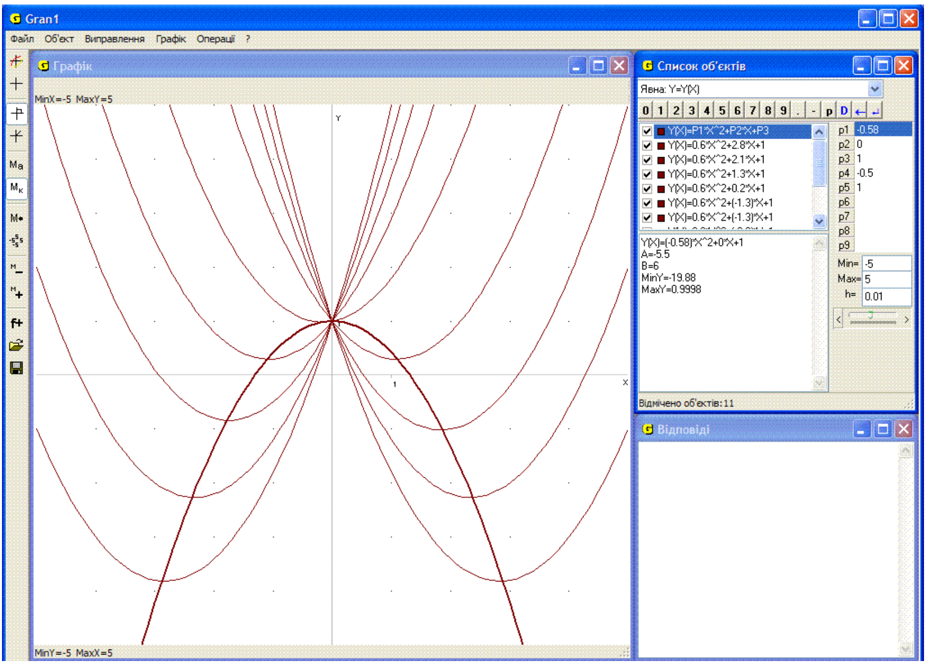


Рис. 8.6

Після "натиснення" кнопки "ОК" завершується створення нового об'єкта у вікні "Список об'єктів", а в разі натиснення кнопки "Скасувати" скасовуються всі дії стосовно створення об'єкта (Рис. 8.2).

Приклади

1. Нехай необхідно побудувати графік функції $y = x^2 - 3$ на деякому відрізку задання.

Встановимо у вікні "Список об'єктів" тип залежності "Явна: Y=Y(X)". Потім звернемося до послуги "Об'єкт/Створити...". В результаті з'явиться допоміжне вікно "Введення виразу залежності" (Рис. 8.2). Введемо вираз $x\text{^}2 - 3$ в рядку "Y(X)=".

В рядку "A=" введемо значення лівої межі відрізка задання функції "$-1 - P1$", а в рядку "B=" введемо значення правої межі відрізка задання "$-1 + P2$". В подальшому через значення динамічних параметрів $P1$ та $P2$ будуть визначатися межі відрізка, на якому будується графік функції. Колір і кількість точок побудови графіка залишимо заданими за замовчуванням, товщину лінії вкажемо 2 і "натиснемо" кнопку "ОК".

В результаті у вікні "Список об'єктів" одержимо: новий об'єкт $Y(X) = x\text{^}2 - 3$. Втановимо значення динамічних параметрів $P1 = 1.7$, $P2 = 0.4$, що відповідатиме відрізку задання [–2.7, 1.4]. У нижній частині цього вікна подані деякі характеристики залежності за вказаних значень параметрів : $A = -2.7$, $B = 1.4$, $MinY = -3$, $MaxY = 4.29$.

Звернемося тепер до послуги головного меню "Графік / Побудувати". В результаті у вікні "Графік" буде побудовано графік залежності $y = x^2 - 3$ на відрізку [–2.7, 1.4] (Рис. 8.7).

Якщо очистити вікно "Графік", скориставшись послугою "Графік / Очистити", а потім звернутись до послуги "Графік / Побудувати", то будуть побудовані графіки залежностей, під час введення виразів яких було встановлено мітку  проти напису "Будувати графік". Зняти таку мітку або встановити в разі її відсутності можна, скориставшись контекстним меню, попередньо встановивши вказівник у вікні "Список об'єктів" на потрібний об'єкт.

2. Нехай на проміжку [–7, 7] залежність $y = f(x)$ задана таким чином:

$$y(x) = \begin{cases} 1/(x^2/6) - 2, & \text{коли} \quad x \le -1, \\ 4 \cdot |x|, & \text{коли} \ -1 \le x \le 1, \\ 4 - 10\lg(x), & \text{коли} \quad x \ge 1. \end{cases}$$

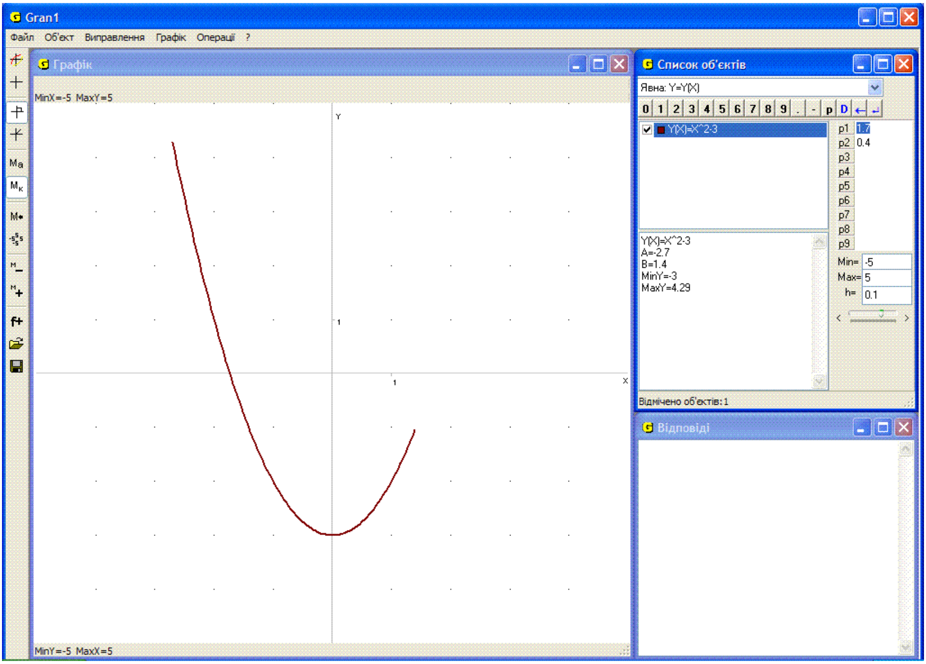

Gran1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
MinX=-5 MaxY=5
MinY=-5 MaxX=5
Список об'єктів
Явна: Y=Y(X)
Y(X)=X^2-3
p1 1.7
p2 0.4
Y(X)=X^2-3
A=-2.7
B=1.4
MinY=-3
MaxY=4.29
Min= -5
Max= 5
h= 0.1
Відмічено об'єктів:1
Відповіді

Рис. 8.7

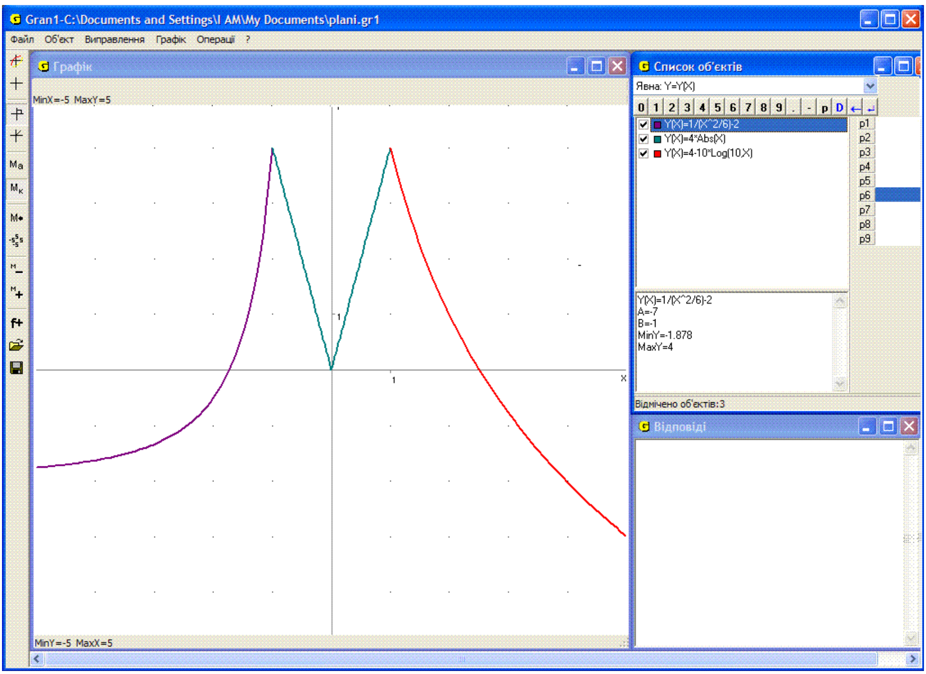

Gran1-C:\Documents and Settings\I AM\My Documents\plani.gr1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
MinX=-5 MaxY=5
MinY=-5 MaxX=5
Список об'єктів
Явна: Y=Y(X)
Y(X)=1/(X^2/6)-2
Y(X)=4*Abs(X)
Y(X)=4-10*Log(10,X)
Y(X)=1/(X^2/6)-2
A=-7
B=-1
MinY=-1.878
MaxY=4
Відмічено об'єктів:3
Відповіді

Рис. 8.8

Вказавши тип задання залежності "Явна: Y=Y(X)", введемо три залежності:

- $1/(x\hat{}2/6)-2$ на проміжку [–7, –1],
- $4*abs(x)$ на проміжку [–1, 1],
- $4-10*\log(10,x)$ на проміжку [1, 7].

Якщо під час введення виразів залежностей проти напису "Будувати графік" було встановлено мітки , то після звертання до послуги "Графік / Побудувати" у вікні "Графік" будуть побудовані графіки вказаних залежностей (Рис. 8.8). Якщо очистити вікно "Графік", скориставшись послугою "Графік / Очистити", то щоб знову побудувати графіки, слід звернутись до послуги "Графік / Побудувати".

Іноді буває необхідно збільшити зображення в деякій частині вікна "Графік" до розмірів усього вікна. Для цього слід вказати прямокутник, в якому розміщена частина зображення, що збільшується. Ця операція здійснюється за допомогою маніпулятора "мишка". Курсор "мишки" потрібно встановити в одну з вершин необхідного прямокутника, потім натиснути ліву кнопку "мишки" і, не відпускаючи її, вказівник "мишки" перевести в точку, що є протилежною вершиною прямокутника.

Як тільки кнопка "мишки" буде відпущена, автоматично відбудеться зміна масштабу вздовж осей Ox і Oy. У вікні "Графік" будується збільшена до розмірів усього вікна частина зображення, що знаходилась всередині прямокутника. Ця послуга використовується в разі необхідності уточнити вид графіка в деякій його частині, координати характерних його точок тощо.

3. Нехай необхідно з'ясувати, чи є на графіку залежності $y(x)=\sin(x)+2-\ln(x)$ спільна точка з віссю Ox в області, обмеженій прямокутником на Рис. 8.9.

На перший погляд відповідь ствердна (якщо точність обчислень невелика). Однак, якщо збільшити графік у деякому околі досліджуваної точки, виявиться, що спільної точки на вказаних лініях в зазначеному околі немає (Рис. 8.10).

Збільшення масштабу, в якому будуються графіки, фактично приводить до збільшення точності обчислень в околі досліджуваної точки.

Щоб після операції збільшення повернутися до попереднього зображення, слід звернутися до послуги "Графік / Масштаб / Попередній масштаб" або скористатись кнопкою "$M_{\leftarrow}$" на панелі інструментів.

В разі необхідності вилучити з вікна "Графік" побудовані там зображення використовується послуга "Графік / Очистити".

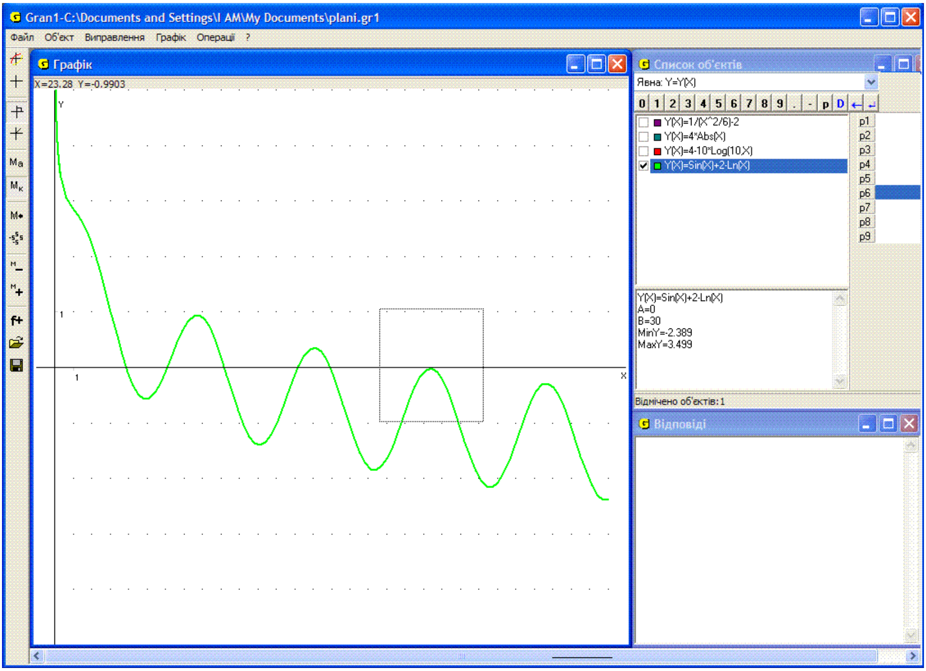


Рис. 8.9

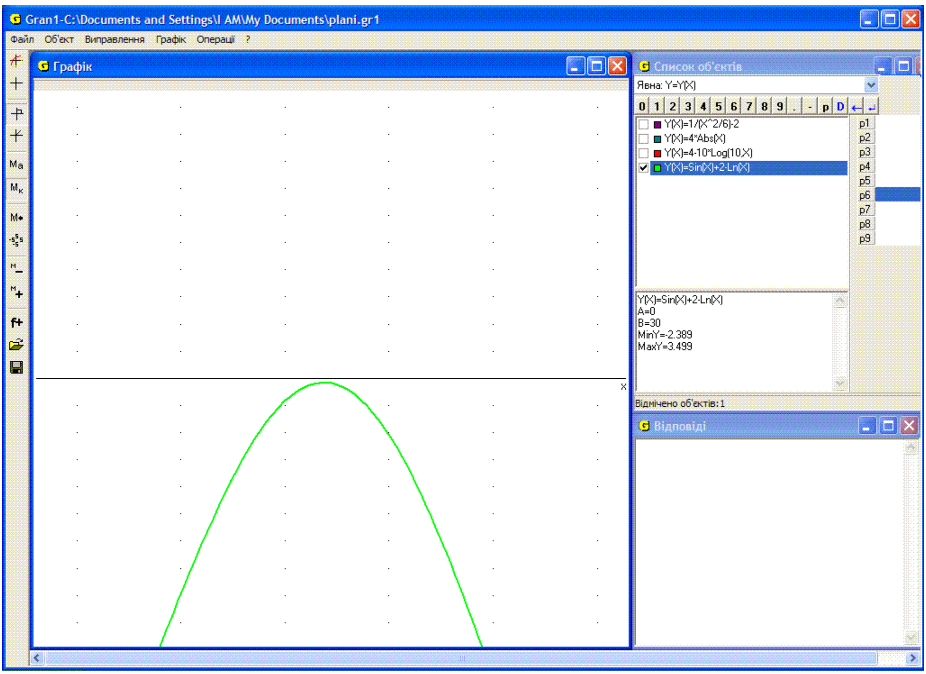


Рис. 8.10

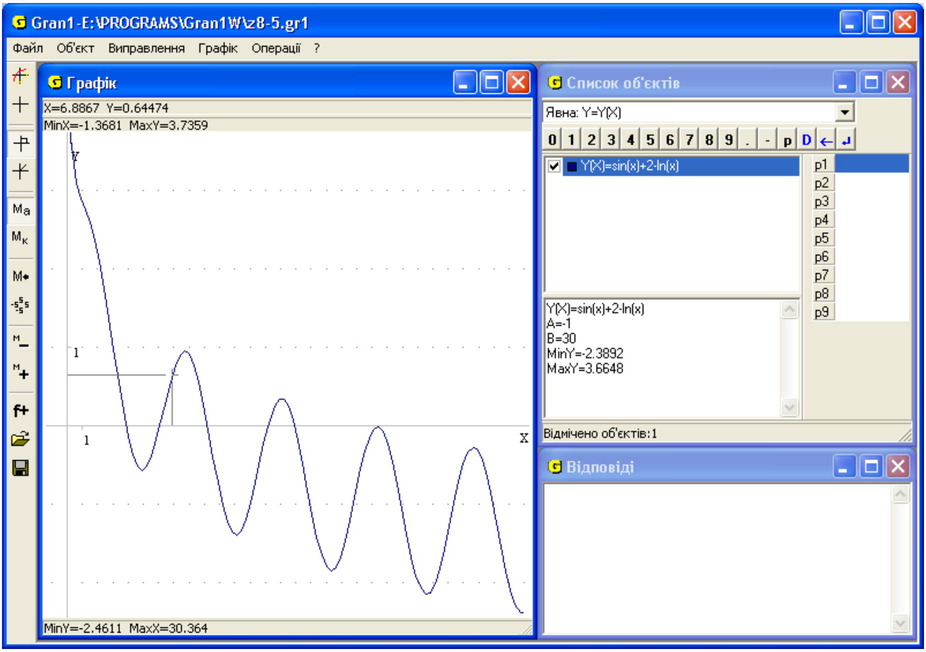


Рис. 8.11

За необхідності обчислити значення деякого виразу виду $f(x)$ для заданого значення x можна скористатися графіком залежності $y = f(x)$. Для цього слід підвести вказівник "мишки" до відповідної точки на графіку функції у вікні "Графік" і в лівому верхньому куті цього вікна прочитати координати x, y точки (Рис. 8.11). Той самий результат можна одержати за допомогою клавіатури, скориставшись послугою "Графік / Координати з клавіатури". В даному випадку чим більший масштаб побудови, тим точніші результати.

На Рис. 8.11 курсор встановлено на графіку функції в точці з абсцисою $x \approx 6.9$, і тоді значення $y \approx 0.64$.

Інший спосіб обчислення значення виразу – звернутися до послуги "Операції/Калькулятор". Під час звернення до цієї послуги з'являється вікно "Калькулятор", в якому подані панель введення даних, поле з написом "Вираз:" на початку рядка введення та поле відповідей (Рис. 8.12). Щоб одержати шукане значення виразу, потрібно ввести його в рядок введення (як і будь-які інші вирази).

До виразу, що вводиться та відображається в рядку "Вираз:" можуть бути включені будь-які функції, подані на панелі введення даних, однак до виразу не можуть входити змінні, тобто замість аргументів повинні бути вказані їх конкретні значення.

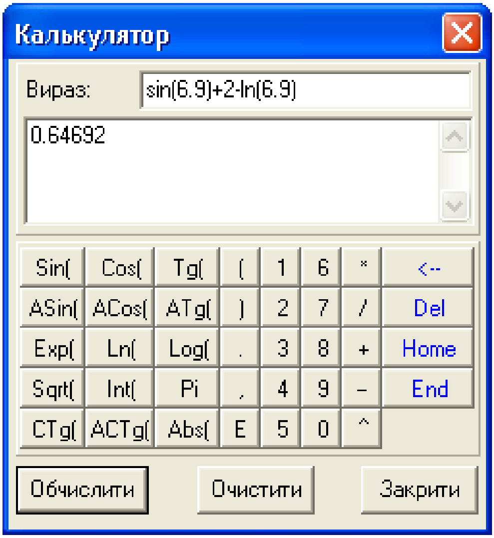


Рис. 8.12

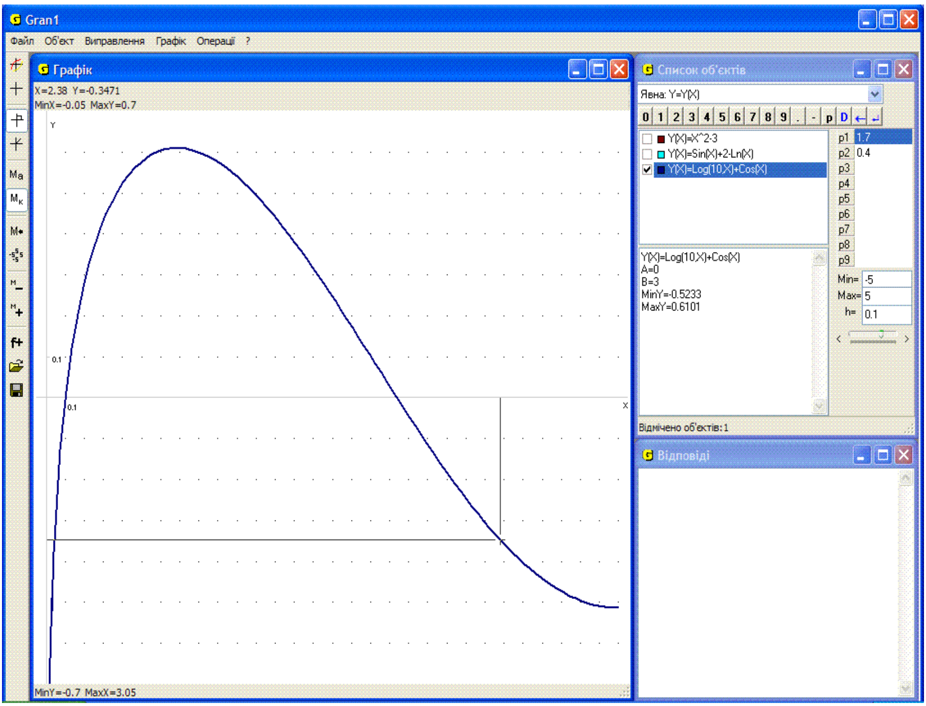


Рис. 8.13

Введення виразів здійснюється, як і раніше, з клавіатури або з використанням панелі введення даних.

Після введення виразу для одержання відповіді потрібно “натиснути” кнопку “Обчислити”. В полі, що знаходиться нижче рядка “Вираз:” з’являється відповідь – значення введеного виразу. В разі потреби відповідь можна скопіювати до буфера обміну для подальшого використання в інших програмах.

Кнопка “Очистити” призначена для очищення рядка “Вираз:” і поля відповідей. В разі “натиснення” кнопки “Закрити” вікно калькулятора закривається.

4. Нехай необхідно обчислити значення виразу $\lg(x)+\cos(x)$ для значення $x=2.38$.

Побудувавши графік залежності $\lg(x)+\cos(x)$ на проміжку $[0,3]$ і звернувшись до послуги “Координати”, слід встановити курсор у точку з абсцисою $x=2.38$, після чого перемістити курсор вгору чи вниз до точки на побудованому графіку. Ордината цієї точки і буде шуканим значенням виразу $\log(10,2.38)+\cos(2.38)$ – $y=-0.347$ (Рис. 8.13). Використання калькулятора дає значення $y=-0.3472$

Якщо необхідно збільшити точність обчислень, слід змінити відрізок, на якому вибирається x, наприклад, покласти $A=2.3$, $B=2.5$ і т.п., або ж скористатися послугою збільшення частини графіка.

Запитання для самоконтролю

1. Яка послуга програми GRAN1 призначена для побудови графіків залежностей між змінними?
2. Скільки графіків можна побудувати одночасно?
3. Як довідатися, який графік відповідає тому чи іншому виразові?
4. Як побудувати графіки лише двох залежностей, якщо введено більше двох виразів?
5. Чи обов’язково всі залежності, графіки яких будуються, повинні мати той самий тип задання?
6. Як можна збільшити частину графіка?
7. Як відновити графік, якщо частину графіка збільшували?
8. Як можна визначити значення виразу $f(x)$ для заданого значення змінної x, використовуючи послуги програми GRAN1?
9. Як побудувати графік залежності, визначеної за різними аналітичними виразами на кількох сусідніх проміжках?
10. Як збільшити точність визначення координат точок, що лежать на графіку в околі деякої точки?
11. Як вилучити всі побудови з вікна “Графік”?
12. Як вилучити частину побудов у вікні “Графік” і залишити лише окремі з них?

Вправи для самостійного виконання

1. Побудувати графіки поданих нижче залежностей. Для вказаних значень x визначити відповідні значення $y = f(x)$.

1.1. $y = 2\sin x$; $x = 0; 1; 1.57; 2; 3; 3.14$.

1.2. $y = \cos 2x$; $x = 0; 1; 1.57; 2; 3; 3.14$.

1.3. $y = 2^x$; $x = 0; 1; 2; 3$.

1.4. $y = \log_2 x$; $x = 1; 2; 4; 8$.

1.5. $y = \left\| x-1 \right| - \left| x-2 \right\|$; $x = -2; -1; 0; 1; 2$.

1.6. $y = \dfrac{x-1}{x+2}$; $x = -3; -1; 0; 1; 2; 3$.

1.7. $y = (x-1)^2 (x-2)^3$; $x = -3; -1; 0; 1; 2; 3; 4$.

1.8. $y = \sqrt[3]{x}$; $x = -8; -4; -2; 0; 1; 2; 4; 8$.

1.9. $y = \dfrac{1}{2}(e^x + e^{-x})$; $x = -4; -2; -1; 0; 1; 2; 4$ (гіперболічний косинус).

1.10. $y = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$; $x = -4; -2; -1; 0; 1; 2; 4$ (гіперболічний синус).

1.11. $y = \dfrac{\sin x}{x}$; $x = -4; -2; -1; 0; 1; 2; 4$.

1.12. $y = (1+x)^x$; $x = 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8$.

2. Подати на екрані одночасно графіки двох залежностей $y_1 = P2(P1^2 - x^2)(5P1^2 - x^2)$, $(P2 < 0)$; $y_2 = P2(P1^2 - x^2)^2$ для значень x, що змінюються в межах від $-P1$ до $+P1$. Розглянути кілька значень $P1$: 2, 4, 6 і за кожного $P1$ кілька значень $P2$: – 0.1, – 0.5, – 1, – 2.

3. Подати на екрані одночасно графіки функцій: $y = \sin x$, $y = 2\sin x$, $y = \sin 2x$, $y = \sin(x+2)$. Скористатись параметрами $P1$, $P2$, $P3$, ввівши вираз $y = P1 \cdot \sin(P2 \cdot x) + P3$ та фіксуючи потрібні об'єкти.

4. Подати на екрані одночасно графіки функцій: $y = 1.1^x$, $y = 1.2^x$, $y = 2^x$, $y = 3^x$, $y = 4^x$. Скористатись параметром $P1$, ввівши вираз $y = P1^x$ та фіксуючи відповідні об'єкти.

5. Подати на екрані одночасно графіки функцій: $y = \log_2 x$, $y = \log_3 x$, $y = \log_4 x$, $y = \lg x$, $y = \log_{1/2} x$, $y = \log_{1/4} x$. Скористатись параметром $P7$, ввівши вираз $y = \log(P7, x)$.

6. Подати на екрані одночасно графіки функцій: $y = x^2 - 3$, $y = \dfrac{1}{x^2 - 3}$.

7. Побудувати графік функції $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$. Куди прямує значення функції $f(x)$, якщо значення аргументу x прямує до $+\infty$?

8. Яка функція на проміжку $[0,\infty)$ зростає швидше: x^n чи n^x ? (покласти $n=$ 2, 3, 4).

9. Довести, що за змінювання значень параметра $P2$ і за фіксованих $P1$, $P3$ вершини параболи $P1\cdot x^2+P2\cdot x+P3$ переміщуються вздовж параболи (див. Рис. 8.6). Розглянути випадки $P1>0$, $P1<0$.

§9. Неявно задані залежності

Якщо залежність між змінними x і y задана у вигляді $G(x,y)=0$, де $G(x,y)$ деякий вираз від двох змінних x і y, визначений в деякій області зміни значень x і y, тоді говорять, що залежність змінної y від змінної x (чи, навпаки, змінної x від змінної y) задана неявно. Якщо для кожного значення x з деякого проміжка існує значення y, що разом з x задовольняє рівняння $G(x,y)=0$, то тим самим визначається залежність $y=f(x)$, для якої рівність $G(x,f(x))=0$ задовольняється за всіх значень x із вказаного проміжка (стає тотожною відносно x). До виразу $G(x,y)$ можуть входити якісь із параметрів $P1$, $P2$, … , $P9$.

Перш ніж вводити вираз $G(x,y)=0$, слід встановити у вікні “Список об’єктів” тип задання залежності “Неявна: 0=G(x, y)” (Рис. 9.1). Далі створення об’єкту здійснюється аналогічно до того, як і в разі задання явної залежності.

Під час звернення до послуги “Об’єкт / Створити” з’являється вікно “Введення виразу залежності” (Рис. 9.2). У рядку “0=” записується вираз $G(x,y)$, до якого можуть входити дві змінні x і y чи тільки одна з них, а також якісь із параметрів $P1$, $P2$, … , $P9$.

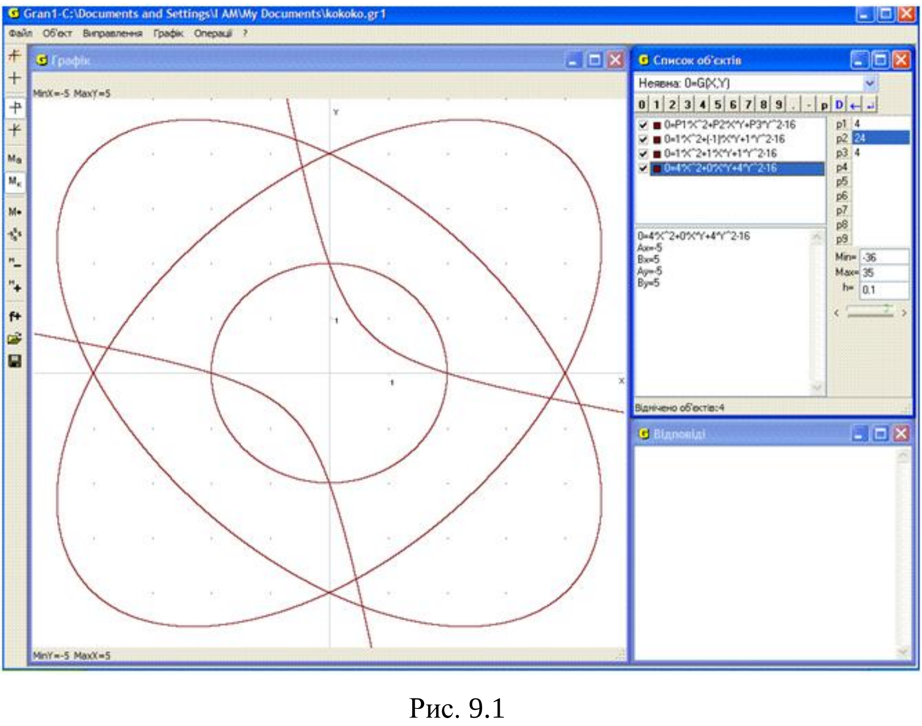


Рис. 9.1

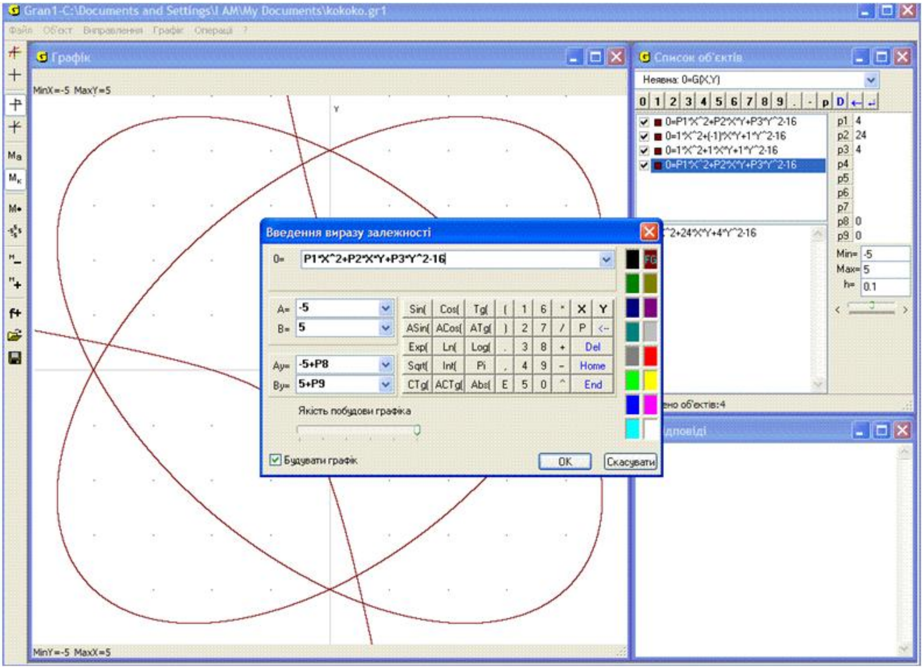


Рис. 9.2

На відміну від задання явної залежності, під час задання неявної залежності потрібно вказати відрізки задання кожної із змінних x і y. У рядках “A=” і “B=” необхідно вказати відповідно нижню і верхню межі зміни змінної x, у рядках “Ay=” і “By=” – нижню і верхню межі зміни змінної y. До виразів, за якими визначаються межі зміни змінних x та y, також можуть входити параметри (Рис. 9.2).

Перемикач “Якість побудови графіка” призначений для прискорення побудови графіка залежності. Якщо перемикач встановлено в найлівіше положення, то швидкість побудови графіка зростає, але разом з тим зменшується точність графічних побудов.

Всі інші правила, що стосуються графічних побудов, залишаються такими самими, як і раніше.

Приклади

1. Рівнянням виду $ax+by+c=0$ описують пряму лінію. Поклавши у відповідність параметру a рівняння динамічний параметр $P1$, параметру b – $P2$ і параметру c – $P3$, створимо в програмі об’єкт $P1x+p2y+p3=0$. За конкретних значень параметрів $P1$, $P2$, $P3$ даному об’єкту будуть відповідати різні прямі. На Рис. 9.3 зображені прямі $P1x+P2y+P3=0$ за різних значень параметрів $P1$, $P2$, $P3$.

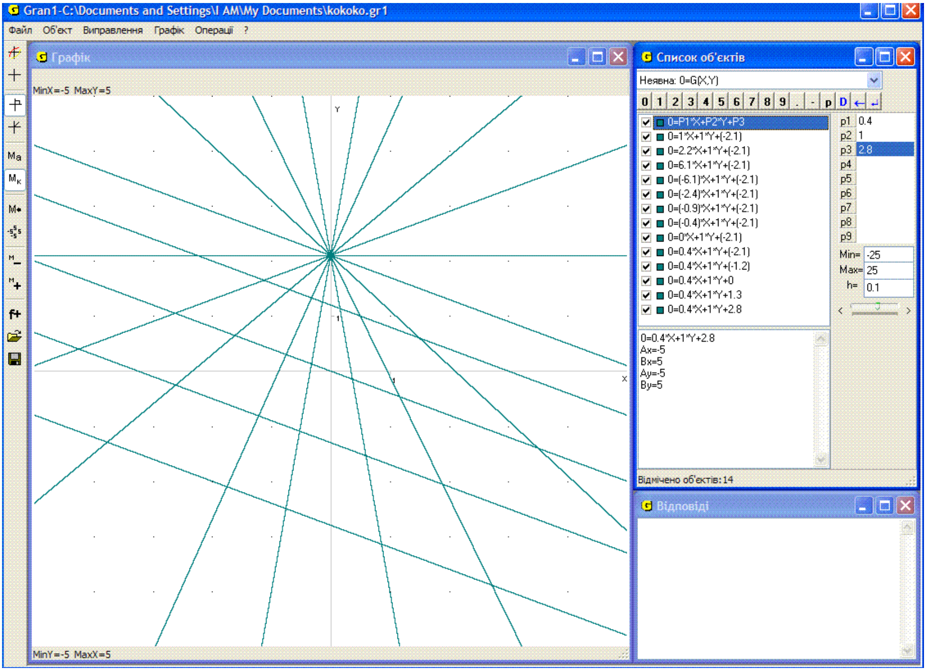


Рис. 9.3

2. Рівняння виду $(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0$ є рівнянням кола радіуса r з центром у точці з координатами $x=a$, $y=b$. На Рис. 9.4 подано зображення кіл $(x-P1)^2+(y-P2)^2=P3^2$ за різних значень параметрів $P1$, $P2$, $P3$.

3. Рівняння виду $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ є рівнянням еліпса з центром симетрії в початку координат і півосями a і b вздовж осей Ox і Oy. На Рис. 9.5 подані зображення еліпсів $\dfrac{x^2}{P1^2}+\dfrac{y^2}{P2^2}-1=0$ за різних значень параметрів $P1$ і $P2$.

4. На Рис. 9.6 подано зображення кривої $x^3+y^3-3axy=0$ – так званий лист Декарта – за різних значень параметра a, якому відповідає динамічний параметр $P1$.

5. На Рис. 9.7 подано графічний образ залежності $0=\sin(\sin\, x^2+\cos\, y^2)$.

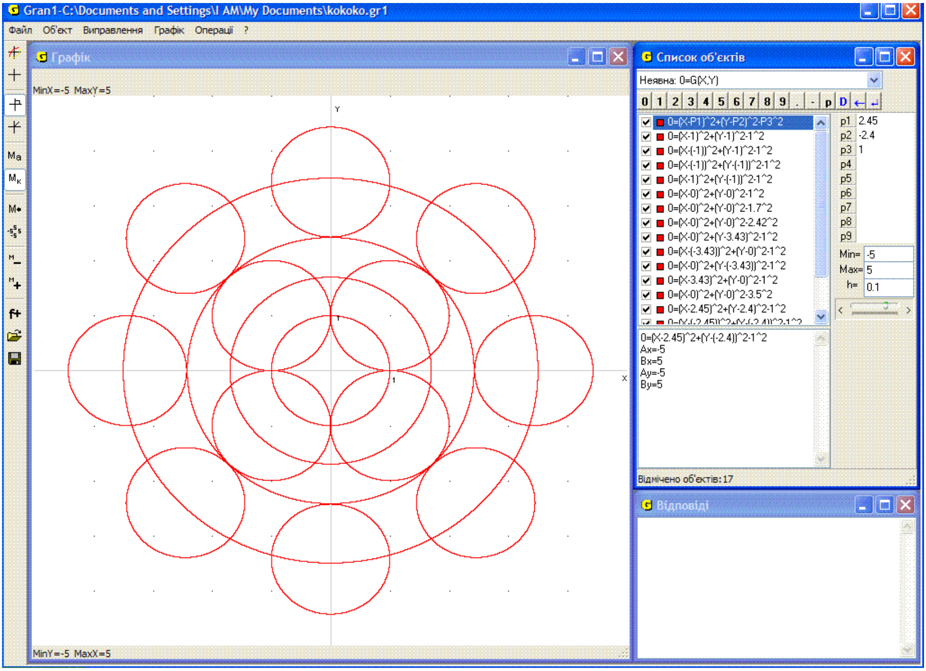

Gran1-C:\Documents and Settings\I AM\My Documents\kokoko.gr1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
MinX=-5 MaxY=5
MinY=-5 MaxX=5
Список об'єктів
Неявна: 0=G(X,Y)
0=(X-P1)^2+(Y-P2)^2-P3^2
0=(X-1)^2+(Y-1)^2-1^2
0=(X-(-1))^2+(Y-1)^2-1^2
0=(X-(-1))^2+(Y-(-1))^2-1^2
0=(X-1)^2+(Y-(-1))^2-1^2
0=(X-0)^2+(Y-0)^2-1^2
0=(X-0)^2+(Y-0)^2-1.7^2
0=(X-0)^2+(Y-0)^2-2.42^2
0=(X-0)^2+(Y-3.43)^2-1^2
0=(X-(-3.43))^2+(Y-0)^2-1^2
0=(X-0)^2+(Y-(-3.43))^2-1^2
0=(X-3.43)^2+(Y-0)^2-1^2
0=(X-0)^2+(Y-0)^2-3.5^2
0=(X-2.45)^2+(Y-2.4)^2-1^2
p1 2.45
p2 -2.4
p3 1
Min= -5
Max= 5
h= 0.1
0=(X-2.45)^2+(Y-(-2.4))^2-1^2
Ax=-5
Bx=5
Ay=-5
By=5
Відмічено об'єктів:17
Відповіді

Рис. 9.4

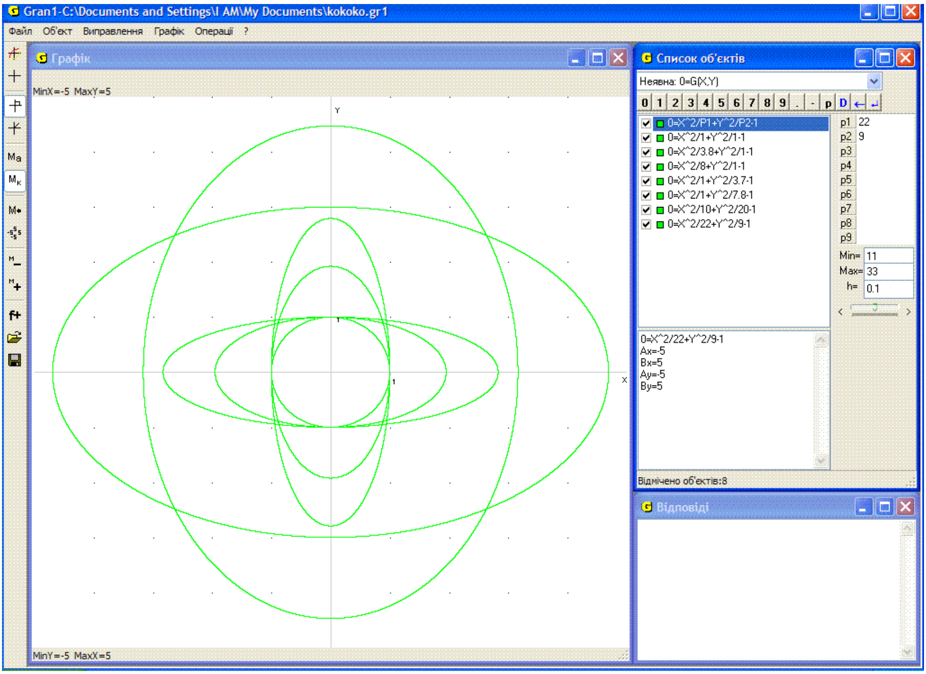

Gran1-C:\Documents and Settings\I AM\My Documents\kokoko.gr1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
MinX=-5 MaxY=5
MinY=-5 MaxX=5
Список об'єктів
Неявна: 0=G(X,Y)
0=X^2/P1+Y^2/P2-1
0=X^2/1+Y^2/1-1
0=X^2/3.8+Y^2/1-1
0=X^2/8+Y^2/1-1
0=X^2/1+Y^2/3.7-1
0=X^2/1+Y^2/7.8-1
0=X^2/10+Y^2/20-1
0=X^2/22+Y^2/9-1
p1 22
p2 9
Min= 11
Max= 33
h= 0.1
0=X^2/22+Y^2/9-1
Ax=-5
Bx=5
Ay=-5
By=5
Відмічено об'єктів:8
Відповіді

Рис. 9.5

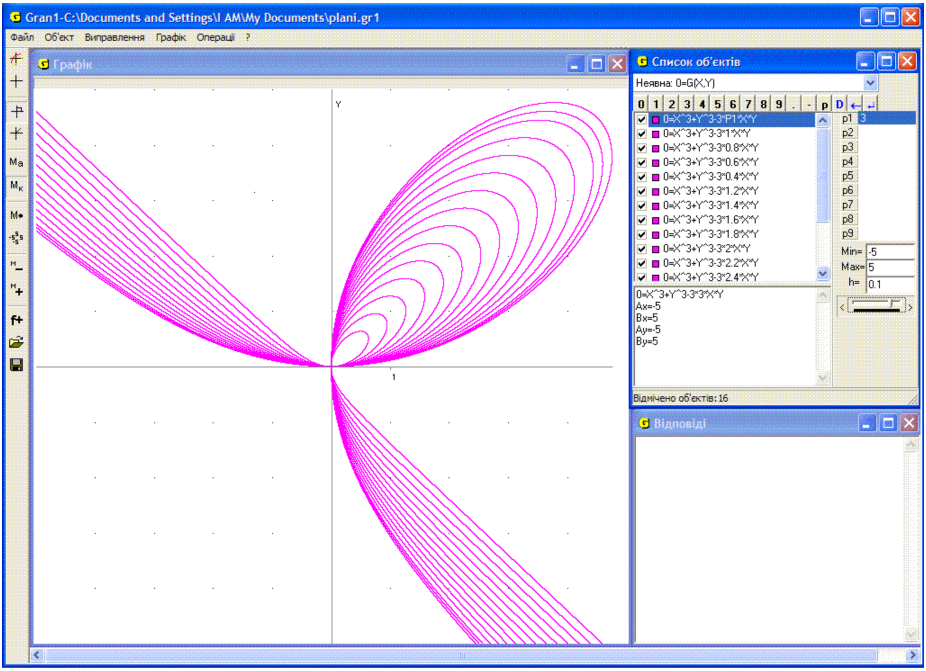

Gran1-C:\Documents and Settings\I AM\My Documents\plani.gr1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
Список об'єктів
Неявна: 0=G(X,Y)
0=X^3+Y^3-3*P1*X*Y
0=X^3+Y^3-3*1*X*Y
0=X^3+Y^3-3*0.8*X*Y
0=X^3+Y^3-3*0.6*X*Y
0=X^3+Y^3-3*0.4*X*Y
0=X^3+Y^3-3*1.2*X*Y
0=X^3+Y^3-3*1.4*X*Y
0=X^3+Y^3-3*1.6*X*Y
0=X^3+Y^3-3*1.8*X*Y
0=X^3+Y^3-3*2*X*Y
0=X^3+Y^3-3*2.2*X*Y
0=X^3+Y^3-3*2.4*X*Y
0=X^3+Y^3-3*3*X*Y
Ax=-5
Bx=5
Ay=-5
By=5
Min= -5
Max= 5
h= 0.1
Відмічено об'єктів: 16
Відповіді

Рис. 9.6

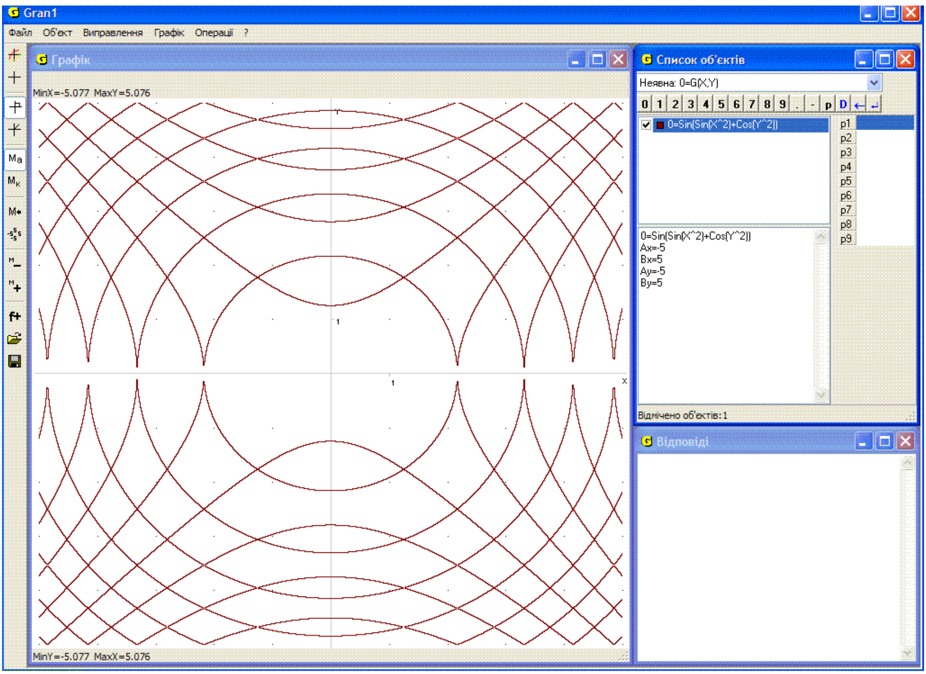

Gran1
Файл Об'єкт Виправлення Графік Операції ?
Графік
MinX=-5.077 MaxY=5.076
MinY=-5.077 MaxX=5.076
Список об'єктів
Неявна: 0=G(X,Y)
0=Sin(Sin(X^2)+Cos(Y^2))
Ax=-5
Bx=5
Ay=-5
By=5
Відмічено об'єктів: 1
Відповіді

Рис. 9.7

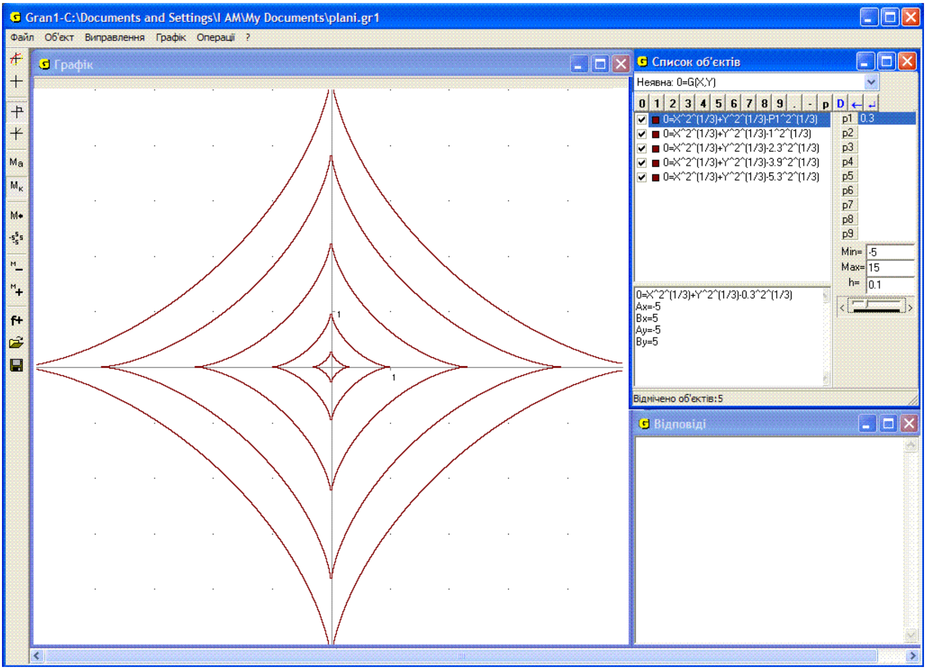


Рис. 9.8

6. На Рис. 9.8 подано графічний образ залежності $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, ($a > 0$) за різних значень параметра a, якому відповідає динамічний параметр $P1$. Таку криву називають астроїдою.

7. На Рис. 9.9 подано графічні образи залежностей $|x|^q + |y|^q = 1$ за різних значень параметра q, якому відповідає динамічний параметр $P1$.

В разі необхідності обчислити значення виразу (від двох аргументів) $G(x, y)$ у деякій точці (x, y) можна скористатись послугою “Операції/Значення виразу G(x, y)” (Рис. 9.10).

В разі звернення до цієї послуги на полі вікна “Графік” з’являється курсор, а над вікном “Графік” координати x і y точки, в якій встановлений курсор, і значення функції $z = G(x, y)$, на позначенні якої встановлено курсор у вікні “Список об’єктів” (Рис. 9.11).

Із переміщуванням курсора на площині xOy змінюються координати точки, в яку встановлюється курсор, і одночасно відповідне значення $z = G(x, y)$.

Для обчислення значення $G(x, y)$ за заданих значень x і y можна скористатися також калькулятором (послуга “Операції/Калькулятор”).

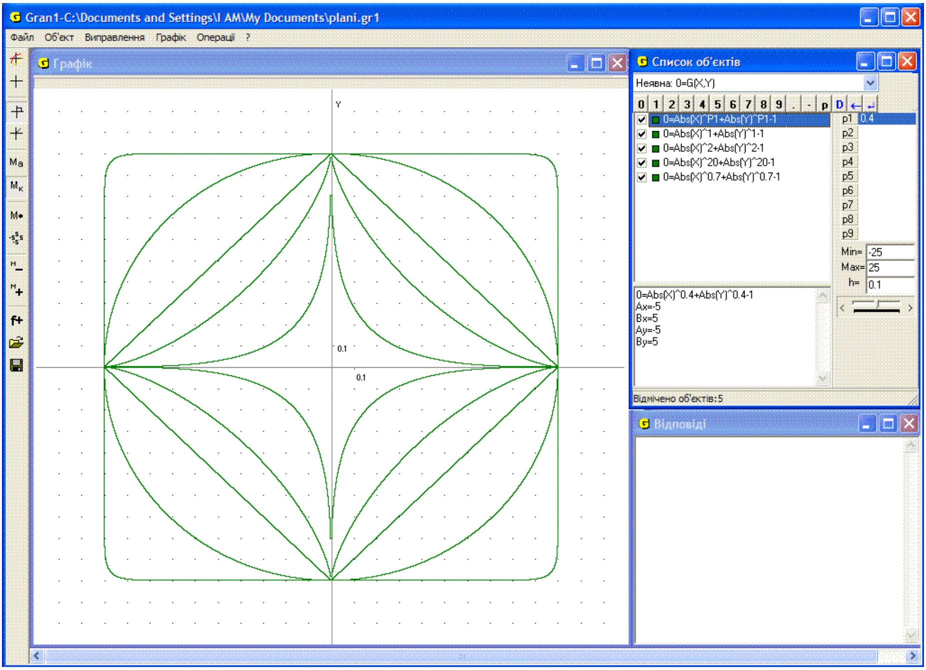


Рис. 9.9

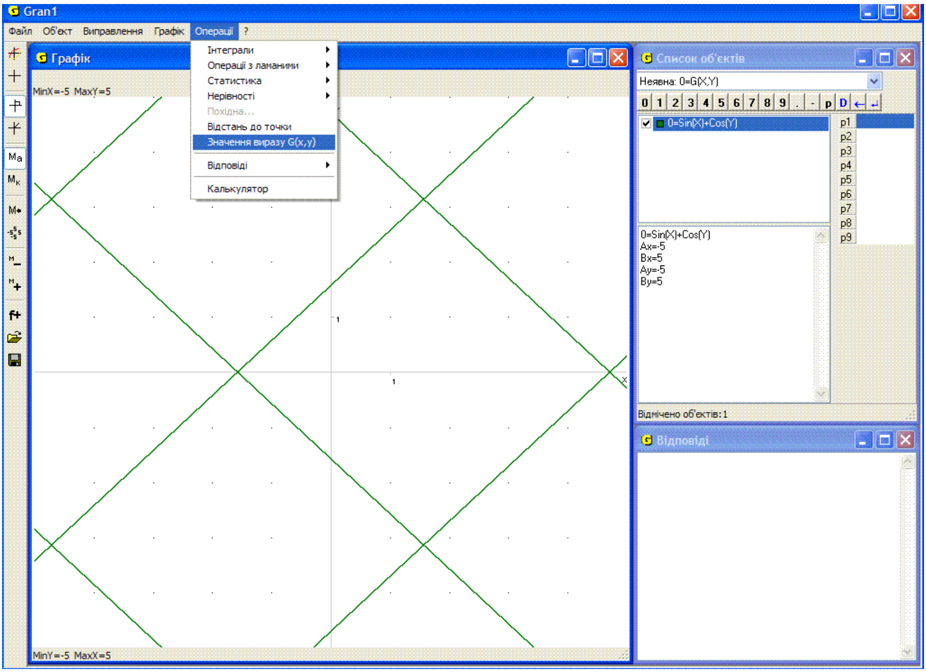


Рис. 9.10

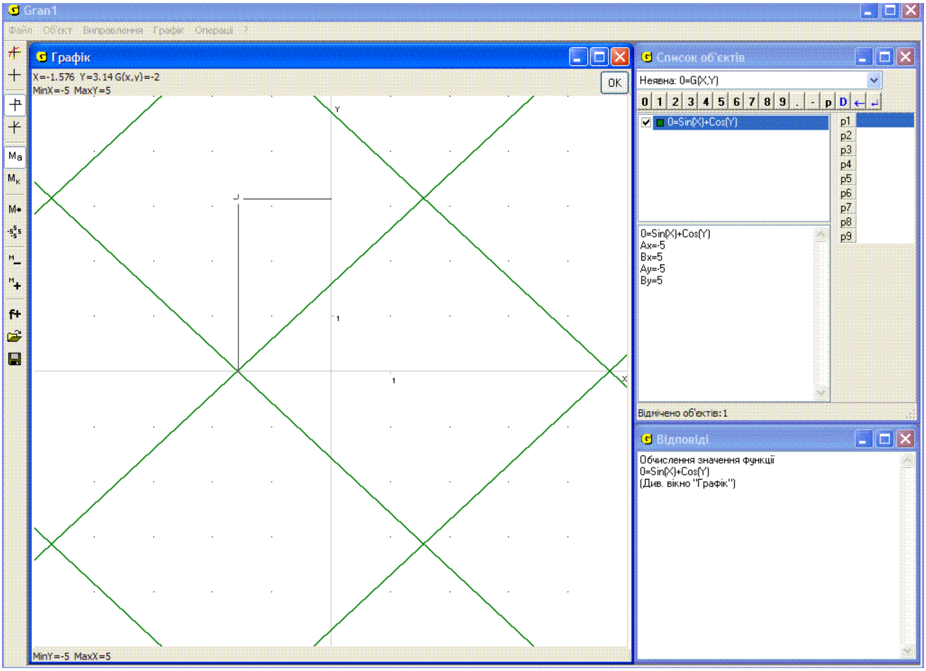


Рис. 9.11

Запитання для самоконтролю

1. В яких випадках говорять, що залежність між змінними x і y задана неявно?
2. Як побудувати графік залежності між змінними x і y, заданої у вигляді $G(x, y) = 0$?
3. Чи потрібно виражати явно змінну y через змінну x у вигляді $y = f(x)$ (чи навпаки змінну x через змінну y у вигляді $x = g(y)$), щоб побудувати графік залежності між змінними x і y?
4. Скільки графіків залежностей виду $G(x, y) = 0$ можна подати на екрані одночасно?
5. Чи може вираз $G(x, y)$ бути константою? Яким буде графічне зображення залежності в такому випадку?
6. Чи може у виразі $G(x, y)$ бути відсутньою змінна x чи змінна y?
7. Як від явного задання залежності між змінними x і y у вигляді $y = f(x)$ перейти до її неявного задання у вигляді $G(x, y) = 0$?
8. Як з використанням послуг програми GRAN1 можна обчислити значення функції від двох аргументів?

Вправи для самостійного виконання

1. Встановивши тип залежності між змінними x і y у вигляді $G(x, y) = 0$ і звернувшись до послуги “Об’єкт/Створити”, в рядку “0=” ввести сталу 0 (нуль) і далі побудувати графік так заданої залежності (послуга “Графік/Побудувати”). Пояснити отриманий результат.
2. За тих самих умов, що й у вправі 1, ввести довільну сталу, відмінну від нуля, і звернутися до послуги “Графік/Побудувати”. Пояснити отриманий результат.
3. Використовуючи неявне задання залежності між змінними x і y (тип $G(x, y) = 0$), побудувати графіки залежностей:

   - $y = \dfrac{1}{x}$;
   - $y = x^2$;
   - $y = \sqrt[3]{x}$;
   - $y = \sin x$;
   - $y = x \ln x$;
   - $y = \sqrt{x}$;
   - $y = \dfrac{\sin x}{x}$;
   - $y^2 = x$;
   - $y = (1 + x)^x$.
   - $y = \log_2(1 - x)$;
   - $y = \dfrac{1}{\log_2(1 - x)}$;

   Пояснити отримані результати.
4. Побудувати графіки залежностей, використовуючи в разі необхідності динамічні параметри:

   - $0 = 1 - \log_2(xy)$
   - $0 = \dfrac{\sin 32|xy|}{2} + x^{20} + y^{20} - 1$
   - $\sin(2(|x| + |y|)) = 0$
   - $0 = \dfrac{\sin 32|xy|}{2} + x^2 + y^2 - 1$
   - $\sin(\sin(xy) + \cos(xy)) = 0$
   - $0 = x^{20} + y^{20} - 1 + \sin(8(x + y))$
   - $\sin(2(x^2 + y^2)) = 0$
   - $0 = x^2 + y^2 - 1 + \sin(32xy)$
   - $\sin(2\sqrt{x^2 + y^2}) = 0$

5. Побудувати графіки залежностей:
   - $0 = xy - P1$, для різних значень параметра $P1$ в межах від -5 до 5 через крок зміни $h = 0.1$;
   - $\sin((x^2 + y^2)^k) = 0$ для значень $k = 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8, 16$;
   - $\cos((|x| + |y|)^k) = 0$ для значень $k = 1/4, 1/2, 1, 2, 4, 8, 16, 20, 25, 32$.
6. Побудувати графіки залежностей, використовуючи в разі необхідності динамічні параметри:

- $y^2 - ax^3 = 0$, для значень $a = 0.5;\ 1;\ 1.5;\ 2;\ 2.5$ (так звана напівкубічна парабола);
- $(y - x^2)^2 - x^5 = 0$;
- $y^2 - y^4 - x^4 + x^6 = 0$;
- $y^2 - x^4 + x^6 = 0$;
- $y^2 - x^2(x-1) = 0$.

7. Побудувати графіки залежностей $G(x,y) = 0$, якщо:
   - $G(x,y) = y^2 - 3$;
   - $G(x,y) = |y|$;
   - $G(x,y) = \sin y$;
   - $G(x,y) = tgy$.

   Пояснити отримані результати.

8. Обчислити значення функції $G(x,y) = \dfrac{x}{y}$ в точках перетину ліній $xy - 1 = 0$, $\dfrac{x}{y^2+1} - 0.1 = 0$.

§10. Обернені залежності і їх графіки

Нехай залежність $y = f(x)$ задана на деякій множині X (область задання функції $f(x)$), і нехай Y множина тих значень виразу $f(x)$, яких він набуває, коли змінна x набуває всіляких значень з множини X. Якщо вибрати деяке значення y_0 з множини Y, то в множині X знайдеться таке значення x_0, за якого вираз $f(x)$ набуває значення y_0, тобто $f(x_0) = y_0$. Таким чином, кожному значенню $y \in Y$ ставиться у відповідність деяке значення $x \in X$. Цим визначається на множині Y залежність $x = g(y)$, яка називається оберненою до залежності $y = f(x)$. Якщо відповідність (залежність) $y = f(x)$, за якою множина X відображається у множину Y (пишуть $f: X \to Y$), взаємно однозначна, тобто кожному $x \in X$ за правилом $f(x)$ ставиться у відповідність єдине значення $y \in Y$, і різним значенням $x \in X$ ставляться у відповідність різні значення $y \in Y$, то обернена залежність визначається однозначно. Якщо ж відповідність $f: X \to Y$ не взаємно однозначна, то і обернена залежність буде неоднозначною.

Якщо відповідність $f: X \to Y$ ($g: Y \to X$) однозначна, тоді говорять про функціональну залежність $y = f(x)$ ($x = g(y)$) чи функцію $y = f(x)$ (обернену функцію $x = g(y)$). Обернену функцію іноді позначають $f^{-1}: Y \to X$.

Прикладами, коли обернена залежність визначається однозначно, можуть бути:

1) лінійна функція $y = ax + b$, ($a \neq 0$);

2) степенева функція $y = x^n$ за непарних n ($n = 2k+1$, $k =$ 0, 1, 2, …);

3) показникова функція $y = a^x$, ($a > 0$, $a \neq 1$);

4) логарифмічна функція $y = \log_a x$, ($a > 0$, $a \neq 1$);

5) функція $y = \dfrac{a}{x}$, ($a \neq 0$, $x \neq 0$);

6) будь-яка монотонно зростаюча чи монотонно спадаюча функція.

У наведених прикладах завжди кожному допустимому значенню x (з області задання виразу $f(x)$) відповідає єдине значення y з області значень $f(x)$, і кожне значення y з області значень $f(x)$ відповідає тільки одному значенню x з області задання виразу $f(x)$. В такий спосіб встановлюється взаємно однозначна відповідність $f: X \to Y$ між елементами (точками) множини X (області задання виразу $f(x)$) і елементами (точками) множини Y (області значень $f(x)$).

В разі взаємно однозначної відповідності $f: X \to Y$ завжди існує єдина обернена до $y = f(x)$ функція $x = g(y)$, ($g: Y \to X$), така, що для будь-якого $x \in X$ $g(f(x)) = x$, ($x \in X$, $f(x) \in Y$, $g(f(x)) \in X$), і для будь-якого $y \in Y$ $f(g(y)) = y$, ($y \in Y$, $g(y) \in X$, $f(g(y)) \in Y$). У розглянутому випадку функції $f: X \to Y$ і $g: Y \to X$ взаємно обернені одна до іншої.

Прикладами, коли обернена залежність визначається неоднозначно, можуть бути такі:

1. $f(x) = a$, ($a = const$), коли область задання містить більше ніж одну точку.

Оскільки одне і те саме значення $y = a$ ставиться у відповідність кожному значенню x з області задання виразу $f(x)$, то неможливо однозначно визначити значення x, якому відповідає значення $y = a$. У цьому випадку оберненої функції не існує (але обернена залежність існує).

2. Будь-яка функція, що набуває одного і того самого значення на деякому інтервалі (чи на кількох інтервалах). Зокрема так звані кусково-сталі функції (Рис. 10.1).

3. Функція $f(x) = x^2$.

Якщо $x \in [0;+\infty)$, тоді за цією функцією встановлюється взаємно однозначна відповідність $f: [0,\infty) \to [0,\infty)$, причому кожному значенню $x \in [0;+\infty)$ ставиться у відповідність єдине значення $y \in [0;+\infty)$, і різним x з $[0,+\infty)$ ставляться у відповідність різні y з $[0,+\infty)$. Таким чином, у даному випадку обернена до $f(x)$ функція визначається однозначно: $x \in \left\{+\sqrt{y}\right\} = \left\{g_1(y)\right\}$, $y \in [0,+\infty)$.

Якщо $x \in (-\infty,0]$ і $f: (-\infty,0] \to [0,+\infty)$, то міркуючи аналогічно, можна зробити висновок, що й у даному випадку обернена до $f(x)$ функція визначається однозначно: $x \in \left\{-\sqrt{y}\right\} = \left\{g_2(y)\right\}$, $y \in [0,+\infty)$.

Якщо ж за область задання функції $f(x)$ взяти множину $(-\infty,+\infty)$, тоді однозначно визначити функцію $g(y)$, обернену до $f(x)$, неможливо, тому що одне і те саме значення $y \in [0,+\infty)$ ставиться у відповідність двом різним значенням $x \in (-\infty,+\infty)$.

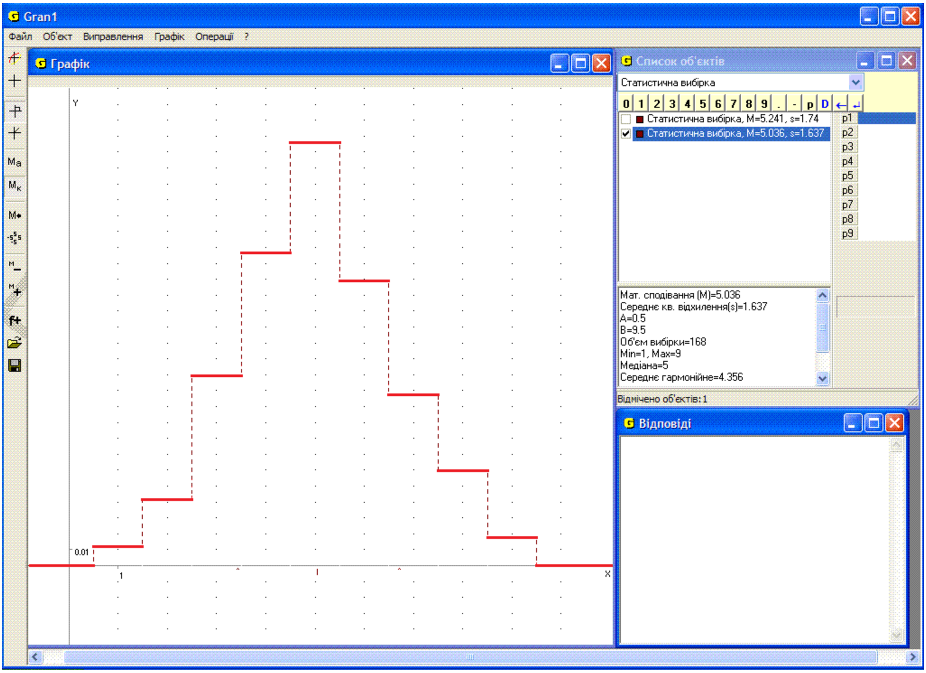


Рис. 10.1

Тому обернена залежність $x = g(y) = \pm\sqrt{y}$ не буде однозначною: із $y = f(x)$, $x \in (-\infty, +\infty)$, випливає $x \in \{-\sqrt{y}, +\sqrt{y}\}$, $y \in [0, +\infty)$.

Таким чином:

$g_1(y) \in [0, +\infty)$, $f(g_1(y)) = y$ для $y \in [0; +\infty)$

і $g_1((f(x)) \in \{x\}$ для $x \in [0; +\infty)$;

$g_2(y) \in (-\infty, 0)$, $f(g_2(y)) = y$ для $y \in [0; +\infty)$

і $g_2((f(x)) \in \{x\}$ для $x \in (-\infty, 0]$;

$g(y) \in (-\infty, +\infty)$, $f(g(y)) = y$ для $y \in [0; +\infty)$

і $g((f(x)) \in \{-x, +x\}$ для $x \in (-\infty; +\infty)$;

отже $x = g_1(y)$ і $x = g_2(y)$ – функції, а $g(y)$ не є функцією, тому що залежність x від y неоднозначна – одному і тому самому значенню $y \in [0, +\infty]$ відповідає два різних значення x: $x = -\sqrt{y}$, $x = +\sqrt{y}$.

4. $y = \sin x$. Міркуючи аналогічно до попереднього, можна зробити висновки: якщо область задання функції $f(x) = \sin x$ така, що двом різним значенням x не ставиться у відповідність одне і те саме значення

y, то обернена залежність $x=g(y)$ визначається однозначно. Як правило за таку область обирають проміжок $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$.

Якщо ж область задання залежності $y=f(x)$ така, що різним значенням x за правилом $f(x)$ може бути поставлене у відповідність одне і те саме значення y, то обернена залежність $x=g(y)$ не є функціональною. Якщо ж розглядати функцію $y=f(x)$ на різних частинах області задання, на яких функція $y=f(x)$ або тільки спадає, або тільки зростає, то на різних таких частинах функція $y=f(x)$ має різні обернені функції.

Нехай задана деяка залежність $y=f(x)$ в деякій області. Якщо побудувати графік цієї залежності, то за графіком можна визначити обернену залежність $x=g(y)$ в такий спосіб: на осі Oy вибрати значення y (аргумент для $g(y)$) з області значень $f(x)$) і через обрану точку на осі Oy паралельно до осі Ox провести пряму, точки перетину цієї прямої з графіком залежності $y=f(x)$ спроектувати на вісь Ox. Так одержуються значення $x=g(y)$ такі, що $f(x)=f(g(y))=y$. Таким чином, якщо аргумент виразу $g(y)$ вибирати на осі Oy (в області значень $f(x)$), то графік залежності $y=f(x)$ буде одночасно і графіком оберненої залежності $x=g(y)$. Якщо ж цей аргумент відкладати на осі Ox, то потрібно поміняти ролями змінні x і y і спочатку побудувати графік залежності $x=f(y)$, після чого на осі Ox вибирати аргумент залежності $y=g(x)$ (з області значень $f(y)$), через обрану точку на осі Ox провести пряму паралельно до осі Oy, точки перетину цієї прямої з графіком залежності $x=f(y)$ спроектувати на вісь Oy, і в такий спосіб будуть отримані значення $y=g(x)$. Отже, графік залежності $x=f(y)$ є в той же час і графіком залежності $y=g(x)$, оберненої до залежності $x=f(y)$.

Таким чином, графік залежності $y=g(x)$ отримується як дзеркальне відображення графіка $y=f(x)$ відносно прямої $y=x$ (бісектриси першого координатного кута).

Щоб побудувати графіки залежності $y=f(x)$ і оберненої до неї залежності $y=g(x)$ з використанням послуг програми GRAN1, зручно подати залежності між змінними x і y у вигляді $0=y-f(x)=G_1(x,y)$ і

$0 = x - f(y) = G_2(x, y)$, після чого побудувати графіки залежностей $G_1(x, y) = 0$ і $G_2(x, y) = 0$.

Приклади

1. Побудувати графіки залежностей: $0 = y - \ln(x)$, $0 = x - \ln(y)$.

Легко бачити (Рис. 10.2), що графік залежності $x - \ln(y) = 0$ є одночасно і графіком залежності $y = e^x$, оберненою до якої є залежність $y = \ln(x)$. В даному разі $g(f(x)) = e^{\ln x} = x$, $f(g(x)) = \ln(e^x) = x$.

2. Побудувавши графіки залежностей $0 = y - \cos(x)$ і $0 = x - \cos(y)$, легко переконатися (Рис. 10.3), що графік залежності $0 = x - \cos(y)$ є одночасно і графіком залежності $y = \arccos(x)$ (визначеної на проміжку [-1, 1]), якщо областю задання функції $y = \cos(x)$ є проміжок [0, π].

У такому випадку між множинами [0, π] і [-1, 1] встановлюється взаємно однозначна відповідність: за функцією $y = \cos(x)$ відображається відрізок [0, π] у відрізок [-1, 1], за функцією $y = \arccos(x)$ відображається відрізок [-1, 1] у відрізок [0, π] (Рис. 10.4). В даному разі $\cos(\arccos(x)) = x$, $\arccos(\cos(x)) = x$.

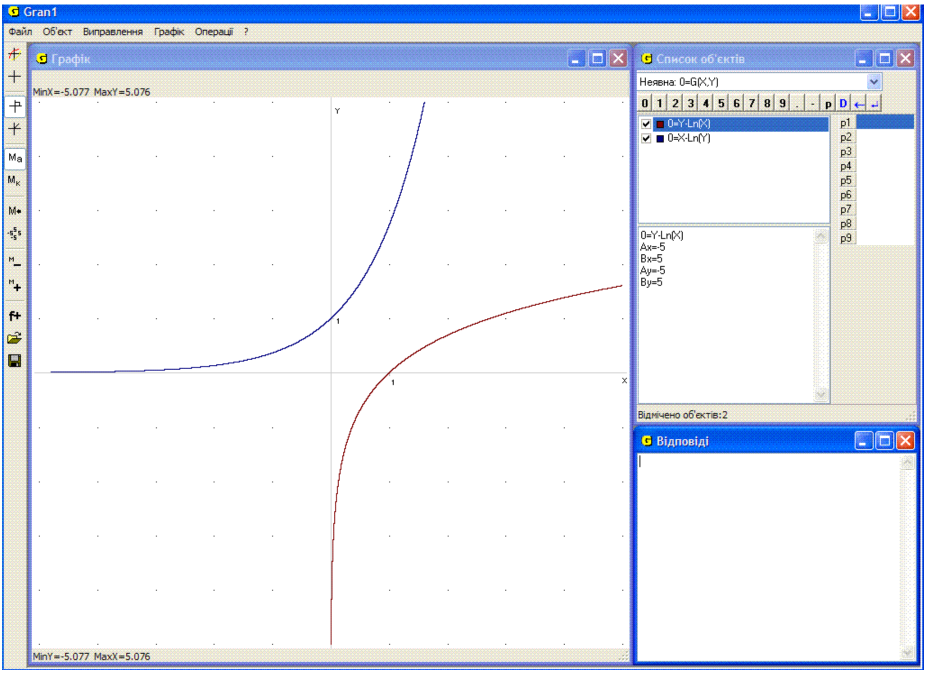


Рис. 10.2

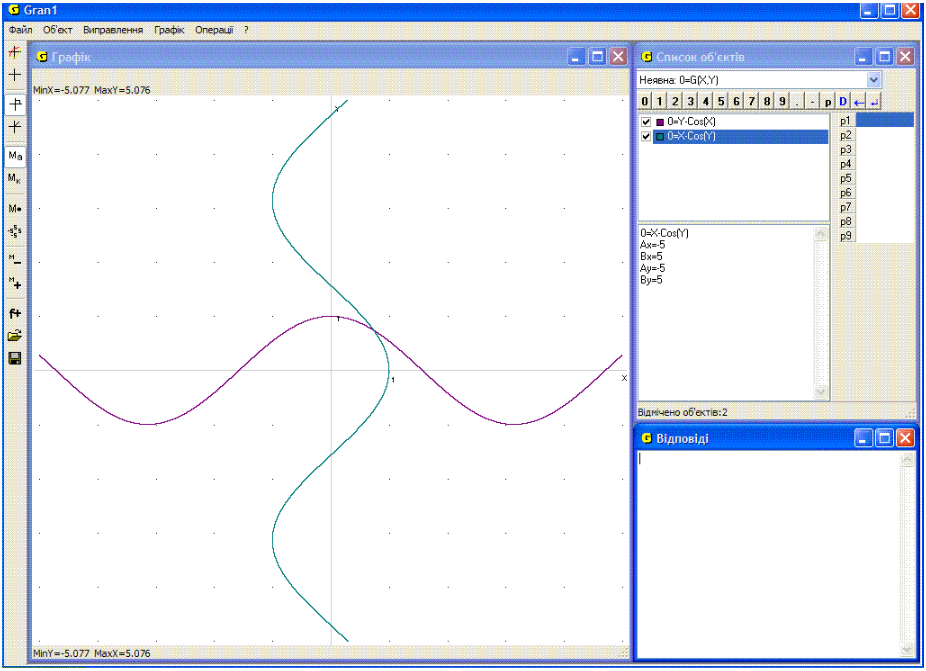


Рис. 10.3

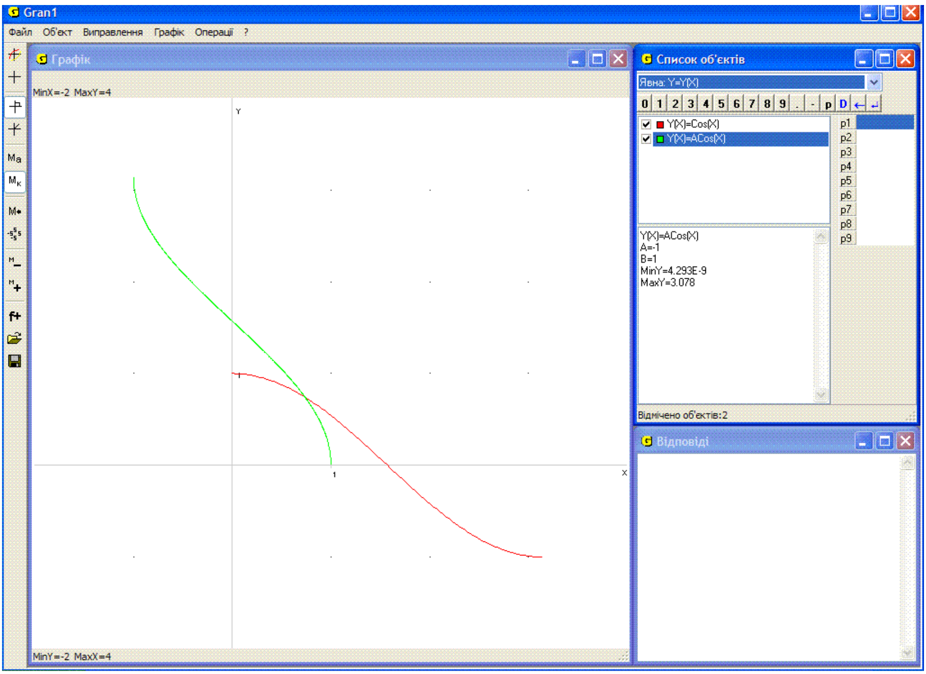


Рис. 10.4

Запитання для самоконтролю

1. Коли залежність $y = g(x)$ буде оберненою до залежності $y = f(x)$?
2. Чи може залежність бути обернена сама до себе? Навести приклади.
3. Коли обернена до $y = f(x)$ залежність визначається однозначно?
4. Чи залежить існування оберненої залежності від того, в якій області задана залежність $y = f(x)$?
5. Як можна визначити значення $x = g(y) \in X$, що відповідають значенню $y = f(x) \in Y$, якщо побудований лише графік залежності $y = f(x)$?
6. Чи можна графік залежності $y = f(x)$ вважати одночасно і графіком оберненої залежності $x = g(y)$?
7. Як побудувати графік залежності $y = g(x)$, оберненої до залежності $y = f(x)$?
8. Як розташовуються на площині xOy графіки залежності $y = f(x)$ і оберненої до неї залежності $y = g(x)$?
9. Як зміниться графік залежності $G(x, y) = 0$, якщо поміняти місцями змінні x і y?

Вправи для самостійного виконання

1. Побудувати графіки заданих і обернених до заданих залежностей: $y = x$; $y = \frac{1}{x}$; $y = \sin x$; $y = \frac{1}{x^2 + 1}$; $y = 2^x$; $y = tgx$.
2. Побудувати графіки залежностей:
3. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 = 0$ і $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - 1 = 0$;
4. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} - 1 = 0$ і $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{16} - 1 = 0$;
5. $|x|^{P1} + |y|^{P1} = 1$ для значень $P1 =$ -3, -2, -1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$.

§11. Параметричне задання залежностей

Часто буває зручно залежність між змінними x і y виражати не безпосередньо у вигляді рівності деяких виразів, що містять змінні x і y, а виразити змінні x і y через деяку допоміжну змінну t у вигляді: $x = \varphi(t), y = \phi(t)$.

Якщо до залежності $x = \varphi(t)$ існує обернена $t = \omega(x)$ така, що $\varphi(\omega(x)) = x$, $\omega(\varphi(t)) = t$, тоді можна встановити безпосередній зв'язок між змінними x і y у вигляді $y = \phi(\omega(x))$.

Подання залежності між змінними x і y у вигляді $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$ називають параметричним, а змінну t параметром. Виключаючи тим чи іншим способом параметр t із рівностей $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, можна одержати вираз залежності безпосередньо між змінними x і y. Параметричне подання залежностей буває особливо зручним під час дослідження траєкторій рухомих точок, координати яких x і y змінюються зі зміною часу t. Через залежності $x = \varphi(t)$ і $y = \phi(t)$ описують траєкторію руху точки (x, y) на площині xOy.

Щоб за допомогою послуг програми GRAN1 побудувати графік залежності між змінними x і y, заданої через параметр t у вигляді $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, потрібно вказати у вікні “Список об’єктів” тип задання залежності “Параметрична: Y=Y(T), X=X(T)” (Рис. 11.1). Після звернення до послуги створення нового об’єкта з’являється допоміжне вікно “Введення виразу залежності” (Рис. 11.2). В рядку “X(T)=” потрібно ввести вираз для $x(t)$, відповідно в рядку “Y(T)=” – вираз для $y(t)$. У рядках “A=” і “B=” необхідно вказати відповідно нижню і верхню межі зміни параметра t (Рис. 11.2).

Всі правила, що стосуються графічних побудов, залишаються такими самими, як і раніше.

Приклади

1. Через рівняння $x = P1\cos t$, $y = P1\sin t$ в разі змінювання параметра t в межах $[0;2\pi]$ визначається коло радіуса $P1$ з центром в початку координат. Справді $x^2 + y^2 = P1^2\cos^2 t + P1^2\sin^2 y = P1^2$. Для різних значень $P1$ відповідні зображення подані на Рис. 11.1.

2. Коло радіуса $P1$ котиться без ковзання вздовж прямої (осі Ox). На колі фіксується точка, що у початковий момент $t = 0$ збігається з початком координат і є точкою дотику прямої і кола.

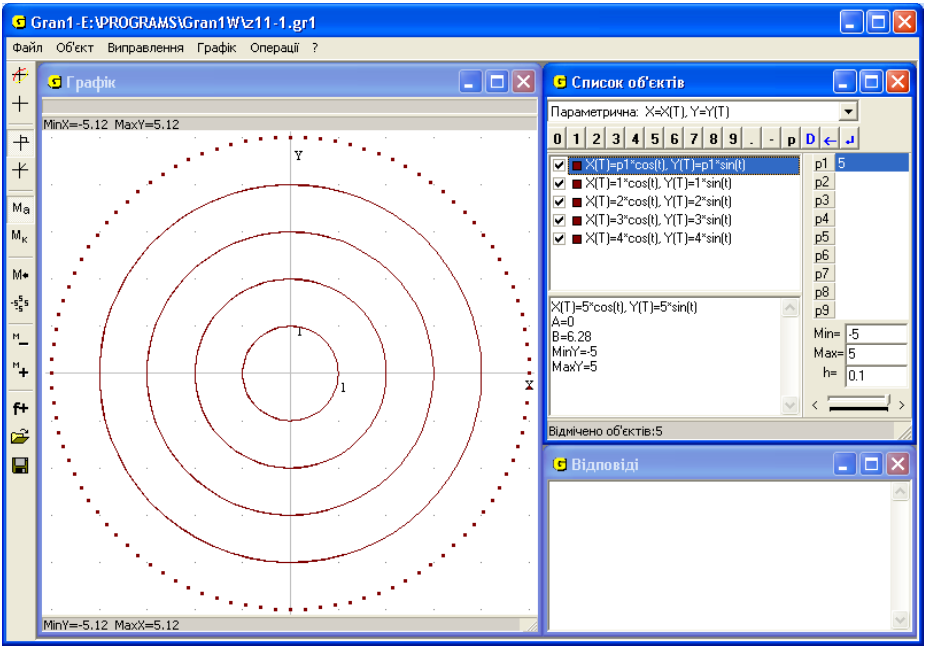


Рис. 11.1

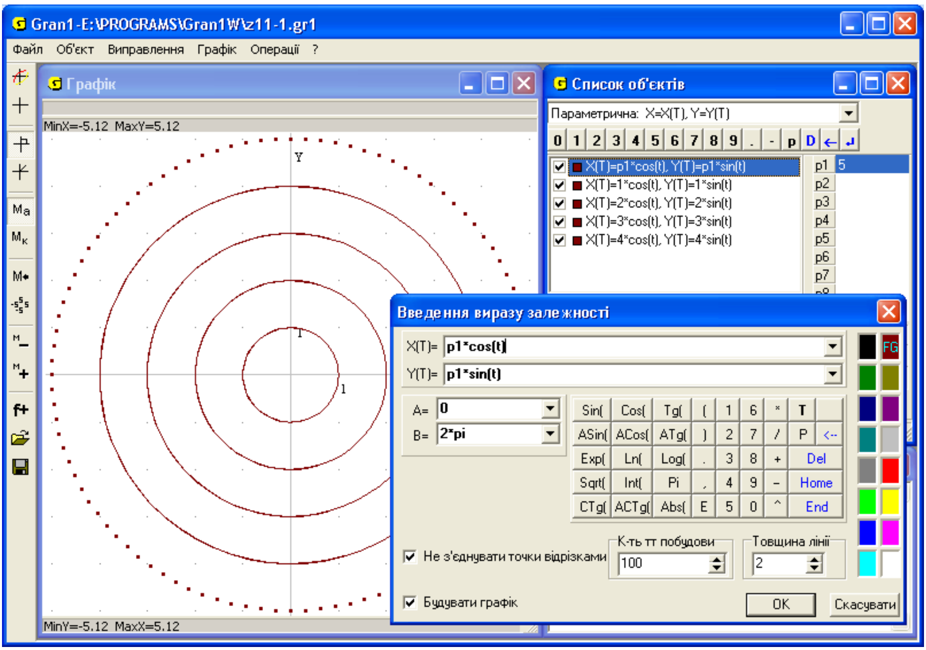


Рис. 11.2

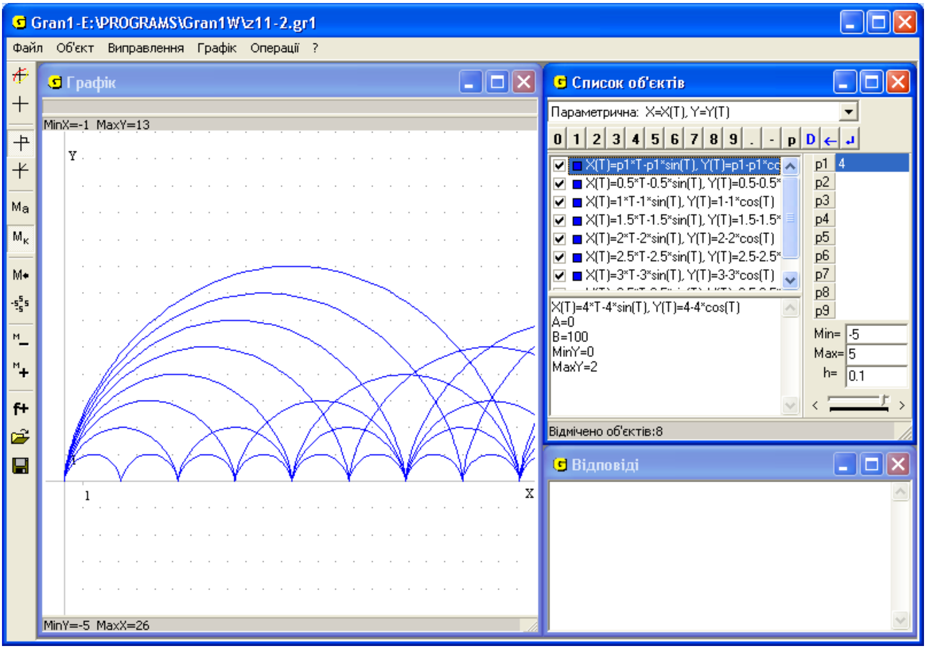


Рис. 11.3

Параметр t – це кут, на який повертається радіус, яким з’єднується центр кола з вказаною точкою на колі.

Траєкторія цієї точки, як легко бачити, описується рівняннями $x = P1t - P1\sin t = P1(t - \sin t)$, $y = P1t - P1\cos t = P1(t - \cos t)$. Криву, описувану вказаною точкою за час, поки її ордината y знову стане рівною нулю (за $t = 2\pi$), називають циклоїдою. На Рис. 11.3 подано циклоїди для різних значень параметра $P1$.

Приклад стає більш наочним, якщо модель циклоїди доповнити двома об’єктами: твірним колом та точкою на ньому. Для цього створимо в програмі наступні об’єкти:

- параметрично задану криву $x = P1t - P1\sin t = P1(t - \sin t)$, $y = P1 - P1\cos t = P1(1 - \cos(t))$. Межі визначення для t встановимо $A = 0$, $B = P2 / P1$;
- коло з центром в точці $(P2; P1)$ радіуса $P1$;
- коло з центром в точці $(P2 - P1 \cdot \sin\dfrac{P2}{P1}; P1 - P1 \cdot \cos\dfrac{P2}{P1})$ радіуса 0,05.

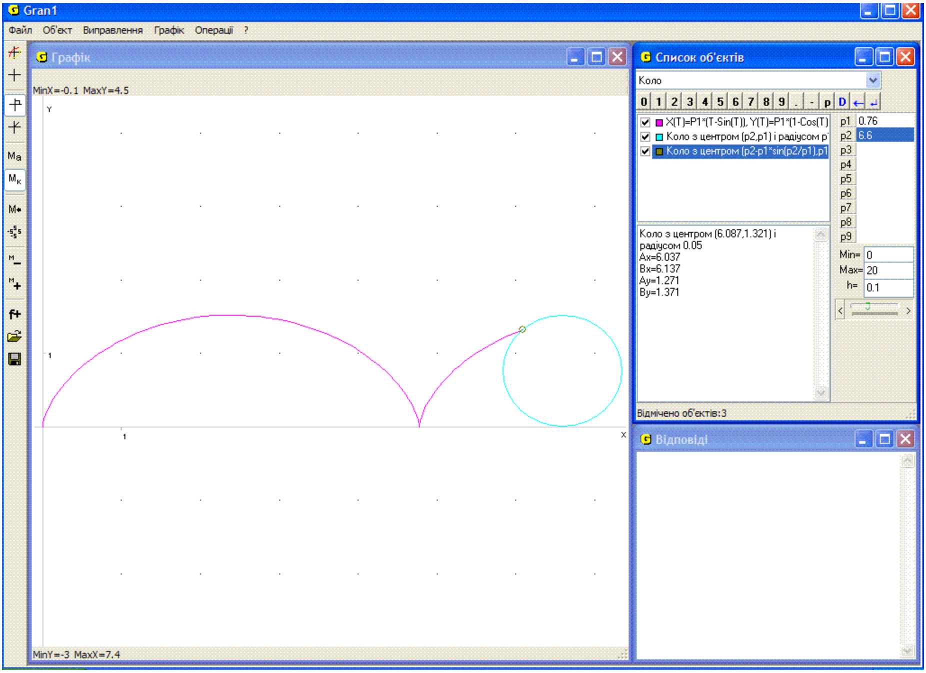


Рис. 11.4

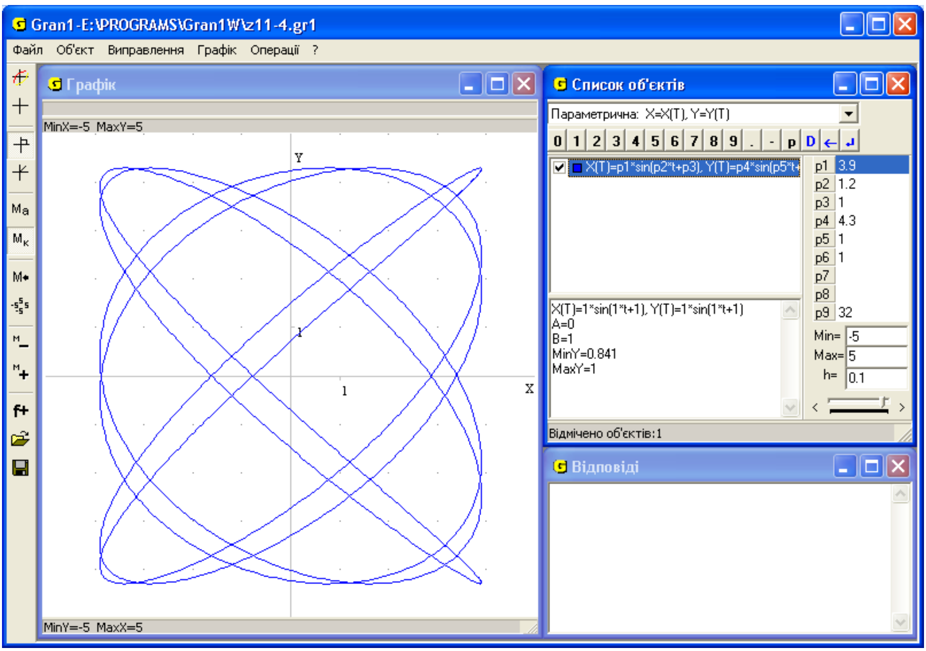


Рис. 11.5

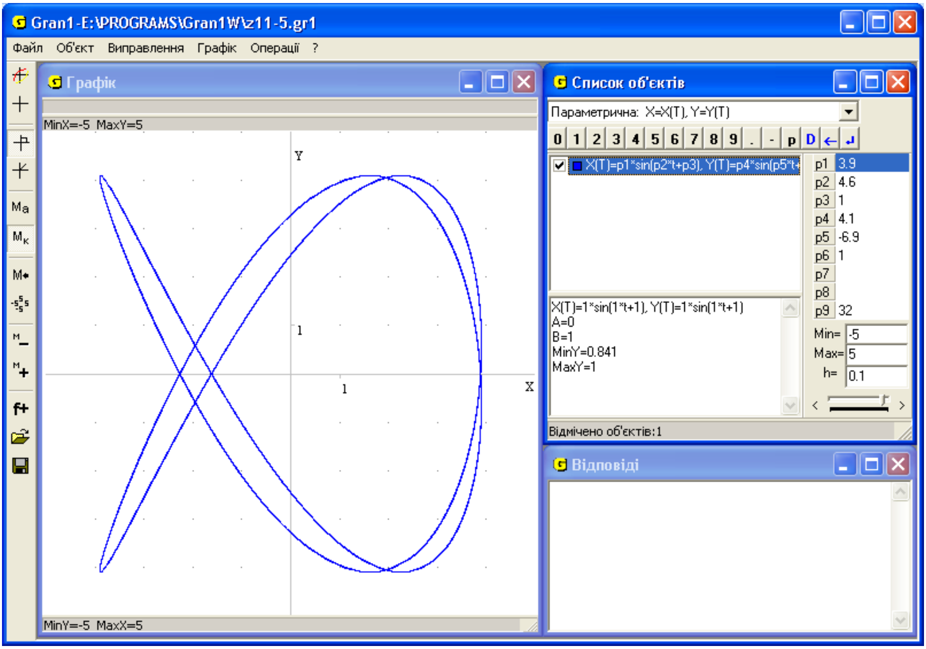


Рис. 11.6

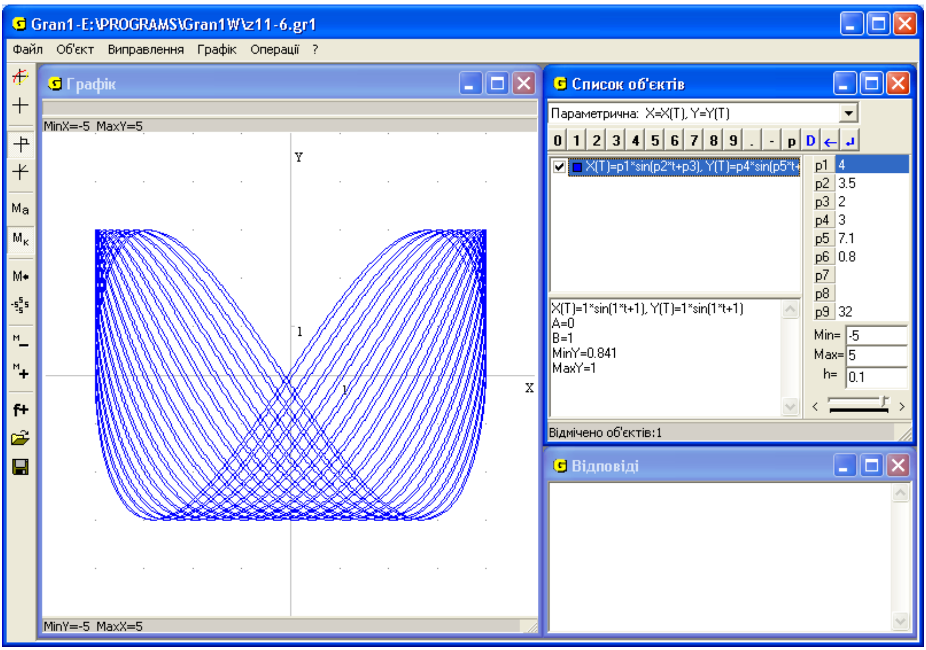


Рис. 11.7

Для параметра $P1$ встановимо $Min = 0$, $Max = 5$, для параметра $P2$ – $Min = 0$, $Max = 20$.

Через перший об'єкт визначається циклоїда, через другий – твірне коло, через третій – точка на ньому. Змінюючи значення параметра $P1$ (радіус твірного кола) можна одержувати різні циклоїди, як показано на Рис. 11.3. Плавно змінюючи значення параметра $P2$, можна змоделювати, як котиться коло вздовж прямої, і як точка на колі описує циклоїду (Рис. 11.4).

Аналогічні моделі можна побудувати і для інших цікавих кривих: епіциклоїди, гіпоциклоїди, епі- та гіпотрохоїди тощо.

3. Фігури Ліссажу – це графіки залежностей виду $x = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1)$, $y = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$. На Рис. 11.5, Рис. 11.6, Рис. 11.7 показані деякі з фігур, яким в програмі відповідають об'єкти $x = P1\sin(P2t + P3)$, $y = P4\sin(P5t + P6)$, за різних значень параметрів $P1$, $P2$, $P3$, $P4$, $P5$, $P6$, коли параметр t змінюється в межах від 0 до $P9$

Запитання для самоконтролю

1. Як можна встановити безпосередній зв'язок між змінними x і y за параметричним заданням відповідної залежності?
2. Як за допомогою програми GRAN1 можна одержати графік залежності між змінними x і y за її параметричним заданням?
3. Як можна знайти значення змінної y, що відповідає вказаному значенню змінної x, якщо залежність між змінними x і y задана в параметричній формі?
4. Якщо задані рівняння $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$ і побудована відповідна крива, якою буде відносно неї крива, що визначається рівняннями $x = \phi(t)$, $y = \varphi(t)$?
5. Якщо задані рівняння $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$ і потрібно побудувати графік відповідної залежності між змінними x і y з використанням програми GRAN1, який з виразів $\varphi(t)$ і $\phi(t)$ потрібно вводити першим? Що трапиться, якщо порядок введення виразів змінити?
6. Якщо залежність між змінними x і y задана явно у вигляді $y = f(x)$, чи можна її подати в параметричній формі?

Вправи для самостійного виконання

1. Побудувати графіки параметрично заданих залежностей:
   - $x = P1\cos t$, $y = P2\sin t$ за різних значень параметрів $P1$ і $P2$ (еліпс);
   - $x = (P1 + P2)\cos(t) - P1\cos\left(\dfrac{P1 + P2}{P1}t\right)$,

     $y = (P1 + P2)\sin(t) - P1\sin\left(\dfrac{P1 + P2}{P1}t\right)$ за різних значень параметрів $P1$ і $P2$, $(P1 \le P2)$ (епіциклоїда, описувана точкою кола радіуса $P1$, що котиться зовні вздовж кола радіуса $P2$);
   - $x = (P2 - P1)\cos(t) - P1\cos\left(\dfrac{P2 - P1}{P1}t\right)$,

     $y = (P2 - P1)\sin(t) - P1\sin\left(\dfrac{P2 - P1}{P1}t\right)$ за різних значень параметрів $P1$ і $P2$, $(P1 \le P2)$ (гіпоциклоїда, описувана точкою кола радіуса $P1$, що котиться всередині вздовж кола радіуса $P2$);
   - $x = 2P1\cos t - P1\cos 2t$, $y = 2P1\sin t - P1\sin 2t$ (кардіоїда – окремий випадок епіциклоїди, коли $P1 = P2$);
   - $x = P2\cos^3 t$, $y = P2\sin^3 t$ (астроїда – окремий випадок гіпоциклоїди, коли $P1 = P2/4$).
2. Побудувати фігури Ліссажу $x = A_1\sin(\omega_1 t + \varphi_1)$, $y = A_2\sin(\omega_2 t + \varphi_2)$ для значень:
   - $A_1 = 4$, $A_2 = 4$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 1$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0, \dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \pi$;
   - $A_1 = 4$, $A_2 = 4$, $\omega_1 = 1$, $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = 1$, $\omega_2 = 2, 3, 4, \ldots, 15$;
   - $A_1 = 4$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 7$, $\varphi_1 = 1$, $\varphi_2 = 2$, $A_2 = 1, 2, 3, 4$;
   - $A_1 = 4$, $A_2 = 4$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$;
   - $A_1 = 4$, $A_2 = 4$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 3$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$;
   - $A_1 = 4$, $A_2 = 4$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 7$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$;
   - $A_1 = 4$, $A_2 = 4$, $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 1$.
3. Координати тіла, кинутого з початковою швидкістю V_0 під кутом α до горизонту, змінюються з часом t за законом:

   $x = (V_0\cos\alpha)t$, $y = (V_0\sin\alpha)t - \dfrac{gt^2}{2}$, $g = 9.8$.

   За заданих V_0 і α знайти:

   3.1. Найбільшу висоту, на яку піднімається тіло;

   3.2. Відстань точки падіння тіла від точки старту, якщо

$V_0 = 6,\ \alpha = \frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{3},\ \frac{5\pi}{6};$

$\alpha = \frac{\pi}{6};\ V_0 = 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9;$

3.3. Яким повинен бути кут α, щоб за заданого V_0 точка падіння тіла була віддалена від точки старту на $D = 4$, якщо $V_0 =$ 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14?

3.4. Якою повинна бути V_0, щоб за заданого α точка падіння була віддалена від точки старту на $D = 5$, якщо $\alpha = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$?

4. Мішень знаходиться за укриттям, координати вершини якого (x_1, y_1). Координати мішені (x_2, y_2), ($x_2 > x_1, y_2 < y_1$). Гармата розташована в пункті з координатами (x_0, y_0), ($x_0 < x_1, y_0 < y_1$). Якою повинна бути початкова швидкість снаряда і відповідний нахил до горизонту напрямку кидання, щоб снаряд потрапив у точку (x_2, y_2), перелетівши вершину укриття на висоті $y_1 + h$?
5. Для конкретних розрахунків покласти $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $x_1 = 5$, $y_1 = 4$, $x_2 = 6$, $y_2 = 0$, $h = 0.01$.

§12. Залежності в полярних координатах

Позначимо полярний радіус деякої точки M на площині через r, а відповідний полярний кут через φ. Будь якій залежності виду $r=\rho(\varphi)$ (явній) чи виду $F(r,\varphi)=0$ (неявній) у полярній системі координат відповідає певний графік (множина точок, полярні координати яких задовільняють вказану рівність). Крім того будемо вважати, що якщо кут φ набуває від'ємного значення, то від полярної осі за годинниковою стрілкою відкладається відповідний кут, рівний заданому за абсолютною величиною.

Якщо кут φ більший ніж 2π, це означає, що спочатку потрібно відкласти проти годинникової стрілки ціле число k кутів величиною 2π (повних обертів), яке вміщується в заданому φ, після чого від полярної осі проти годинникової стрілки відкласти кут величиною $0 \le \varphi - 2\pi k < 2\pi$. Щоб перейти від полярних координат до декартових, потрібно розв'язати систему рівнянь $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ відносно змінних r і φ і далі у виразі $r=\rho(\varphi)$ замість r і φ підставити їх вирази через x і y (чи якимось іншим способом виключити змінні r і φ з рівностей $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $r=\rho(\varphi)$.

У програмі GRAN1 передбачено лише явне задання залежності між полярними координатами r і φ у вигляді $r=\rho(\varphi)$.

Щоб за допомогою програми GRAN1 побудувати графік залежності $r=\rho(\varphi)$ між полярними координатами r і φ, потрібно встановити у вікні "Список об'єктів" тип задання залежності "Полярна: R=R(F)" (Рис. 12.1).

Після звернення до послуги створення об'єкту з'являється вікно "Введення виразу залежності" (Рис. 12.2). У рядку "R(F)=" потрібно ввести вираз $\rho(\varphi)$. В рядках "A=" і "B=" необхідно вказати відповідно нижню і верхню межі проміжка, на якому змінюється змінна φ (за замовчуванням вони рівні 0 і 2π).

Введення виразів та встановлення інших параметрів (колір, кількість точок побудови і т.д.) здійснюється так само, як і раніше. До виразів залежностей та меж зміни аргумента φ можуть входити якісь із параметрів $P1$, $P2$, …, $P9$.

Далі, використовуючи послуги пункту "Графік" (і інших пунктів), можна виконувати всі передбачені в програмі графічні операції, що стосуються розглянутої залежності між змінними r і φ.

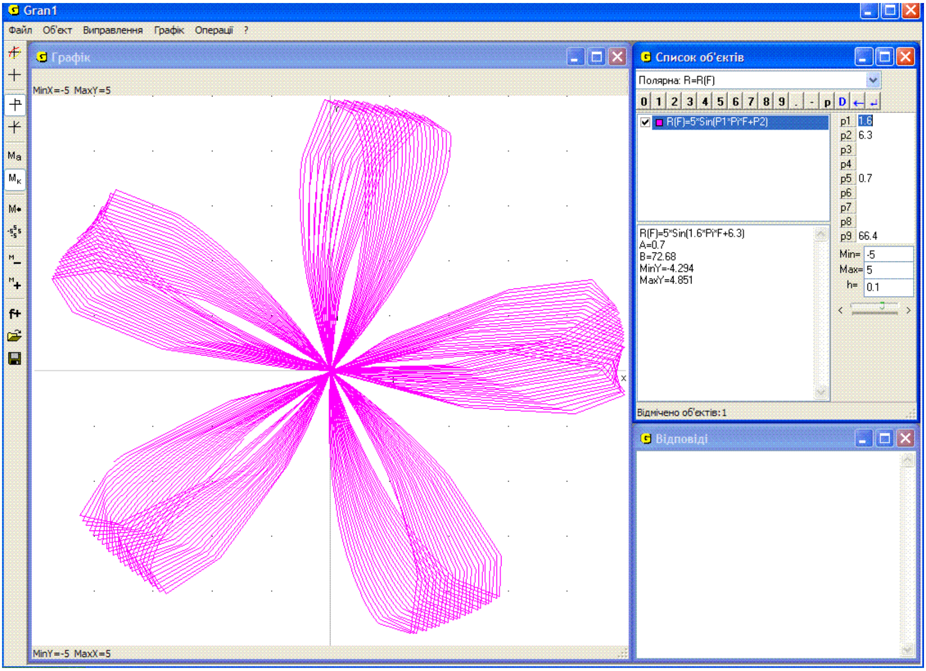


Рис. 12.1

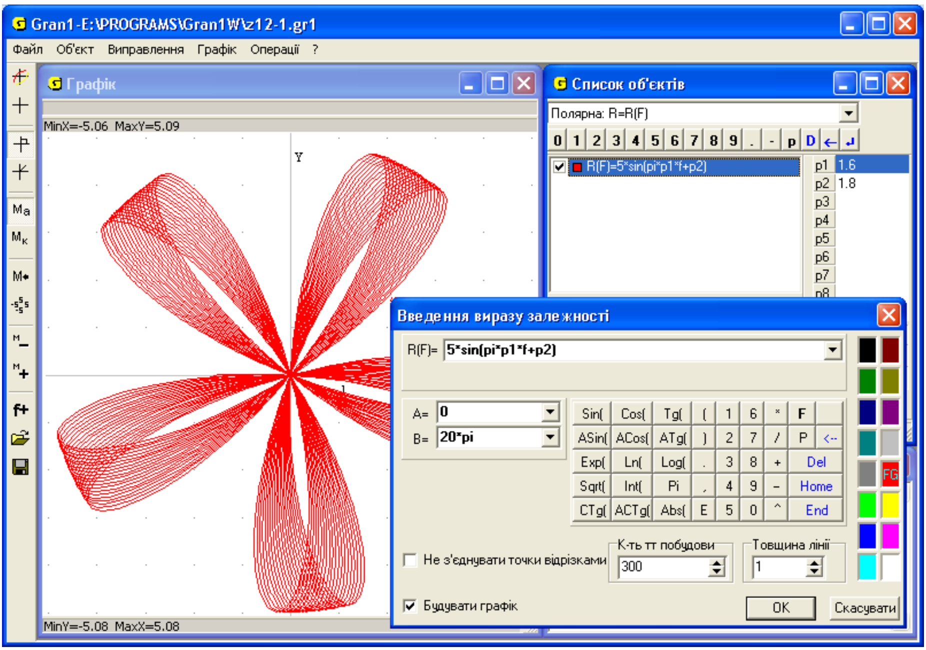


Рис. 12.2

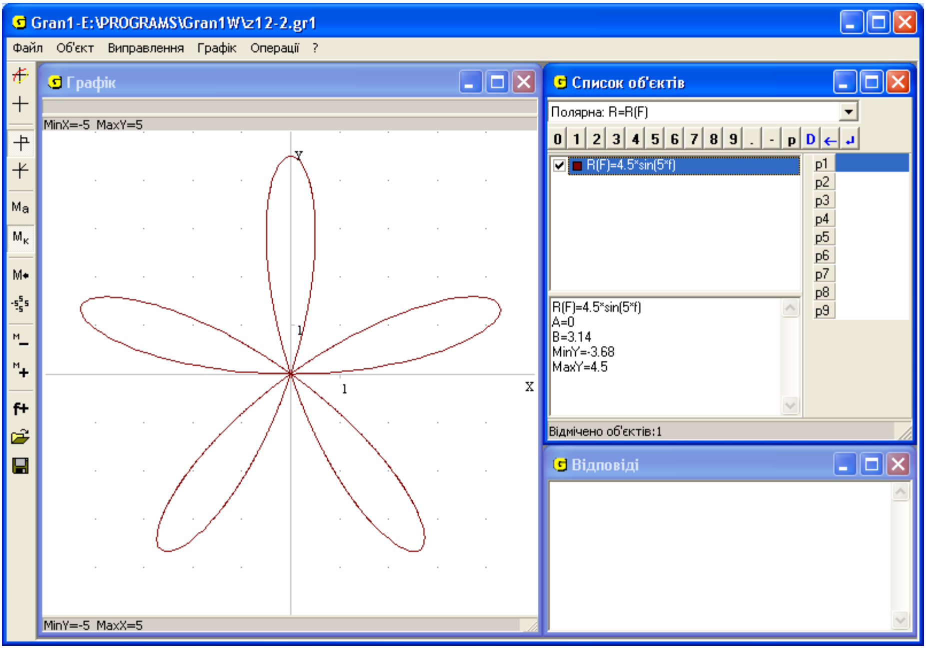


Рис. 12.3

Приклади

1. На Рис. 12.3 подано графік залежності $r = 4\sin 5\varphi$ (п'ятипелюсткова троянда).

2. Графіком залежності $r = a$, ($a = const$, $a > 0$), буде коло радіуса a (Рис. 12.4).

3. Графіком залежності $\varphi = b$, ($b = const$), буде промінь, що виходить з полюса і нахилений до полярної осі під кутом b (Рис. 12.5) (слід зауважити, що в програмі GRAN1 не передбачена побудова графіка функції $\varphi = \varphi(r)$).

4. Графіком залежності $r = \dfrac{a}{\cos(\varphi)}$, ($a = const$, $a > 0$), буде пряма, перпендикулярна до полярної осі і віддалена від полюса уздовж полярної осі на a; $r = \dfrac{a}{\sin(\varphi)}$ – пряма, паралельна до полярної осі (Рис. 12.6).

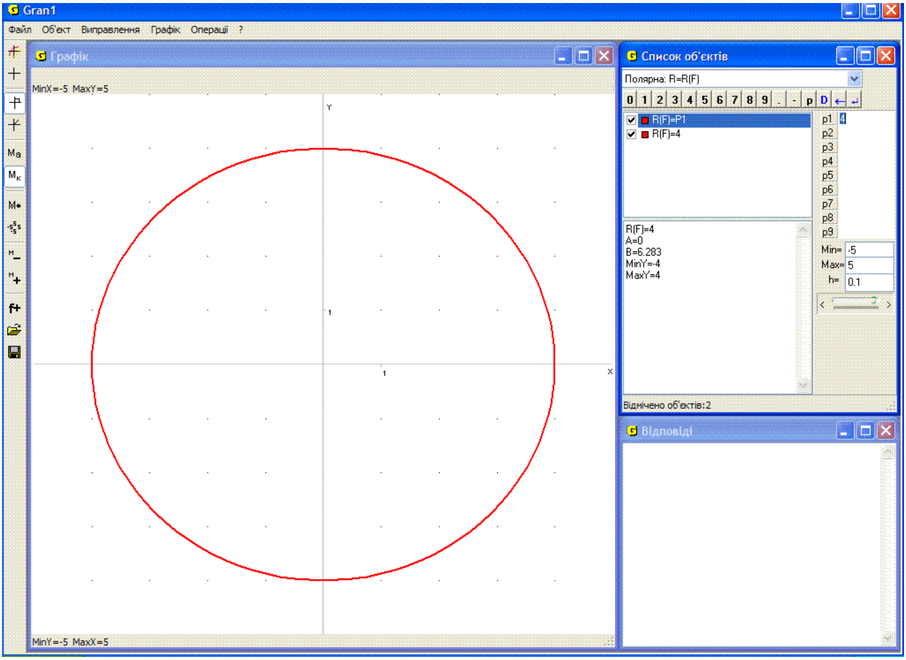


Рис. 12.4

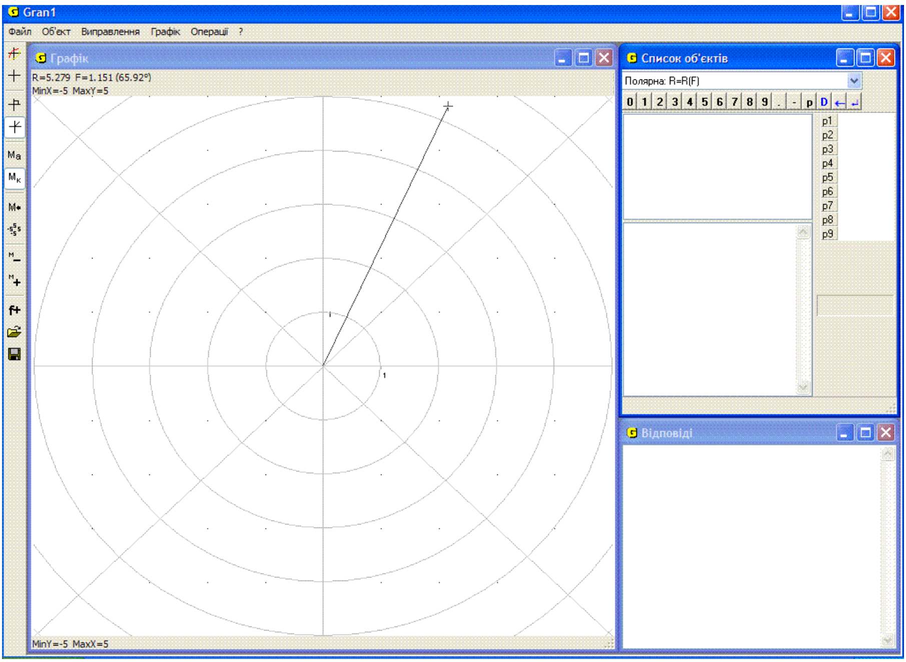


Рис. 12.5

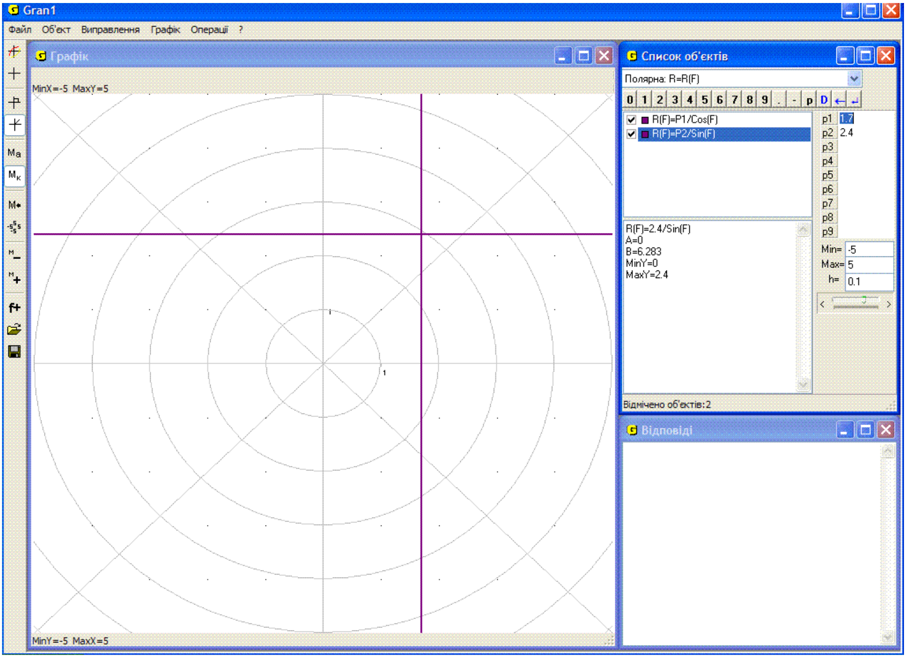


Рис. 12.6

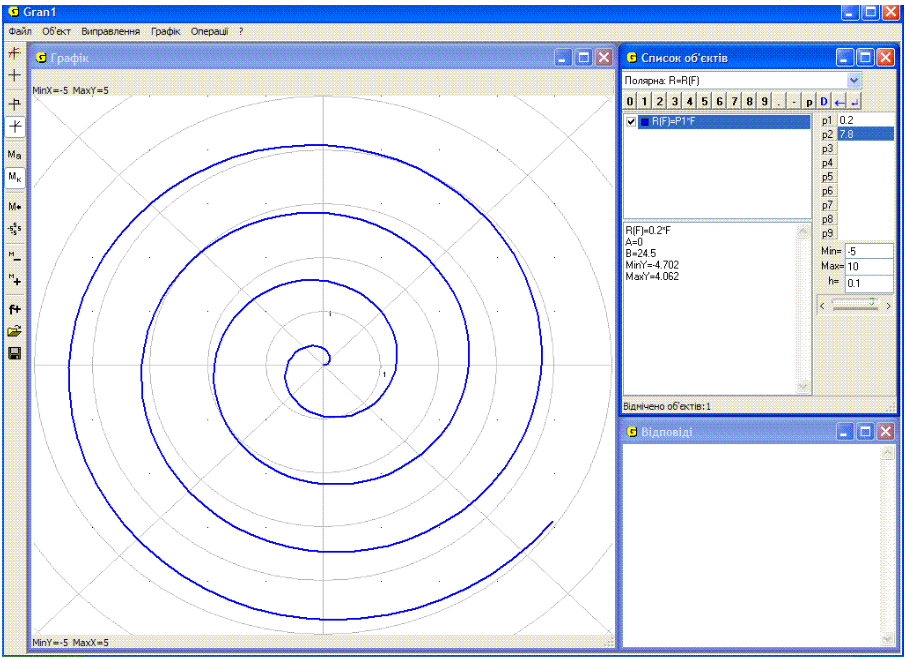


Рис. 12.7

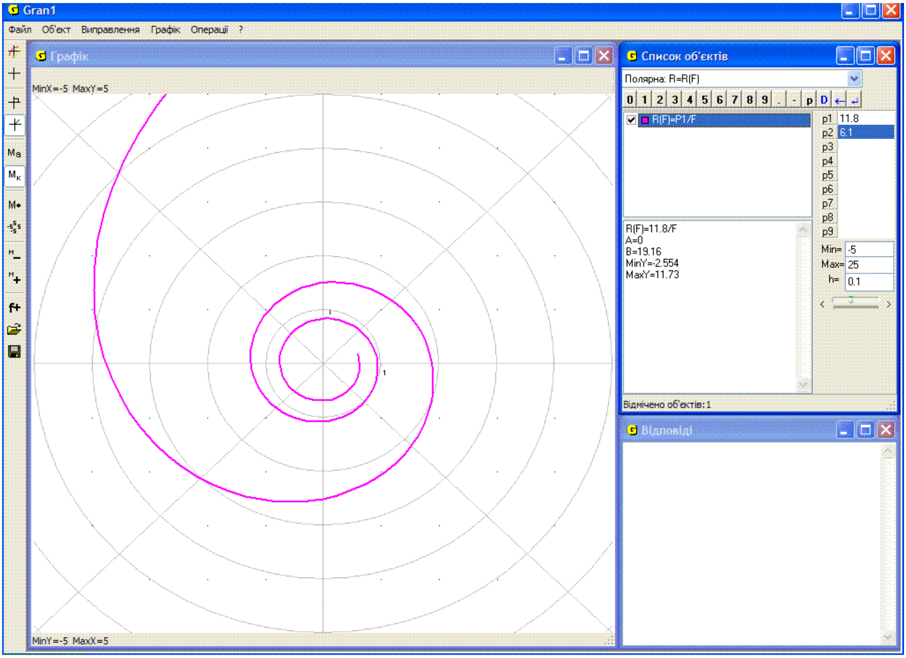


Рис. 12.8

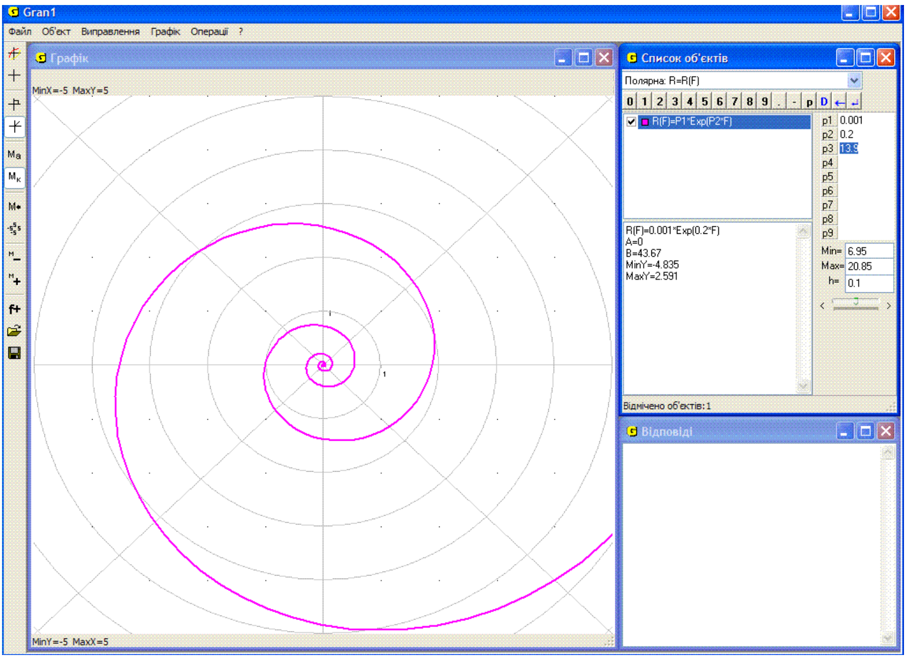


Рис. 12.9

Графіком залежності $r = a\varphi$, ($a = const$, $a > 0$, $\varphi \geq 0$), буде спіраль Архімеда (Рис. 12.7); залежності $r = \dfrac{a}{\varphi}$, ($a = const$, $a > 0$, $\varphi \geq 0$) – гіперболічна спіраль (Рис. 12.8); залежності $r = be^{a\varphi}$, ($a > 0$, $b > 0$, $\varphi \geq 0$) – логарифмічна спіраль (Рис. 12.9).

Запитання для самоконтролю

1. Як від виразу, заданого в полярних координатах, перейти до виразу, заданого в декартових координатах?
2. Як на координатній площині зображуються точки з від'ємними полярними кутами?
3. Як на координатній площині зображуються точки, полярні кути яких більші, ніж 2π ?
4. Як, використовуючи програму GRAN1, побудувати графік залежності $r = \rho(\varphi)$, заданої в полярних координатах?
5. Чи можна скористатися послугами програми GRAN1 для побудови графіка залежності між полярними координатами, заданої неявно?
6. Як зміниться множина [0, 2π] значень аргумента функції $r = \rho(\varphi)$, якщо замість φ підставити $k\varphi$?

Вправи для самостійного виконання

За допомогою програми GRAN1 побудувати графіки залежностей між полярними координатами r і φ (за різних значень $P1$, $P2$, $P3$) в межах зміни φ від $-P7$ до $P7$, змінюючи $P7$ від 0 до 200:

1. $r = 2P1\cos\varphi + P2$, ($P1 > 0$, $P2 > 0$). Розглянути випадки:
   - $P2 > 2P1$;
   - $P2 < 2P1$;
   - $P2 = 2P1$.
2. $r = \sqrt{2P1^2 \cos 2\varphi}$ і $r = -\sqrt{2P1^2 \cos 2\varphi}$.
3. $r = 5\sin 9\varphi$.
4. $r = \cos\varphi$, $r = \cos 2\varphi$, $r = \cos 3\varphi$, $r = \cos 5\varphi$.
5. $r = P1\cos(P2 \cdot \varphi + P3)$.
6. $r = 6\sin(P1 \cdot \pi \cdot \varphi + P2)$.
7. $r = 3\sin(P3 \cdot 40 \cdot \varphi + P4)$.

§13. Таблично задані функції та їх наближення поліномами

Часто з тих чи інших причин деяку залежність задають за допомогою таблиці значень виразу виду $f(x)$ у скінченній кількості точок у вигляді

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
$f(x_i)$	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

.

Іноді аналітичне подання виразу $f(x)$ взагалі невідоме, а відомі лише його значення в деяких окремих точках, знайдені в результаті спостережень чи вимірювань в деякому експерименті. Якщо відповідно до заданої таблиці зобразити точки (x_i, y_i), $(i = 1, 2, \ldots, n)$, на координатній площині, то в такий спосіб можна одержати наближене графічне подання досліджуваної залежності. Якщо точок $x_1, x_2, \ldots, x_n$ досить багато, вони розташовані досить щільно, і є впевненість, що значення виразу $f(x)$ із змінюванням аргумента x на проміжку $[x_1, x_n]$ змінюються досить плавно, то за вказаним графічним поданням можна досить повно охарактеризувати залежність $y = f(x)$.

Однак іноді виникає необхідність знайти хоча б наближене аналітичне подання таблично заданої залежності. Іноді вдається дібрати вираз $\varphi(x)$ такий, що значення $\varphi(x_i)$ досить близькі до заданих в таблиці значень y_i за всіх значень x_i, $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Як правило без спеціальних досліджень дібрати такий вираз $\varphi(x)$ нелегко.

Часто вираз, значення якого в точках x_i, поданих в таблиці, якомога менше відрізнялися б від поданих в таблиці значень y_i досліджуваної залежності $y = f(x)$, шукають у вигляді полінома $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_m x^m$ деякого степеня m. Невідомі коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_m$ добирають так, щоб сума $\sum_{i=1}^{m} (P(x_i) - y_i)^2$ квадратів різниць значень полінома $P(x)$ і значень виразу $f(x)$ у точках x_i, заданих у таблиці, була найменшою. Такий метод відшукання полінома $P(x)$ степеня не вище наперед заданого m, що найменше у зазначеному розумінні відхиляється від таблично заданої функції $y = f(x)$, називають *методом найменших квадратів*.

Як правило, наперед вказують степінь полінома m, значно менший, ніж кількість n точок в таблиці. Якщо $m \geq n - 1$, то коефіцієнти $a_0, a_1, \ldots, a_m$ полінома $P(x)$ можна дібрати так, що для всіх x_i,

($i=1, 2, \dots, n$), будуть виконуватися рівності $P(x_i)=y_i$, оскільки система рівнянь

$$\begin{cases} a_0+a_1x_1+a_2x_1^2+\dots+a_{n-1}x_1^{n-1}=y_1, \\ a_0+a_1x_2+a_2x_2^2+\dots+a_{n-1}x_2^{n-1}=y_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0+a_1x_n+a_2x_n^2+\dots+a_{n-1}x_n^{n-1}=y_n. \end{cases}$$

завжди має розв'язок, причому єдиний.

У програмі GRAN1 передбачено відшукання за методом найменших квадратів полінома $P(x)$ степеня не вище 7, за допомогою якого найкраще наближається таблично задана функція не більш ніж у 10000 точок.

Перш ніж вводити таблицю, за допомогою якої подається досліджувана залежність, потрібно встановити у вікні “Список об’єктів” тип “Таблична: Xi, Y(Xi)” (Рис. 13.1).

В разі табличного задання залежності (як і в разі роботи з ламаним та статистичними вибірками) дані вводяться у вигляді таблиць з клавіатури, з панелі введення даних, з екрану або з деякого текстового файлу.

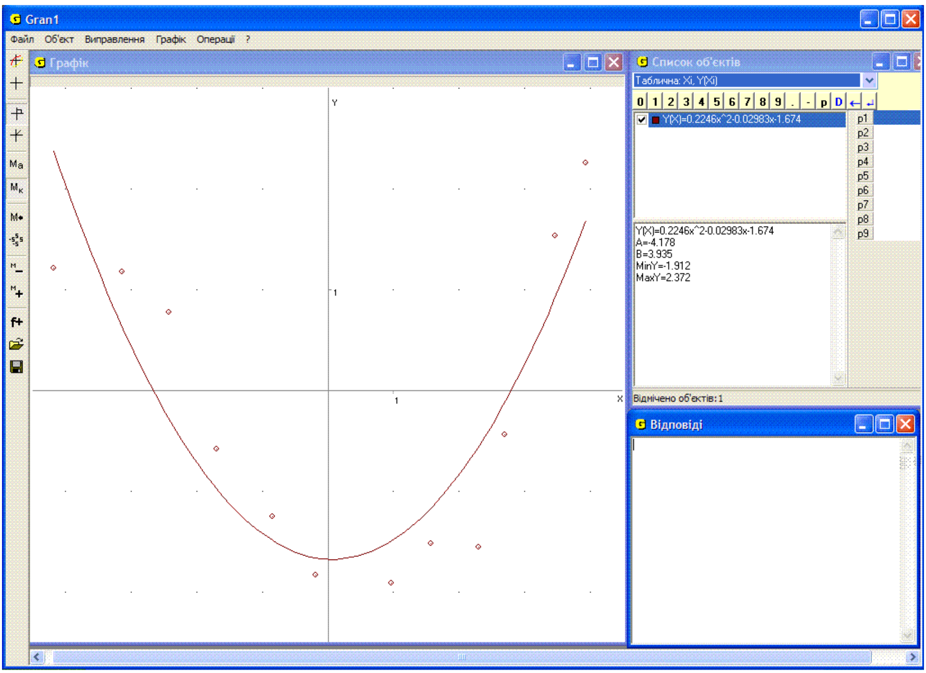


Рис. 13.1

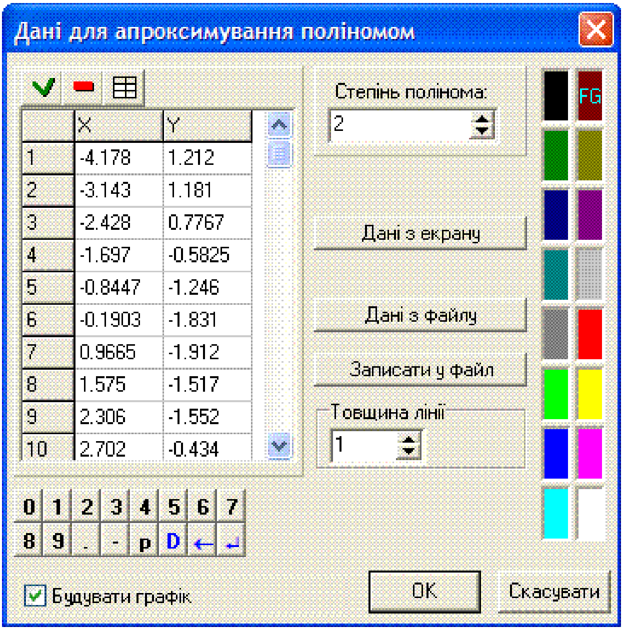


Рис. 13.2

Після вказування типу задання залежності “Таблична: Xi, Y(Xi)” і звернення до послуги “Об’єкт / Створити” з’являється допоміжне вікно “Дані для апроксимування поліномом” (Рис. 13.2).

Числа вводяться парами, перше з яких – значення аргумента x, друге – відповідне значення виразу $f(x)$.

Як і в разі роботи з об’єктами типу “Ламана”, вводити координати точок в таблицю можна:

- використовуючи клавіші клавіатури для введення значень;
- за допомогою “мишки”, використовуючи панель введення даних, подану у вікні;
- вказуючи точки за допомогою “мишки” на координатній площині, попередньо “натиснувши” кнопку “Дані з екрану”;
- прочитавши дані з текстового файлу на диску, попередньо “натиснувши” кнопку “Дані з файлу” і вказавши потім відповідний файл (якщо раніше такі дані були записані у цей файл).

Введені дані з таблиці можна зберегти у вигляді текстового файлу на диску, “натиснувши” кнопку “Записати у файл”.

У допоміжному вікні також потрібно встановити степінь апроксимуючого полінома від 0 до 7, колір і товщину лінії графіка (Рис. 13.2).

В результаті у вікні “Список об’єктів” з’являється аналітичний вираз виду $y = P(x)$, де $P(x)$ – поліном зазначеного степеня такий, що через залежність $y = P(x)$ найкраще наближається таблично задана залежність у розумінні середнього квадратичного (Рис. 13.1).

Якщо необхідно одержати графічне зображення точок (x_i, y_i), занесених у таблицю і графік отриманої залежності $y = P(x)$, потрібно звернутися до послуги “Графік/Побудувати” чи натиснути відповідну кнопку на панелі інструментів.

За необхідності внести зміни в таблицю чи просто переглянути її потрібно звернутися до послуги “Об’єкт/Змінити…” чи вибрати пункт “Змінити” контекстного меню (що з’являється, якщо встановити курсор на відповідний рядок у вікні “Список об’єктів” і натиснути праву клавішу “мишки”). Внесення змін у таблицю здійснюється так само, як і під час роботи з ламаними.

В разі потреби можна змінити і степінь полінома. Якщо графік залежності $y = P(x)$ був побудований, то після зміни степеня полінома у вікні “Список об’єктів” з’являється новий аналітичний вираз залежності $y = P(x)$, а у вікні “Графік” – відповідний графік.

Приклади

1. Знайти рівняння прямої, що проходить через точки (-3, -1) і (2, 3).

Вказавши тип задання залежності “Таблична: Xi, Y(Xi)” і звернувшись до послуги “Об’єкт/Створити…”, введемо таблицю

x_i	-3	2
y_i	-1	3

.

Вказавши степінь полінома рівним 1, одержимо $P(x) = 0.8x + 1.4$.

Звернувшись до послуги “Графік / Побудувати”, одержимо графічне подання відрізка прямої, що проходить через задані точки (Рис. 13.3).

2. Знайти рівняння параболи, що проходить через точки (1, 2), (3, 1), (6, 5).

Встановивши тип задання залежності “Таблична: Xi, Y(Xi)” і звернувшись до послуги “Об’єкт/Створити...”, введемо таблицю

x_i	1	3	6
y_i	2	1	5

.

Вказавши степінь полінома рівним 2, одержимо

$P(x) \approx 0.3667\,x^2 - 1.967\,x + 3.6$.

Звернувшись до послуги “Графік / Побудувати”, у вікні “Графік” одержимо графік шуканої параболи (Рис. 13.4).

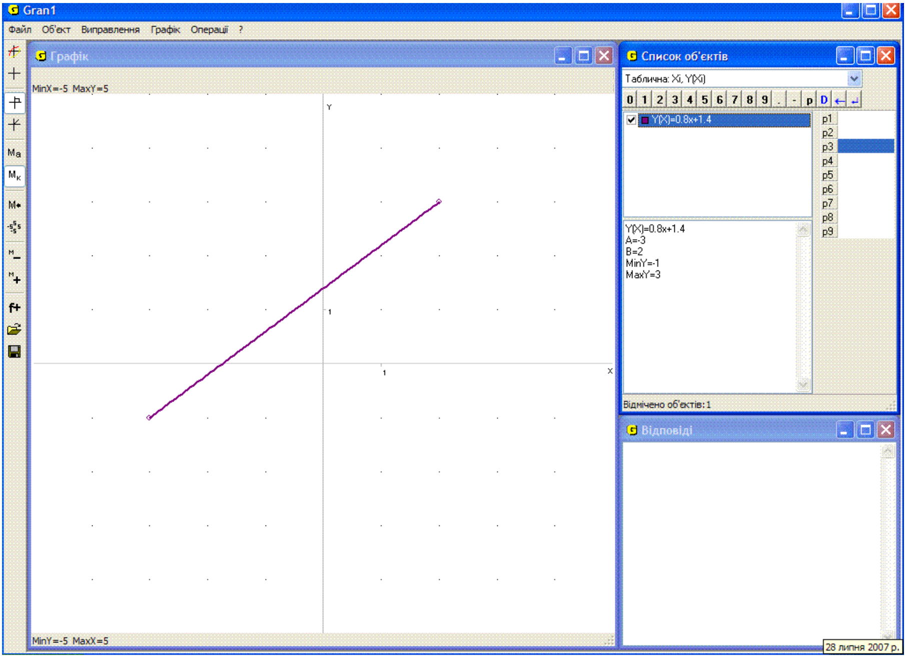


Рис. 13.3

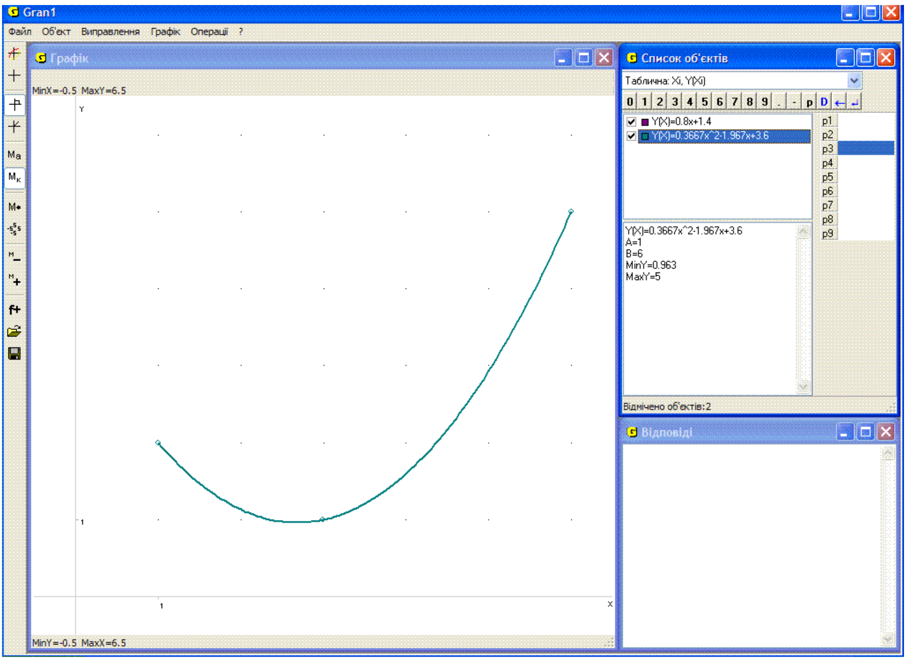


Рис. 13.4

3. Гармата розташована в точці з координатами (0, 0), мішень у точці з координатами (7, 0). Визначити кут нахилу до горизонту напрямку кидання снаряда і його початкову швидкість так, щоб траєкторія снаряда пройшла через точку (над вершиною укриття) (5, 3.01) і разом з тим снаряд влучив в мішень.

Встановивши тип "Таблична: Xi, Y(Xi)" і ввівши таблицю

x_i	0	5	7
y_i	0	3.01	0

,

побудуємо поліном 2-го степеня (параболу) такий, що графік залежності $y = P(x)$ проходить через вказані точки. В результаті одержимо $y(x) = -0.301x^2 + 2.107x$ (Рис. 13.5).

Щоб наближено визначити кут нахилу напрямку кидання снаряда до горизонту, можна скористатися послугою "Графік / Параметри вікна "Графік"" і на закладинці "Графік" вказавши тип координат "Полярні координати". В результаті одержимо $\varphi \approx 1.13$ (64.8°) (Рис. 13.6).
Враховуючи параметричне задання залежності між змінними x і y:

$$x = (V_0 \cos\varphi)t, \qquad y = (V_0 \sin\varphi)t - \frac{gt^2}{2}, \qquad \text{звідки} \qquad t = \frac{x}{V_0 \cos\varphi},$$

$$y = xtg\varphi - \frac{9.8}{2}\left(\frac{x}{V_0 \cos\varphi}\right)^2, \quad V_0 = \frac{x\sqrt{4.9}}{\cos\varphi\sqrt{xtg\varphi - y}},$$

а також те, що траєкторія повинна проходити через точку $(5,\ 3.01)$, одержимо $V_0 = \dfrac{5\sqrt{4.9}}{\cos(1.13)\sqrt{5tg(1.13) - 3.01}} \approx 9.4$.

4. Ввести з файлу *Poly* таблицю, що зберігається там, побудувати відповідний поліном найкращого наближення таблично заданої залежності та графічне зображення точок таблиці і графіка отриманої залежності $y = P(x)$.

Встановивши тип залежності "Таблична: Xi, Y(Xi)", звернемося до послуги "Об'єкт / Створити...". У вікні "Дані для апроксимування поліномом" "натиснемо" кнопку "Дані з файлу" та у вікні, що з'явиться, вкажемо у відповідному каталозі файл *Poly* (Рис. 13.7). Дані з файлу будуть перенесені в таблицю.

Дані з цього файлу можна ввести також за допомогою послуги Файл/Відкрити (Рис. 13.8), після звернення до якої відкривається папка, в якій зберігаються файли, створені за допомогою програми GRAN1 (типу gr1) (Рис. 13.9).

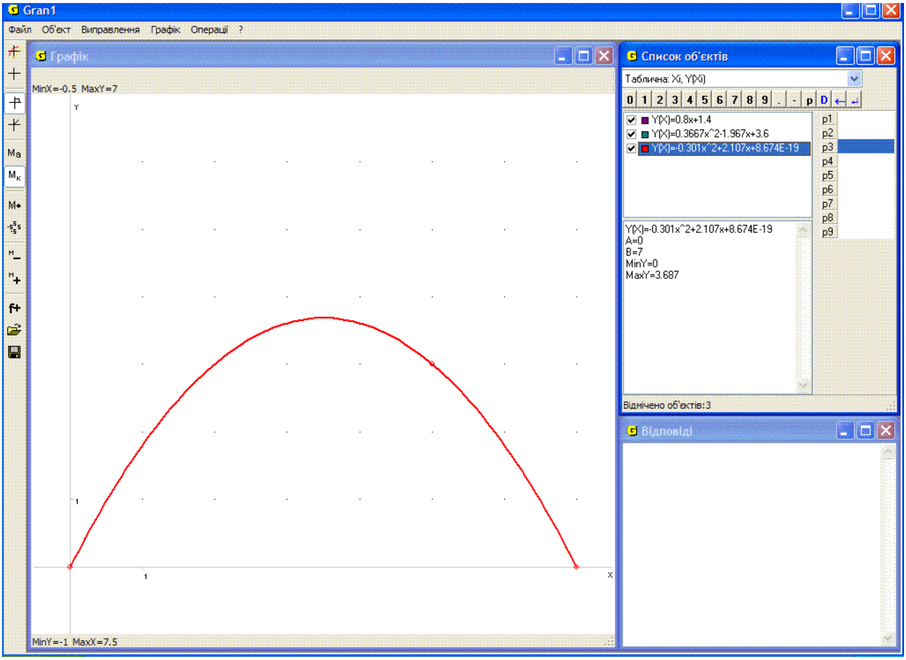


Рис. 13.5

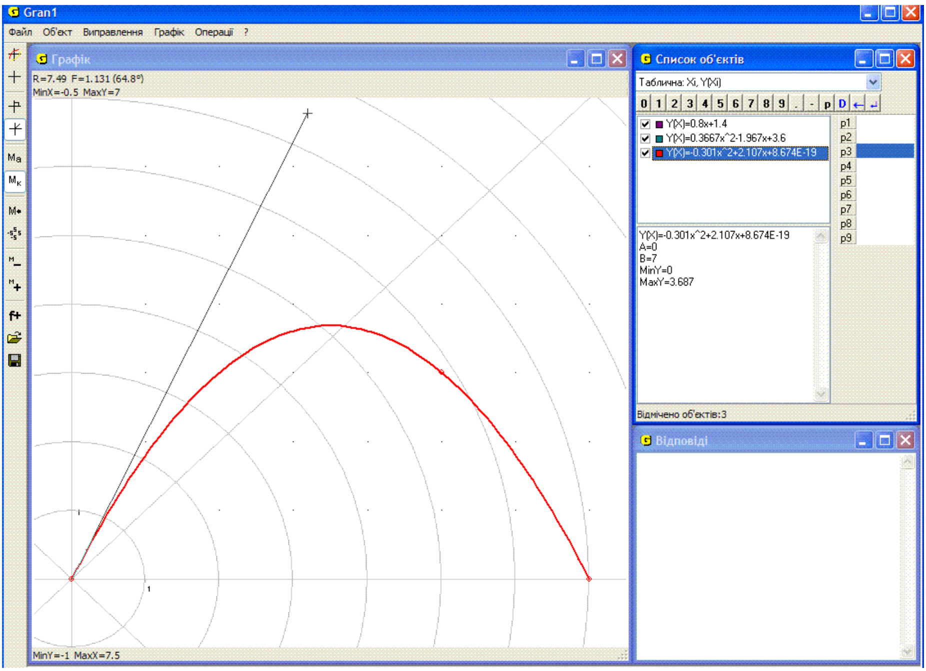


Рис. 13.6

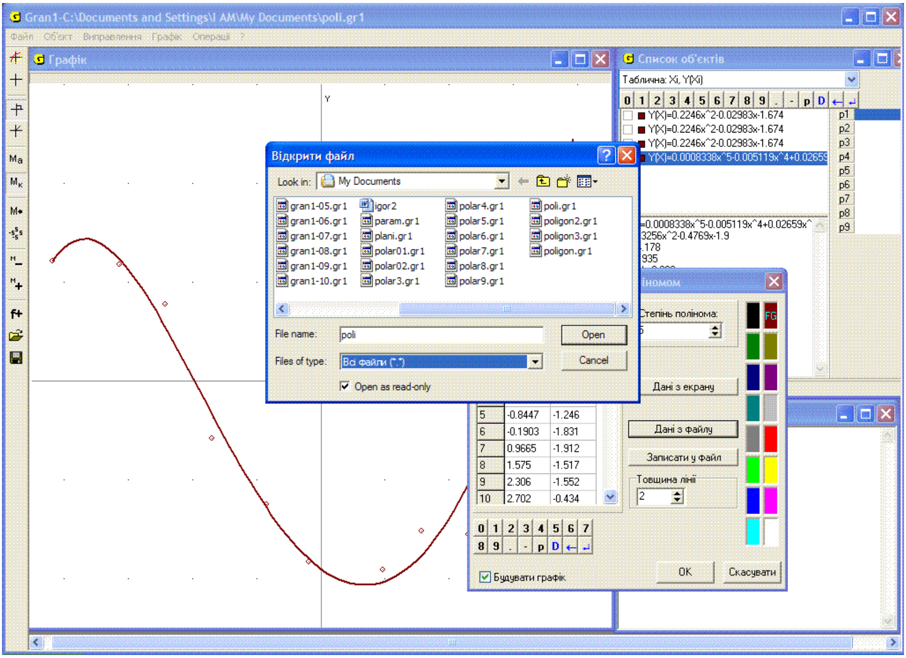


Рис. 13.7

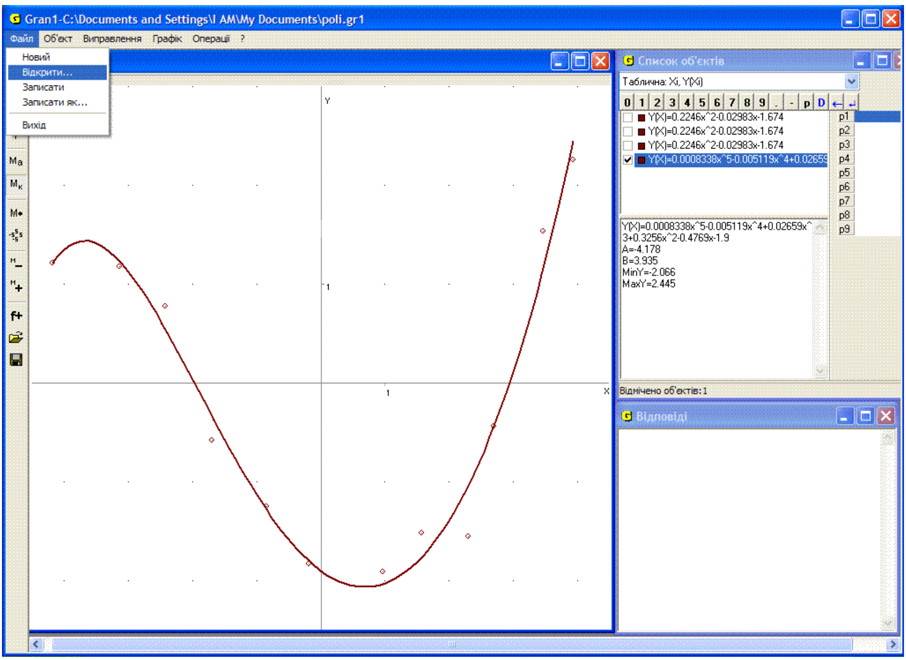


Рис. 13.8

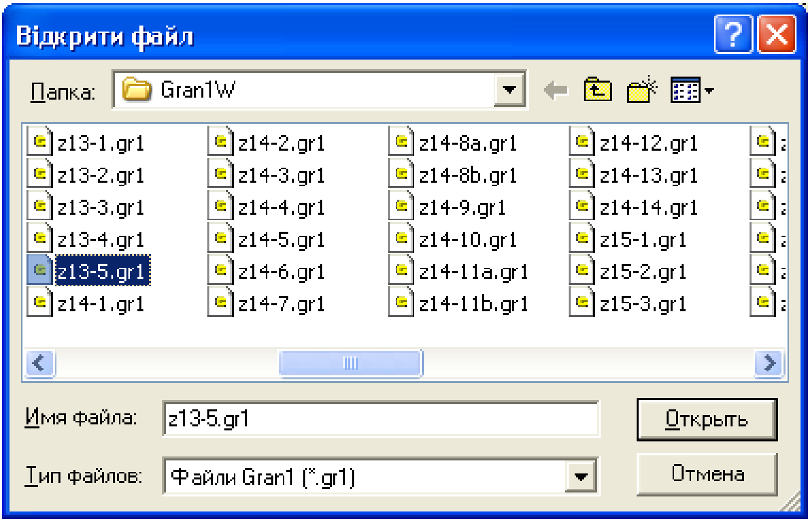


Рис. 13.9

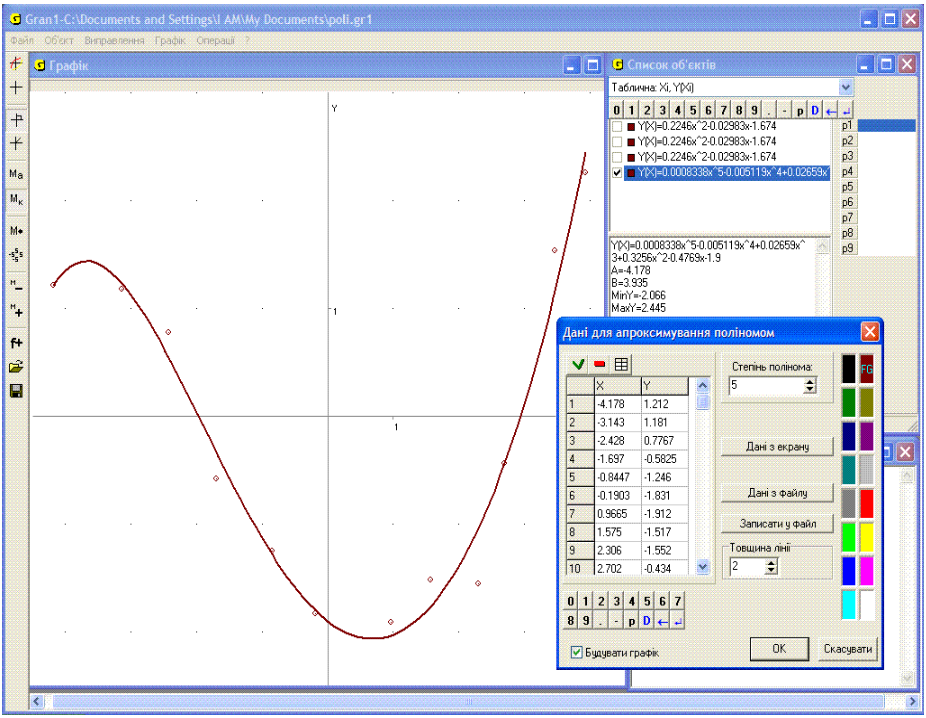


Рис. 13.10

Далі у рядку “Степінь полінома” введемо число 5 та вкажемо колір і товщину лінії (Рис. 13.2). В результаті у вікні “Список об’єктів” з’явиться шуканий поліном. Після звернення до послуги “Графік / Побудувати” одержимо графічне подання введеної таблиці і залежності $y = P(x)$ (Рис. 13.10).

На цьому рисунку можна бачити, що запис одержаного полінома досить довгий, тому у вікні “Список об’єктів” відповідний запис виразу розміщується не повністю. Щоб побачити повний вираз, можна або розширити вікно “Список об’єктів”, або зробити цей об’єкт поточним, після чого повний запис виразу з’явиться в нижній частині вікна “Список об’єктів”.

Запитання для самоконтролю

1. Який тип задання залежності слід встановити під час введення таблиці значень аргументів і відповідних їм значень залежної величини?
2. Чи передбачена в програмі GRAN1 можливість спочатку ввести всі значення аргументів, а потім відповідні їм значення залежної величини?
3. Чи можна ввести таблицю з використанням панелі введення даних і маніпулятора “мишка”?
4. Яким чином можна вносити дані в таблицю?
5. Як зберегти для подальших сеансів роботи з програмою GRAN1 введену таблицю?
6. Як ввести таблицю з файлу, у який вона була записана раніше?
7. Чи можна з використанням послуг програми GRAN1 вивести на екран дисплея зображення точок, поданих в таблиці, не виводячи графік відповідного полінома?
8. Чи можна з використанням послуг програми GRAN1 вивести на екран дисплея графік полінома, яким наближається таблично задана залежність, не виводячи зображення точок, поданих в таблиці?
9. Як можна внести зміни до раніше введеної таблиці?
10. Чи може степінь наближаючого полінома бути рівним 1, якщо введена таблиця містить 5 пар чисел ?
11. Чи обов’язково різниці $x_{i+1} - x_i$ повинні залишатися однакові за всіх $i = 1, 2, \ldots, n-1$?
12. Чи обов'язково аргументи x_i в таблиці повинні бути впорядковані за зростанням?

Вправи для самостійного виконання

1. Знайти рівняння виду $y = P(x)$ кривої, що проходить через точки: (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 4) і побудувати криву, де $P(x)$ алгебраїчний поліном.

2. Знайти рівняння виду $y = P(x)$ кривої, що проходить через точки (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4) і побудувати криву, де $P(x)$ алгебраїчний поліном.
3. Знайти поліном (не вище 5-го степеня), яким найкраще наближається залежність, задана за таблицею

x_i	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5
$f(x_i)$	0	1	1	2	4	5	9	10	16	20	18

4. Переглянути таблицю, що зберігається у файлі з вказаним іменем, якщо у файл з таким іменем попередньо записано 15 пар чисел, і визначити, скільки серед цих пар чисел таких, де значення залежної величини від'ємні.
5. Побудувати (використовуючи послугу "Операції / Калькулятор") таблицю значень функції $f(x) = \cos x$ для значень аргументу $-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$. Далі за отриманою таблицею знайти відповідний поліном найкращого наближення $P(x)$ другого степеня. Побудувати графіки залежностей $y = P(x)$ і $y = \cos x$ і порівняти їх. Обчислити значення $P(x)$ і $\cos x$ у точках $x = 0.5$, $x = 1$, $x = 1.2$ і порівняти їх.
6. Використовуючи послугу "Операції / Калькулятор", побудувати таблицю значень функції $y = \sin x$ для значень аргументу -0.10, -0.05, 0, 0.05, 0.10. Для отриманої таблиці побудувати поліном найкращого наближення $P(x)$ 4-го степеня. Побудувати графіки залежностей $y = \sin x$, $y = P(x)$ і порівняти їх. Визначити (за допомогою послуги "Операції / Калькулятор" і за графіком) значення $P(x)$ і $\sin x$ в точках 0.025, 0.075 і порівняти їх.
7. З точки (0,0) кинутий снаряд під кутом α до горизонту з початковою швидкістю V_0. Мішень знаходиться за укриттям, координати вершини якого (x_1, y_1).
   - На якій відстані від підніжжя укриття повинна знаходитися мішень, щоб за заданих V_0, x_1, y_1 в неї неможливо було влучити?
   - Якою повинна бути висота y_1 укриття, щоб за заданих V_0, x_1 снаряд неможливо було перекинути через укриття?
   - Якими повинні бути V_0 і α, щоб за заданих x_1, y_1 снаряд перелітав укриття і падав не далі ніж на відстані d від підніжжя укриття?
   - На якій відстані від підніжжя укриття повинен стартувати снаряд, щоб за заданого V_0 він перелітав укриття (якщо це можливо) і падав не далі ніж на відстані d від підніжжя укриття?
   - Чи можливе за заданих V_0, x_1, y_1 влучення в мішень, якщо вона знаходиться за укриттям на відстані d від його підніжжя?
8. Для конкретних розрахунків покласти:

a) $V_0 = 10$, $x_1 = 3$, $y_1 = 2$; $V_0 = 10$, $x_1 = 5$, $y_1 = 4$;

$V_0 = 10$, $x_1 = 1$, $y_1 = 10$; $V_0 = 10$, $x_1 = 10$, $y_1 = 1$;

b) $V_0 = 10$, $x_1 = 1$; $V_0 = 10$, $x_1 = 2$;

$V_0 = 10$, $x_1 = 3$; $V_0 = 10$, $x_1 = 5$;

$V_0 = 10$, $x_1 = 6$; $V_0 = 10$, $x_1 = 7$;

c) $x_1 = 2$, $y_1 = 2$, $d = 1$; $x_1 = 2$, $y_1 = 4$, $d = 0.5$;

$x_1 = 2$, $y_1 = 5$, $d = 0.2$; $x_1 = 5$, $y_1 = 7$, $d = 1$;

$x_1 = 7$, $y_1 = 8$, $d = 0.1$; $x_1 = 10$, $y_1 = 15$, $d = 1.5$;

d) $V_0 = 10$, $d = 1$; $V_0 = 1$, $d = 2$;

$V_0 = 5$, $d = 0.5$; $V_0 = 20$, $d = 0.1$;

$V_0 = 8$, $d = 2$; $V_0 = 2$, $d = 0.1$;

e) $x_1 = 5$, $y_1 = 5$, $V_0 = 3$, $d = 1$; $x_1 = 5$, $y_1 = 10$, $V_0 = 5$, $d = 0.5$;

$x_1 = 1$, $y_1 = 8$, $V_0 = 6$, $d = 2$; $x_1 = 3$, $y_1 = 9$, $V_0 = 2$, $d = 1$.

§14. Графічне розв'язування рівнянь і систем рівнянь

Нехай необхідно розв'язати рівняння $f(x)=0$, тобто в області задання залежності $y=f(x)$ знайти всі значення аргументу x такі, що відповідні їм значення $f(x)$ дорівнюють нулю.

В разі графічного подання залежності $y=f(x)$ знайти розв'язок рівняння $f(x)=0$ значить – знайти всі точки на графіку залежності $y=f(x)$, ординати яких дорівнюють нулю. Іншими словами, потрібно знайти точки, що лежать одночасно на графіку залежності $y=f(x)$ і на осі абсцис Ox, рівняння якої $y=0$, тобто точки, що лежать як на лінії (прямій чи кривій), рівняння якої $y=f(x)$, так і на лінії, рівняння якої $y=0$.

Побудувавши графік залежності $y=f(x)$ (використовуючи послугу "Графік / Побудувати") і встановлюючи курсор у відповідні точки для отримання їх координат, легко визначити абсциси всіх точок на графіку залежності $y=f(x)$, що лежать також і на осі Ox.

Приклади

1. Знайти розв'язки рівняння $x^2-3=0$.

Побудувавши графік залежності $y=x^2-3$ і встановивши курсор таким чином, щоб проекція курсора на вісь Ox співпала з точкою перетину графіка функції з віссю Ox, одержимо $x_1\approx-1.73$, $x_2\approx1.73$ (Рис. 14.1).

Якщо потрібно уточнити значення коренів, можна збільшити частину графіка чи змінити відрізок, на якому задана функція, і побудувати графік досліджуваної залежності в досить малих околах раніше визначених точок у значно збільшеному масштабі.

2. Знайти розв'язки рівняння $|x-1|+|x+1|-2=0$.

Побудувавши графік залежності $y=abs(x-1)+abs(x+1)-2$, можна переконатися, що будь-яка точка на осі Ox із проміжка $[-1,1]$ лежить на графіку розглядуваної залежності (Рис. 14.2). Таким чином у даного рівняння нескінченна множина розв'язків – будь-яке значення $x\in[-1,1]$ є розв'язком даного рівняння.

3. Знайти розв'язки рівняння $\sin x+2-\ln x=0$.

Побудувавши графік залежності $y=\sin(x)+2-\ln(x)$ на проміжку $[-1,40]$ (Рис. 14.3), можна переконатися (враховуючи властивості функцій $\sin x$ і $\ln x$), що за межами проміжка $[-1,40]$ немає коренів розглядуваного рівняння.

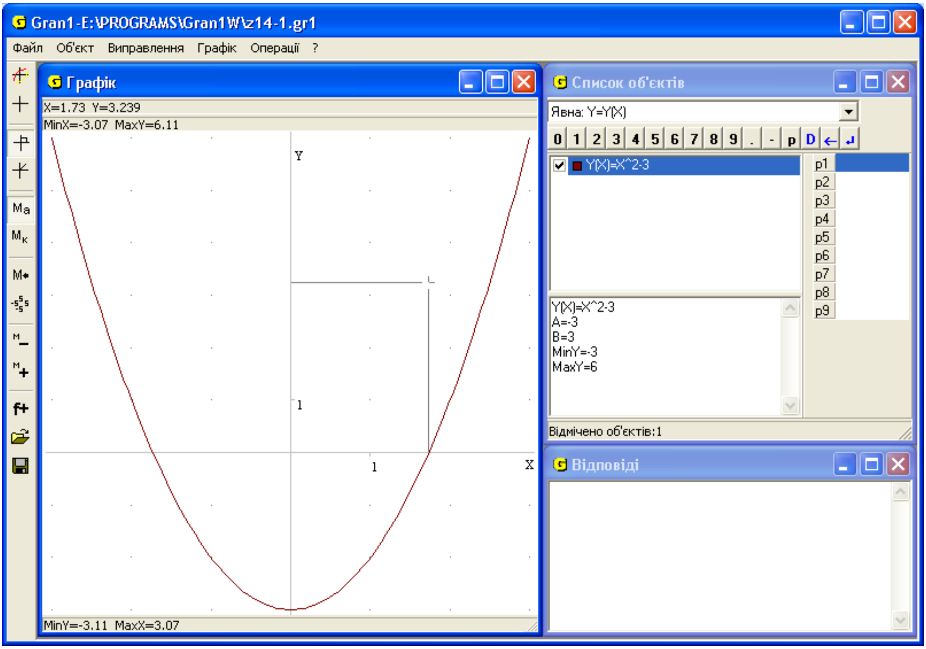


Рис. 14.1

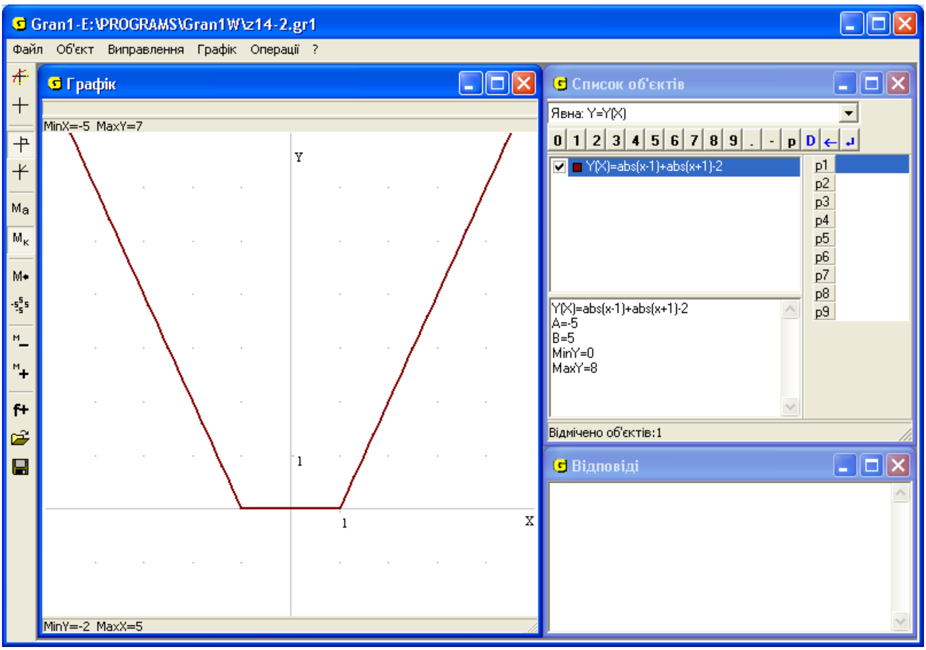


Рис. 14.2

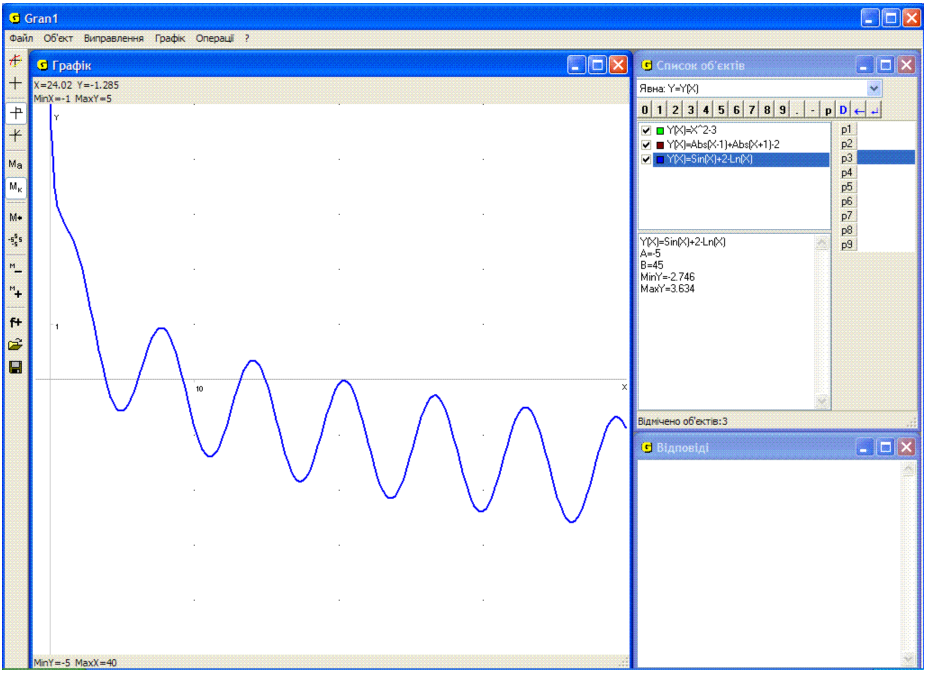


Рис. 14.3

Під час розглядування графіка залежності $y = \sin(x) + 2 - \ln(x)$, поданого на Рис. 14.3, може скластися враження, що рівняння $\sin x + 2 - \ln x = 0$ має 6 розв'язків:

$x_1 \approx 3.9$; $x_2 \approx 6.1$; $x_3 \approx 9.2$; $x_4 \approx 13.2$; $x_5 \approx 14.9$; $x_6 \approx 20.25$.

Якщо велика точність обчислень не вимагається, то з такими висновками можна погодитися.

Однак якщо потрібна більш висока точність результатів, то збільшуючи (за потреби кілька разів) масштаб графічних побудов у досить малих околах точок x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 (Рис. 14.4, 14.5), можна переконатися, що дане рівняння має 5 розв'язків:

$x_1 = 3.851$; $x_2 = 6.088$; $x_3 = 9.203$; $x_4 = 13.184$; $x_5 = 14.928$.

Слід зауважити, що точний аналітичний розв'язок розглянутого рівняння знайти неможливо, а пошук наближених його розв'язків без використання графічних побудов вимагає досить трудомістких обчислень і ретельного аналізу їх результатів.

В обчислювальній математиці вивчаються спеціальні методи для відшукання наближених розв'язків рівнянь виду $f(x) = 0$ на заданому проміжку $[a, b]$ (метод поділу відрізка пополам, метод хорд, метод дотичних, метод ітерацій і ін.).

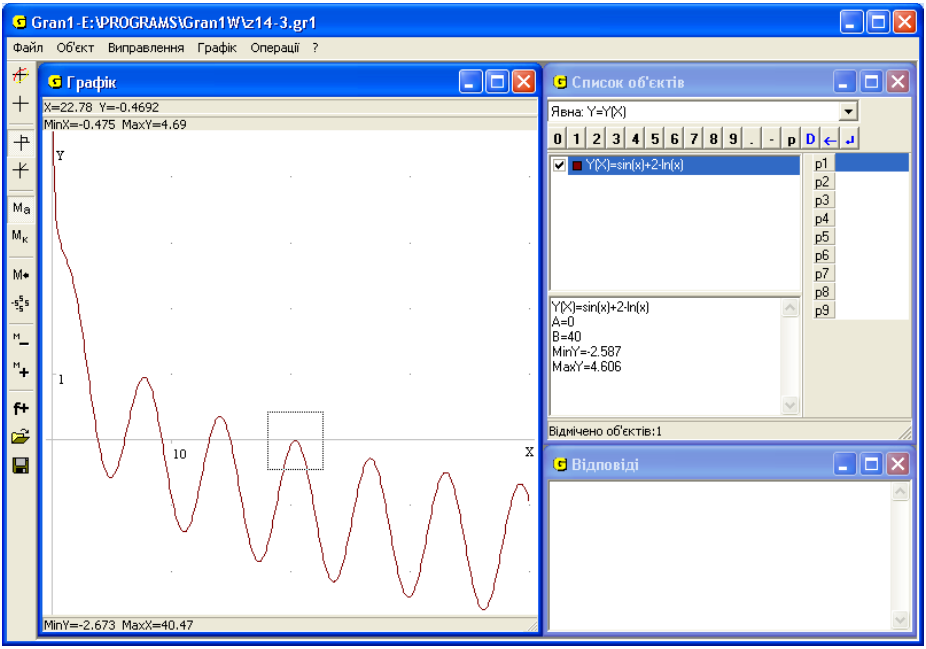


Рис. 14.4

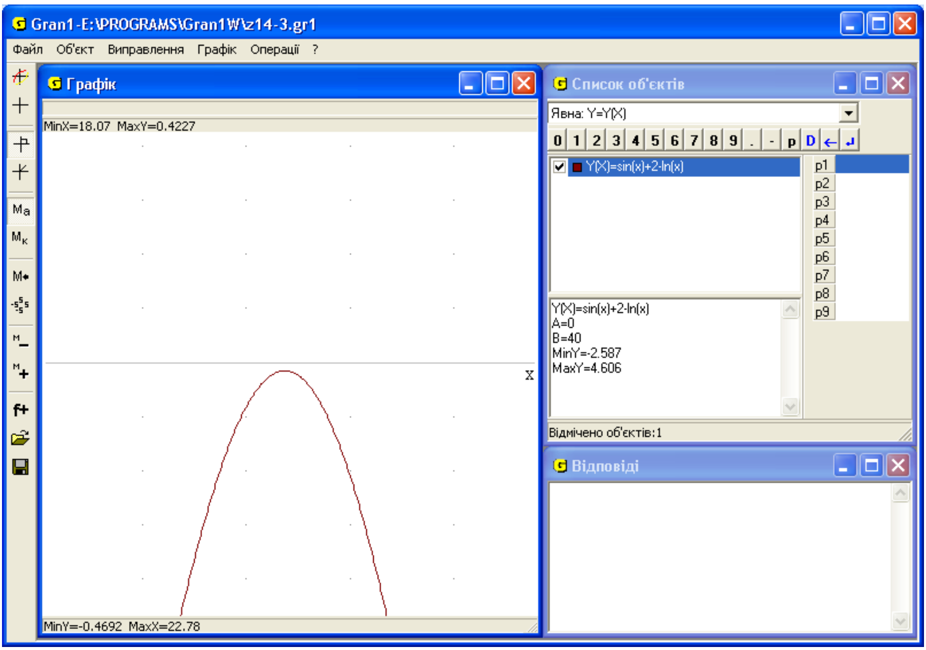


Рис. 14.5

Іноді рівняння $f(x)=0$ зручно подати у вигляді: $f_1(x)-f_2(x)=0$, де $f_1(x)-f_2(x)=f(x)$, чи деяка задача приводить до відшукання розв’язків рівняння виду $f_1(x)=f_2(x)$. У такому випадку зручно побудувати графіки залежностей $y=f_1(x)$ і $y=f_2(x)$, після чого встановити курсор у точках перетину графіків та визначити координати точок, що лежать на обох графіках одночасно. Абсциси x так знайдених точок і будуть розв’язками рівняння $f_1(x)=f_2(x)$. За так знайдених значень x значення $f_1(x)$ і $f_2(x)$ будуть рівні між собою.

4. Знайти розв’язки рівняння: $\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{8}\sin(10x)=\log_{\frac{1}{2}}(x+3.5).$

Побудувавши графіки залежностей $y=\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{8}\sin(10x)$ і $y=\log_{0.5}(x+3.5)$, легко переконатися, що у даного рівняння є єдиний розв’язок. Встановивши курсор в точку перетину графіків функцій, одержимо $x\approx-1.3$ (Рис. 14.6).

Нехай тепер потрібно розв’язати систему рівнянь виду

$$\begin{cases} G_1(x,y)=0, \\ G_2(x,y)=0, \end{cases}$$

де $G_1(x,y)$ і $G_2(x,y)$ деякі вирази від двох змінних x і y.

Встановивши тип задання залежності $G(x,y)=0$ і побудувавши графіки залежностей $G_1(x,y)=0$ і $G_2(x,y)=0$, після чого встановивши курсор в точках перетину графіків, легко визначити координати точок, що задовільняють обидва рівняння $G_1(x,y)=0$ і $G_2(x,y)=0$ одночасно, тобто координати точок перетину ліній, описуваних рівняннями $G_1(x,y)=0$ і $G_2(x,y)=0$.

5. Розв’язати систему рівнянь $\begin{cases} x^2+y^2=16, \\ \lg(xy)=0.1. \end{cases}$

Подамо вказані рівняння у вигляді відповідно $0=x^2+y^2-16$, $0=\lg(xy)-0.1$ і побудуємо графіки вказаних залежностей (Рис. 14.7).

Встановивши курсор в кожну з точок перетину графіків, одержимо:

1) $x\approx-3.99$, $y\approx-0.31$; 3) $x\approx 0.31$, $y\approx 3.99$;

2) $x\approx-0.31$, $y\approx-3.99$; 4) $x\approx 3.99$, $y\approx 0.31$.

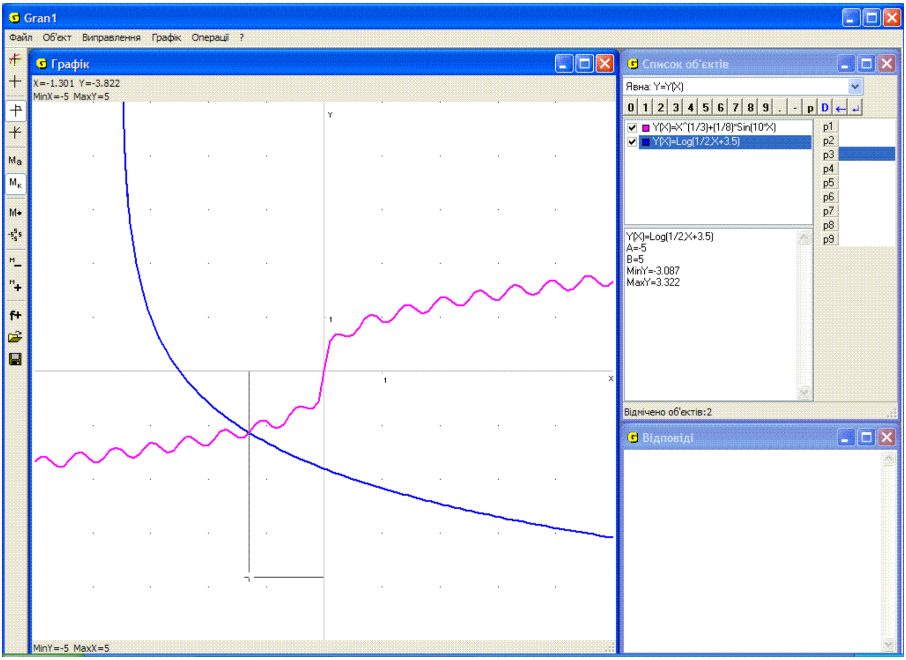


Рис. 14.6

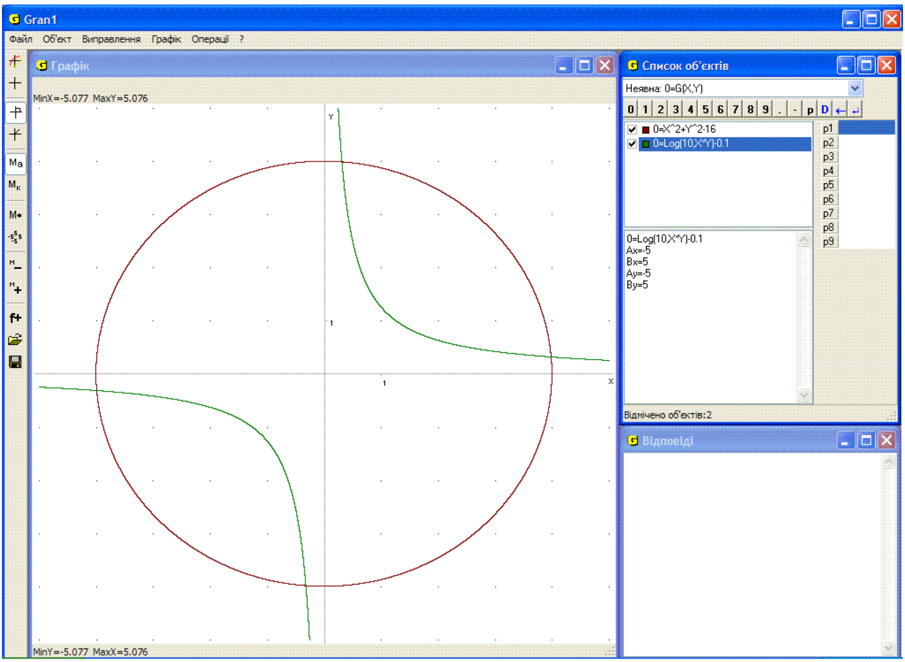


Рис. 14.7

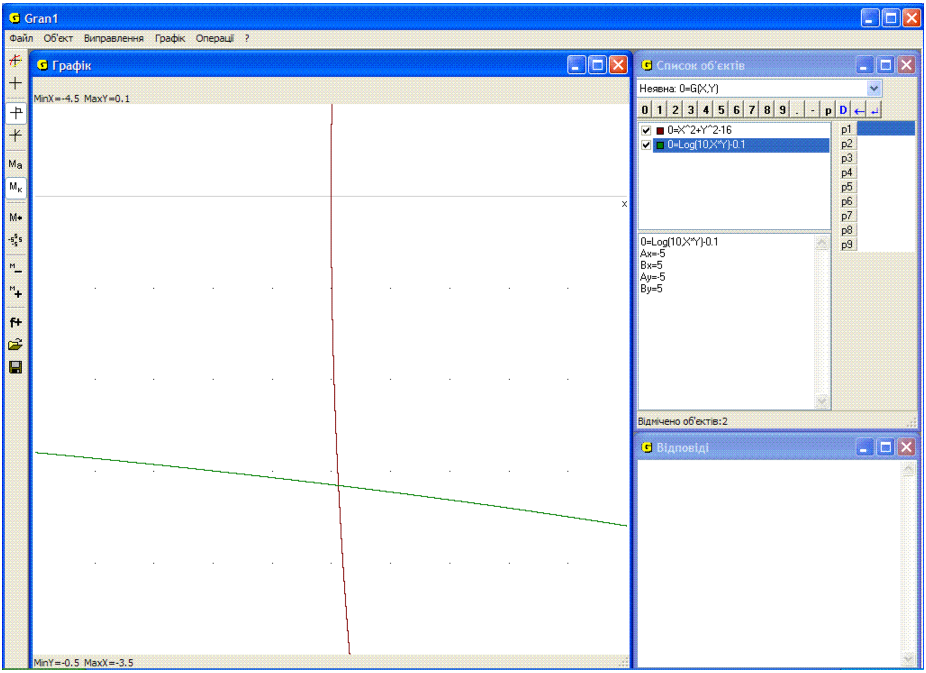


Рис. 14.8

Для більш точного визначення координат точок перетину графіків потрібно збільшити масштаб побудов, тобто використати послугу “Збільшити” чи змінити межі, у яких змінюються змінні x і y. Наприклад, якщо змінити масштаб, вказавши межі $MinX = -4.5$, $MaxX = -3.5$, $MinY = -0.5$, $MaxY = 0.1$, і побудувати відповідні графіки, одержимо зображення, подане на Рис. 14.8. Використовуючи координатний курсор, цього разу одержимо $x \approx -3.988$, $y \approx -0.316$, причому з переміщуванням курсора уточнюється (змінюється) третя після коми цифра.

Якщо покласти $MinX = -4.0$, $MaxX = -3.98$, $MinY = -0.32$, $MaxY = -0.3$ (використовуючи послугу “Графік / Масштаб / Масштаб користувача”), тоді одержимо $x \approx -3.9875$, $y \approx -0.3157$, причому з переміщуванням курсора уточнюється (змінюється) четверта після коми цифра.

Слід зауважити, що задачу відшукання розв’язків рівняння $f(x) = 0$ також можна розглядати як задачу про відшукання розв’язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 0 = y - f(x), \\ 0 = y, \end{cases}$$

а задачу відшукання розв’язків рівняння $f_1(x)=f_2(x)$ – як задачу відшукання розв’язків системи рівнянь

$$\begin{cases} 0 = y - f_1(x), \\ 0 = y - f_2(x). \end{cases}$$

Досить часто відшукання розв’язків системи рівнянь виду

$$\{\, G_1(x,y)=0\,,\ G_2(x,y)=0 \,\}$$

за допомогою графічних побудов є мало не єдиним придатним для практичних застосувань методом, оскільки використання методу виключення змінних чи інших методів не завжди приводить до бажаних результатів або ж надто складне.

6. Розв’язати систему рівнянь (Рис. 14.9):

$$\begin{cases} 0 = \sin(xy) + \cos(x-y), \\ 0 = x/y - \lg(x+y). \end{cases}$$

Виключити одну із змінних x чи y у даному випадку не вдається і важко запропонувати який-небудь практично придатний підхід до розв’язування задачі, окрім графічного.

Очевидно, графічні побудови можуть бути використані для визначення точок перетину ліній незалежно від типу задання відповідних їм залежностей. Якщо, наприклад, потрібно визначити координати точок кола $x^2+y^2=9$, що лежать або на параболі $y=\dfrac{x^2}{7}-2$, або на п’ятипелюстковій троянді $\rho = 5\sin(5\varphi)$ (Рис. 14.10), то побудувавши графіки вказаних залежностей і використовуючи координатний курсор, одержимо координати шуканих точок (з точністю до сотих):

1) $x=-2.89$, $y=-0.81$; $x=-2.89$, $y=0.39$;

2) $x=2.89$, $y=-0.81$; $x=2.89$, $y=0.39$;

3) $x=-2.18$, $y=-2.06$; $x=2.18$, $y=-2.06$;

4) $x=-2.63$, $y=1.44$; $x=2.63$, $y=1.44$;

5) $x=-1.29$, $y=-2.71$; $x=1.29$, $y=-2.71$;

6) $x=-0.55$, $y=2.95$; $x=0.55$, $y=2.95$.

7. З точки (1,0) у момент t_1 з початковою швидкістю $V_1=5.5$ під кутом 0.6 (радіан) до горизонту кидається деяке тіло, а з точки (2, 0) у момент t_2 з початковою швидкістю $V_2=4.5$ під кутом 1.2 (радіан) до горизонту кидається інше тіло.

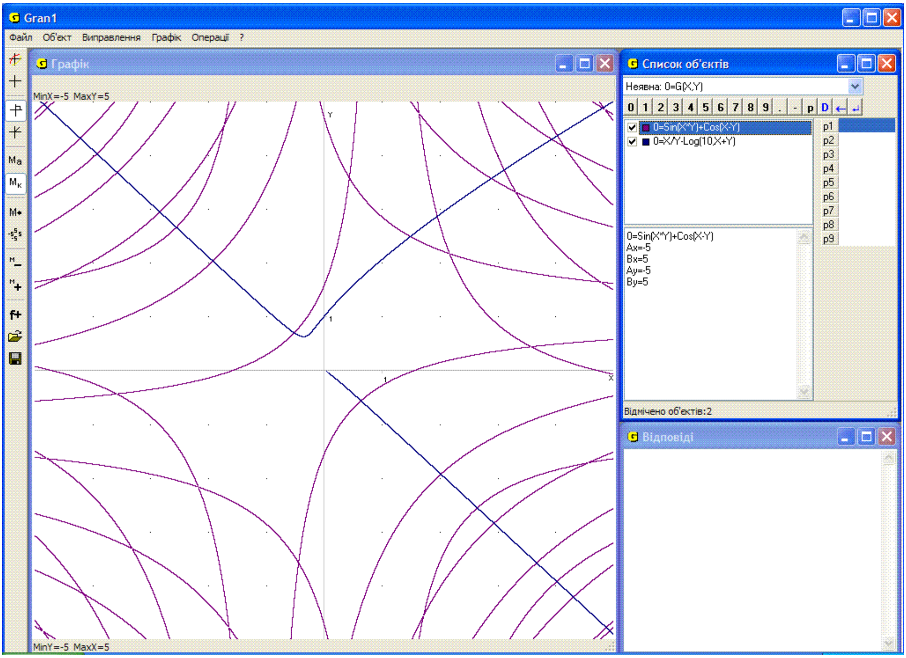


Рис. 14.9

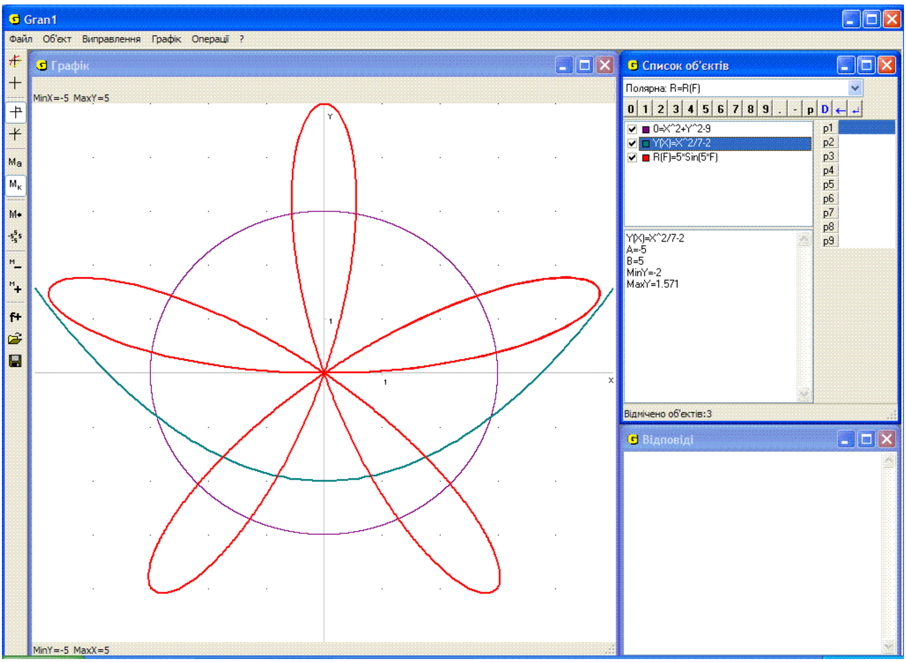


Рис. 14.10

а) Чи можливе зіткнення цих тіл? Яким повинно бути t_2, щоб зіткнення не сталося?

Координати першого тіла з часом t змінюються за законом

$$x_1(t) = x_1 + V_1 \cos(\alpha_1)(t - t_1),$$

$$y_1(t) = y_1 + V_1 \sin(\alpha_1)(t - t_1) - \frac{g}{2}(t - t_1)^2,$$

де (x_1, y_1) точка старту, g – прискорення вільного падіння, а координати другого тіла – за законом

$$x_2(t) = x_2 + V_2 \cos(\alpha_2)(t - t_2),$$

$$y_2(t) = y_2 + V_2 \sin(\alpha_2)(t - t_2) - \frac{g}{2}(t - t_2)^2.$$

Вибравши t_1 і t_2 довільно, наприклад $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, і враховуючи конкретні дані розглядуваного прикладу, побудуємо траєкторію польоту першого тіла

$$x_1(t) = 1 + 5.5\cos(0.6)(t - 1),$$

$$y_1(t) = 0 + 5.5\sin(0.6)(t - 1) - 4.9(t - 1)^2,$$

і другого тіла

$$x_2(t) = 2 + 4.5\cos(1.2)(t - 2),$$

$$y_2(t) = 0 + 4.5\sin(1.2)(t - 2) - 4.9(t - 2)^2.$$

Оскільки траєкторії перетинаються в точках $x^* \approx 2.22$, $y^* \approx 0.48$ і $x^{**} \approx 3.25$, $y^{**} \approx 0.34$, то якщо момент t_2 вибирати довільно, зіткнення тіл можливе (Рис. 14.11).

Момент кидання другого тіла, за якого зіткнення тіл не відбудеться, можна визначити різними способами. Наприклад, визначити час польоту першого тіла від точки старту до точки (x^*, y^*) перетину траєкторій і в такий спосіб встановити момент часу, в який перше тіло буде знаходитися в точці (x^*, y^*). Потім встановити час, необхідний для досягнення другим тілом точки (x^*, y^*). Після цього легко визначити момент старту другого тіла так, щоб обидва тіла не виявилися в точці (x^*, y^*) одночасно. Час, необхідний для досягнення першим тілом точки (x^*, y^*), можна визначити графічно, добираючи відрізок задання $[1, t_1]$ першої залежності так, щоб траєкторія польоту тіла закінчувалася в точці (x^*, y^*). Змінюючи t_1 відповідним чином, можна встановити момент досягнення першим тілом точки (x^*, y^*). Те саме стосується і траєкторії другого тіла.

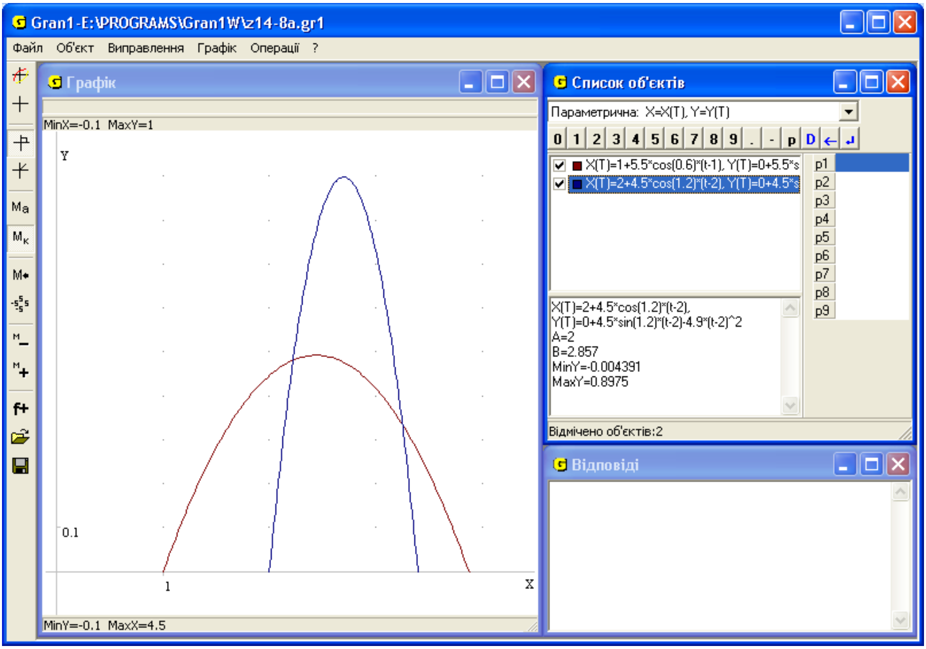


Рис. 14.11

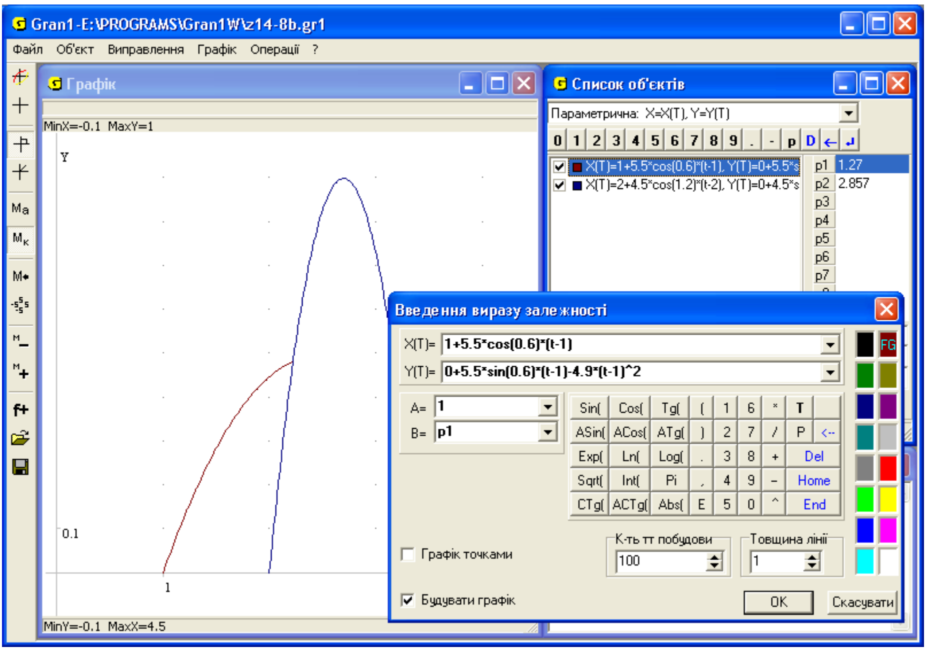


Рис. 14.12

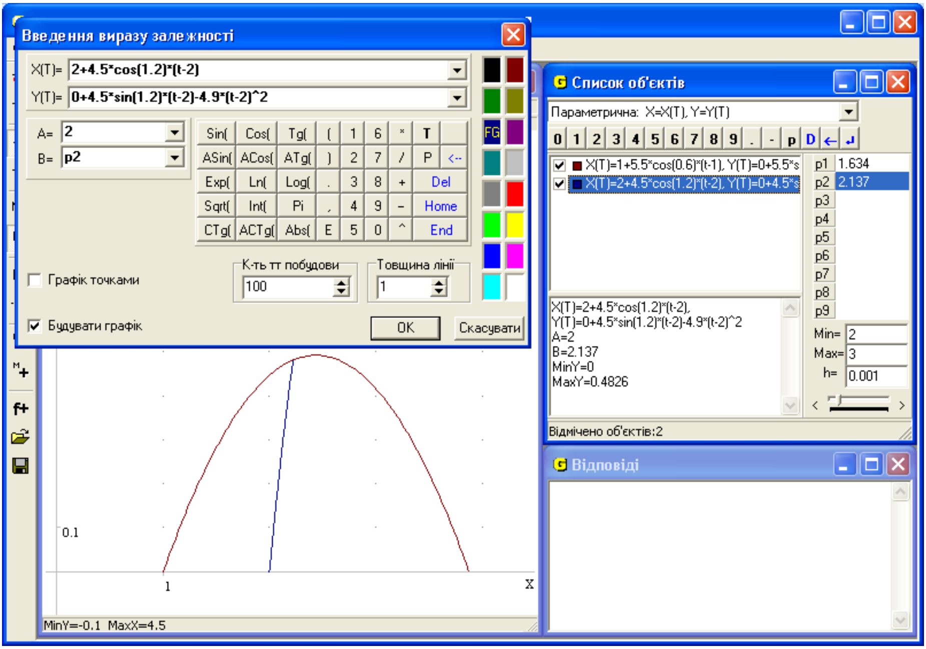


Рис. 14.13

На Рис. 14.12 видно, що перше тіло досягає точки перетину траєкторій (x^*, y^*) у момент $t_1 \approx 1.27$, тобто перше тіло від точки старту до точки (x^*, y^*) долітає за час 0.27 (верхня межа зміни параметра t визначена за допомогою параметра $P1$).

Друге тіло досягає точки (x^*, y^*) у момент $t_2 \approx 2.137$ (Рис. 14.13), якщо стартує в момент $t_2 = 2$, тобто друге тіло досягає точки (x^*, y^*) через час 0.137 від моменту старту (верхня межа зміни параметра t у виразах, якими описують траєкторію другого тіла, визначена за допомогою параметра $P2$).

Оскільки перше тіло буде знаходитися в точці (x^*, y^*) в момент $t_1 \approx 1.27$, то щоб не відбулося зіткнення, друге тіло не повинне стартувати в момент $t_2 \approx 1.133$.

Аналогічно можна визначити, що для того, щоб тіла не зіткнулися в точці $(x^{**}, y^{**}) \approx (3.25,\ 0.34)$, необхідно, щоб момент старту другого тіла був відмінним від 0.729.

Інший спосіб – прирівняти координати $x_1(t)$ і $x_2(t)$, $y_1(t)$ і $y_2(t)$ і визначити величини $(t - t_1)$ і $(t - t_2)$ з рівностей

$$0=(x_2-x_1)+V_2\cos\alpha_2(t-t_2)-V_1\cos\alpha_1(t-t_1)\,,$$

$$0=(y_2-y_1)+V_2\sin\alpha_2(t-t_2)-\frac{g}{2}(t-t_2)^2-V_1\sin\alpha_1(t-t_1)+\frac{g}{2}(t-t_1)^2\,.$$

Позначивши $(t-t_1)$ через x і $(t-t_2)$ через y, побудуємо графіки так отриманих неявно заданих залежностей між змінними x і y (тобто між величинами $(t-t_1)$ і $(t-t_2)$), і знайдемо точки їх перетину (Рис. 14.14), розв'язавши в такий спосіб вказану систему двох рівнянь з двома невідомими $(t-t_1)$ і $(t-t_2)$. Як видно з Рис. 14.14, перше тіло досягає точки (x^*,y^*) за час 0.27, а друге за час 0.137. В такий спосіб можна встановити час, необхідний для досягнення кожним з тіл точки (x^*,y^*), а отже і момент старту t_2 другого тіла таким, щоб зіткнення не відбулося.

Що стосується точки (x^{**},y^{**}), то аналогічно до попереднього можна встановити, що перше тіло досягає цієї точки за час 0.496, а друге за час 0.767.

Таким чином, щоб не відбулося зіткнення в точці (x^{**},y^{**}), друге тіло не повинне стартувати в момент $t=0.729$.

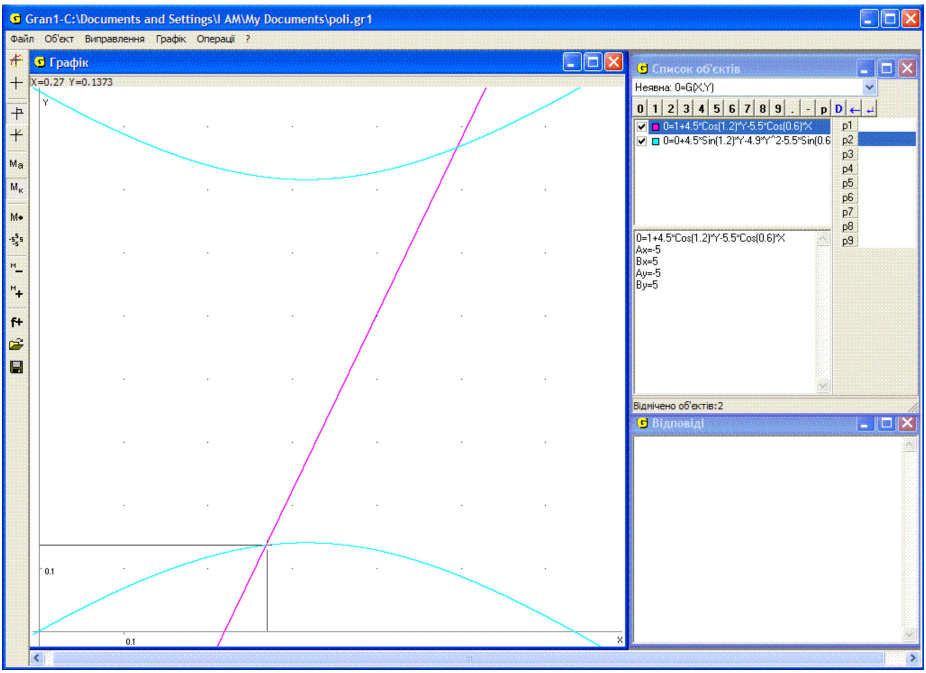


Рис. 14.14

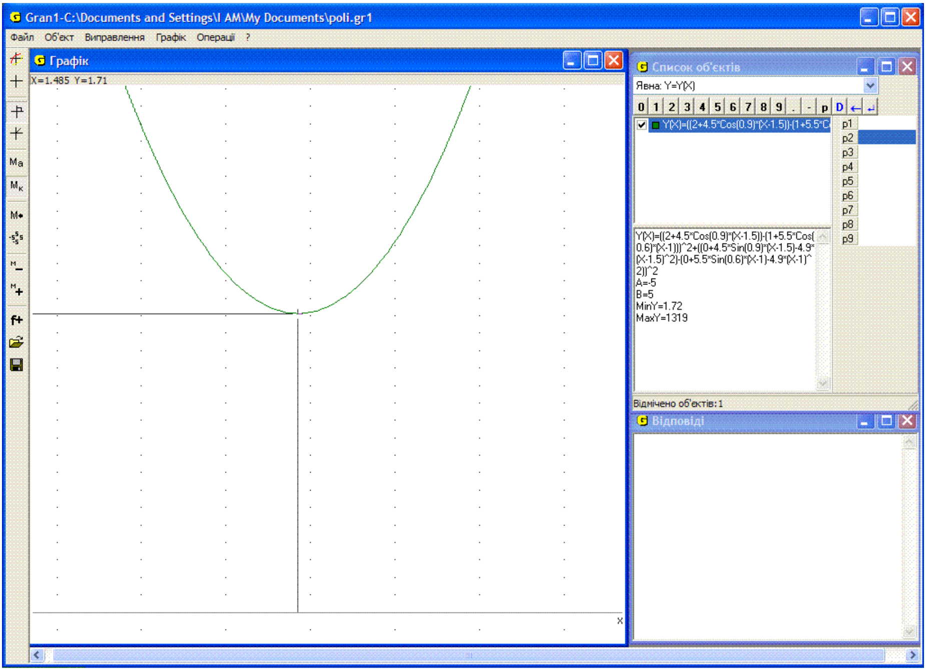


Рис. 14.15

б) Якщо $x_1 = 1$, $y_1 = 0$, $t_1 = 1$, $V_1 = 5.5$, $\alpha_1 = 0.6$, $x_2 = 2$, $y_2 = 0$, $t_2 = 1.5$, $V_2 = 4.5$, $\alpha_2 = 0.9$, то якою буде найменша відстань між тілами під час польоту і в який момент часу?

Оскільки віддаль між тілами в момент часу t дорівнює $D^2(t) = (x_2(t) - x_1(t))^2 + (y_2(t) - y_1(t))^2$, то перепозначивши змінну t через x, побудуємо графік функції $D^2(x)$, і потім (після відповідного збільшення), змінюючи масштаб побудови, знайдемо: найменша відстань між тілами буде $(1.71)^{0.5} \approx 1.31$ в момент $t \approx 1.485$ (Рис. 14.15).

в) Якими повинні бути V_2 і α_2, щоб, стартуючи в момент перетину першим тілом прямої $y = tg\dfrac{3\pi}{4}(x-2)$, друге тіло одночасно з першим досягло точки, в якій перше тіло виходить за межі околу радіуса 0.2 з центром в точці перетину траєкторією першого тіла вказаної прямої? (Рис. 14.16).

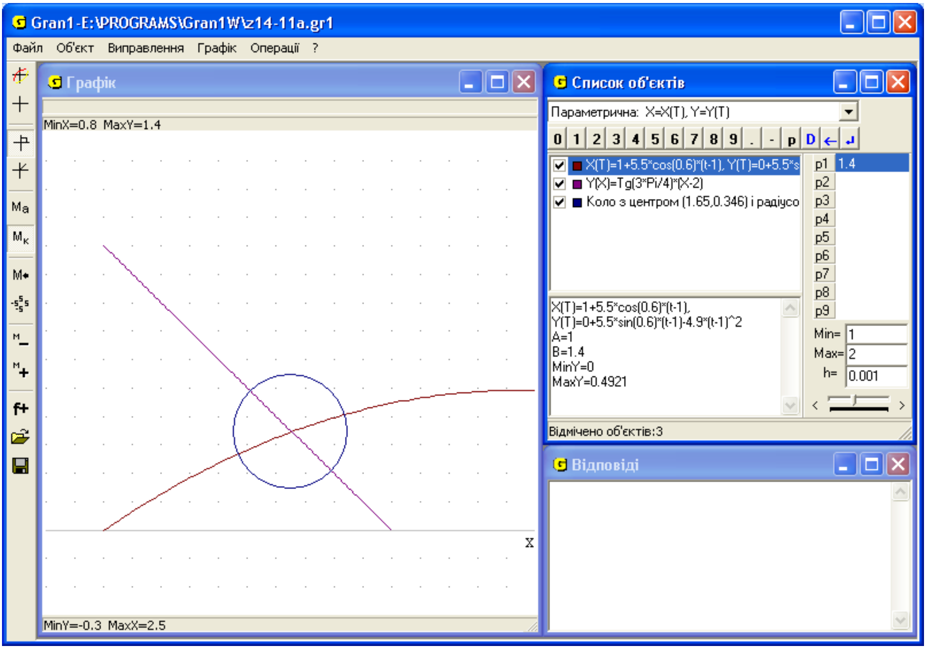


Рис. 14.16

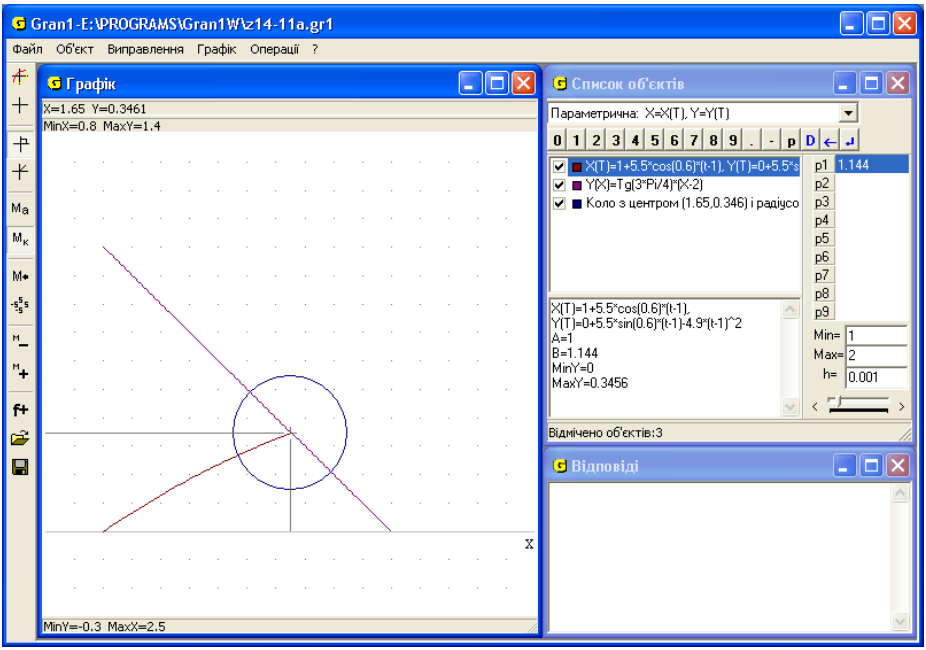


Рис. 14.17

Перше тіло досягає вказаної прямої в момент $t \approx 1.144$ (верхня межа зміни параметра t визначається за значенням параметра $P1$) у точці $x \approx 1.65$, $y \approx 0.35$ (Рис. 14.17), а за межі околу $(x-1.65)^2+(y-0.35)^2=(0.2)^2$ виходить у момент $t \approx 1.185$ в точці $x \approx 1.84$, $y \approx 0.41$ (Рис. 14.18). Таким чином друге тіло повинне стартувати в момент $t=1.144$ і в момент $t = 1.185$ досягти точки $x=1.84$, $y=0.41$.

Отже, повинні виконуватися рівності

$$2+V_2 \cos\alpha_2 (1.185-1.144) = 1.84,$$

$$V_2 \sin\alpha_2 (1.185-1.144) - 4.9(1.185-1.144)^2 = 0.41.$$

Перепозначивши невідомі V_2 через x, α_2 через y, знайдемо розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{cases} 2+x\cos(y)\,0.041\text{-}1.84=0, \\ x\sin(y)\,0.041\text{-}\,4.9\,(0.041)^2\text{ -}\,0.41=0. \end{cases}$$

Як видно з Рис. 14.19, наближеним розв'язком такої системи рівнянь буде $x=V_2 \approx 10.9$, $y=\alpha_2 \approx 1.95$.

Отже, якщо друге тіло стартує із точки $(2,\,0)$ в момент $t_2=1.144$ із швидкістю $V_2=10.9$ під кутом $\alpha_2=1.95$ (радіан) до горизонту (додатного напряму осі Ox), то в момент $t=1.185$ воно одночасно з першим тілом досягне точки $(1.84,\,0.41)$, в якій в цей момент траєкторія першого тіла перетинатиметься з межею околу радіуса 0.2 з центром в точці $(1.65,\,0.35)$, в якій траєкторія першого тіла перетинається з прямою $y=tg\dfrac{3\pi}{4}(x-2)$ (Рис. 14.20).

Слід зазначити, що не всі приклади можна розв'язати з використанням графічних методів. Це пов'язано з деякими обмеженнями як комп'ютерної графіки, так і комп'ютерної математики взагалі.

8. Скільки дійсних коренів має рівняння $\arccos x=\sqrt{1-x^2}$?

На Рис. 14.21 зображені графіки функцій, що відповідають обом частинам рівняння. Як бачимо, коли $x \to 1$, графіки функцій дуже близькі один до одного, тому нічого не можна сказати про кількість точок перетину цих графіків (а, відповідно, і про кількість розв'язків рівняння), навіть якщо змінювати масштаб зображення або замінити задане рівняння рівносильним $\arccos x-\sqrt{1-x^2}=0$.

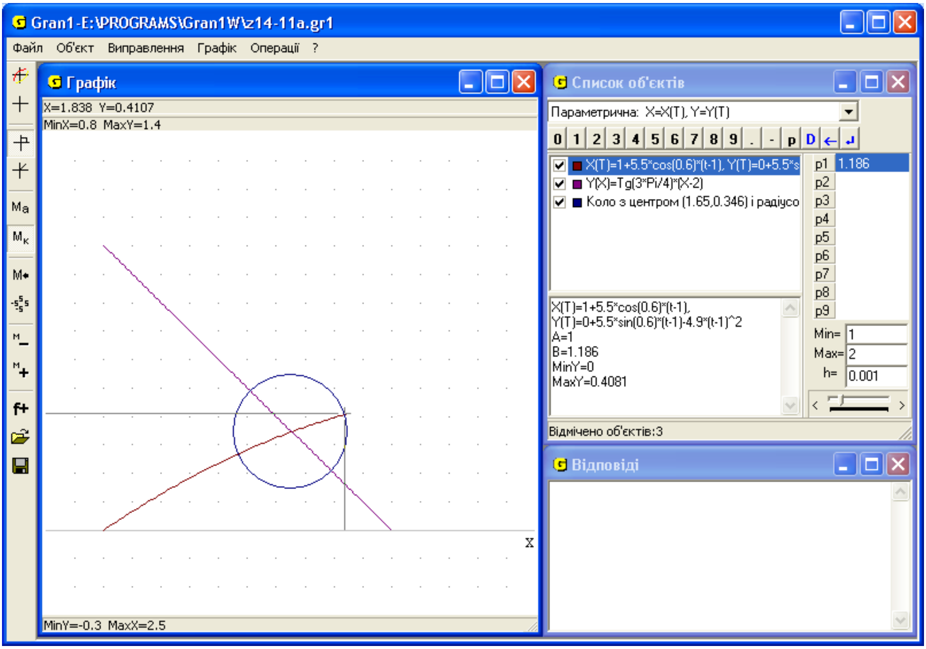


Рис. 14.18

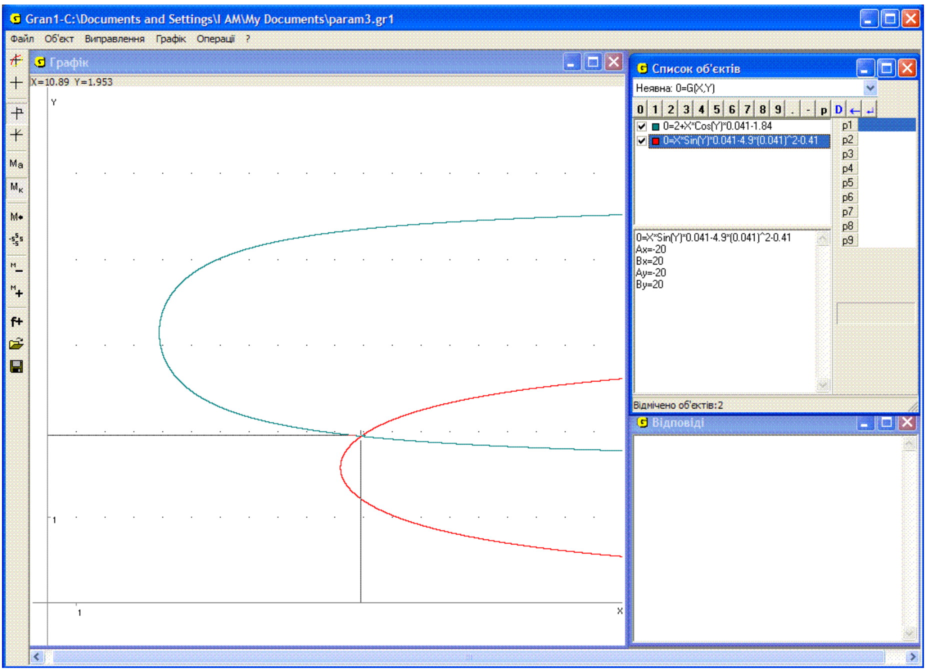


Рис. 14.19

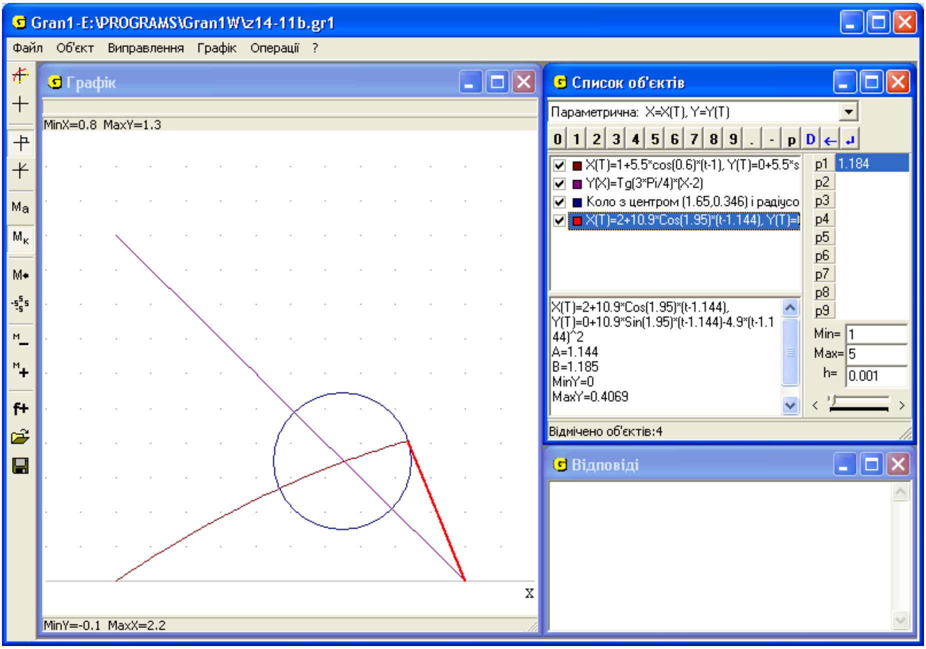


Рис. 14.20

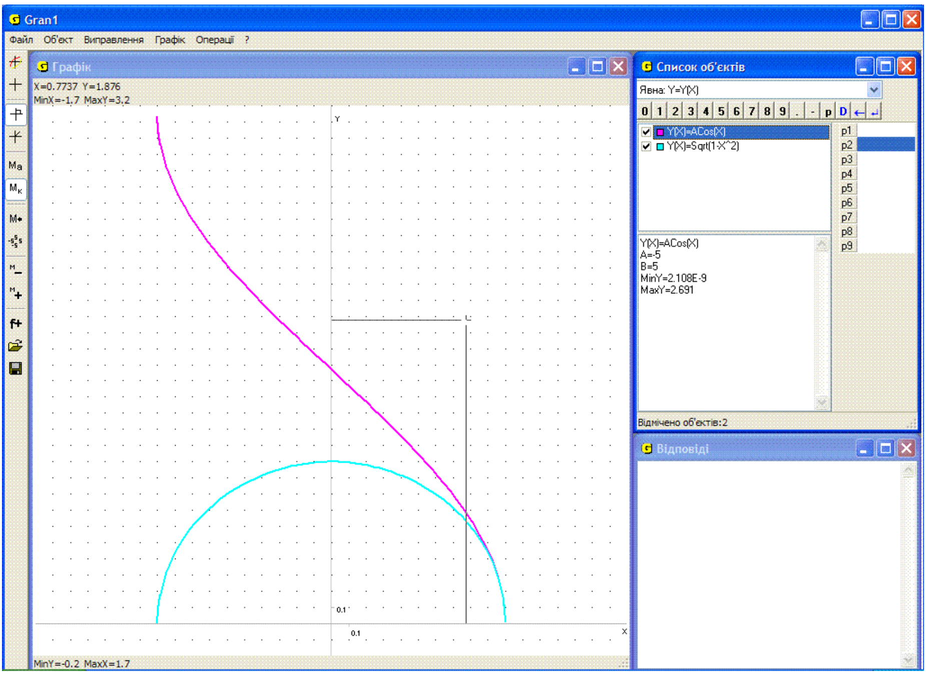


Рис. 14.21

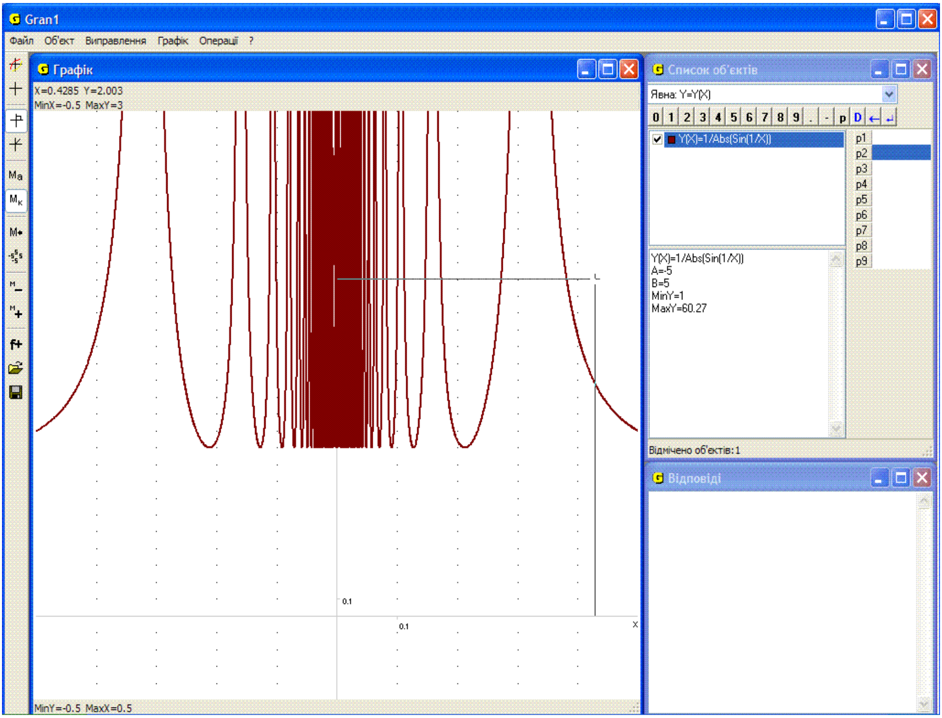


Рис. 14.22

9. Визначити кількість коренів рівняння $\dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{x}} = 2$ на відрізку $[-1,\ 1]$.

Спроба побудувати графік функції $y = \dfrac{1}{\sin\dfrac{1}{x}}$ на вказаному відрізку не приводить до задовільного результату, оскільки дана функція має в околі точки $x = 0$ безліч точок розриву (Рис. 14.22). Саме тому розв'язати графічно дану задачу неможливо.

Зазначені приклади показують, що застосування програмних засобів для розв'язування математичних задач повинно бути обґрунтованим, їх використання не позбавляє від необхідності аналізу розв'язків задач та обґрунтування їх коректності.

Запитання для самоконтролю

1. Які точки на графіку залежності $y = f(x)$ відповідають розв'язкам рівняння $f(x) = 0$?
2. Які точки на графіках залежностей $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ відповідають розв'язкам рівняння $f_1(x) = f_2(x)$?
3. Які точки на графіках залежностей $G_1(x, y) = 0$, $G_2(x, y) = 0$ відповідають розв'язкам системи рівнянь $\begin{cases} G_1(x, y) = 0, \\ G_2(x, y) = 0? \end{cases}$
4. Як подати рівняння $f(x) = 0$ у вигляді системи рівнянь $\begin{cases} G_1(x, y) = 0, \\ G_2(x, y) = 0? \end{cases}$

Якими повинні бути вирази $G_1(x, y)$ і $G_2(x, y)$ у даному випадку?

5. Як подати рівняння $f_1(x) = f_2(x)$ у вигляді системи рівнянь $\begin{cases} G_1(x, y) = 0, \\ G_2(x, y) = 0? \end{cases}$

Якими повинні бути вирази $G_1(x, y)$ і $G_2(x, y)$ у даному випадку?

6. Як за допомогою графічних побудов можна уточнити розв'язки рівняння $f(x) = 0$? рівняння $f_1(x) = f_2(x)$? системи рівнянь виду $\begin{cases} G_1(x, y) = 0, \\ G_2(x, y) = 0? \end{cases}$

Вправи для самостійного виконання

1. Використовуючи послуги програми GRAN1, знайти наближені розв'язки рівнянь:

   $x^2 - 17x + 3 = 0$; $\quad \dfrac{1}{\log_{1/2}(x+1)} = 2$; $\quad \log_2(x) - \sin(x) = 0$;

   $x^2 - \cos(x) = 0$; $\quad \log_2(-x) = x$; $\quad |x-1| - x^2 + 5 = 0$.

2. За яких $P1$ у рівняння $|x^2 - 5x + 6| + P1 = 0$ буде найбільша кількість розв'язків? Найменша кількість розв'язків? Три розв'язки?
3. За яких $P1$ у рівняння $||x-4| - 3| + P1 = 0$ буде найбільша кількість розв'язків? Найменша кількість розв'язків?
4. За яких $P1$ у рівняння $\log_2(P1 + ||x-6| - 3|) = 0$ буде найбільша кількість розв'язків? Найменша кількість розв'язків?
5. За яких $P1$ у рівняння $x\cos x + \log_{1/2}(2 - \frac{x}{5}) + P1 = 0$ буде на проміжку $[-9, 11]$ найбільша кількість розв'язків? Найменша кількість розв'язків? 1 розв'язок?

6. Використовуючи послуги програми GRAN1, знайти наближені розв'язки систем рівнянь:

$$\begin{cases} 3x - 7y = 9, \\ 5x + 13y = 7; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 - 4y^3 = 12, \\ 2x^3 - 5y^2 = 8; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + 3y^2 = 15, \\ \log_2(x-3) - y^2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 5, \\ xy = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 0, \\ \sin(xy) = 0, \\ (x \in [-8,8], y \in [-8,8]); \end{cases} \quad \begin{cases} \lg(xy) = 3, \\ \sin|x| = 1/3; \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 1, \\ \sqrt{|xy|} = 1/2; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y^2 = 7, \\ x^2 - y = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \log_2(xy) = 3, \\ 2^{x+y} = 1/3; \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = 1, \\ x^2 + 2^y = 2 \end{cases}.$$

7. З точки (x_1, y_1) у момент t_1 під кутом α_1 до горизонту з початковою швидкістю V_1 кидається деяке тіло. З точки (x_2, y_2) у момент t_2 під кутом α_2 до горизонту з початковою швидкістю V_2 кидається інше тіло.

а) Як можна визначити, чи можливе перебування обох тіл одночасно в заданому околі заданої точки на траєкторії першого тіла ?

б) Визначити радіус найменшого околу точок на траєкторії першого тіла, у якому обидва тіла можуть знаходитися одночасно.

в) Якими повинні бути t_2, α_2, V_2, щоб за заданих (x_1, y_1), t_1, α_1, V_1, (x_2, y_2) друге тіло виявилося одночасно з першим:

- у заданому околі заданої точки на траєкторії першого тіла?
- в околі заданого радіуса деякої точки на траєкторії першого тіла в наперед заданий момент t^*, ($t^* > t_1$, $t^* > t_2$)?

Визначити координати такої точки.

г) Якими повинні бути (x_2, y_2), t_2, щоб за заданих (x_1, y_1), t_1, α_1, V_1, α_2, V_2 друге тіло одночасно з першим виявилося:

- у заданому околі заданої точки на траєкторії першого тіла?
- в околі заданого радіуса деякої точки на траєкторії першого тіла в наперед заданий момент?

Визначити координати такої точки. Розв'язати задачу за конкретних значень (x_1, y_1), t_1, α_1, V_1, і т.д.

8. З точки (x_1, y_1) в момент t_1 стартує деяке тіло і рухається вздовж кола з центром в точці (x_1^*, y_1^*) проти годинникової стрілки з постійною швидкістю V_1. З точки (x_2, y_2) у момент t_2 стартує інше тіло і рухається вздовж кола з центром в точці (x_2^*, y_2^*) проти годинникової стрілки з постійною швидкістю V_2.

а) Чи можливе зіткнення цих тіл, якщо швидкості V_1 і V_2 і моменти старту t_1 і t_2 вибирати довільно?

б) Якщо зіткнення неможливе за будь-яких t_1, t_2, V_1, V_2, то в який момент часу відстань між тілами буде найменшою за заданих (x_1, y_1), (x_1^*, y_1^*), t_1, V_1, (x_2, y_2), (x_2^*, y_2^*) t_2, V_2?

в) Чи можна дібрати моменти старту t_1 і t_2 і швидкості V_1 і V_2 так, щоб зіткнення ніколи не відбулося, якщо за довільного вибору t_1, V_1, t_2, V_2 зіткнення можливе?

Розглянути випадки

а) за даних:

- $x_1^* = 0,\ y_1^* = 0,\ x_1 = -4,\ y_1 = 0,\ x_2^* = 1,\ y_2^* = 0,\ x_2 = 3,\ y_2 = 0,$
- $x_1^* = 0,\ y_1^* = 0,\ x_1 = -4,\ y_1 = 0,\ x_2^* = 1,\ y_2^* = 0,\ x_2 = 5,\ y_2 = 0,$
- $x_1^* = 0,\ y_1^* = 0,\ x_1 = -4,\ y_1 = 0,\ x_2^* = 2,\ y_2^* = 0,\ x_2 = 8,\ y_2 = 0.$

б) за даних:

- $x_1^* = 0,\ y_1^* = 0,\ x_1 = -4,\ y_1 = 0, V_1 = 4,$
  $x_2^* = 1,\ y_2^* = 0,\ x_2 = 5,\ y_2 = 0, V_2 = 8;$
- $x_1^* = 0,\ y_1^* = 0,\ x_1 = -4,\ y_1 = 0, V_1 = 4,$
  $x_2^* = 5,\ y_2^* = 0,\ x_2 = 0,\ y_2 = 0, V_2 = 3;$

в) за даних

- $x_1^* = 0,\ y_1^* = 0,\ x_1 = -4,\ y_1 = 0, V_1 = 4, t_1 = 0,$
  $x_2^* = 1,\ y_2^* = 0,\ x_2 = 3,\ y_2 = 0, V_2 = 3, t_2 = 0;$
- $x_1^* = 0,\ y_1^* = 0,\ x_1 = -4,\ y_1 = 0, V_1 = 4, t_1 = 0$,
  $x_2^* = 8,\ y_2^* = 0,\ x_2 = 11,\ y_2 = 0, V_2 = 3, t_2 = 0$.

§15. Графічне розв'язування нерівностей і систем нерівностей

Щоб за допомогою графічних побудов одержати множину розв'язків нерівності виду $f(x) \le c$, де $f(x)$ – деякий вираз, заданий на проміжку $[a, b]$, потрібно побудувати графіки залежностей $y = f(x)$ і $y = c$ (для значень x з $[a, b]$) і визначити (з використанням послуги "Координати"), за яких значень x графік залежності $y = f(x)$ лежить не вище, ніж графік залежності $y = c$. Множина таких значень x і буде множиною розв'язків нерівності $f(x) \le c$. Множина розв'язків нерівності виду $f_1(x) \le f_2(x)$ визначається цілком аналогічно. Крім того, цей випадок можна звести до попереднього, оскільки нерівність $f_1(x) \le f_2(x)$ еквівалентна нерівності $f_1(x) - f_2(x) \le 0$. Множина розв'язків нерівності виду $f(x) \ge c$ чи виду $f_1(x) \ge f_2(x)$ визначається цілком аналогічно до попереднього.

Якщо функція $y = f(x)$ опукла донизу, то яким би не було число c, множина розв'язків нерівності $f(x) \le c$ або порожня, або така, що якщо точки x_1 і x_2 належать до цієї множини, то і всі точки проміжка $[x_1, x_2]$ також належать до цієї множини. Нагадаємо, що функцію $y = f(x)$ називають опуклою донизу, якщо для будь-яких двох точок, взятих на графіку $y = f(x)$ і з'єднаних відрізком прямої, графік функції $y = f(x)$ між зазначеними точками буде не вище графіка так побудованого відрізка (хорди). Прикладами опуклих донизу функцій можуть бути функції
$y = x^2$, $y = 2^x$, $y = \log_{1/2} x$, $y = |x-1| + |x+1|$, $y = |x|$, $y = \cos x$ на проміжку $\left[\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}\right]$ та ін.

Розв'язки системи нерівностей виду $f_1(x) \ge c$, $f_2(x) \ge c$, …, $f_m(x) \ge c$ знаходять як множину М точок, що задовільняють всі нерівності одночасно: $M = M_1 \cap M_2 \cap \ldots \cap M_m$, де M_i множина розв'язків нерівності $f_i(x) \ge c$.

Для графічного розв'язування системи нерівностей зазначеного виду в програмі GRAN1 передбачена послуга "Операції / С-ма нерівностей y(x)<(>)c..." (Рис. 15.1). В разі звернення до цієї послуги з'являється вікно, в якому необхідно вказати знаки нерівностей (> або <) та число c (Рис. 15.2). Позначення залежностей (типу $y = f(x)$), для яких буде розглядатися система нерівностей $f_i(x) > c$ (або $f_i(x) < c$), перед зверненням до послуги повинні бути відмічені міткою ☑, а їх графіки побудовані у вікні “Графік”. Система може складатись і з однієї нерівності.

В результаті розв’язування системи нерівностей виду $f_i(x) \geq c$ (чи $f_i(x) \leq c$) на осі Ox відзначаються (червоним кольором) точки, в яких задовільняються усі зазначені нерівності одночасно. У вікні “Відповіді” дається список наближених значень координат кінців відрізків на осі Ox, точки яких є розв’язками усіх нерівностей системи (Рис. 15.1). Значення коренів обчислюються на відрізку, спільному для усіх відрізків задання функцій, за якими визначаються нерівності системи.

Приклад.

Розв’язати нерівність $\frac{x^4}{150} - \frac{x^3}{50} - \frac{x^2}{3} - 1 > -2$ для $x \in [-10, 10]$.

Побудувавши графік залежності $y = \frac{x^4}{150} - \frac{x^3}{50} - \frac{x^2}{3} - 1$ на проміжку $[-10, 10]$, звернемося до послуги “Операції / Нерівності / С-ма нерівностей y(x)<(>)c…”, вказавши знак “>” та значення $c = -2$. В результаті одержимо зображення, подане на Рис. 15.1.

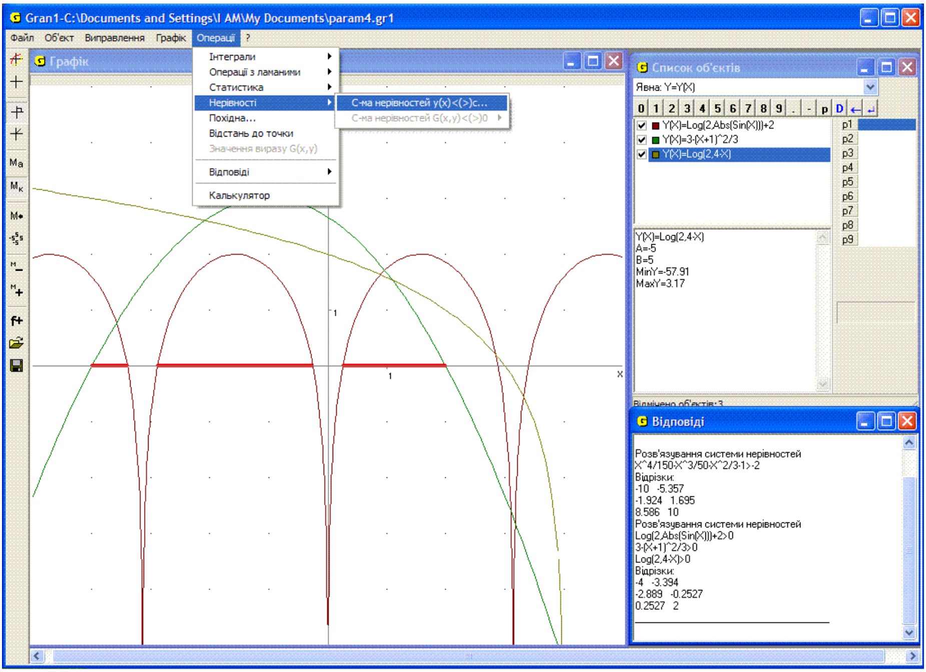


Рис. 15.1

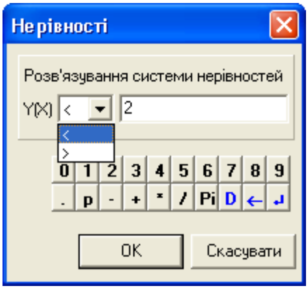


Рис. 15.2

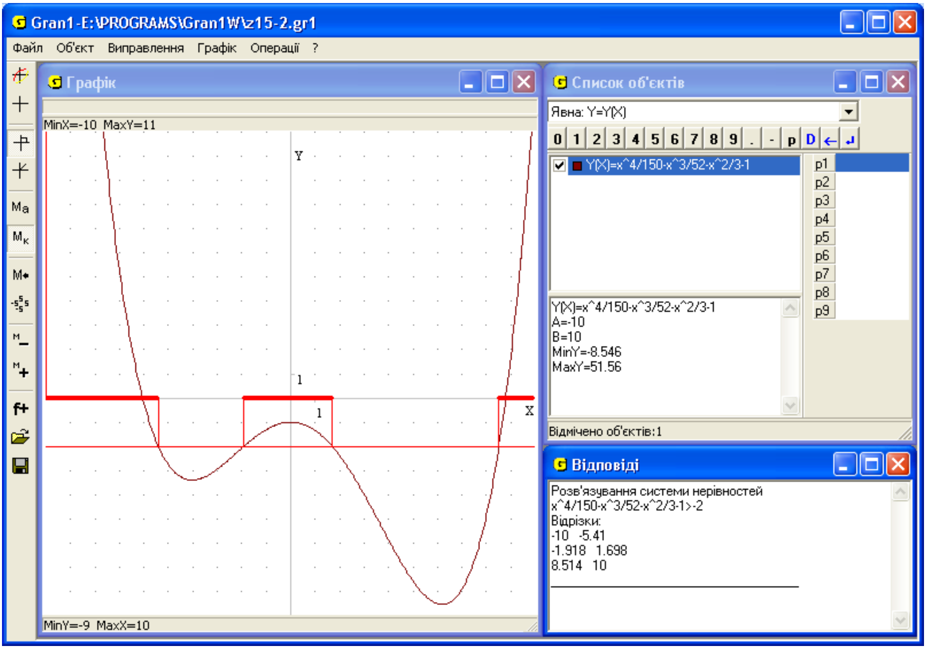


Рис. 15.3

Враховуючи список відрізків із вікна "Відповіді", одержимо: множиною розв'язків розглядуваної нерівності є множина

(-10, -5.41) ∪ (-1.92, 1.70) ∪ (8.51, 10).

Нехай тепер необхідно знайти множину розв'язків системи нерівностей виду

$$\begin{cases} G_1(x,y) \le 0, \\ \dots\dots\dots\dots \\ G_m(x,y) \le 0. \end{cases}$$

Ця задача значно складніша від попередньої. Однак в окремих досить багатьох випадках, зокрема в такому важливому, коли через вирази

$G_i(x, y)$ визначаються опуклі донизу функції, задача також може бути розв'язана графічно.

В ході розв'язування задачі можуть знадобитися додаткові обчислення і побудови, аналіз особливостей виразів $G_i(x, y)$ для з'ясування питань, що стосуються поставленої задачі, зокрема питання про те, порожня чи ні множина розв'язків розглядуваної системи, тощо.

Множиною розв'язків розглядуваної системи нерівностей буде множина $M = M_1 \cap M_2 \cap ... \cap M_m$, де M_i – множина розв'язків нерівності $G_i(x, y) \leq 0$. Зокрема, якщо функція $z = G_i(x, y)$ опукла донизу, то і множина M_i або порожня, або опукла, тобто така, що будь-які дві точки з множини M_i можна з'єднати відрізком прямої, усі точки якого належать до множини M_i.

Побудувавши графіки залежностей $G_i(x, y) = 0$ і $G_i(x, y) = c$, де c – досить мале додатне число, можна встановити, в яких точках $G_i(x, y) > 0$, а також в яких точках $G_i(x, y) \leq 0$. Множина точок, в яких одночасно $G_i(x, y) \leq 0$ за всіх $i = 1, 2, ..., m$, є множиною розв'язків розглядуваної системи нерівностей.

Прикладами опуклих донизу функцій можуть бути $z = x^2 + y^2$, $z = |x| + |y|$ і ін.

Додаткові побудови графіків залежностей $G_i(x, y) = c$ можуть бути вилучені після з'ясування питань щодо множини точок, в яких задовольняється нерівність $G_i(x, y) \leq 0$, і не обов'язкові, якщо питання можна вирішити без таких побудов.

Для графічного розв'язування системи нерівностей виду $G_i(x, y) < 0$ (або $G_i(x, y) > 0$), $i = 1, 2, ..., m$, у програмі GRAN1 передбачена послуга "Операції / Нерівності / С-ма нерівностей G(x, y)<(>)0". В разі звернення до цієї послуги слід вказати знак нерівностей, що входять до системи (">" або "<"), після чого на площині *xOy* відмічається (заштриховується) множина точок, в яких задовільняються всі вказані нерівності одночасно. Перед зверненням до послуги позначення залежностей (типу $G(x, y) = 0$), за якими визначають систему нерівностей, повинні бути відмічені міткою ☑, а їх графіки побудовані (Рис. 15.4). Різниця у відповідях в розв'язках систем нерівностей $G_i(x, y) \leq 0$ і $G_i(x, y) < 0$ ($G_i(x, y) \geq 0$ і $G_i(x, y) > 0$) буде полягати лише в тому, входять чи ні у множину розв'язків точки, що лежать на графіках залежностей $G_i(x, y) = 0$.

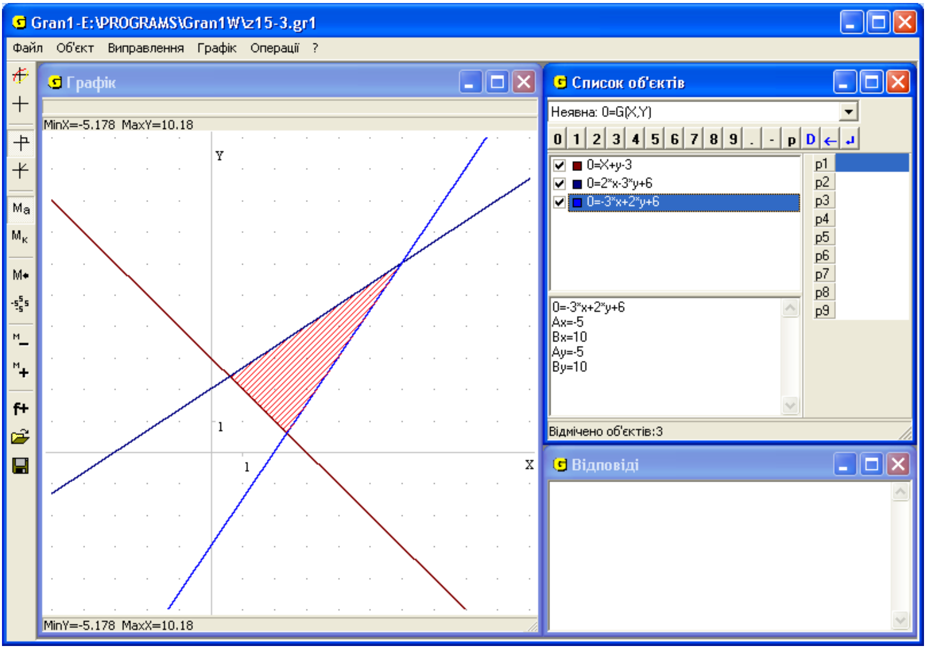


Рис. 15.4

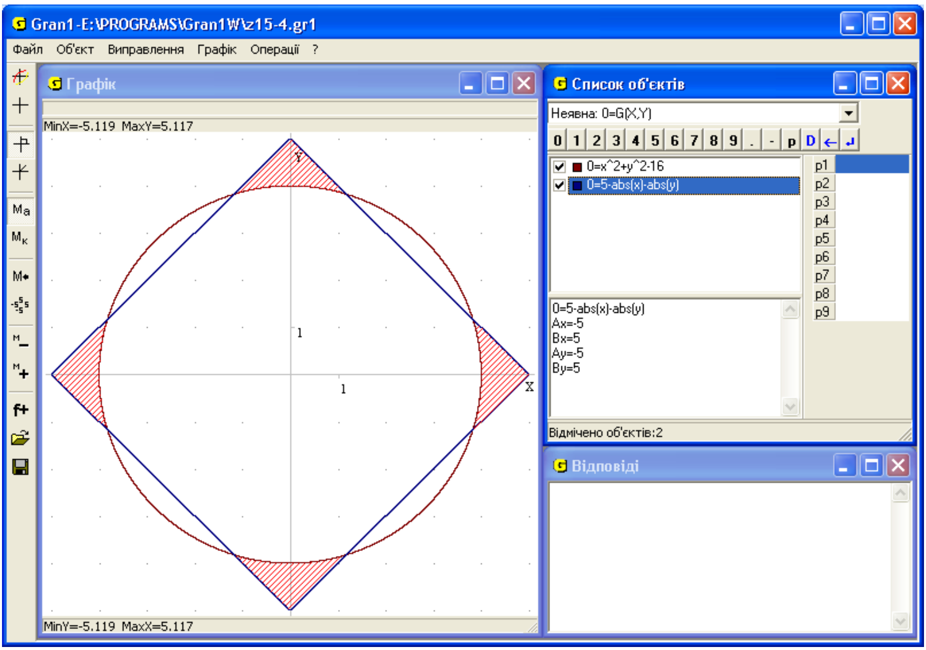


Рис. 15.5

Приклади

1. Знайти множину розв’язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x + y - 3 > 0, \\ 2x - 3y + 6 > 0, \\ -3x + 2y + 6 > 0. \end{cases}$$

Побудувавши графіки залежностей $x + y - 3 = 0$, $2x - 3y + 6 = 0$, $-3x + 2y + 6 = 0$ і звернувшись до послуги “Операції / Нерівності / С-ма нерівностей G(x, y)<(>)0” (вказавши знак “>”), одержимо – будь-яка внутрішня точка заштрихованого на Рис. 15.4 трикутника є розв’язком розглядуваної системи нерівностей.

2. Знайти множину розв’язків системи нерівностей

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \ge 16, \\ |x| + |y| \le 5. \end{cases}$$

Побудувавши графіки залежностей $x^2 + y^2 - 16 = 0$, $5 - abs(x) - abs(y) = 0$ і звернувшись до послуги “Операції / Нерівності / С-ма нерівностей G(x, y)<(>)0” (вказавши знак “>”), одержимо – зазначену систему нерівностей задовільняють точки заштрихованої на Рис. 15.5 множини.

3. Знайти множину розв’язків нерівності $\sin(|x| + |y|) \ge 0$.

Побудувавши графік залежності $0 = \sin(abs(x) + abs(y))$ і звернувшись до послуги “Операції / Нерівності / С-ма нерівностей G(x, y)<(>)0” (вказавши знак “>”), одержимо – зазначену нерівність задовільняють точки заштрихованої на Рис. 15.6 множини.

4. Знайти всі значення параметра a, за кожного з яких нерівність $|x + a| + x^2 < 2$ має хоча б один додатній розв’язок, якщо $x \in [-5, 5]$.

Для використання програми замінимо дану нерівність рівносильною $|x + a| + x^2 - 2 < 0$. Створимо відповідний об’єкт, замінивши параметр a на $P1$: $y = abs(x + P1) + x^2 - 2$, і задавши відрізок $[-5, 5]$. Параметр $P1$ також задамо в межах $[-5, 5]$, встановивши приріст $h = 0.05$. Побудуємо графіки створених об’єктів.

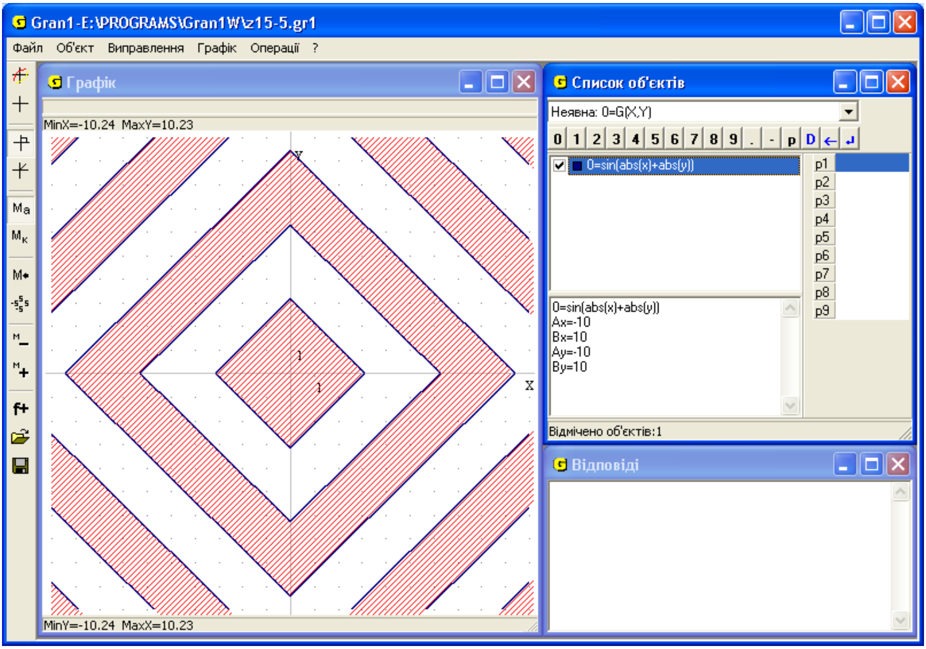


Рис. 15.6

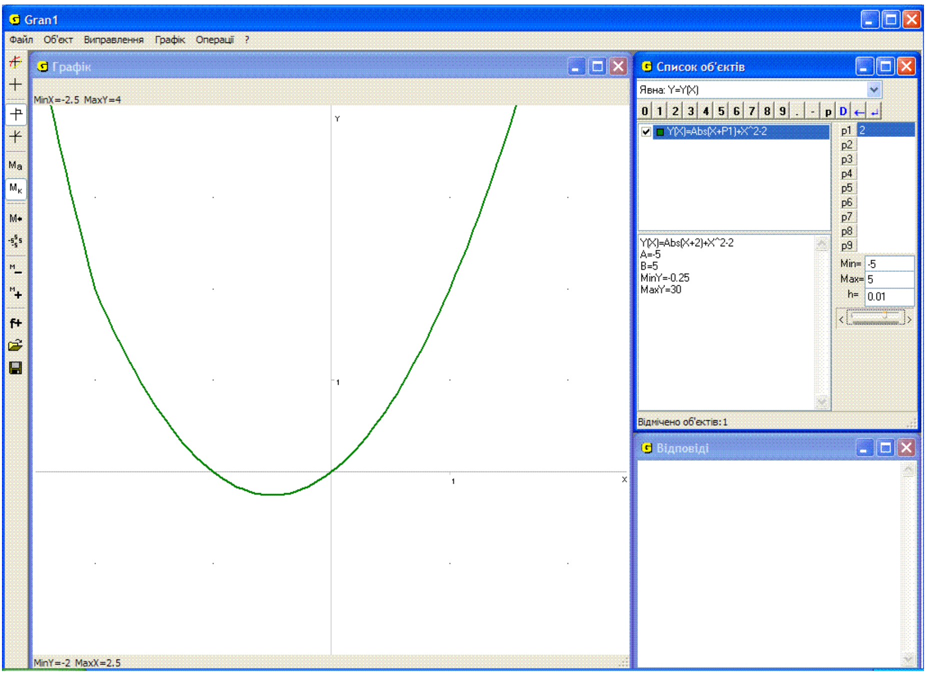


Рис. 15.7

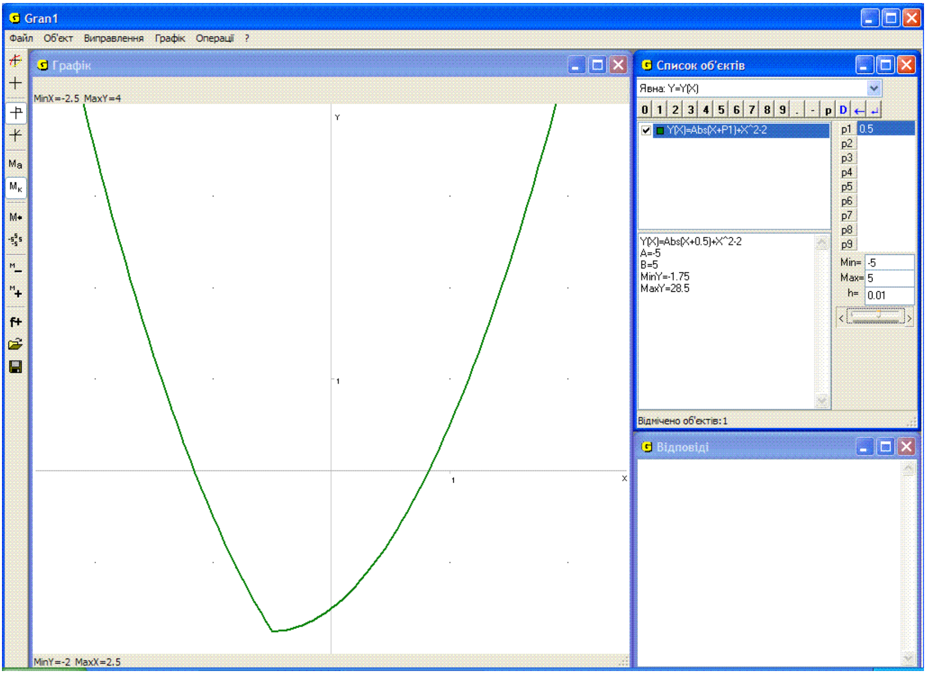


Рис. 15.8

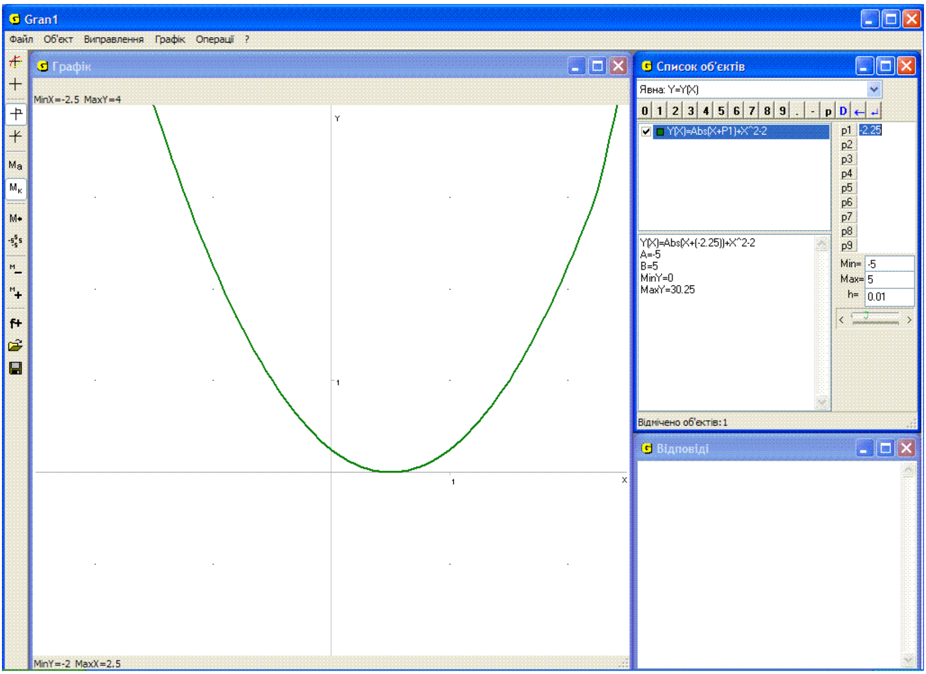


Рис. 15.9

Дана нерівність має розв'язки, якщо хоча б деяка частина графіка знаходиться нижче осі Ox. Змінюючи значення параметра $P1$ в програмі та спостерігаючи за графіком функції (Рис. 15.7), приходимо до висновку, що коли $a \in (-2{,}25;\ 2)$, нерівність має додатні розв'язки (Рис. 15.7, Рис. 15.8, Рис. 15.9).

Запитання для самоконтролю

1. Що називають розв'язком нерівності виду: $f(x) \le c$? $f_1(x) \le f_2(x)$? $G(x, y) \le 0$?
2. Що називають розв'язком системи нерівностей виду:
   а) $f_1(x) \le 0$, $f_2(x) \le 0$, … , $f_m(x) \le 0$?
   б) $G_1(x, y) \le 0$, $G_2(x, y) \le 0$, … , $G_m(x, y) \le 0$?
3. Яку функцію виду $y = f(x)$ називають опуклою донизу ?
4. Які властивості має множина розв'язків нерівності $f(x) \le c$, якщо функція $y = f(x)$ опукла донизу?
5. Як за допомогою програми GRAN1 можна знайти розв'язки нерівності виду $f(x) \le c$, де $y = f(x)$ – функція, задана на проміжку $[a, b]$?
6. Яку функцію виду $z = G(x, y)$ називають опуклою донизу?
7. Чи може бути опуклою донизу функція $z = G(x, y)$, якщо множина розв'язків нерівності $G(x, y) \le 0$ порожня?
8. Чи буде опуклою донизу функція $z = G(x, y)$, якщо для деякої сталої c множина розв'язків нерівності $G(x, y) \le c$ опукла?
9. Як за допомогою програми GRAN1 можна знайти розв'язки нерівності виду $G(x, y) \le 0$, де $z = G(x, y)$ – опукла донизу функція?
10. Чи буде опуклою множина розв'язків системи нерівностей $G_1(x, y) \le c_1$, … , $G_m(x, y) \le c_m$, якщо ця множина не порожня, а функції $z = G_1(x, y)$, … , $z = G_m(x, y)$ опуклі донизу?

Вправи для самостійного виконання

1. Знайти множини розв'язків нерівностей:

$x^2 - 7x - 1 \le 3$;

$\sin x \le \dfrac{1}{3}$, коли $x \in [-5, 5]$;

$\sin(\cos(x)) \le \cos(\sin(x))$;

$\dfrac{1}{\log_{1/2}(x)} \ge -2$;

$x^2 - 5x - 1 \le \cos x$;

$|x| + |y| \le 5$;

$(x-1)^2 + (y-1)^2 \le 9$;

$\sin(\sin(xy) + \cos(xy)) \le 0$, коли $x \in [-5, 5]$, $y \in [-5, 5]$.

2. Знайти множини розв’язків систем нерівностей:

$$\begin{cases} x(1-x) \ge -3, \\ \log_{1/2}(x)\log_2(x) \ge -1; \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 \le 16, \\ \mathrm{abs}(x) + \mathrm{abs}(y) \le 5. \end{cases}$$

3. Знайти множини розв’язків систем лінійних нерівностей:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 1 \le 0, \\ x_1 - x_2 - 4 \le 0, \\ -2x_1 + x_2 - 4 \le 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -2x_1 + x_2 + 4 \le 0, \\ -x_1 - x_2 + 5 \le 0, \\ -x_1 - 2x_2 + 8 \le 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 6 \le 0. \end{cases}$$

§16. Відшукання найбільших і найменших значень функцій на заданій множині точок

Використання послуг програми GRAN1 дає можливість за графічними методами знаходити наближені розв'язки деяких задач на відшукання найбільших чи найменших значень функцій однієї чи двох змінних на множинах, визначених через деякі системи нерівностей (чи якимось іншим чином). Досліджувані функції, а також функції, через які визначають множину допустимих точок, можуть бути лінійними чи нелінійними, опуклими чи неопуклими.

В загальному випадку задачу виду

$$\min_{x \in G} f(x), \; G = \{x \mid \varphi_i(x) \le 0, \; i \in \overline{1,m}, \; x \in R^n\}$$

називають задачею математичного програмування.

Якщо функції $y = f(x)$, $y = \varphi_i(x)$ опуклі (донизу), то таку задачу називають задачею опуклого програмування, а якщо лінійні – задачею лінійного програмування.

Якщо відшукуються цілочисельні розв'язки (чи якщо множина G дискретна), то таку задачу називають задачею цілочисельного (чи дискретного) програмування.

Будь-яку точку $x \in G$ називають допустимою точкою. Точку $x^* \in G$, у якій досягається $\min_{x \in G} f(x)$, називають оптимальною точкою вказаної задачі математичного програмування, а значення $f(x^*)$ – оптимальним значенням функції $y = f(x)$ на вказаній множині точок.

Для наближеного відшукання найбільшого і найменшого значень функції $y = f(x)$ на заданому проміжку $[a,b]$ з використанням послуг програми GRAN1 досить побудувати графік залежності $y = f(x)$ для $x \in [a,b]$ і потім, використовуючи координатний курсор, визначити координати найвищої і найнижчої точок на графіку $y = f(x)$, $x \in [a,b]$. До того ж за програмою автоматично обчислюються найменше і найбільше значення $f(x)$ на заданому проміжку $[a,b]$ (Рис. 16.1 і ін.), які вказуються у нижній частині вікна "Список об'єктів".

В такому разі немає необхідності знаходити корені рівняння $f'(x) = 0$, аналізувати особливості похідної $f'(x)$ чи другої похідної $f''(x)$ в околах розв'язків рівняння $f'(x) = 0$ і т.п. Крім того слід зауважити, що відомий алгоритм дослідження функції призначений в основному для того, щоб побудувати графік функції і з'ясувати її особливості на заданому проміжку $[a,b]$. Оскільки побудова графіка залежності $y = f(x)$ на проміжку $[a,b]$ не викликає труднощів, а з використанням координатного курсора легко визначити всі характерні точки й особливості графіка (точки перетину графіка з осями, найвищу і найнижчу точки на графіку, проміжки спадання і зростання функції $y = f(x)$, проміжки опуклості донизу і догори і т.п.), то виконання всіх пунктів досить громіздкого алгоритму дослідження функції не завжди виявляється необхідним.

Приклади

1. Знайти найбільше значення функції

$$y = f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{x^2}{7} + \cos(5 + x)$$

на проміжку $[-5, 5]$, а також значення аргумента $x \in [-5, 5]$, за якого найбільше значення функції досягається.

Побудувавши графік залежності $y = f(x)$ і встановивши курсор у найвищу точку на графіку, одержимо $x \approx 1.24$, $y \approx 1.85$ (Рис. 16.1). Крім того, у вікні “Список об’єктів” завжди вказуються найбільше і найменше значення функції $y = f(x)$ на заданому проміжку.

Зауважимо, що відшукання розв’язку цієї задачі за класичними аналітичними методами досить складне.

2. З прямокутного листа жерсті розмірами 4×5 (дециметрів) потрібно виготовити коробку (без кришки) найбільшого об’єму. Яким буде цей об’єм?

Позначимо через x висоту коробки, $x \in [0, 2]$. Тоді її об’єм буде дорівнювати $(4 - 2x)(5 - 2x)x$.

Побудувавши графік залежності $y = (4 - 2x)(5 - 2x)x$ на проміжку $[0, 2]$ і визначивши координати найвищої точки на графіку, одержимо $x \approx 0.73$, $y \approx 6.56$. Таким чином об’єм коробки $V \approx 6.56$ буде найбільшим, якщо висота коробки буде рівною 0.73 дециметра (Рис. 16.2).

Якщо необхідно знайти найбільше чи найменше значення функції $z = G(x, y)$ на множині розв’язків системи нерівностей виду $G_1(x, y) \le 0$, ... , $G_m(x, y) \le 0$, тоді (у межах можливостей, передбачених в програмі GRAN1) наближений розв’язок такої задачі за допомогою графічних побудов з використанням послуг програми GRAN1 можна знайти таким чином. Спочатку побудувати графіки залежностей $G_1(x, y) = 0$, ... , $G_m(x, y) = 0$ і з’ясувати, яка множина точок задовольняє всі нерівності одночасно, або ж визначити цю множину, використовуючи послугу

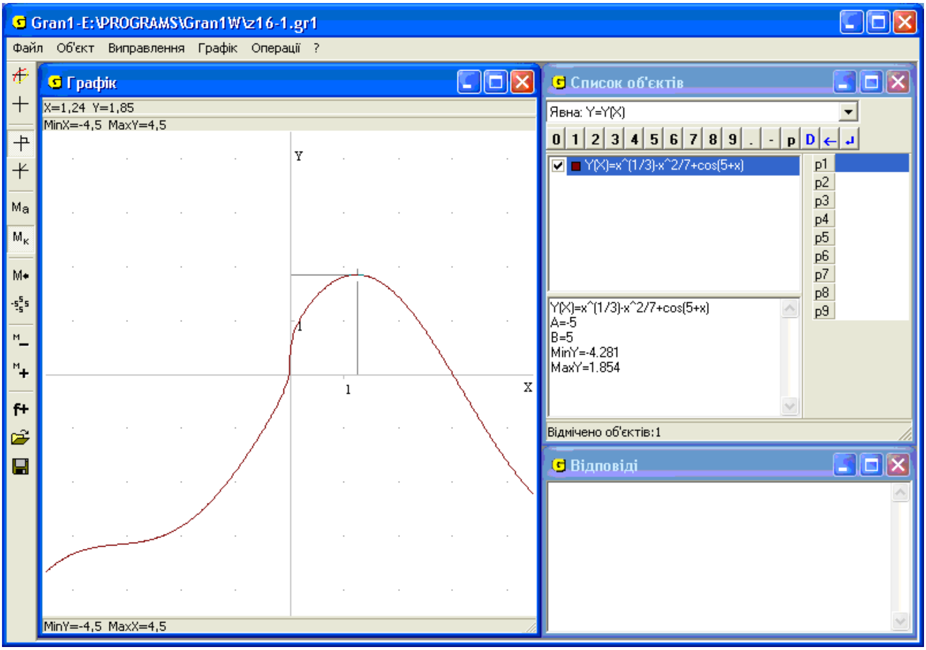


Рис. 16.1

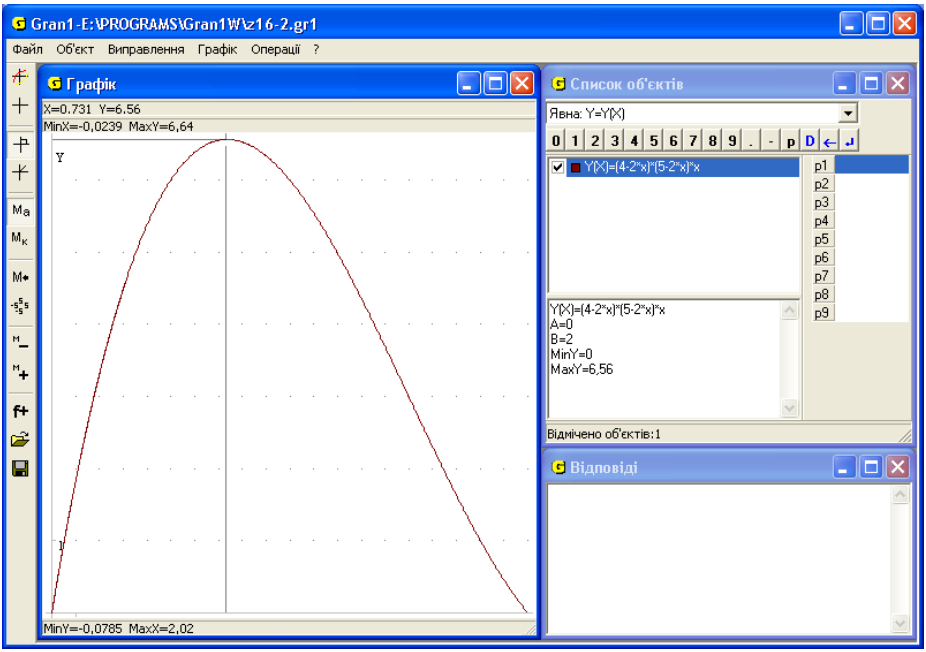


Рис. 16.2

"Операції / Нерівності / С-ма нерівностей G(x, y)<(>)0". Далі, добираючи відповідним чином константу c, побудувати графік залежності $G(x,y)=c$ (з цією метою можна використати один з параметрів $P1$, $P2$, $\dots$, $P9$). В такий спосіб поступово можна встановити підмножину точок з множини розв'язків системи нерівностей $G_1(x,y)\le 0$, ..., $G_m(x,y)\le 0$, на якій функція $z=G(x,y)$ набуває найменшого (чи найбільшого) значення.

В окремих випадках відповідний аналіз можна здійснити, використовуючи послугу "Операції / Значення виразу G(x,y)", де поряд з координатами "x=...", "y=..." точки (x,y) на координатній площині у верхній частині вікна "Графік" подається також значення $z=G(x,y)$ досліджуваної функції в точці (x,y).

Слід, однак, мати на увазі, що можливості використання програми GRAN1 для розв'язування подібних задач досить обмежені. Нею можна скористатися для розв'язування двохвимірних задач розглянутого типу або для виконання допоміжних обчислень і побудов під час розв'язування таких задач.

3. Знайти найменше значення функції $z=G(x,y)=2-(x^2+y^2)$ на множині розв'язків нерівності $|x|+|y|\le 5$.

Побудуємо графік залежності $abs(x)+abs(y)-5=0$.

Звернувшись до послуги "Операції / Нерівності / С-ма нерівностей G(x,y)<(>)0", легко бачити, що будь-яка точка всередині отриманого квадрата буде окремим розв'язком даної нерівності (Рис. 16.3).

Побудуємо далі графіки залежностей $P1-(x^2+y^2)=0$ для різних значень параметра $P1$. Як видно з Рис. 16.3, множиною розв'язків нерівності $|x|+|y|\le 5$ є внутрішня область квадрата з вершинами в точках (5, 0), (0, 5), (-5, 0), (0,-5), і найменшого значення (рівного -23) функція $z=2-(x^2+y^2)$ досягає в цих чотирьох точках, що належать до множини розв'язків нерівності $|x|+|y|\le 5$.

Одержати дану відповідь можна також, встановивши курсор на вираз $G(x,y)=2-(x^2+y^2)$ у вікні "Список об'єктів" і звернувшись до послуги "Операції/Значення виразу G(x,y)". Переміщуючи координатний курсор всередині області розв'язків, можна відслідковувати значення виразу $2-(x^2+y^2)$, що обчислюються, у вікні "Графік".

4. На площині xOy знайти точку $M(x,y)$, сума відстаней якої від п'яти точок $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(5,3)$, $D(2,8)$, $E(0,5)$ була б найменшою (задача Штейнера).

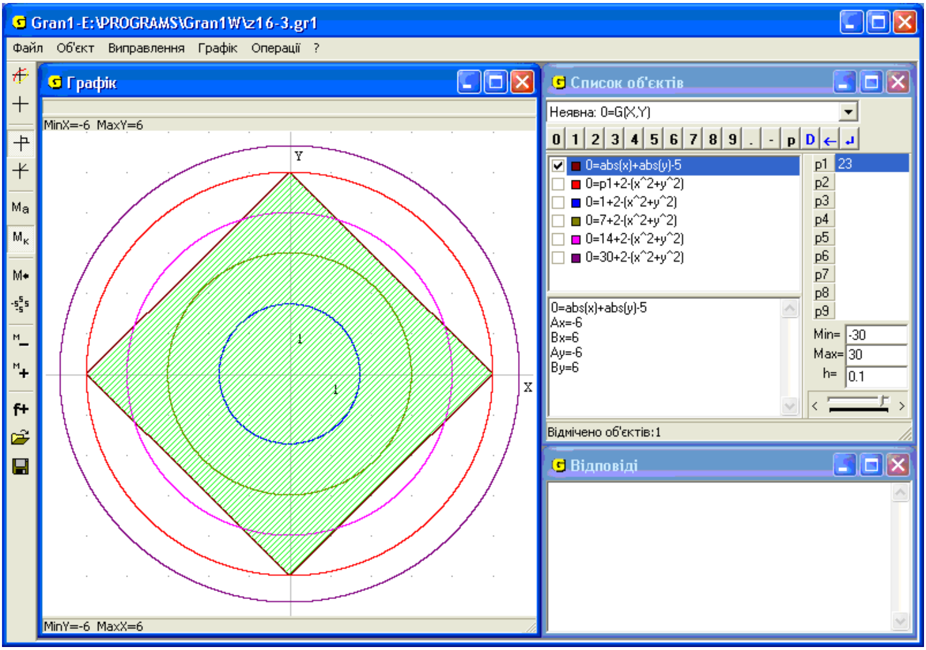


Рис. 16.3

Враховуючи, що сума відстаней точки M від точок A, B, C, D, E визначається за виразом

$$d(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+y^2}+\sqrt{(x-5)^2+(y-3)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y-8)^2}+\sqrt{x^2+(y-5)^2},$$

для окремих значень параметра $P1$ побудуємо графіки відповідних залежностей виду $d(x,y)-P1=0$. Як видно з Рис. 16.4, найменшого значення, наближено рівного 17.983, розглядувана функція $z=d(x,y)$ набуває в точці $x\approx 2.4$, $y\approx 2.96$.

5. Знайти найменше значення функції $z=G(x,y)=2x+3y$ на множині розв'язків системи нерівностей $x+y\geq 1$, $x\geq 0$, $y\geq 0$.

Побудувавши графіки залежностей $x+y-1=0$, $x=0$, $y=0$, легко переконатися, що множиною розв'язків системи нерівностей $x+y\geq 1$, $x\geq 0$, $y\geq 0$ є множина точок першого квадранта, які лежать над прямою, описуваною через рівняння $x+y=1$ (Рис. 16.5).

Далі задамо об'єкт – залежність $G(x,y)=2x+3y-P1$, і поступово змінюючи значення параметра $P1$ та фіксуючи об'єкти за деяких таких значень, знайдемо, що найменшого значення на зазначеній множині точок, рівного 2, функція $z=G(x,y)=2x+3y$ набуває в точці $x=1$, $y=0$ (Рис. 16.5).

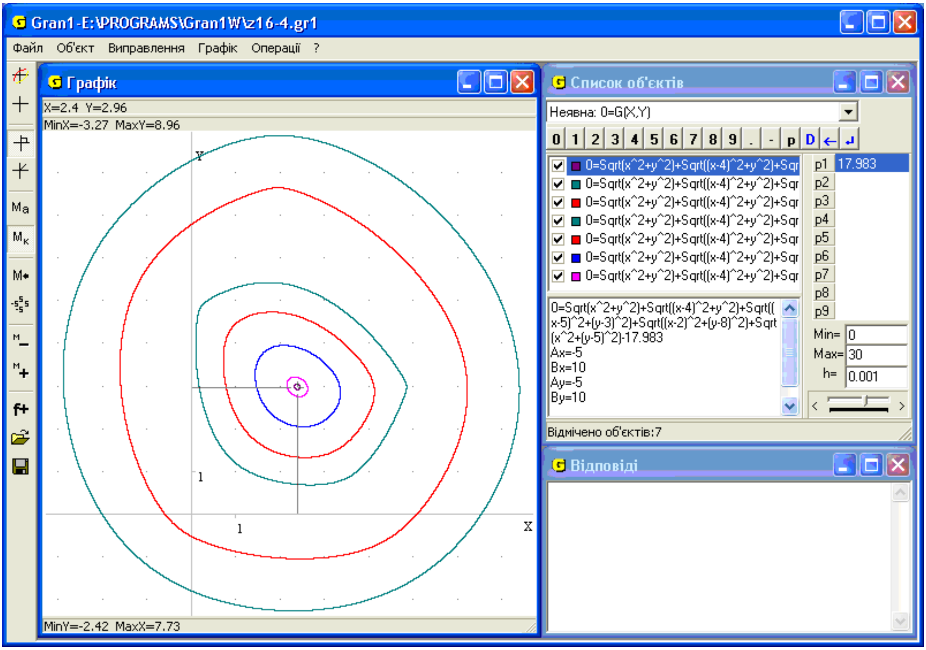


Рис. 16.4

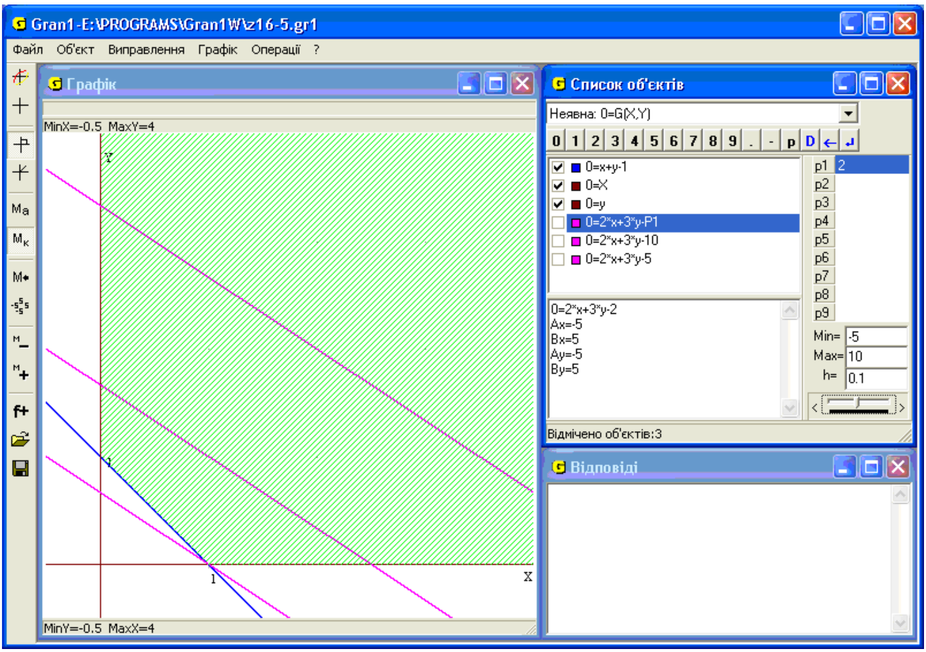


Рис. 16.5

6. Для виготовлення продукції двох видів використовується чотири види сировини. Кількість сировини кожного виду обмежена і дорівнює відповідно b_1, b_2, b_3, b_4 одиниць. Для виготовлення однієї одиниці продукції першого виду потрібно a_{11} одиниць сировини першого виду, a_{21} одиниць сировини другого виду, a_{31} одиниць сировини третього виду і a_{41} одиниць сировини четвертого виду, а для виготовлення однієї одиниці продукції другого виду потрібно відповідно a_{12}, a_{22}, a_{32}, a_{42} одиниць сировини першого, другого, третього і четвертого видів (всі числа a_{ij} невід'ємні).

Нехай прибуток від реалізації однієї одиниці продукції першого виду складає d_1 одиниць, а другого виду – d_2 одиниць вартості. Потрібно виготовити стільки одиниць продукції кожного виду, щоб за даних умов прибуток від їх реалізації був найбільшим. Іншими словами, програма випуску продукції за наявних обмежень повинна бути оптимальною.

Припустимо, що заплановано випустити x_1 одиниць продукції першого виду і x_2 одиниць продукції другого виду. Тоді витрати сировини будуть такими: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2$ – одиниць сировини першого виду, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2$ – одиниць сировини другого виду, $a_{31}x_1 + a_{32}x_2$ – одиниць сировини третього виду, $a_{41}x_1 + a_{42}x_2$ – одиниць сировини четвертого виду, і разом з тим повинні виконуватися обмеження $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1$, $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2$, $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3$, $a_{41}x_1 + a_{42}x_2 \le b_4$.

За такого плану випуску продукції буде отриманий прибуток $z(x_1, x_2) = d_1x_1 + d_2x_2$, ($x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$). Потрібно в множині розв'язків зазначеної системи нерівностей знайти таку точку (x_1, y_1), в якій функція $z(x_1, y_1)$ набуває найбільшого значення.

На Рис. 16.6 показано розв'язок такої задачі для конкретних значень:

$a_{11} = 1.5$,	$a_{21} = 1$,	$a_{31} = 3$,	$a_{41} = 0.2$,
$a_{12} = 1$,	$a_{22} = 2.5$,	$a_{32} = 3$,	$a_{42} = 0.2$,
$b_1 = 12$,	$b_2 = 18$,	$b_3 = 27$,	$b_4 = 3$,
$d_1 = 2.3$,	$d_2 = 2.7$.		

Змінюючи значення параметра $P1$ у виразі $2.3x + 2.7y - P1$ (або скориставшись послугою "Операції / Значення виразу G(x,y)"), одержимо, що оптимальне значення функції $z(x_1, x_2)$, яке наближено дорівнює 23.1, досягається в точці $x_1 \approx 2.99$, $x_2 \approx 6.02$ (Рис. 16.6), яку називають оптимальним розв'язком (чи оптимальною точкою) даної задачі. Якщо числа x_1, x_2 повинні бути цілими, то в такий самий спосіб можна знайти цілочисельні розв'язки розглядуваної задачі. У даному прикладі отримаємо $x_1 = 3$, $x_2 = 6$.

7. Мандрівник хоче перейти з точки $A(x_0, y_0)$ в точку $B(x_3, y_3)$. Відомо, що в точках, для яких $x_0 \le x \le x_1$, він може рухатися зі швидкістю V_1, у точках, для яких $x_1 \le x \le x_2$ – з швидкістю V_2, у точках, для яких $x_2 \le x \le x_3$ – зі швидкістю V_3 (мається на увазі, що $x_{i-1} < x_i$, $i = 1, 2, 3$).

До яких точок (x_1, y_1), (x_2, y_2) на прямих $x = x_1$ і $x = x_2$ відповідно він повинен йти, щоб дістатися з точки A до точки B якомога швидше?

Загальний час, який мандрівник затратить на весь шлях, через невідомі y_1 і y_2 виражається таким чином:

$$t(y_1, y_2) = \frac{\sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2}}{V_1} + \frac{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}{V_2} + \frac{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}}{V_3}$$

(де x_0, x_1, x_2, x_3, y_0, y_3, V_1, V_2, V_3 – задані). Таким чином, потрібно знайти найменше значення функції $t(y_1, y_2)$ з двома невідомими. Нехай $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $x_3 = 3$, $y_3 = 3$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $V_1 = 0.5$, $V_2 = 1.5$, $V_3 = 1$. Перепозначимо невідомі y_1 і y_2 через x і y відповідно, t – через G і побудуємо графіки залежностей

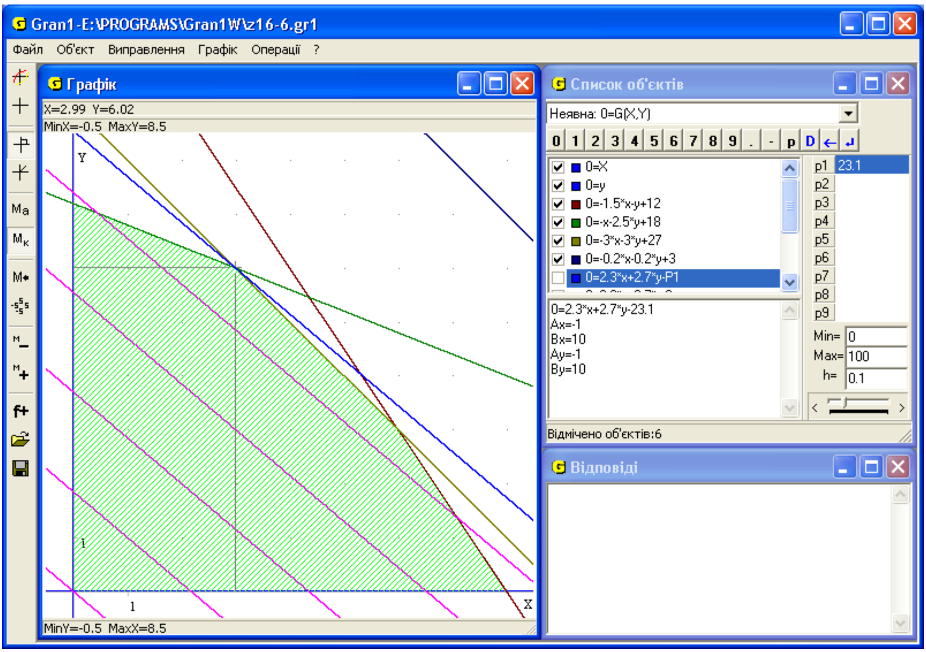


Рис. 16.6

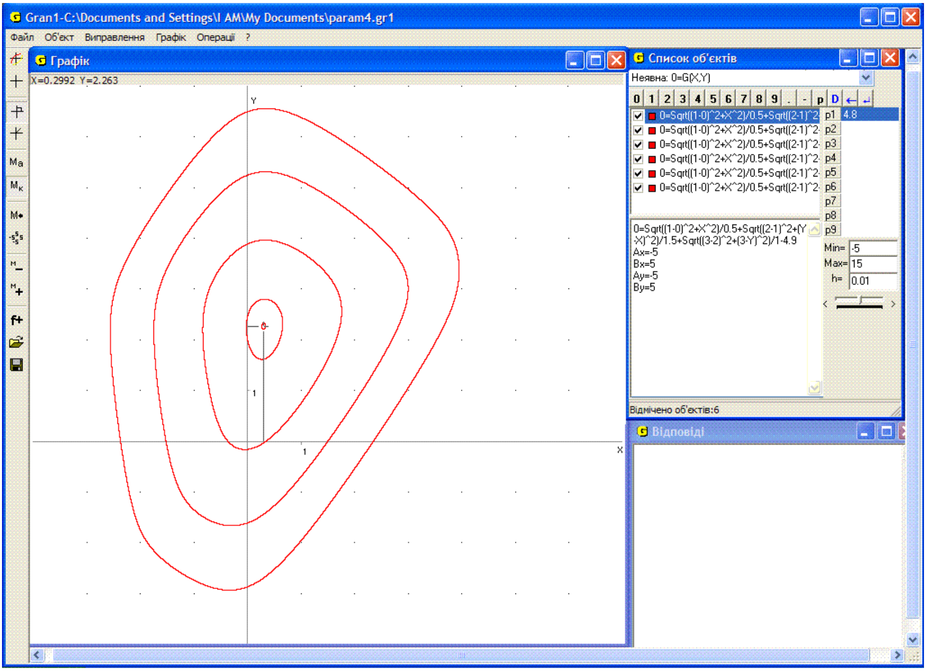


Рис. 16.7

$$G(x,y) = \frac{\sqrt{(1-0)^2 + x^2}}{0.5} + \frac{\sqrt{(2-1)^2 + (y-x)^2}}{1.5} + \frac{\sqrt{(3-2)^2 + (3-y)^2}}{1} - P1 = 0$$

для різних значень $P1$. Надаючи $P1$ різних значень, одержимо: найменшого значення, рівного 4.8, функція $z = G(x, y)$ досягає в точці $x = 0.30$, $y = 2.26$ (Рис. 16.7).

Таким чином, щоб дістатися з точки $A(0,0)$ до точки $B(3,3)$ якнайшвидше за даних умов, мандрівник повинен йти спочатку від точки (0, 0) до точки (1, 0.30), потім до точки (2, 2.26), і далі до точки (3, 3).

Якщо на кожній із прямих $x = x_i$, ($i = 1, 2$), мандрівник може йти не до будь-якої точки, а до однієї із скінченної множини наперед вказаних точок, тоді одержується задача дискретної оптимізації.

Нехай, наприклад, на прямій $x = 1$ дозволяється проходити лише через одну з точок (1, 0), (1, 1.5), (1, 3), а на прямій $x = 2$ – через одну з точок (2, 0.5),(2, 2.5). Тоді, визначивши з використанням послуги "Операції / Значення виразу G(x, y)" значення зазначеної функції $z = G(x, y)$ (коли $P1 = 0$) у точках (0, 0.5), (1.5, 0.5), (3, 0.5), (0, 2.5), (1.5, 2.5), (3, 2.5), одержимо, що найбільш швидко за заданих умов мандрівник перейде з точки $A(0,0)$ до точки $B(3,3)$, якщо вибере маршрут (0, 0) – (1, 0) – (2, 2.5) – (3, 3).

Інший спосіб – надаючи параметру $P1$ різних значень, знайдемо, що лінія найнижчого рівня (серед допустимих) функції $z = G(x, y)$ проходить через точку (0, 2.5) (Рис. 16.7).

Запитання для самоконтролю

1. Як, використовуючи послуги програми GRAN1, можна знайти найбільше і найменше значення функції $y = f(x)$ на заданому проміжку $[a,b]$?
2. Як, використовуючи послуги програми GRAN1, можна знайти найбільше і найменше значення функції $z = G(x, y)$ на множині розв'язків нерівності виду $G_1(x, y) \le 0$?
3. Чи потрібно для відшукання найбільшого і найменшого значень функції $y = f(x)$ на проміжку $[a,b]$ з використанням послуг програми GRAN1 знаходити корені рівняння $f'(x)=0$?
4. Як, використовуючи послуги програми GRAN1, визначити проміжки зростання й спадання функції $y = f(x)$ на відрізку $[a,b]$?
5. Чи можна, використовуючи послуги програми GRAN1, наближено встановити напрямок, у якому функція виду $z = G(x, y)$ найшвидше зростає в деякій точці (x_0, y_0)?

Вправи для самостійного виконання

1. Сума $x + y$ двох додатних чисел x і y дорівнює 1. Знайти максимально можливий добуток цих чисел.
2. Дано дві точки $A(2, 4)$, $B(7, 5)$. На осі Ox знайти точку, сума відстаней від якої до двох заданих точок найменша.
3. На ребрі BB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ знайти точку, сума відстаней якої від вершин A і C_1 найменша, якщо довжина ребра куба 3.
4. У рівнобедрений трикутник вписане коло радіуса 1. Знайти мінімальну площу такого трикутника.
5. Серед точок з цілочисельними координатами, що лежать у множині розв'язків нерівності $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} \le 1$, знайти точку, у якій функція $z = G(x, y) = x + 2$ набуває найбільшого значення.
6. Знайти найбільше значення функції $z = (2 - P1)x_1 + x_2$ на множині Ω, яка визначається за нерівностями: $-2x_1 - x_2 \ge 0$, $x_1 + x_2 - 1 \ge 0$, $3x_1 - 2x_2 + 3 \ge 0$, $-x_1 + x_2 + 4 \ge 0$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, для значень $P1 =$ 0, 1, 3, 5, 7, 9.

За тих самих умов знайти цілочисельні розв'язки задачі (для кожного з заданих значень параметра $P1$).

7. Мандрівник, знаходячись у точці (x_1, y_1), хоче досягти точки (x_2, y_2). Точки знаходяться в різних півплощинах відносно осі Ox, ($y_1 y_2 < 0$). В одній півплощині з початкової точки мандрівник може рухатися зі швидкістю V_1 (=3 км/годину). В іншій півплощині він має можливість рухатися зі швидкістю V_2 (=15 км/годину). До якої точки на осі Ox він повинен рухатися з початкової точки (x_1, y_1), щоб найшвидше досягти точки (x_2, y_2)?

   Розглянути випадки:
   - $x_1 = 7$, $y_1 = 2$, $x_2 = 15$, $y_2 = -4$;
   - $x_1 = 7$, $y_1 = 5$, $x_2 = 7$, $y_2 = -9$;
   - $x_1 = 10$, $y_1 = 4$, $x_2 = 2$, $y_2 = -5$.

8. Як змінюється графік залежності $x^2 + y^2 + P1xy - 2x + 7y - 1 = 0$ зі зміною значень параметра $P1$? Розглянути значення $P1 = -5, -4, -3, \ldots, 4, 5$.

9. Розв'язати задачу Штейнера (див. приклад 4) для випадків:
   - $A(0,0)$, $B(4,1)$, $C(1,4)$, $D(3,3)$, $E(5,1)$;
   - $A(0,0)$, $B(2,5)$, $C(1,3)$, $D(3,3)$, $E(5,1)$;
   - $A(0,0)$, $B(4,0)$, $C(1,4)$, $D(4,4)$, $E(3,2)$;
   - $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(1,0)$, $D(0,2)$;
   - $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,0)$, $D(1,1)$.

10. Знайти найменше значення функції $z = G(x, y) = x^2 + y^2 + xy - 2x + 7y - 1$ і точку, в якій воно досягається, $x \in [-10,10]$, $y \in [-10,10]$.

11. Знайти наближено напрямок, в якому функція $z = x^2 + y^2 - xy + 2x - 5y - 2$ найбільш швидко зростає в точці $(-1,1)$, а також визначити швидкість такого зростання.

12. На площині xOy знайти пряму, сума відстаней до якої від заданих точок найменша. Для конкретних розрахунків покласти:
    - $A(0,0)$, $B(1,8)$, $C(2,12)$, $D(0,10)$;
    - $A(0,0)$, $B(8,1)$, $C(12,2)$, $D(10,0)$;
    - $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(2,3)$, $D(3,2)$;
    - $A(0,0)$, $B(0,1)$, $C(1,0)$, $D(1,1)$.

§17. Побудова січних і дотичних до графіків функцій

В разі необхідності побудувати січну графіка залежності $y = f(x)$, яка проходить через точки $(x_0, f(x_0))$, $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$, що лежать на графіку залежності $y = f(x)$, чи дотичну до графіка в деякій точці $(x_0, f(x_0))$, що лежить на графіку, і обчислити кутовий коефіцієнт січної, який дорівнює відношенню приросту функції $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ до приросту аргументу Δx, чи кутовий коефіцієнт дотичної, який дорівнює значенню похідної $f'(x)$ в точці x_0, можна використати послугу “Операції / Похідна...”.

В даному випадку розглядається залежність, на позначення якої встановлений вказівник у вікні “Список об’єктів”. Після звернення до послуги “Операції / Похідна...”, з’являється допоміжне вікно “Похідна” (Рис. 17.1).

У цьому вікні відображається вираз, через який визначається об’єкт, і панель введення даних, за допомогою якої можна вводити необхідні дані. В рядку “X=” потрібно ввести абсцису точки, у якій необхідно побудувати січну або дотичну (за замовчуванням $x = 0$). В рядку “Δx=” необхідно ввести приріст аргументу в даній точці (за замовчуванням $\Delta x = 0.1$).

Як вираз залежності між змінними x та y, так і вирази, через які визначають абсцису точки дотику x та приріст Δx, можуть містити один чи кілька параметрів $P1$, $P2$, …, $P9$.

Якщо вказана точка x лежить поза відрізком задання залежності чи залежність у цій точці не визначена, виводиться відповідне повідомлення.

Після введення значень x і Δx (чи тільки значення x) у допоміжному вікні потрібно обрати одну або обидві із пропонованих послуг (поставити відповідні мітки):

“Побудувати січну” – означає побудувати січну, що проходить через точки $(x, f(x))$, $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$. В даному разі у вікні “Графік” будується графік січної, що проходить через вказані точки, а після звернення до послуги “Занести у відповіді” у вікні “Відповіді” записуються значення абсциси x вказаної точки, значення Δx вказаного приросту аргументу x, значення Δy, що відповідає вказаному Δx, і значення $\Delta y / \Delta x$ кутового коефіцієнта січної, що проходить через вказані точки (Рис. 17.2).

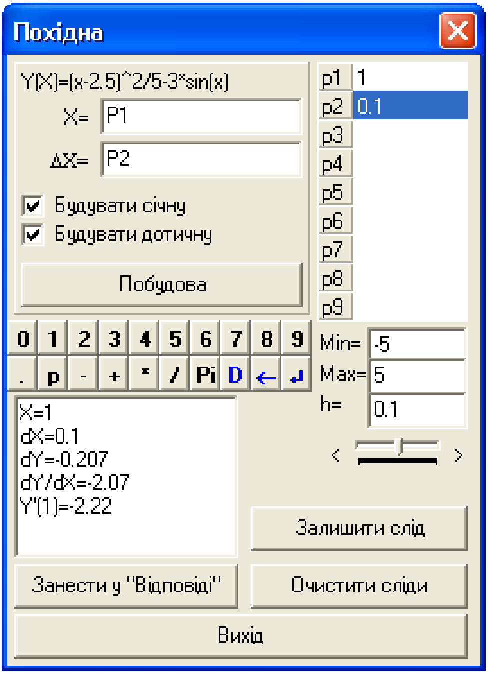


Рис. 17.1

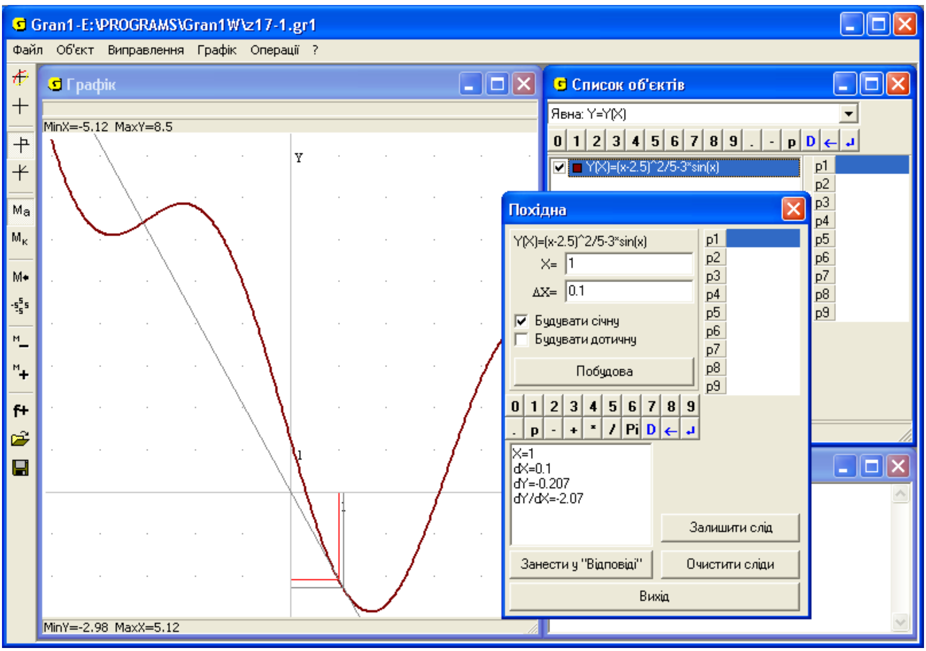


Рис. 17.2

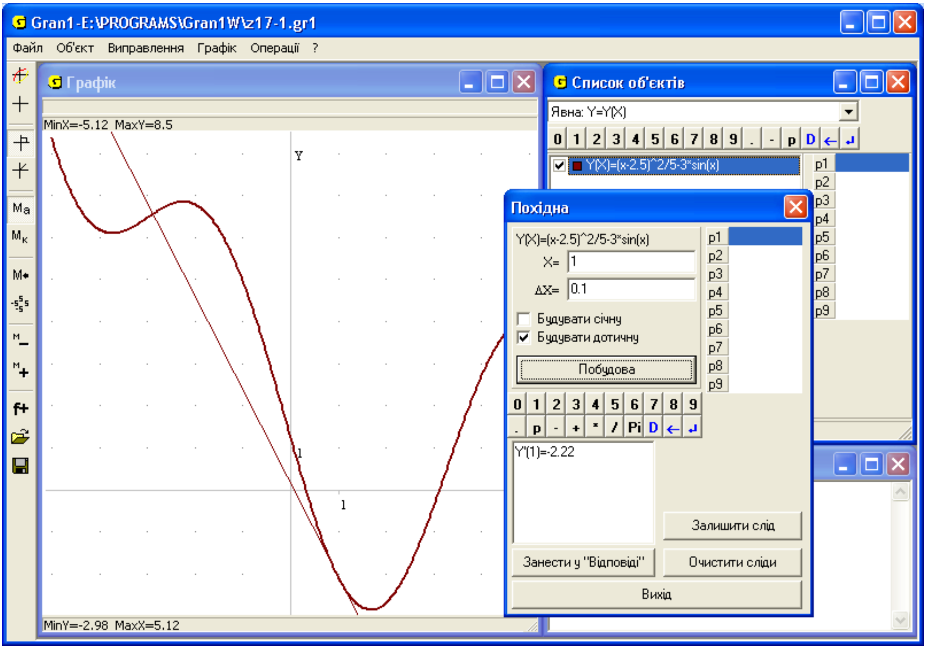


Рис. 17.3

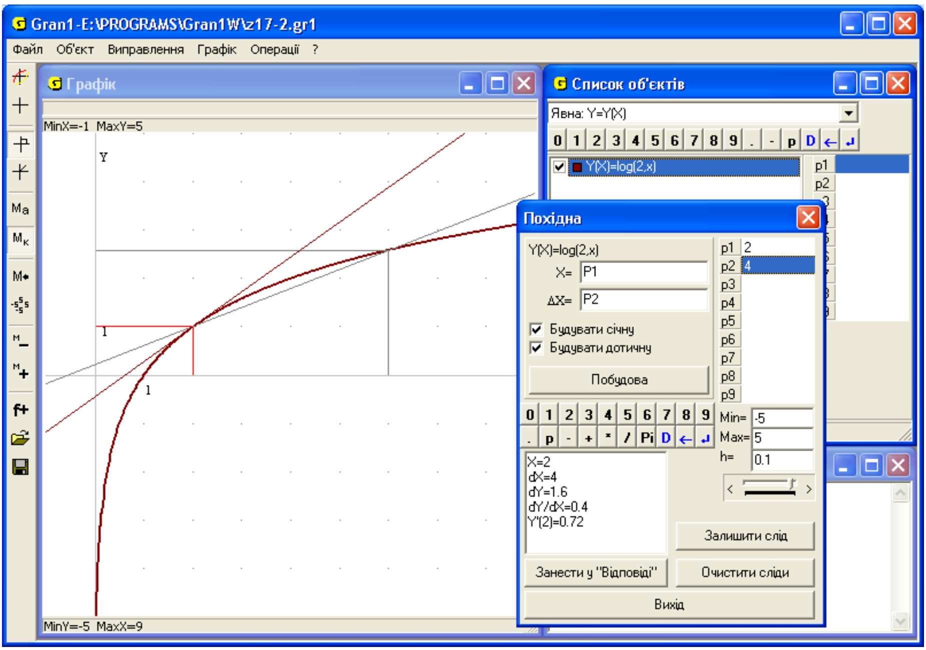


Рис. 17.4

“Побудувати дотичну” – означає побудувати дотичну до графіка функції у вказаній точці. В разі звернення до цієї послуги у вікні “Графік” будується графік дотичної до графіка обраної функції у вказаній точці x, а у вікні “Відповіді” з’являється повідомлення, у якому показане числове значення похідної $y'(x)$ від обраної функції у вказаній точці (Рис. 17.3).

В одному вікні можна будувати одночасно і січну, і дотичну до графіка функції (Рис. 17.4).

Графік функції, до якого проводиться дотична чи січна, повинен бути попередньо побудований. У протилежному випадку послуга “Операції/Похідна…” недоступна. Оскільки операція обчислення значення приросту функції і значення похідної виконується для поточної функції, то в разі звернення до розглянутої послуги поточна функція автоматично стає відміченою. Після завершення операції відмітка ☑ повертається в той стан, у якому вона була перед зверненням до послуги.

В разі змінювання значень параметрів, що входять до виразу функції, виразів, через які визначаються межі A та B зміни аргумента, абсциса точки дотику x, приріст аргумента Δx, відповідні значення dX, dY, dY/dX, $Y'(x)$ переобчислюються, а також відповідним чином змінюються графічні побудови (Рис. 17.4).

Приклади

1. Знайти рівняння січної до графіка функції $y = \log_2 x$, яка проходить через точки (2, $\log_2 2$), (6, $\log_2 6$), і рівняння дотичної до зазначеного графіка в точці (2, $\log_2 2$).

Використовуючи послугу “Операції / Похідна...”, встановивши значення параметра $P1$, через яке визначається абсциса точки дотику, рівним 2, а значення параметра $P2$, через яке визначається приріст Δx аргумента, рівним 4, знайдемо кутовий коефіцієнт січної $k_1 = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \approx 0.4$ і кутовий коефіцієнт дотичної $k_2 = f'(x) = 0.7$ (Рис. 17.4). Враховуючи загальний вигляд рівняння прямої, що проходить через задану точку (x_0, y_0) і кутовий коефіцієнт якої k: $y - y_0 = k(x - x_0)$, одержимо шукане рівняння січної $y = \log_2 2 + 0.72(x-2) \approx 0.72x - 0.44$ і рівняння дотичної до графіка в заданій точці $y = \log_2 2 + 0.4(x-2) \approx 0.4x + 0.2$.

Якщо виникає необхідність з’ясувати, у яких межах буде змінюватися значення функції, якщо значення аргумента змінюється в межах $(x_0 - \Delta x, x_0 + \Delta x)$, чи, навпаки, у яких межах буде змінюватися значення аргумента x, якщо значення функції змінюється в межах

$(f(x_0)-\Delta y, f(x_0)+\Delta y)$, можна використати послугу зміни масштабу зображення у вікні “Графік”. Щоб визначити, в яких межах змінюється значення $f(x)$, якщо x змінюється від $x_0-\Delta x$ до $x_0+\Delta x$, достатньо встановити масштаб користувача так, щоб в прямокутнику, яким обмежується частина графіка, було $MinX=x_0-\Delta x$, $MaxX=x_0+\Delta x$.

В даному разі нижню і верхню сторони цього прямокутника ($MinY$ і $MaxY$) потрібно дібрати так, щоб вони якомога менше були віддалені одна від одної, і в той же час всередині прямокутника знаходилися всі точки графіка залежності $y=f(x)$ на проміжку $[x_0-\Delta x, x_0+\Delta x]$. Через ординати точок на нижній і верхній сторонах прямокутника і будуть визначатися межі зміни функції $f(x)$ на проміжку $[x_0-\Delta x, x_0+\Delta x]$ (Рис. 17.5, де $x_0=5$, $\Delta x=2$).

Цю саму задачу можна розв’язати, використовуючи координатний курсор для визначення найменшого і найбільшого значень функції $f(x)$ на проміжку $[x_0-\Delta x, x_0+\Delta x]$.

Можна також вказати межі $x_0-\Delta x$, $x_0+\Delta x$ проміжка, на якому задається функція $y=f(x)$. Тоді $MinY$ і $MaxY$ на зазначеному проміжку $[x_0-\Delta x, x_0+\Delta x]$ за програмою визначаються автоматично.

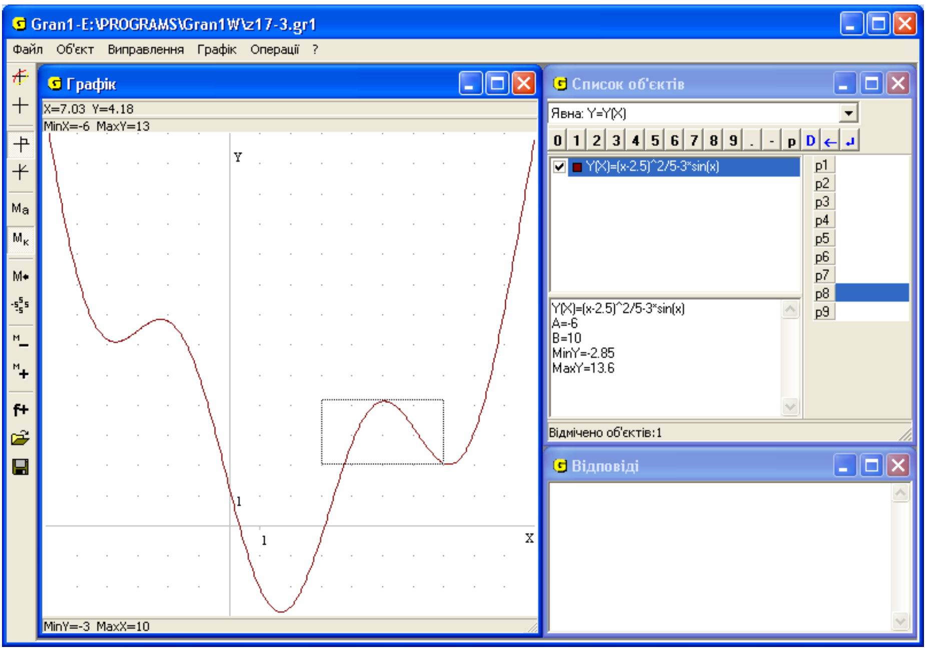


Рис. 17.5

Аналогічно визначаються межі зміни аргумента x в околі точки x_0 за умови, що значення функції $y = f(x)$ змінюється в межах $[f(x_0) - \Delta y, f(x_0) + \Delta y]$ (Рис. 17.6, де $y_0 = f(x_0) = 4$, $\Delta y = 2$).

Інший спосіб – побудувати графіки залежностей $y = f(x)$, $y = f(x_0) - \Delta y$, $y = f(x_0) + \Delta y$ і встановити найдовший проміжок $[x_1, x_2]$, на якому міститься x_0 і в точках якого значення $f(x)$ не виходять за межі $f(x_0) - \Delta y$, $f(x_0) + \Delta y$ (графік залежності $y = f(x)$ не виходить за прямі $y = f(x_0) - \Delta y$, $y = f(x_0) + \Delta y$).

Подібні задачі виникають зокрема в теорії похибок наближених обчислень та в багатьох інших випадках.

2. Знайти межі, у яких змінюються значення функції $y = f(x) = x - \sin(x)$, якщо аргумент x змінюється в межах $[-0.1, 0.2]$.

Побудувавши графік залежності $y = x - \sin(x)$ на проміжку $[-0.1, 0.2]$, легко бачити, що значення $f(x) = x - \sin(x)$ на зазначеному проміжку змінюються в межах $[-0.00017, 0.0013]$ (Рис. 17.7).

Таким чином, якщо значення функції $y = \sin(x)$ замінити значенням аргумента x, то похибка такої заміни за абсолютною величиною не перевищить 0.00017, якщо значення аргумента функції $y = \sin(x)$ будуть знаходитися в межах від -0.1 до 0.1, і не перевищить 0.0013, якщо значення аргумента функції $y = \sin(x)$ будуть знаходитися в межах $[-0.2, 0.2]$.

Запитання для самоконтролю

1. Як, використовуючи послуги програми GRAN1, побудувати дотичну до графіка функції $y = f(x)$ в заданій точці $(x_0, f(x_0))$?
2. Як, використовуючи послуги програми GRAN1, визначити кутовий коефіцієнт прямої, що проходить через точки $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$?
3. Як за допомогою графічних побудов на графіку залежності $y = f(x)$ визначити точку, в якій дотична до графіка паралельна до хорди, що проходить через точки $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ (вважається, що в будь-якій точці проміжка $[x_1, x_2]$ функція $f(x)$ диференційовна)?

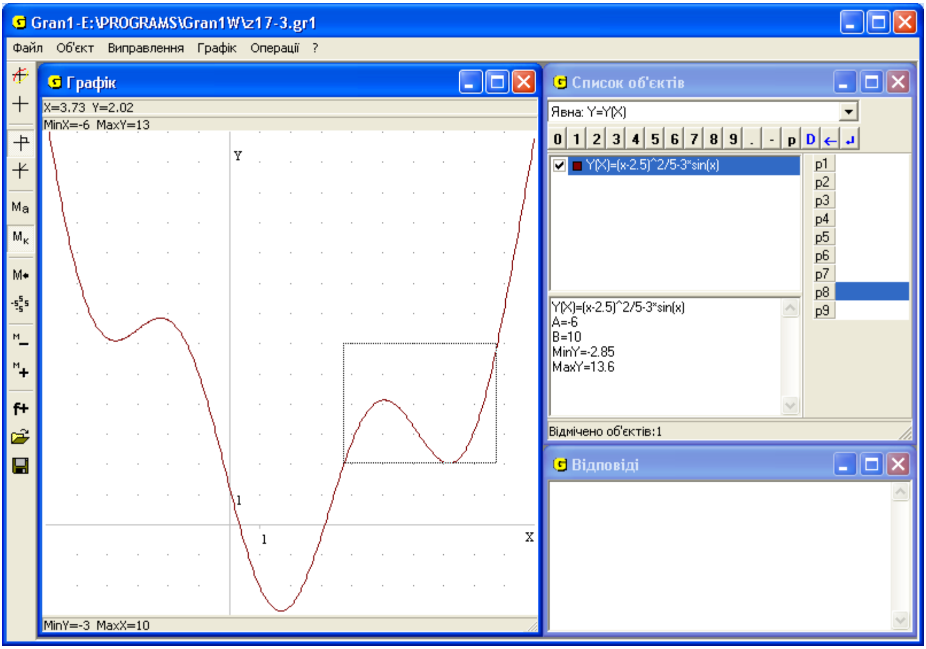


Рис. 17.6

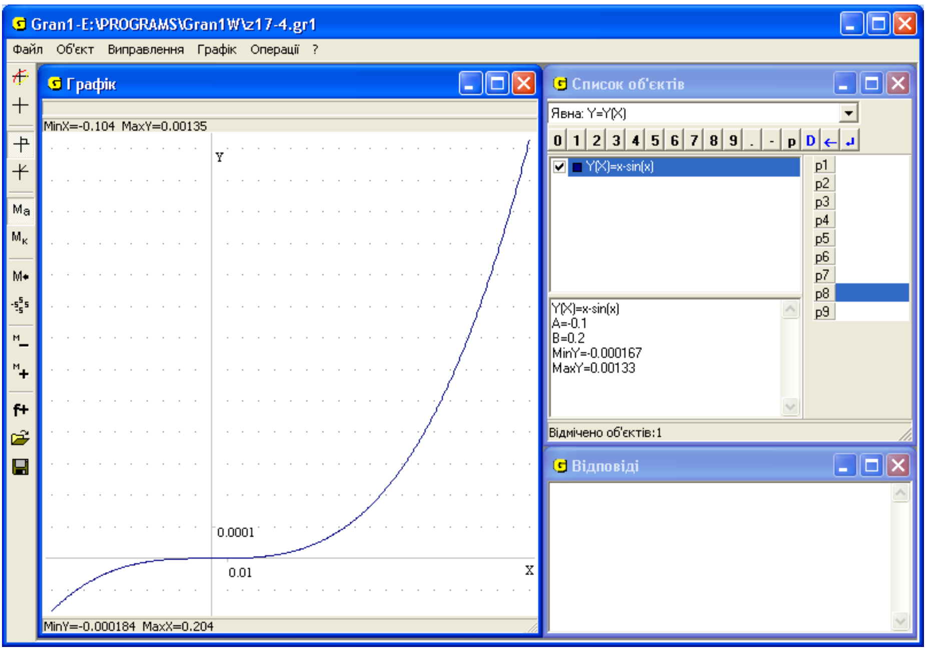


Рис. 17.7

4. Чи може дотична (якщо вона існує) до графіка опуклої донизу функції перетинатися з графіком такої функції в деякій точці, що не є точкою дотику?
5. Нехай $y = f(x)$ опукла донизу функція, визначена на проміжку $[a,b]$; $y = f_1(x) = kx+c$ – рівняння деякої прямої, у якої з графіком залежності $y = f(x)$ є не більше однієї спільної точки. Чи може бути $f(x_0) < f_1(x_0)$ хоча б для одного $x_0 \in [a,b]$?

Вправи для самостійного виконання

1. За яких значень аргумента x значення функції $y = \cos x$ можна замінити значенням функції $y = 1 - x^2$ з похибкою, що не перевищує 0.01?
2. Знайти рівняння дотичної до графіка функції $y = \log_2 x - \cos\dfrac{x}{20}$ у точці з абсцисою $x_0 = 5$.
3. Знайти рівняння прямої, що проходить через точки $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, де $f(x) = 2^x + \dfrac{1}{7}\sin\dfrac{x}{23}$, $x_1 = 1.5$, $x_2 = 7.5$.
4. Знайти рівняння прямої, що проходить через точки $(2, f(2))$, $(4, f(4))$, де $f(x) = \left|x^2 - 3x + 2\right|$.
5. З'ясувати, за яких x значення $\sin x$ можна замінити значенням x з похибкою, що не перевищує 0.1; 0.01; 0.00001.
6. З'ясувати, за яких x значення $\cos x$ можна замінити значенням $1 - \dfrac{x^2}{2}$ з похибкою, що не перевищує 0.00001; 0.0001; 0.001; 0.01; 0.1.

§18. Обчислення визначених інтегралів

Для обчислення визначених інтегралів виду $\int_a^b f(x)dx$ можна використовувати послугу “Операції / Інтеграли / Інтеграл...” (Рис. 18.1).

Дана послуга призначена для обчислення визначених інтегралів від функцій, заданих явно у вигляді $y = f(x)$, поліномів, якими наближають таблично задані функції, щільностей розподілу статистичних ймовірностей (графіками яких є гістограми). Інтеграл обчислюється для відміченої функції, позначення якої у вікні “Список об’єктів” відмічено міткою ☑. Якщо таких об’єктів немає, то інтеграл обчислюється для поточної функції (на позначення якої встановлений вказівник об’єктів).

Якщо відмічено кілька функцій, то значення інтегралів, знайдених для кожної окремої функції, додаються. Останнє дає можливість обчислювати інтеграли для функцій, заданих різними виразами на різних відрізках. Якщо вказані межі інтегрування функції виходять за відрізок, на якому задана функція, то інтеграл обчислюється на частині відрізка, спільній для двох заданих. Наприклад, якщо функція задана на відрізку [-5, 5], а межі інтегрування вказані [0, 10], то значення інтеграла буде обчислено на відрізку [0, 5].

Після звернення до послуги “Операції/Інтеграли/Інтеграл...” з’являється допоміжне вікно “Інтегрування”, у якому потрібно ввести значення “A=” – лівої межі відрізка інтегрування і значення “B=” – правої межі відрізка інтегрування (Рис. 18.2).

Як в підінтегральний вираз, так і у вирази меж інтегрування можуть входити якісь із параметрів $P1$, $P2$, …, $P9$ (Рис. 18.2).

Після виконання послуги та звернення до пункту “*Занести у “Відповіді’*”” у вікні “Відповіді” з’являється вираз функції, для якої проводилося обчислення інтеграла, вказані межі інтегрування, а також знайдене значення визначеного інтеграла I.

Якщо у вікні “Графік” був побудований графік функції, інтеграл від якої обчислюється, то область, обмежена графіком функції, віссю Ox і прямими $x = a$, $x = b$, заштриховується (Рис. 18.2).

Приклади

1. Нехай необхідно обчислити площу, обмежену лініями $x = -3$, $x = 3$, $y = 0$, $y = \log_2(x + 3.7) + \frac{1}{3}\sin(2x^2) + 2$, тобто визначений інтеграл

$$I = \int_{-3}^{3} (\log_2(x + 3.7) + \frac{1}{3}\sin(2x^2) + 2)dx .$$

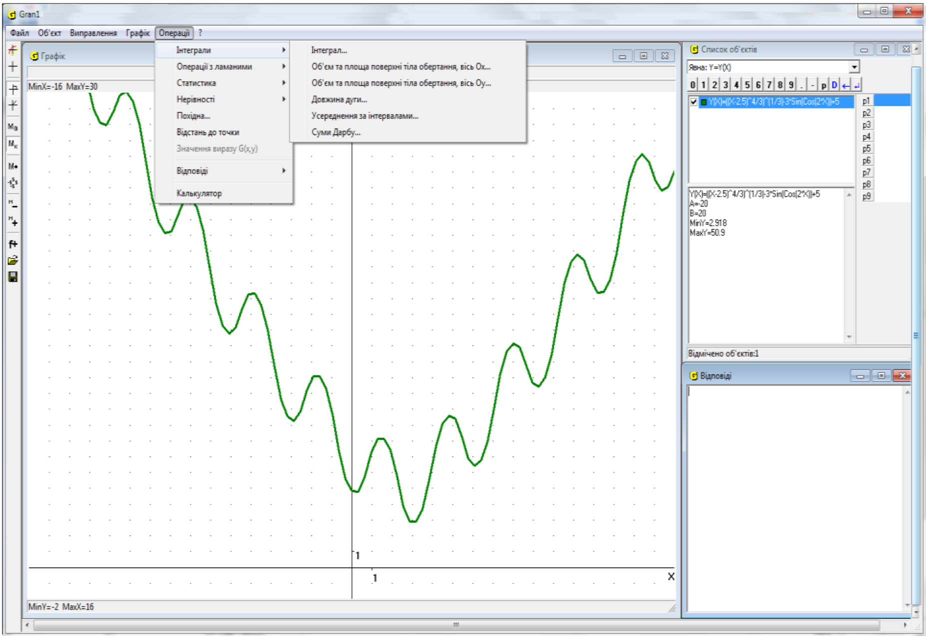


Рис. 18.1

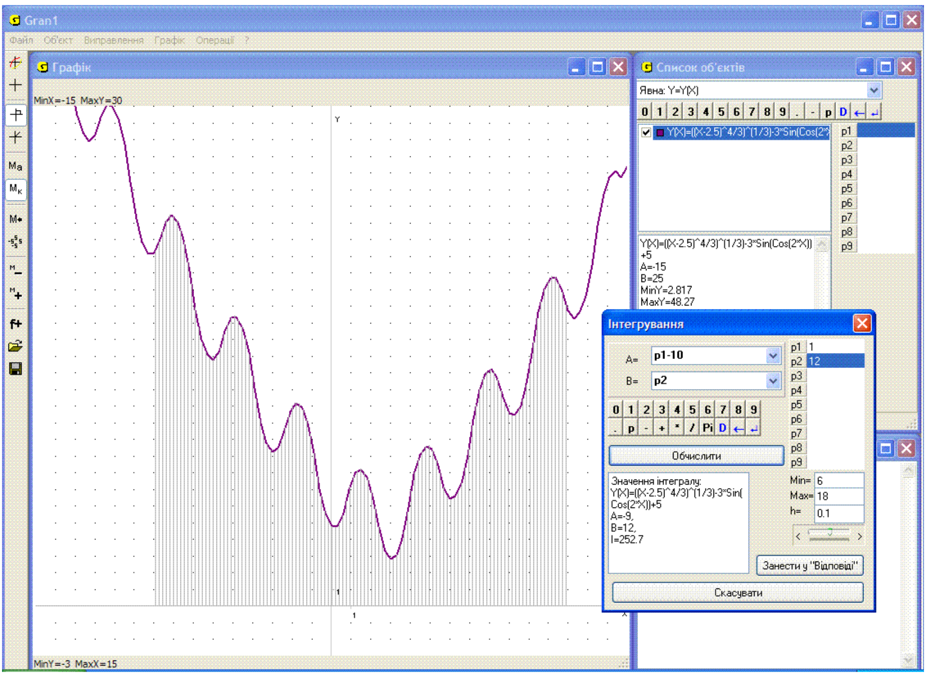


Рис. 18.2

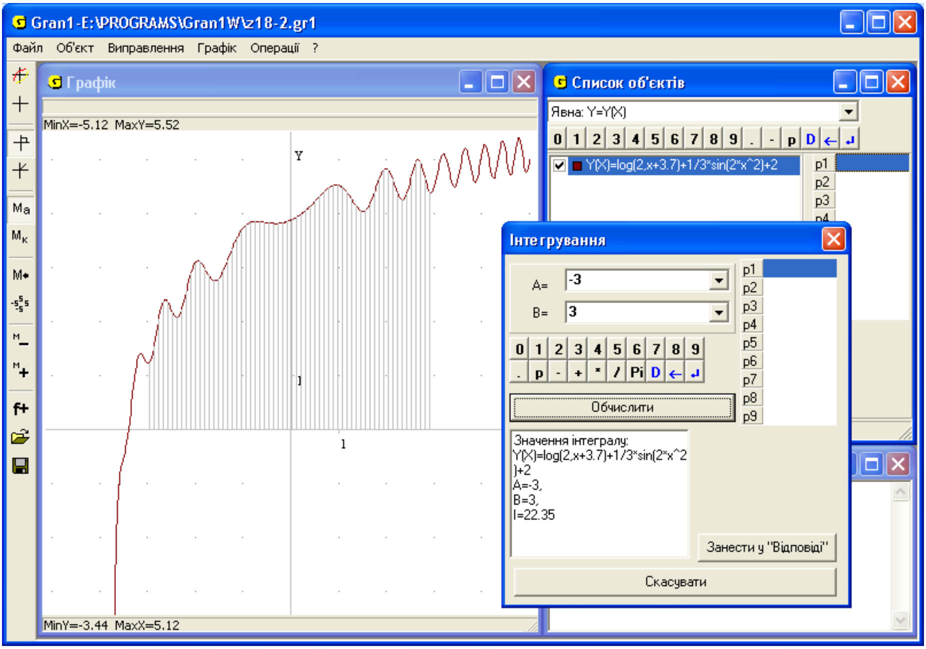


Рис. 18.3

Побудувавши графік функції $y = \log_2(x+3.7) + \dfrac{1}{3}\sin(2x^2) + 2$ на проміжку [-5, 5], звернемося до послуги "Операції / Інтеграли / Інтеграл..." і у відповідь на відповідні запити введемо ліву межу інтегрування $a = -3$ і праву межу інтегрування $b = 3$. В результаті одержимо $I \approx 22.35$ (Рис. 18.3).

Зауважимо, що точно розглянутий інтеграл обчислити неможливо, оскільки не існує в скінченних виразах первісна до даної підінтегральної функції, тому в будь-якому випадку для обчислення подібних інтегралів доводиться застосовувати ті чи інші наближені методи.

2. Обчислити $\int\limits_{-3}^{4} f(x)dx$, де $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{|x|}, & \text{коли} \quad x \le -2, \\ 3 - |x|, & \text{коли} \quad -2 \le x \le 1, \\ 2 + \log_2 x, & \text{коли} \quad 1 \le x. \end{cases}$

Побудуємо графік заданої функції на проміжку $[-4, 5]$ (на проміжку $[-4, -2]$ – графік функції $y = 2/abs(x)$, на проміжку $[-2, 1]$ – $y = 3 - abs(x)$, на проміжку $[1, 5]$ – $y = 2 + \log(2, x))$ і звернемося до послуги “Інтеграл” пункту “Інтеграли”. Ввівши межі інтегрування $a = -3$, $b = 4$, в результаті одержимо значення інтеграла (Рис. 18.4):

$$I = \int_{-3}^{4} f(x)dx = \int_{-3}^{-2} \frac{2}{|x|}dx + \int_{-2}^{1}(3 - |x|)dx + \int_{1}^{4}(2 + \log_2 x)dx \approx 16.98 .$$

Наближене значення визначеного інтеграла $\int_a^b f(x)dx$ можна одержати також як площу многокутника, обмеженого замкненою ламаною з вершинами $(a, 0)$, $(a, f(a))$, $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$, ..., $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$, $(x_n, f(x_n))$, $(b, f(b))$, $(b, 0)$, де вершини $(x_i, f(x_i))$ і їх кількість добираються так, щоб на відрізку $[a, b]$ ламана лінія була якомога ближче до кривої $y = f(x)$.

3. Нехай необхідно обчислити наближено площу криволінійної трапеції між параболою $y = 3 - \frac{x^2}{5}$ і прямими $x = 0$, $y = 0$.

Звернувшись до послуги “Операції / Інтеграли / Інтеграл...” і вказавши межі інтегрування $a = 0$, $b = 3.87$, для даної функції одержимо $I = 7.746$ (Рис. 18.5).

Побудувавши крім того замкнену ламану з вершинами (0, 0), (0, 3), (0.1, 3.00), (0.2, 2.99), (0.3, 2.98), (0.4, 2.97), (0.5, 2.95), ..., (3.7, 0.26), (3.8, 0.11), (3.87, 0) і звертаючись до послуги “Операції / Операції з ламаними / Площа многокутника”, одержимо $S = 7.743$ (Рис. 18.6).

Нагадаємо, що вершини ламаної можуть бути введені з клавіатури, з наперед заготовленої таблиці в файлі, з екрану. Відстані між вершинами ламаної можуть бути різними з врахуванням (візуально) кривизни лінії на різних її ділянках, наявності зламів і т.п.

Слід мати на увазі, що підінтегральні функції в разі використання послуги “Операції / Інтеграли / Інтеграл...” повинні бути обмежені. Для наближеного обчислення невласних інтегралів виду $\int_a^b f(x)dx,$ де функція $y = f(x)$ на проміжку $[a, b]$ має точку розриву (другого роду) таку, що за $x \to x_0$ $f(x) \to \infty$ (чи $f(x) \to -\infty$), можна використовувати послуги програми, обчислюючи інтеграли $\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)dx$ і $\int_{x_0+\varepsilon}^{b} f(x)dx,$ де $\varepsilon > 0$ досить мале.

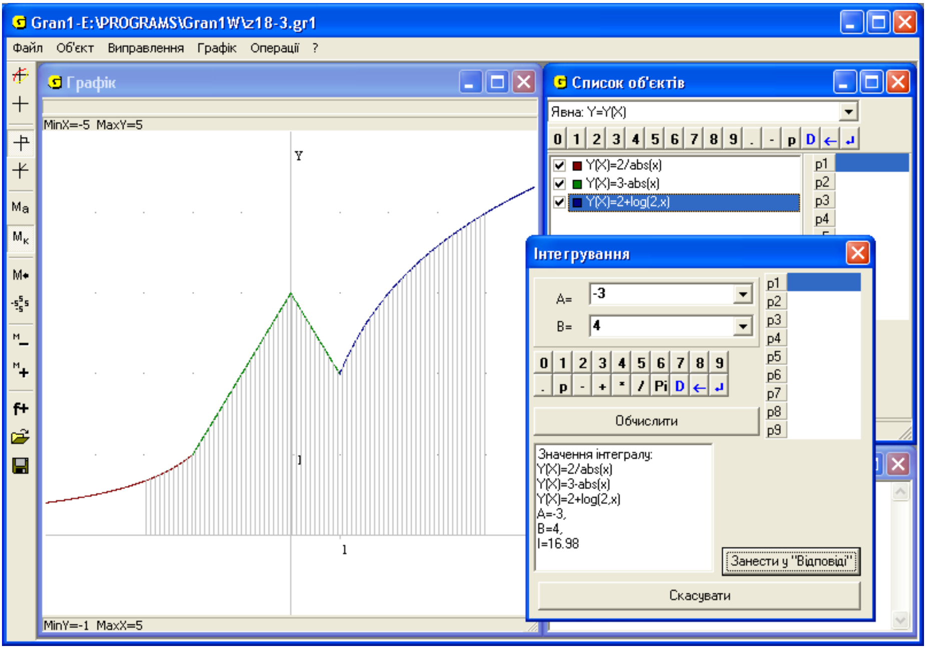


Рис. 18.4

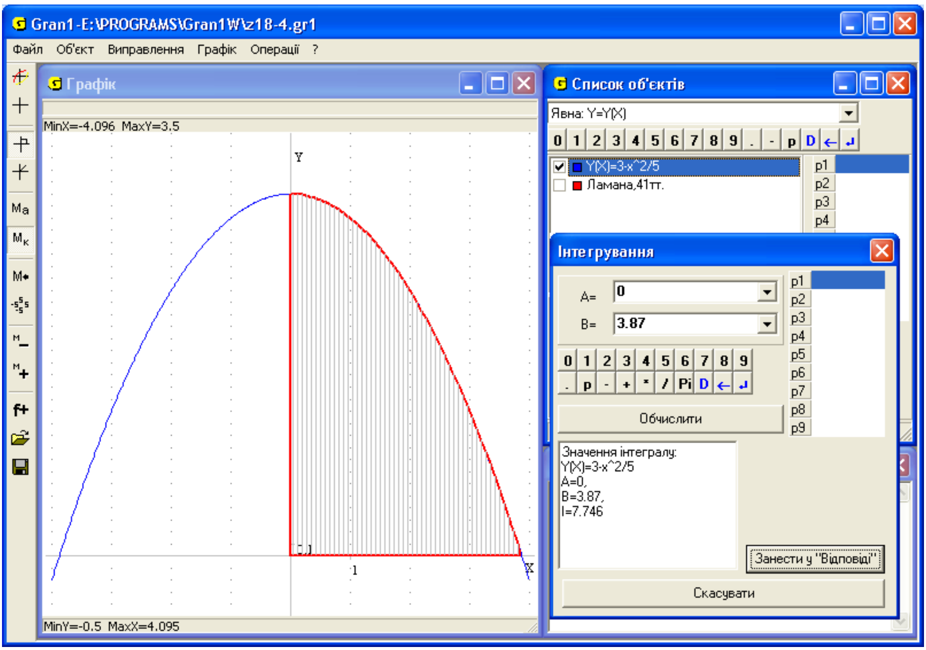


Рис. 18.5

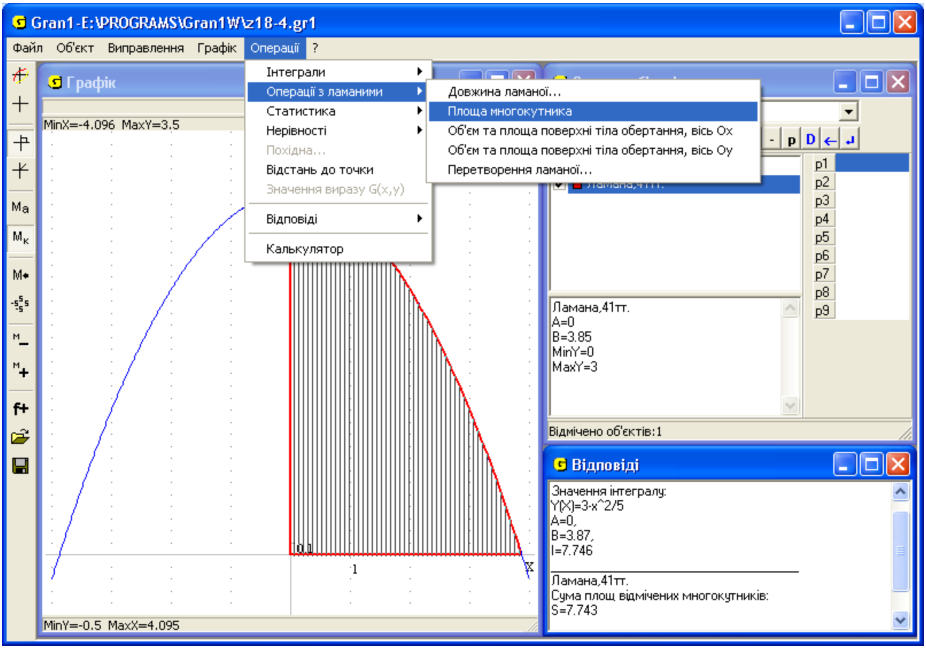


Рис. 18.6

Якщо інтеграл збігається, то за поступового зменшення ε одержувані значення все менше і менше будуть відрізнятися між собою і після одержання певної кількості стабільних цифр можна буде припинити обчислення. Тут однак може знадобитися додатковий аналіз щодо збіжності інтеграла тощо.

Аналогічно для наближеного обчислення головного значення невласного інтеграла виду $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ можна обчислювати $\int\limits_{-A}^{A} f(x)dx$, поступово збільшуючи A до стабілізації певної кількості цифр (якщо така наступить). Тут також можуть знадобитися додаткові аналітичні дослідження стосовно збіжності інтеграла тощо.

4. Обчислити наближено інтеграл $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx.$

Побудувавши графік функції $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ на проміжку $[-6, 6]$ та вказавши межі інтегрування нижню $-P1$, верхню $P1$ (Рис. 18.7), обчислимо інтеграли $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, $\int_{-2}^{2} f(x)dx$, $\int_{-3}^{3} f(x)dx$, $\int_{-4}^{4} f(x)dx$, $\int_{-5}^{5} f(x)dx$, $\int_{-6}^{6} f(x)dx$. В результаті одержимо, що для даної функції інтеграли на проміжках $[-3,3]$, $[-4,4]$, $[-5,5]$, $[-6,6]$ практично не відрізняються між собою і з досить великою точністю дорівнюють 1.

Цей результат спеціальними прийомами можна вивести й аналітично (хоч для функції $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$ первісна в точних виразах не існує).

Можна показати, що $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \sqrt{2\pi}$. Цей інтеграл має спеціальну назву – інтеграл Ейлера-Пуассона. Для обчислення значень функції $y = \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ яку називають функцією Лапласа, побудовані спеціальні таблиці її значень.

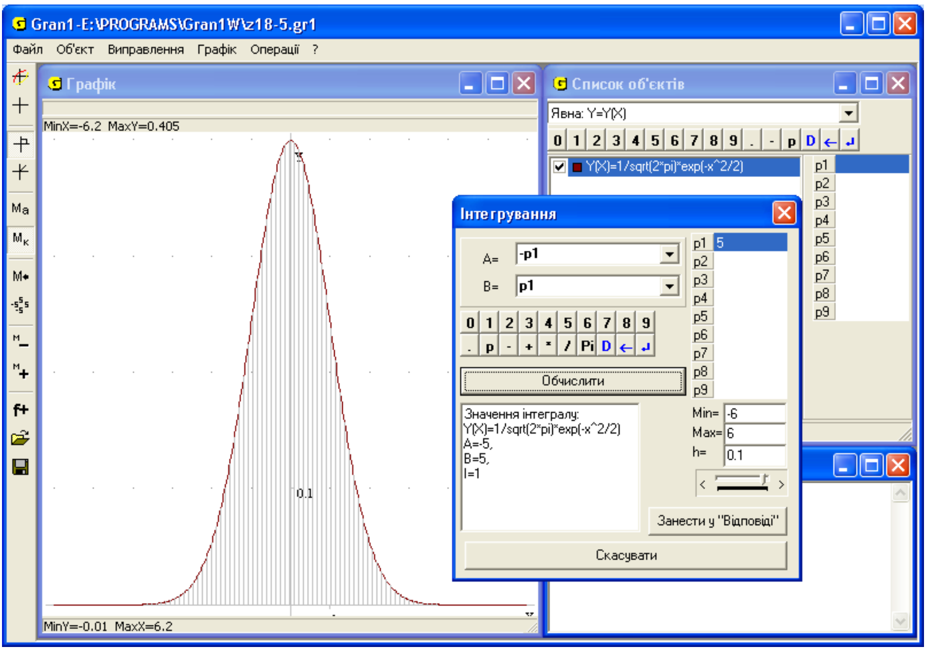


Рис. 18.7

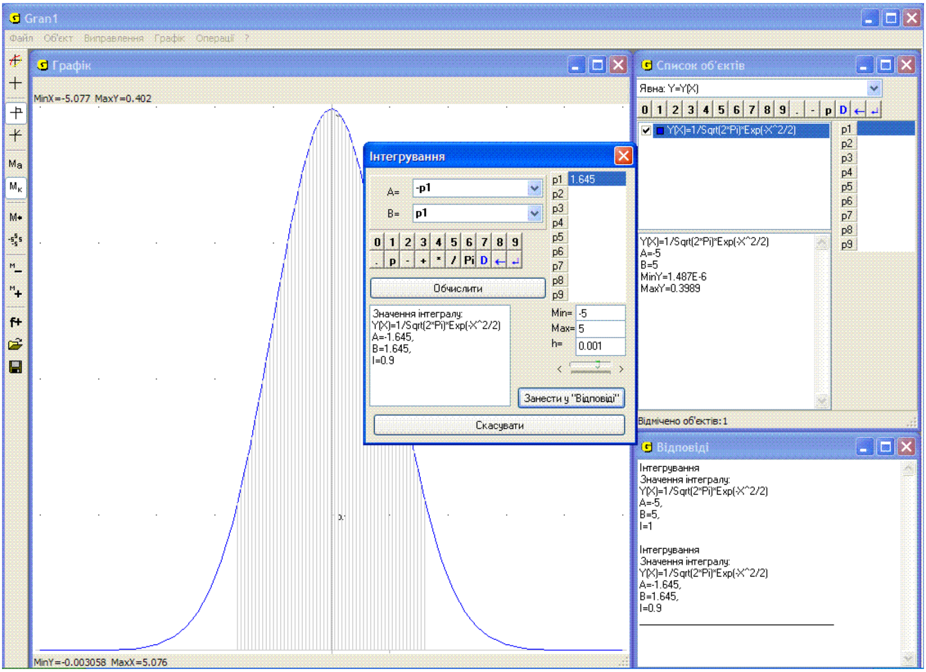


Рис. 18.8

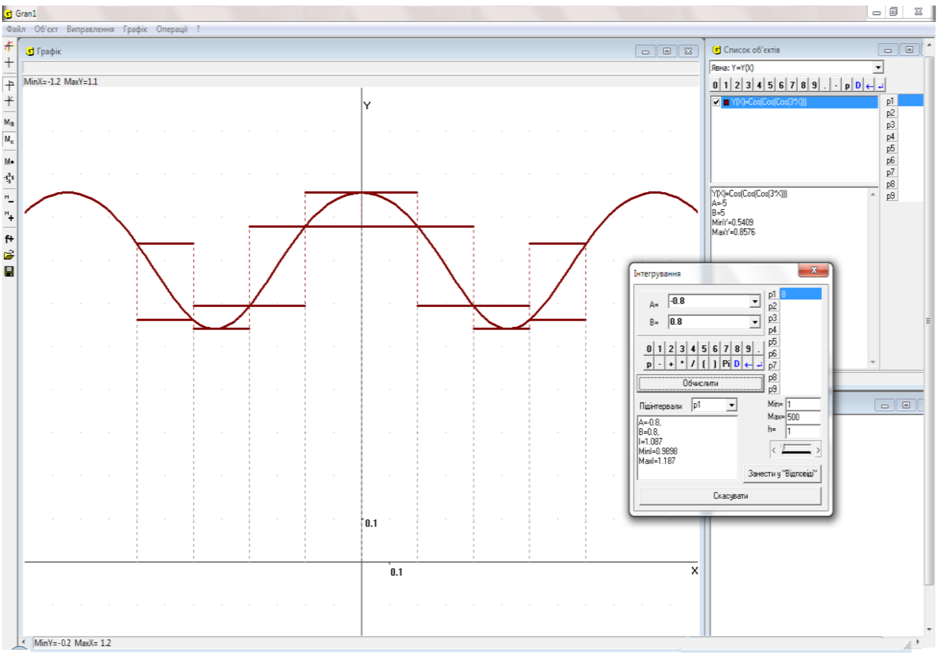


Рис. 18.9

За потреби розв’язати відносно $P1$ рівняння виду $\int_0^{P1} f(x)dx = c$ чи виду $\int_{-P1}^{P1} f(x)dx = c$ і т. п., де c – деяке число, можна скористатись послугою “Операції /Інтеграли /Інтеграл… ”, задаючи межі інтегрування через вирази, до яких входить параметр $P1$, і далі, встановивши деякі межі зміни та крок h зміни параметра $P1$, дібрати значення параметра $P1$ так, щоб рівність $\int_0^{P1} f(x)dx = c$ чи $\int_{-P1}^{P1} f(x)dx = c$ виконувались якомога точніше.

5. Знайти значення $P1$ таке, що матиме місце рівність $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-P1}^{P1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.9$.

Ввівши вираз підінтегральної функції $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, та звернувшись до послуги “Операції /Інтеграли /Інтеграл…” і вказавши межі інтегрування $-P1$, $P1$ та змінюючи в разі потреби крок h зміни параметра $P1$, добираючи $P1$ так, щоб якомога точніше виконувалась рівність $\int_{-P1}^{P1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0.9$, знайдемо, що така рівність має місце, коли $P1 = 1.645$ (Рис. 18.8).

Зазначені інтеграли мають широкі застосування в теорії ймовірностей і математичній статистиці.

Послуга “Операції /Інтеграли /Суми Дарбу” призначена для обчислення верхніх і нижніх сум Дарбу за заданого поділу проміжка $[a,b)$, на якому обчислюється інтеграл $\int_a^b f(x)\,dx$, на інтервали $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,\ k}$ (Рис. 18.9).

Подрібнюючи інтервали, збільшуючи значення одного із параметрів P1, P2, ... , P9, через значення якого задається кількість інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$ (Рис. 18.10), можна спостерігати, як змінюються верхня і нижня суми Дабру, якими обмежується зверху і знизу шукане значення інтеграла $\int_a^b f(x)\,dx$:

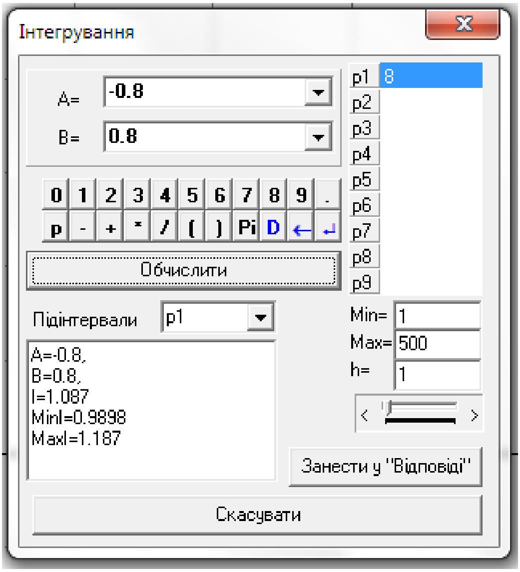


Рис. 18.10

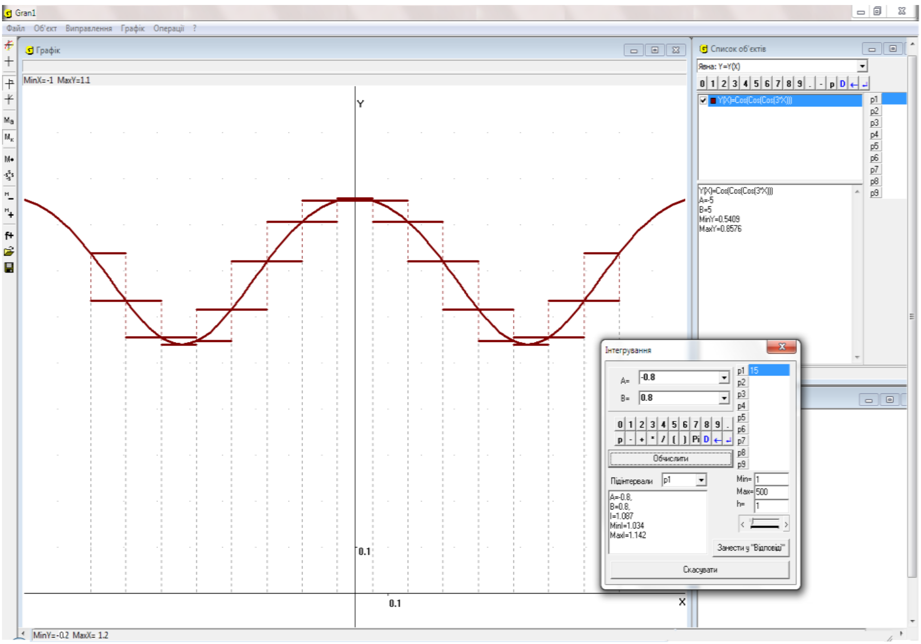


Рис. 18.11

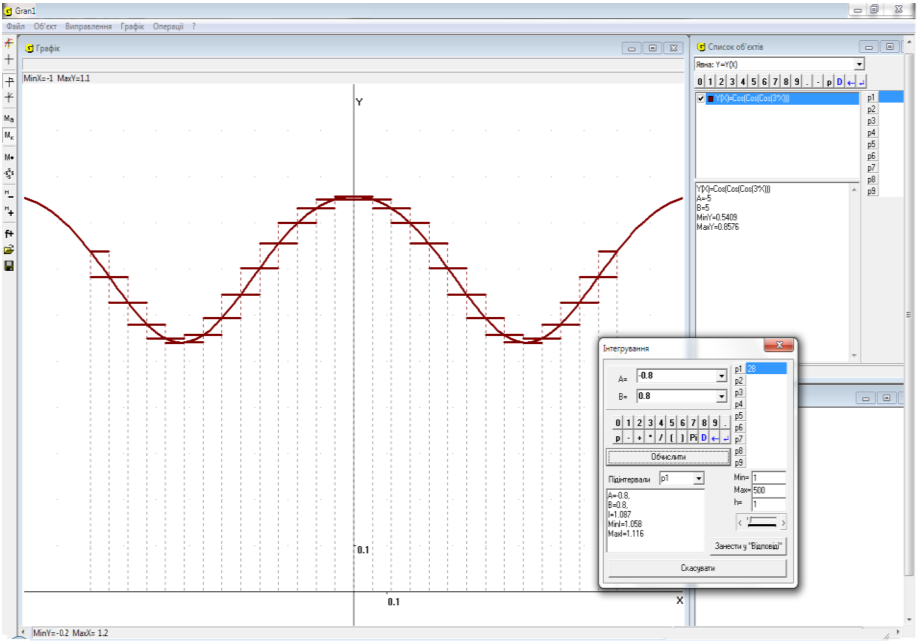


Рис. 18.12

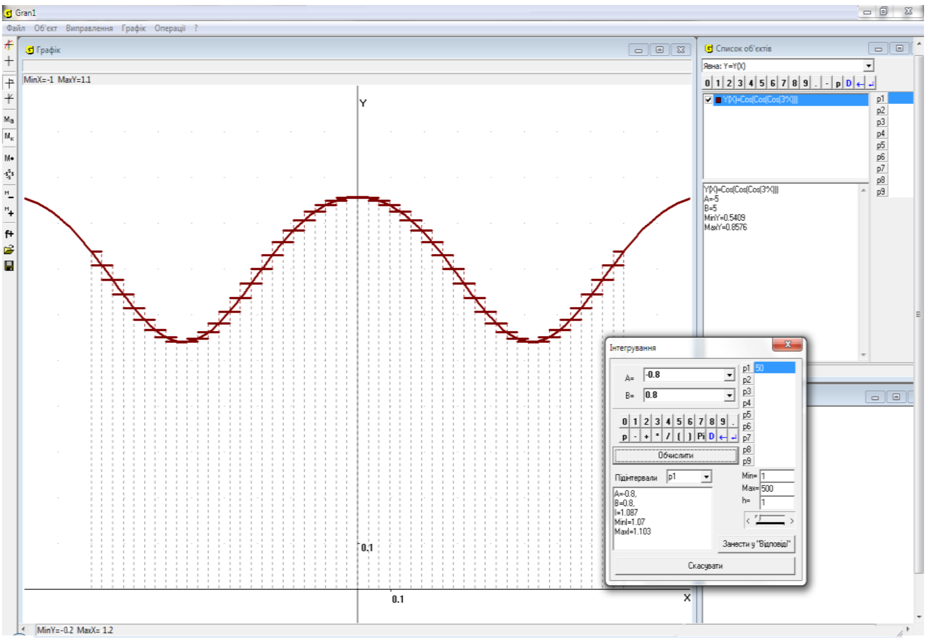


Рис. 18.13

$$\sum_{i=1}^{k} \min_{x\in[a_{i-1},a_i)} f(x)(a_i - a_{i-1}) \le \int_a^b f(x)dx \le \sum_{i=1}^{k} \max_{x\in[a_{i-1},a_i)} f(x)(a_i - a_{i-1}) .$$

Щоб вказати ім’я параметра, через значення якого задається кількість k інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$, потрібно у рядок “Підінтервали” (Рис. 18.10) ввести одне із позначень $P1$, $P2$, ... , $P9$, далі на відповідному рядкові встановити курсор мишки і ввести початкове значення параметра (рядок зафарбовується голубим кольором. Крім того у рядки “Min=”, “Max=”, “h=” потрібно ввести найменше і найбільше значення параметра, а також крок його зміни h (в розглядуваному випадку всі вказані значення мають бути цілі).

Щоб змінювати значення параметра, потрібно зміщувати повзунок (під написом h= ...) вправо чи вліво. Як видно з Рис. 18.11, 18.12, 18.13, із подрібненням інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$ нижня сума Дарбу не зменшується, а верхня сума Дарбу не збільшується і все менше і менше відрізняються між собою, коли кількість інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$ збільшується.

В програмі Gran1 передбачено, що довжини всіх інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$ однакові: $a_i - a_{i-1} = h$, $i \in \overline{1,\, k}$. Коли k збільшувати (змінюючи значення відповідного параметра (Рис. 18.10), довжини інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$ відповідним чином зменшуються.

Слід зауважити, що для того, щоб кількість інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$ була цілим числом, потрібно, щоб крок зміни відповідного параметра був цілим (Рис. 18.10).

Послуга “Операції / Інтеграли / Суми Дарбу” може бути використана під час вивчення поняття визначеного інтеграла в курсі “Алгебра і початки аналізу”.

Послуга “Операція /Інтеграли /Усереднення за інтервалами” призначена для побудови кусково-сталої функції на проміжку $[a, b)$ $\tilde{f}(x) = c_i$, коли $x \in [a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,\, k}$, $\bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i) = [a,\, b)$, такої, що

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)dx = \int_{a_{i-1}}^{a_i} \tilde{f}(x)dx = c_i (a_i - a_{i-1}), \qquad \int_a^b f(x)dx = \int_a^b \tilde{f}(x)dx = \sum_{i=1}^{k} c_i (a_i - a_{i-1})$$

(Рис. 18.14).

Як видно із Рис. 18.14, Рис. 18.15, Рис. 18.16, із подрібненням інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$ різниця між функціями $f(x)$ і $\tilde{f}(x)$ зменшується і $\max | f(x) - \tilde{f}(x) | \to 0$, коли $h = a_i - a_{i-1} \to 0$.

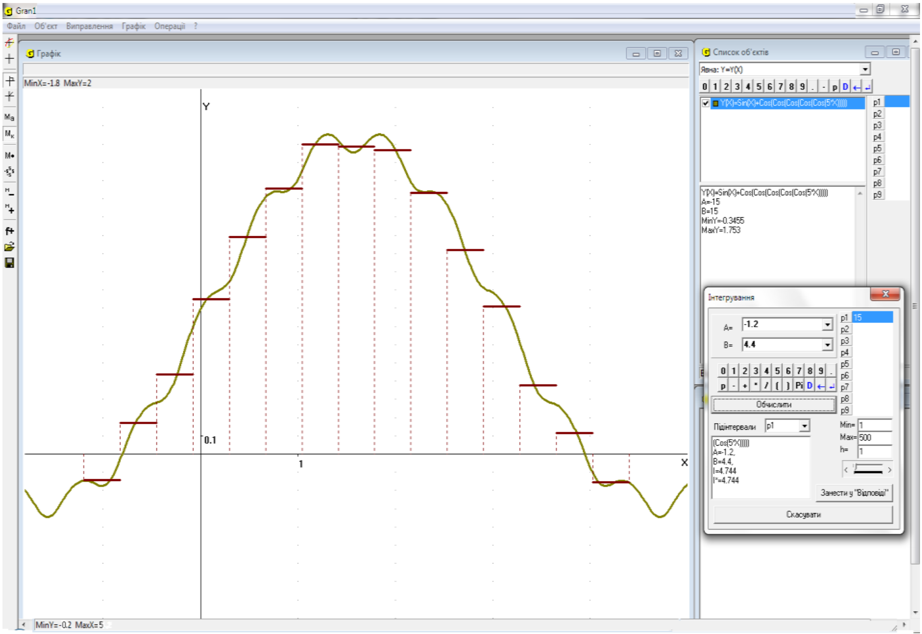


Рис. 18.14

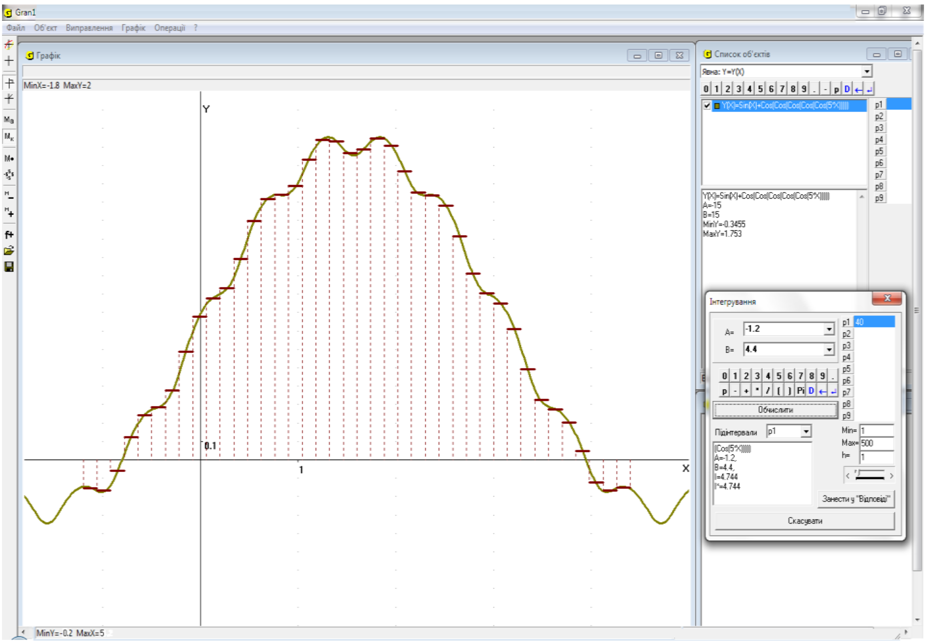


Рис. 18.15

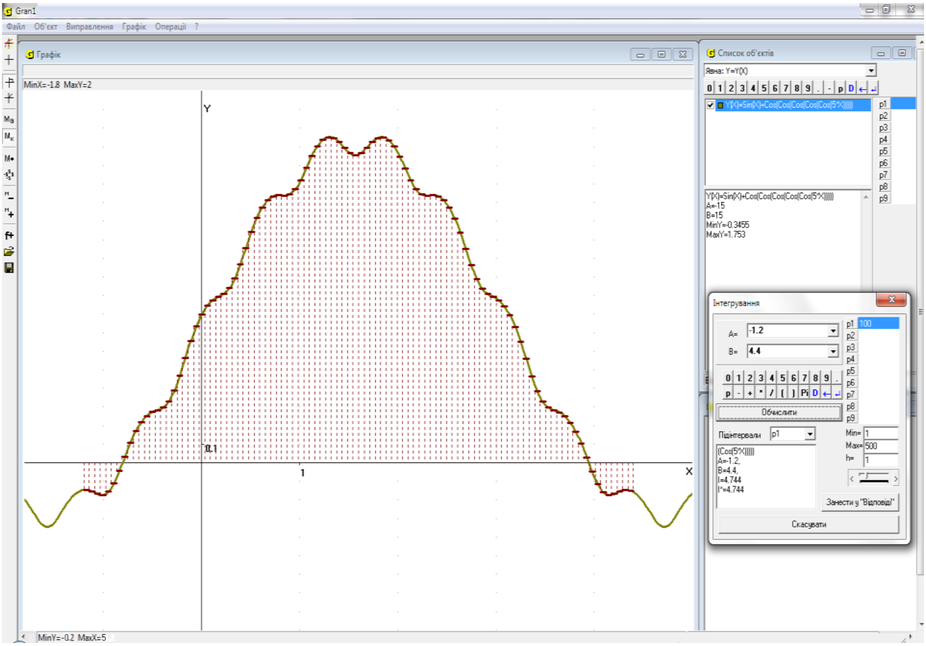


Рис. 18.16

Запитання для самоконтролю

1. Як, використовуючи послуги програми GRAN1, можна знайти наближене значення визначеного інтеграла виду $\int_a^b f(x)dx$?
2. Яке значення в разі звернення до послуги “Операції / Інтеграли / Інтеграл...” програми GRAN1 буде обчислено, якщо у вікні “Список об’єктів” відмічені позначення кількох функцій?
3. Чи обов’язково будувати графік функції $y = f(x)$ перед тим, як звертатися до послуги “Операції / Інтеграли / Інтеграл...” для обчислення інтеграла $\int_a^b f(x)dx$?
4. Які графічні побудови додатково виконуються за програмою GRAN1, якщо перед зверненням до послуги “Операції /Інтеграли /Інтеграл...” побудований графік функції $y = f(x)$?
5. Як можна знайти наближене значення визначеного інтеграла, використовуючи послугу “Операції /Операції з ламаними /Площа многокутника”?
6. Чи можна, знаючи значення визначеного інтеграла деякої функції $y = f(x)$, знайти межі її інтегрування?

7. Як можна знайти наближене значення визначеного інтеграла, використовуючи послугу “Операції / Інтеграли / Суми Дарбу”?

Вправи для самостійного виконання

1. Використовуючи послугу “Операції / Інтеграли / Інтеграл...” програми GRAN1, обчислити визначені інтеграли:

- $\int_{1}^{5} x dx$;
- $\int_{-1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{1+x+x^2}}$;
- $\int_{0}^{4} x^2 dx$;
- $\int_{0.1}^{7.2} \log_2 \sqrt{x^3/7+x+3}\,dx$;
- $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos(x) dx$;
- $\int_{-3}^{3} (2+\cos(x^2)+\log_2(2|x|+|\sin(x)|+3))dx$.

2. Обчислити площу фігури, обмежену лініями:

- $y = x^2$, $y = \frac{x}{2} + 5$;
- $y = 7 - x^2$, $y = 0$;
- $y = \frac{1}{x}$, $y = 5 - x$.

3. Визначити межі інтегрування $a = -P1$, $b = P1$ так, щоб виконувались рівності:

- $\int_{-P1}^{P1} (5 - x^2/7)dx = 21$;
- $\int_{-P1}^{P1} 3\cos x dx = 4$, $P1 \in (0,\ \pi/2)$;
- $\int_{-P1}^{P1} (\frac{1}{3}(x-2.5)^{1/3} - 3\sin(\cos(2x)) + 4)dx = 20$;
- $\int_{-P1}^{P1} (\log_2(|x|+3.7) + \frac{1}{3}\sin(2x^2))dx = 15$.

§19. Обчислення довжини дуги кривої

Довжина дуги деякої кривої в межах від точки $A(x_1, y_1)$ до точки $B(x_2, y_2)$ може бути обчислена за формулою

$$L = \int_A^B \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Якщо крива задана через рівняння виду $y = f(x)$ (причому $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$), тоді формула набуває вигляду:

$$L = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx.$$

Якщо крива задана через рівняння $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, тоді

$$L = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\phi'(t))^2}\, dt.$$

Якщо крива задана в полярних координатах через рівняння виду $r = \rho(\varphi)$, тоді:

$x = \rho(\varphi)\cos\varphi$, $y = \rho(\varphi)\sin\varphi$,

$dx = \big(\rho'(\varphi)\cos\varphi - \rho(\varphi)\sin\varphi\big)d\varphi$, $\quad dy = \big(\rho'(\varphi)\sin\varphi + \rho(\varphi)\cos\varphi\big)d\varphi$,

$dx^2 + dy^2 = (\rho'^2(\varphi) + \rho^2(\varphi))\big(d\varphi\big)^2$, $L = \displaystyle\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho'^2(\varphi) + \rho^2(\varphi)}\, d\varphi$.

Приклади

1. Обчислити довжину дуги параболи $y = x^2$ від точки (0, 0) до точки (3, 9).

У даному прикладі задача зводиться до обчислення інтеграла $\displaystyle\int_0^3 \sqrt{1 + (2x)^2}\, dx$.

Використовуючи послугу “Операції / Інтеграли / Інтеграл...”, одержимо (Рис. 19.1, Рис. 19.2)

$$\int_0^3 \sqrt{1 + 4x^2}\, dx \approx 9.747\ .$$

2. Обчислити довжину дуги циклоїди $x(t) = 2(t - \sin t)$, $y(t) = 2(1 - \cos t)$ у межах зміни параметра t від 0 до 2π.

У даному випадку довжина дуги може бути обчислена за формулою

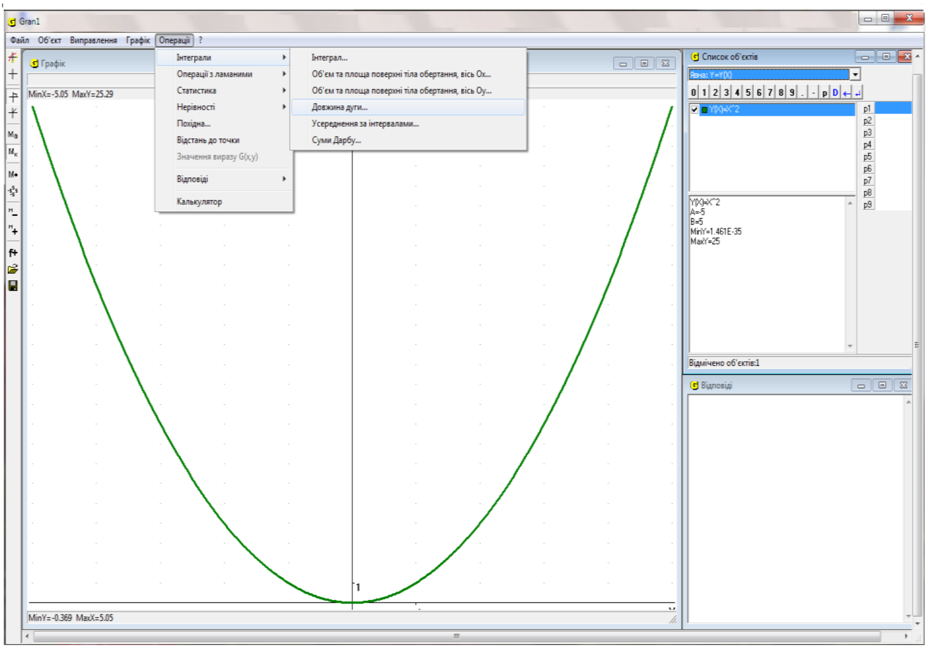


Рис. 19.1

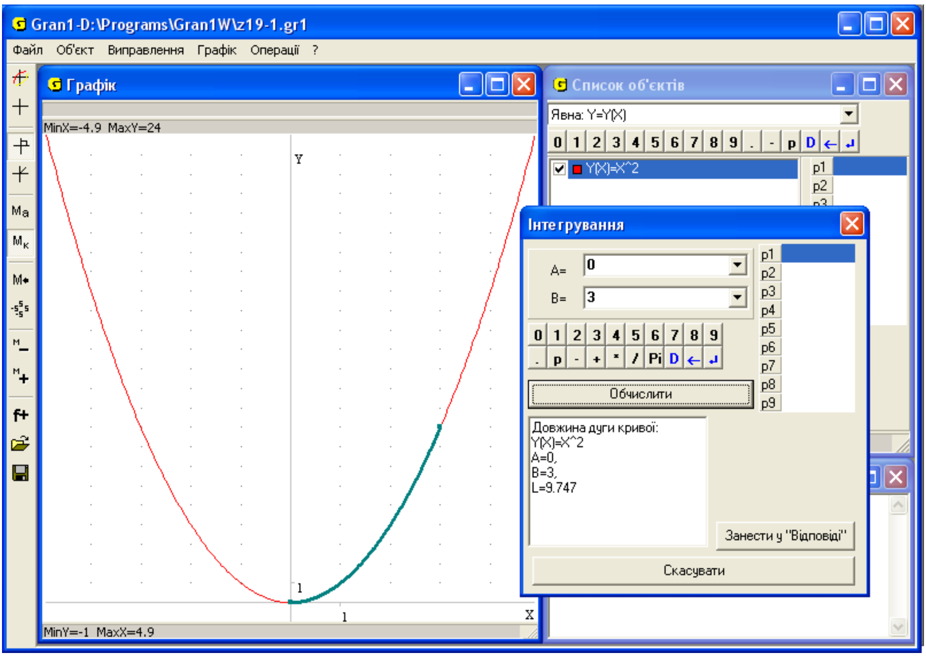


Рис. 19.2

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt.$$

Для конкретних даних розглянутого прикладу одержуємо

$$L=\int_{0}^{2\pi}\sqrt{(2(1-\cos(t)))^2+(2\sin(t))^2}\,dt.$$

Використовуючи послугу “Операції / Інтеграли / Інтеграл...”, в результаті одержимо $L\approx 16.0$ (Рис. 19.3).

У програмі GRAN1 передбачена спеціальна послуга “Операції / Інтеграли / Довжина дуги...”, звернення до якої дає можливість визначити довжину дуги між двома вказаними точками (Рис. 19.1).

В такому разі відповідна залежність може бути задана явно, параметрично, в полярних координатах, у вигляді полінома, за допомогою якого наближається таблично задана функція.

Для використання послуги необхідно ввести межі, в яких змінюється значення аргумента, так само, як це робилось під час обчислення інтеграла (Рис. 19.2)

Скориставшись послугою “Операції / Інтеграли / Довжина дуги...” для обчислення довжини дуги параболи $y=x^2$ в межах від $x=0$ до $x=3$ одержимо $L\approx 9.75$ (Рис. 19.2). В даному випадку у відповідної частини дуги у вікні “Графік” змінюється колір. За потреби результат обчислень можна занести до вікна “Відповіді”.

Для довжини дуги циклоїди $x(t)=2(t-\sin t)$, $y(t)=2(1-\cos t)$ у межах зміни параметра t від 0 до 2π, одержимо $L\approx 16.0$ (Рис. 19.3).

Наближено довжину дуги кривої з будь-яким типом задання залежності між змінними можна обчислити, використовуючи послугу “Операції / Операції з ламаними / Довжина ламаної…”, розташувавши вершини ламаної на кривій так, щоб ламана була якомога ближче до кривої.

3. Нехай необхідно наближено визначити довжину контуру однієї пелюстки семипелюсткової троянди, рівняння якої в полярних координатах має вигляд $\rho=4\sin(7\varphi)$.

Розташовуючи вздовж контуру пелюстки вершини ламаної, наприклад, як показано на Рис. 19.4, і звертаючись потім до послуги “Операції / Операції з ламаними / Довжина ламаної...”, вказавши як початковий і кінцевий номери вершин один і той самий номер 1, одержимо – довжина контура однієї пелюстки семипелюсткової троянди $\rho=4\sin(7\varphi)$ наближено дорівнює $L\approx 8.23$ (Рис. 19.4).

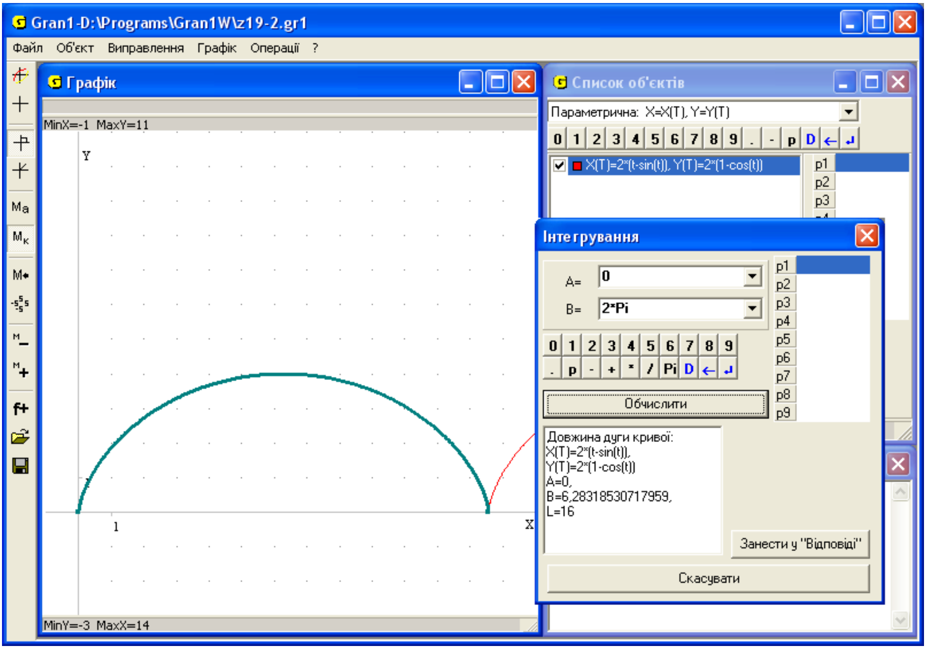


Рис. 19.3

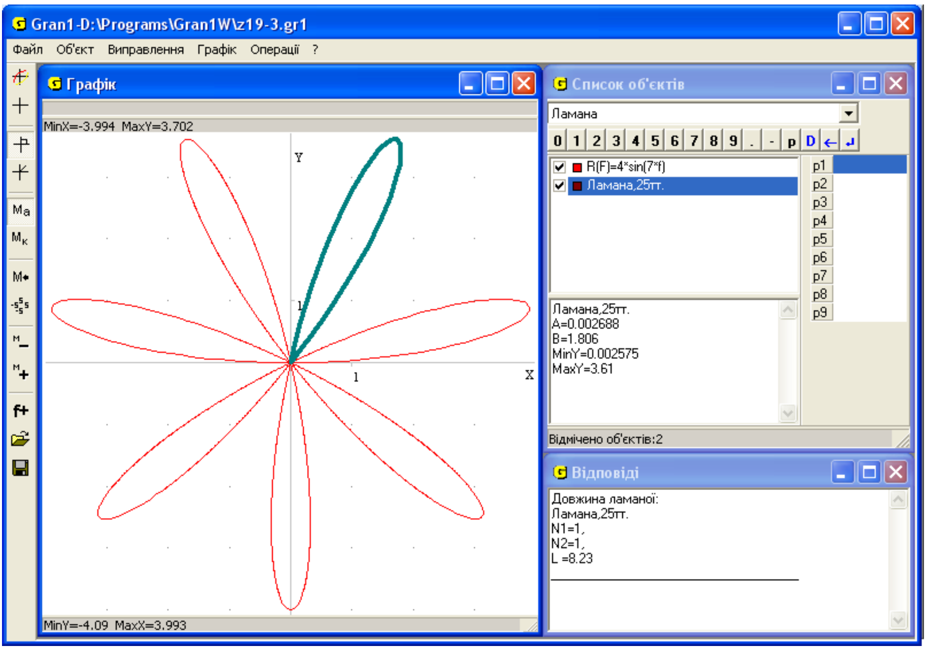


Рис. 19.4

Запитання для самоконтролю

1. Як з використанням послуги "Операції / Інтеграли / Інтеграл..." обчислити довжину дуги лінії, що описується рівнянням $y = f(x)$, у межах від точки $(a, f(a))$ до точки $(b, f(b))$?
2. Як з використанням послуги "Операції / Інтеграли / Інтеграл..." обчислити довжину дуги лінії, заданої рівняннями $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, у межах від точки $(\varphi(t_1), \phi(t_1))$ до точки $(\varphi(t_2), \phi(t_2))$?
3. Як з використанням послуги "Операції / Операції з ламаними / Довжина ламаної" наближено визначити довжину дуги кривої?

Вправи для самостійного виконання

1. Обчислити довжину дуги лінії в заданих межах:
   - $y = 2x$, коли x змінюється від -2 до 3,
   - $y = \frac{1}{x}$, коли x змінюється від $\frac{1}{4}$ до 4,
   - $y = x^2$, коли x змінюється від 0 до 1,
   - $y = \sin 2x$, коли x змінюється від 0 до 1,
   - $y = \cos x$, коли x змінюється від $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$,
   - $y = \log_2 x$, коли x змінюється від $\frac{1}{4}$ до 8.
2. Визначити, за якого значення $P1$ довжина дуги в межах від 0 до $P1$ набуватиме наперед заданого значення L:
   - $y = x^2$, $L = 15$;
   - $x(t) = 2(t - \sin t)$, $y(t) = 2(1 - \cos t)$, $L = 10$;
   - $y = \cos x$, $L = 2$;
   - $x(t) = 4\cos t$, $y(t) = 4\sin t$, $L = 15$.

§20. Обчислення об'ємів і площ поверхонь тіл обертання

Для обчислення площ поверхонь і об'ємів тіл, обмежених поверхнями, утвореними обертанням ламаних ліній навколо однієї з координатних осей, призначені послуги "Операції / Операції з ламаними / Об'єм та площа поверхні тіла обертання, вісь Ox" і "Операції / Операції з ламаними / Об'єм та площа поверхні тіла обертання, вісь Oy". Такі ламані не повинні перетинати вісь обертання.

Якщо ламана незамкнена, тоді обчислюється площа поверхні, описуваної ламаною, і об'єм тіла, що утворилося б в разі обертання замкненої ламаної, одержуваної з заданої після проектування її вільних кінців на вісь обертання і вставляння цих точок-проекцій між вільними кінцями ламаної (обидві точки-проекції з'єднуються зі своїми прообразами і між собою).

Приклади

1. Обчислити площу бічної поверхні та об'єм зрізаного конуса, радіус більшої основи якого дорівнює 4, меншої – 2, а висота конуса 5.

Створимо новий об'єкт – ламану, що складається з одного відрізка з координатами кінців (0, 2) і (5, 4).

Встановивши масштаб так, щоб вісь Ox проходила посередині вікна "Графік", побудуємо зображення ламаної (Рис. 20.1).

Звернувшись потім до послуги "Операції / Операції з ламаними / Об'єм та площа поверхні тіла обертання, вісь Ox"(Рис. 20.1), одержимо у вікні "Графік" зображення конуса (тіла, що одержується в результаті обертання ламаної навколо осі Ox), а у вікні "Відповіді" – $S = 101.5$, $V = 146.6$ (Рис. 20.2), де S – площа бічної поверхні розглядуваного зрізаного конуса, V – об'єм.

Якщо тепер побудувати ламану з трьох ланок (незамкнену) з вершинами в точках (0, 0), (0, 2), (5, 4), (5, 0), (Рис. 20.3), і звернутися до послуги "Операції / Операції з ламаними / Об'єм та площа поверхні тіла обертання, вісь Ох", одержимо $S = 164.3$, $V = 146.6$, де S – площа повної поверхні конуса (Рис. 20.4).

Якщо обертати навколо осі Ox відрізок з вершинами (5, 4), (5, 0) (Рис. 20.5), тоді одержимо $S = 50.27$, $V = 0$, де S – площа нижньої (більшої) основи розглядуваного зрізаного конуса (Рис. 20.6).

Якщо обертати навколо осі Ox відрізок з вершинами (0, 0), (0, 2), тоді одержимо $S = 12.57$, $V = 0$, де S – площа верхньої (меншої) основи конуса (Рис. 20.7).

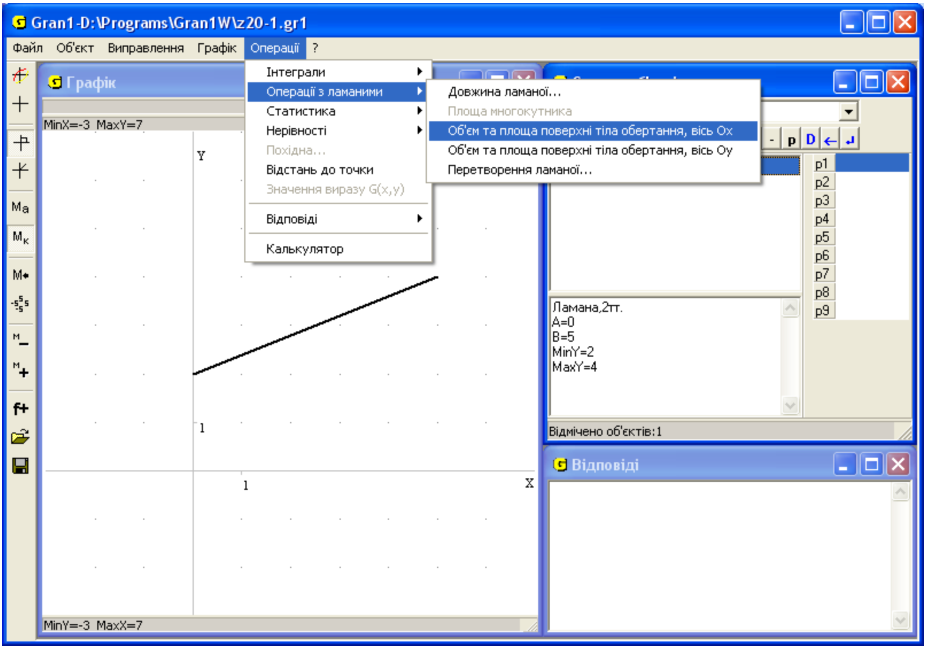


Рис. 20.1

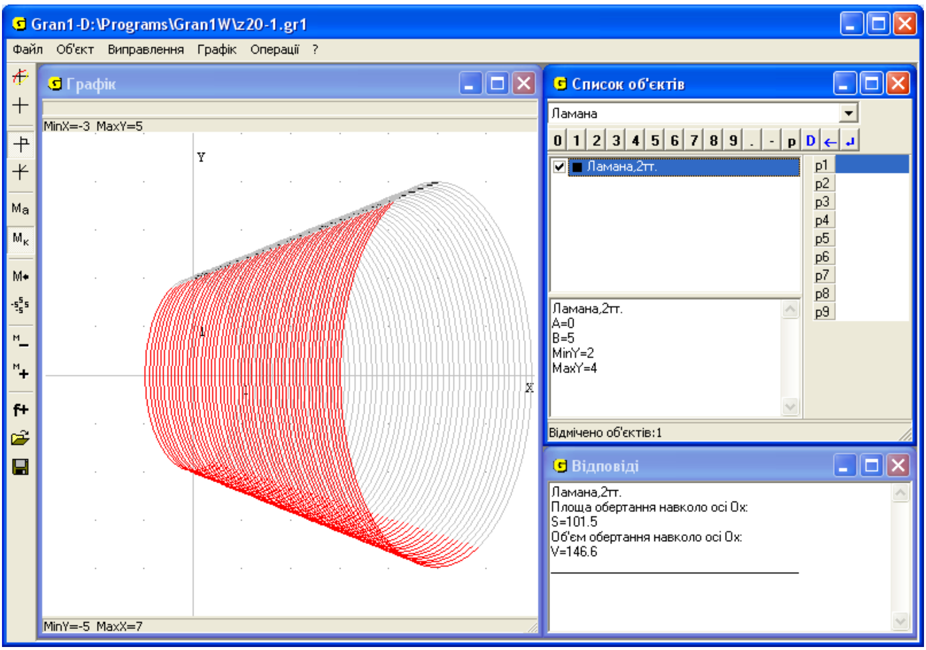


Рис. 20.2

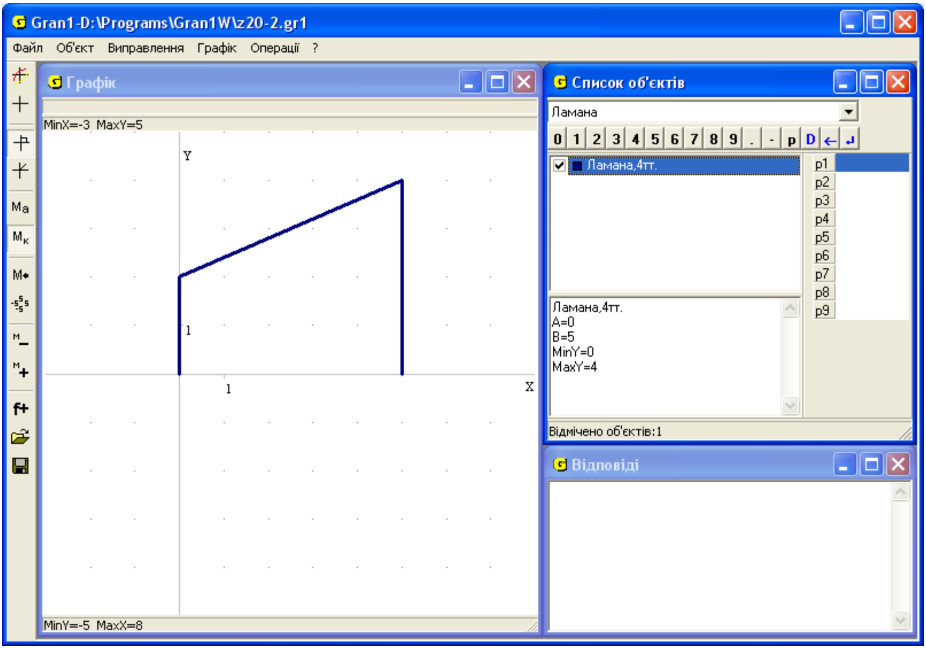


Рис. 20.3

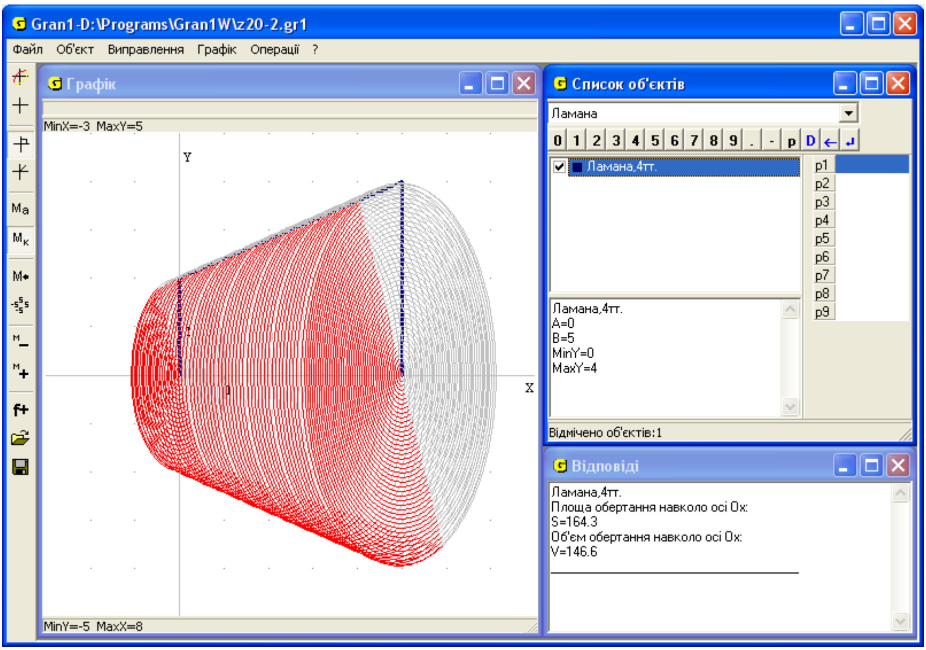


Рис. 20.4

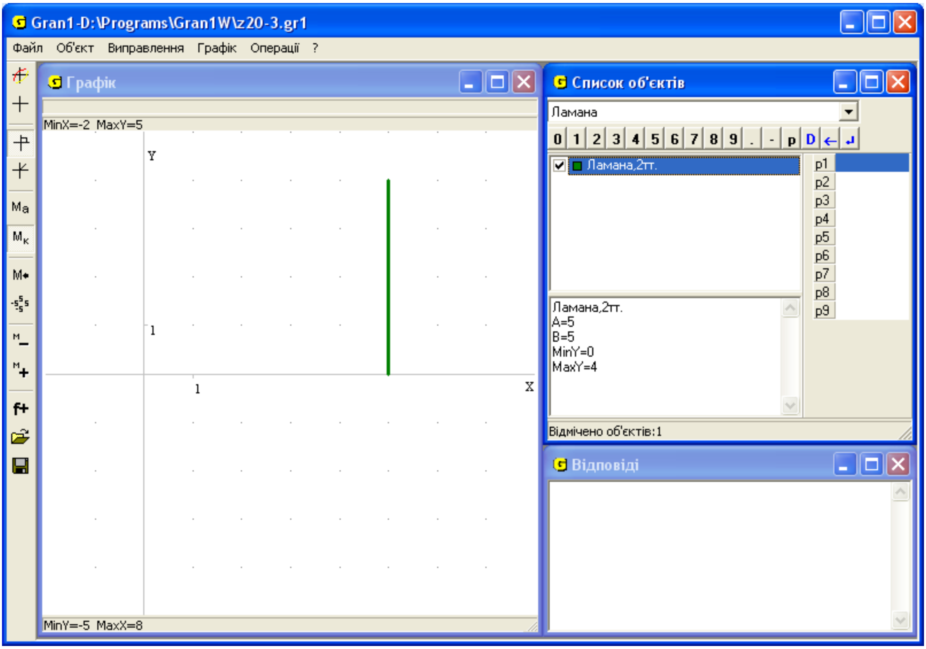


Рис. 20.5

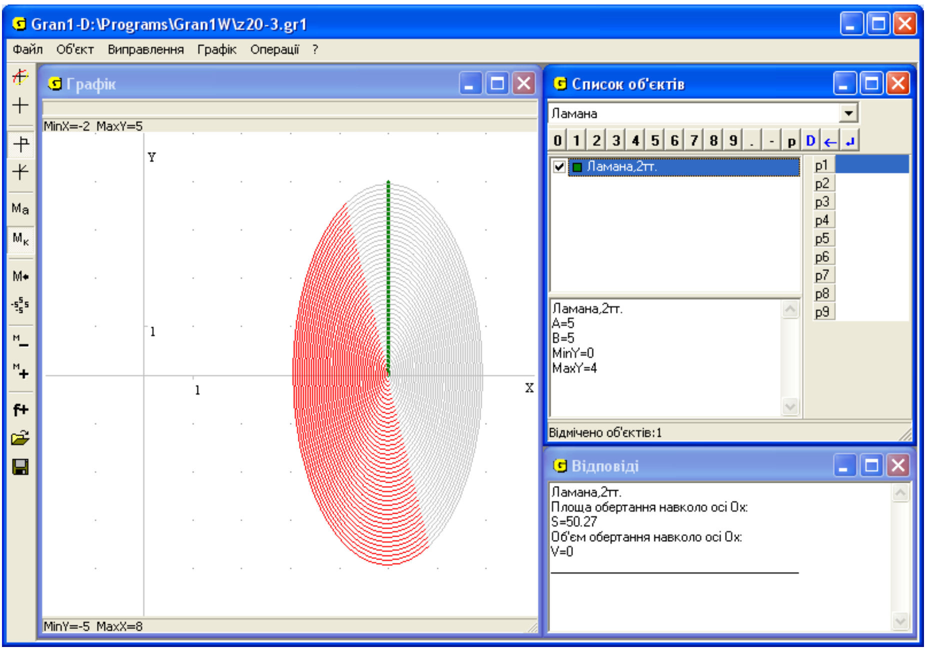


Рис. 20.6

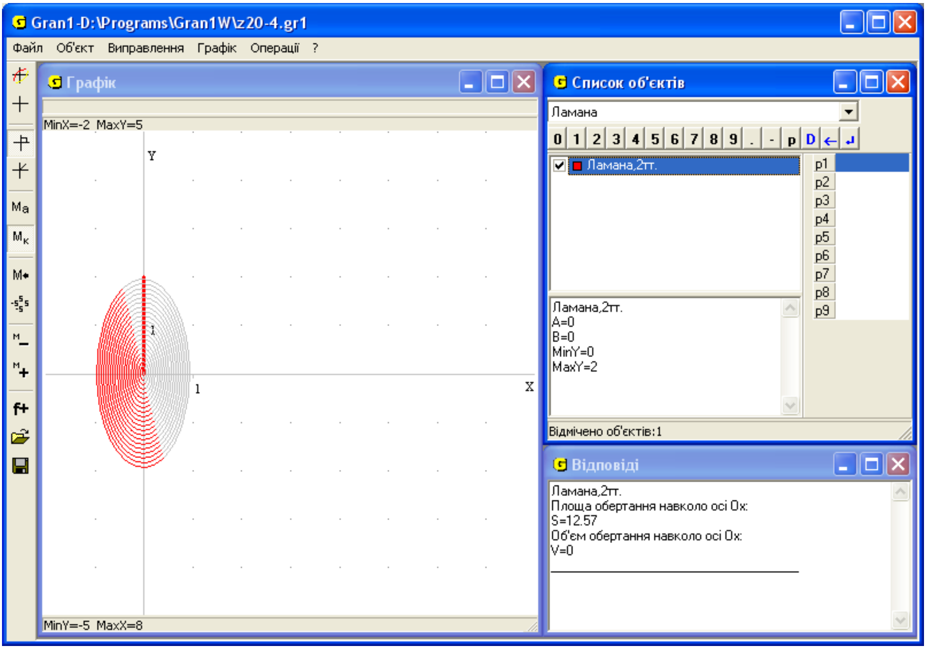


Рис. 20.7

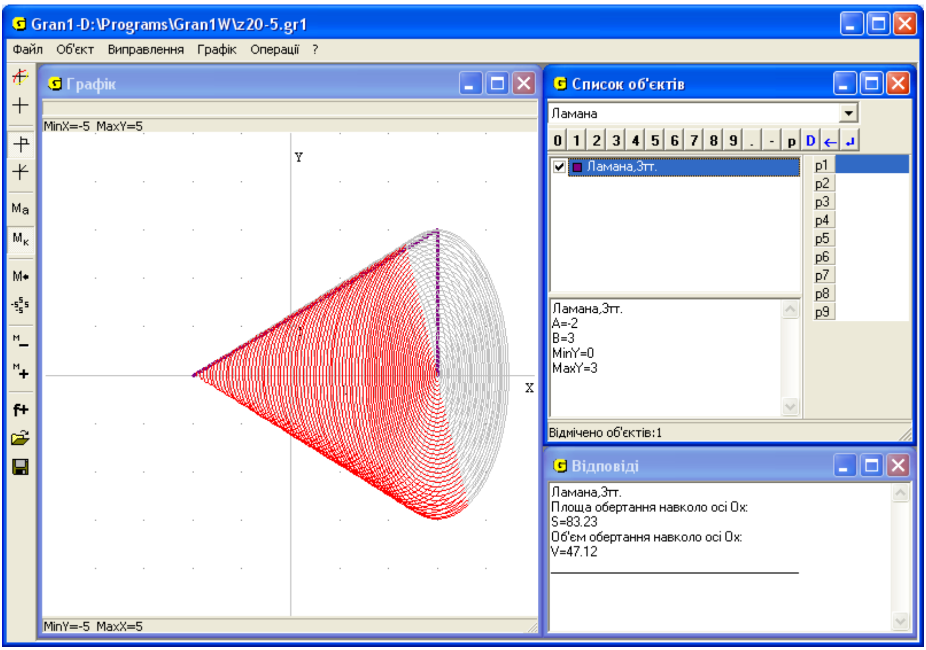


Рис. 20.8

Якщо обертати відрізок, не перпендикулярний до осі обертання, один з кінців якого буде лежати на осі обертання, то після звернення до послуги “Операції / Операції з ламаними / Об’єм та площа поверхні тіла обертання, вісь Ox” одержимо об’єм і площу бічної поверхні конуса (незрізаного), а якщо відрізок паралельний до осі обертання, одержимо об’єм і площу бічної поверхні відповідного циліндра.

2. Ламана визначається за трьома точками (–2, 0), (3, 3), (3, 0), тобто висота конуса 5, а радіус основи 3. Тоді після звернення до послуги “Операції / Операції з ламаними / Об’єм та площа поверхні тіла обертання, вісь Ox”, одержимо – площа повної поверхні $S = 83.23$, $V = 47.12$ (Рис. 20.8).

Використовуючи послуги “Операції / Операції з ламаними / Об’єм та площа поверхні тіла обертання, ...”, можна наближено обчислювати площі поверхонь і об’єми тіл обертання, обмежених поверхнями, одержуваними в результаті обертання навколо осі Ox чи осі Oy довільних ліній, які не перетинаються з віссю обертання.

Для цього потрібно вбудувати в задану лінію ламану так, щоб вона якомога менше відхилялася від лінії, яку ламаною наближають, після чого скористатися послугою “Операції / Операції з ламаними / Об’єм та площа поверхні тіла обертання, ...”.

3. Обчислити наближено площу поверхні і об’єм тіла, обмеженого поверхнею, одержуваною в результаті обертання кола радіуса 1 з центром у точці (0, 2) навколо осі Ox .

Створимо новий об’єкт – “Коло”, у якого центр та радіус будуть задовільняти умови задачі. Скориставшись послугою створення ламаної, введемо координати вершин ламаної з екрану: впишемо в задане коло ламану так, щоб вона якомога менше відхилялась від кола. В даному разі зручно встановити масштаб $MinX = -1.1$, $MaxX = 1.1$, $MinY = 0.9$, $MaxY = 3.1$ (Рис. 20.9).

Встановивши далі масштаби $MinX = -3.5$, $MaxX = 3.5$, $MinY = -3.5$, $MaxY = 3.5$, звернемося до послуги “Операції / Операції з ламаними / Об’єм та площа поверхні тіла обертання, вісь Ox”. В результаті одержимо $S = 78.86$, $V = 39.25$ (Рис. 20.10). Зауважимо, що чим більше точок ламаної буде взято на колі, тим точнішим буде одержаний результат.

Для обчислення об’єму тіла, обмеженого поверхнею, утвореною обертанням лінії, описуваної рівнянням виду $y = f(x)$, навколо осі Ox (чи осі Oy), і площинами $x = a$, $x = b$ (чи $y = c$, $y = d$), в програмі GRAN1 також передбачені відповідні послуги.

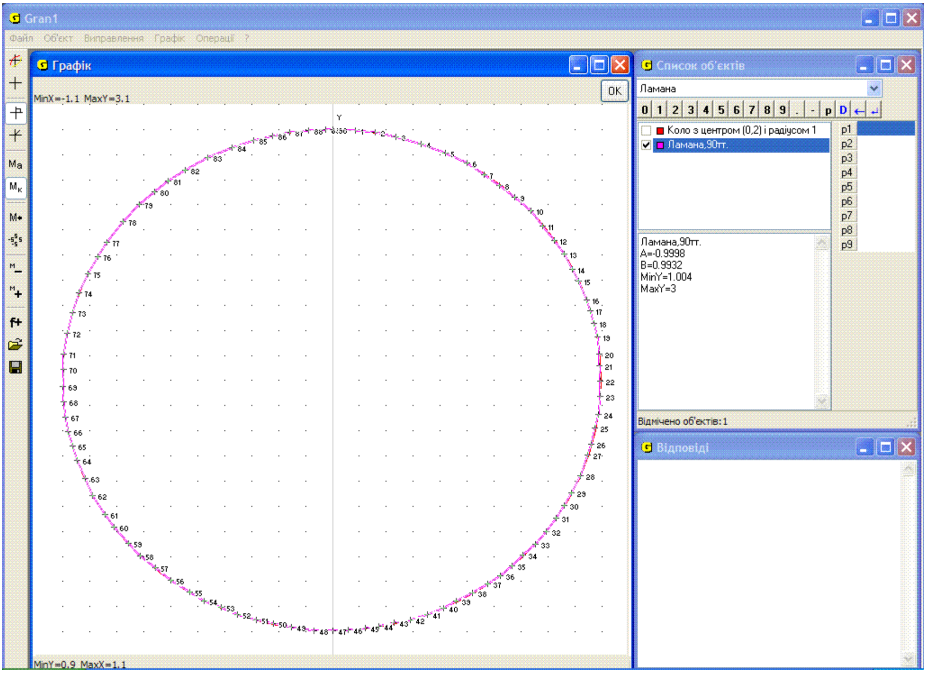


Рис. 20.9

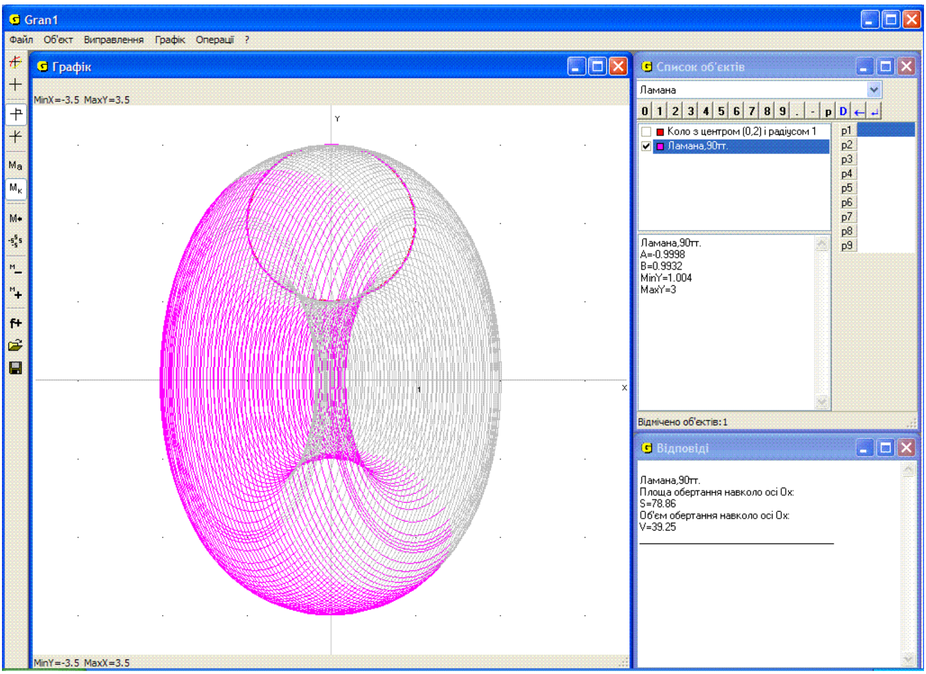


Рис. 20.10

Послуга “Операції / Інтеграли / Об’єм і площа поверхні тіла обертання, вісь Ох...” призначена для обчислення об’єму і площі поверхні тіла, обмеженого поверхнями, утвореними обертанням навколо осі Ox графіка залежності, заданої у вигляді $y = f(x)$, і прямих $x = a$, $x = b$. Позначення залежності у вікні “Список об’єктів” в розглядуваному випадку повинне бути відмічене (Рис. 20.11).

Послуга “Операції / Інтеграли / Об’єм і площа поверхні тіла обертання, вісь Оу...” призначена для обчислення об’єму і площі поверхні тіла, обмеженого поверхнями, утвореними обертанням навколо осі Oy графіка залежності, заданої у вигляді $y = f(x)$, і прямих $y = f(a)$, $y = f(b)$ (Рис. 20.12).

Якщо підкреслені позначення кількох залежностей, то всі так знайдені об’єми і площі поверхонь тіл обертання додаються. Значення виразу $f(x)$ обчислюються лише в межах відрізка його задання. Це дає можливість обчислювати об’єми тіл, утворених обертанням навколо осі Ox графіка залежності, заданої різними виразами виду $y = f(x)$ на суміжних відрізках.

Зауважимо, що об’єм тіла, обмеженого поверхнею, утвореною обертанням лінії, описуваної через рівняння виду $y = f(x)$, навколо осі Ox, і площинами $x = a$, $x = b$, можна обчислити також, скориставшись послугою “Операції / Інтеграли / Інтеграл...” для обчислення визначеного інтеграла виду $\int_a^b \pi y^2 dx = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx,$ значення якого і буде значенням шуканого об’єму.

Аналогічно, об’єм тіла, обмеженого поверхнею, утвореною обертанням лінії, описуваної через рівняння виду $y = f(x)$, навколо осі Oy, і площинами $y = c$, $y = d$ (де $c = f(a)$, $d = f(b)$) можна обчислити, використовуючи послугу “Операції / Інтеграли / Інтеграл...” для обчислення визначеного інтеграла $\int_c^d \pi x^2 dy = \int_a^b \pi f'(x) x^2 dx$, чи $\int_c^d \pi (g(y))^2 dy,$ де $g(y)$ – функція, обернена до $f(x)$.

Об’єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$, $y = 0$ (коли $f(x) \geq 0$) можна обчислити також за формулою $\int_a^b 2\pi x f(x) dx.$

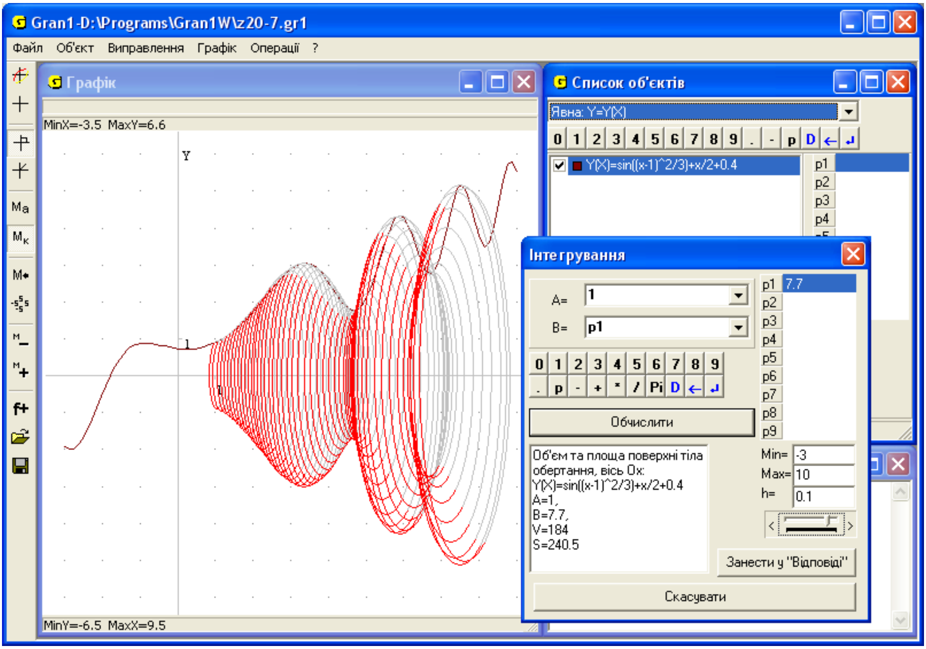


Рис. 20.11

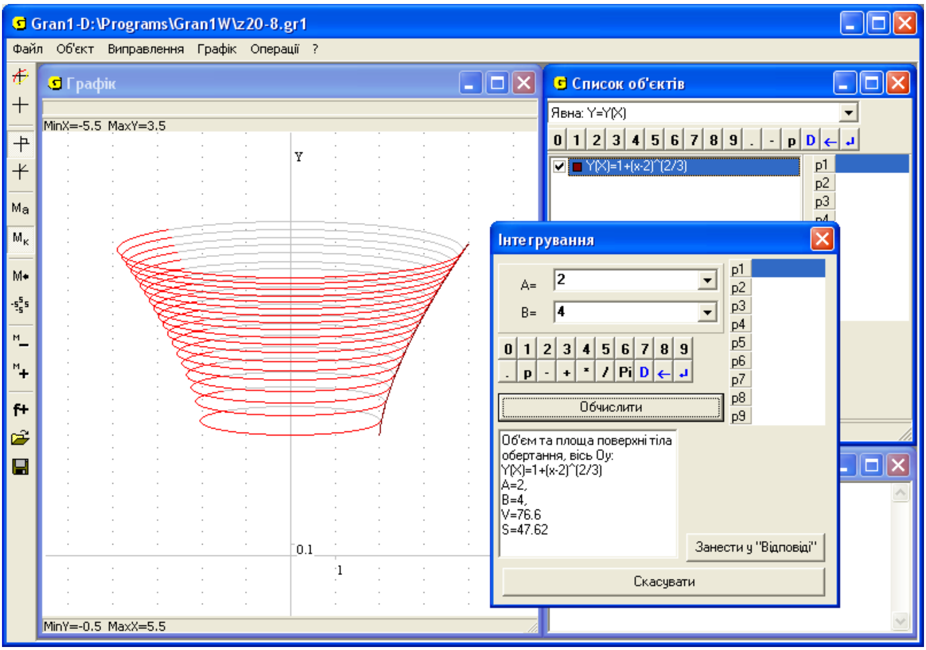


Рис. 20.12

Площа поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox кривої $y = f(x)$ в межах від точки $(a, f(a))$ до точки $(b, f(b))$, обчислюється за формулою: $S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\,dx$, а якщо крива описується за рівняннями виду $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$, $t \in [t_1, t_2]$, тоді за формулою

$$S = \int_{t_1}^{t_2} 2\pi\phi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\phi'(t))^2}\,dt.$$

4. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнею, утвореною обертанням кривої $y = \frac{x}{3} + \cos(2x) + 3$ навколо осі Ox, в межах від $x_1 = -\pi$ до $x_2 = \pi$.

Побудувавши графік заданої функції, звернемося до послуги "Операції / Інтеграли / Об'єм і площа поверхні тіла обертання, вісь Ox ...", вказавши задані межі інтегрування $a = -\pi$, $b = \pi$. В результаті одержимо $V \approx 194.7$, $S \approx 203.4$ (Рис. 20.13).

5. Обчислити об'єм конуса, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $x = 0$, $y = 6 - 2|x|$.

Побудуємо графік функції $y = 6 - 2abs(x)$. Звернувшись до послуги "Операції / Інтеграли / Об'єм і площа поверхні тіла обертання, вісь

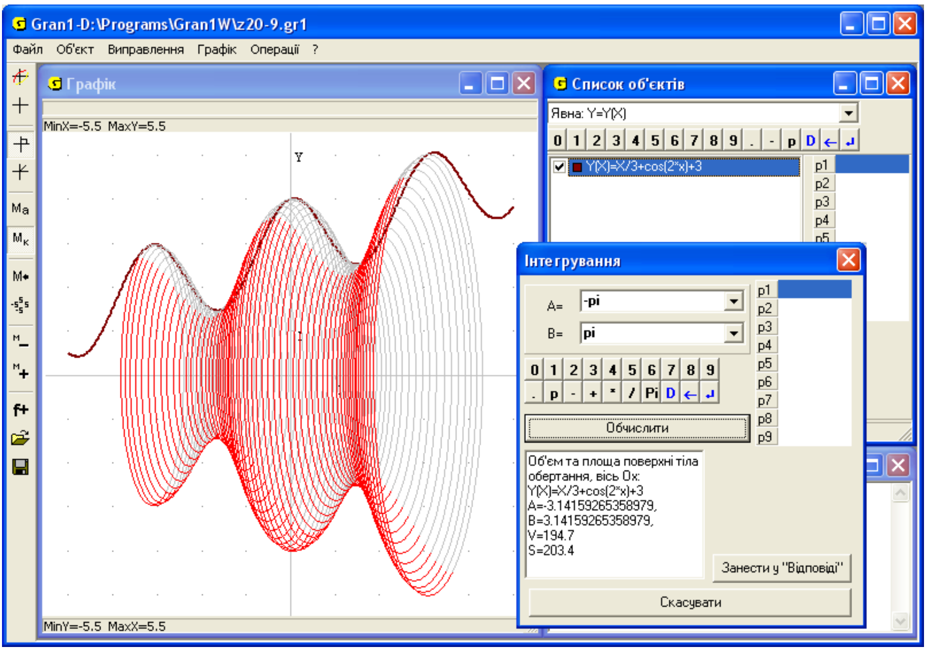


Рис. 20.13

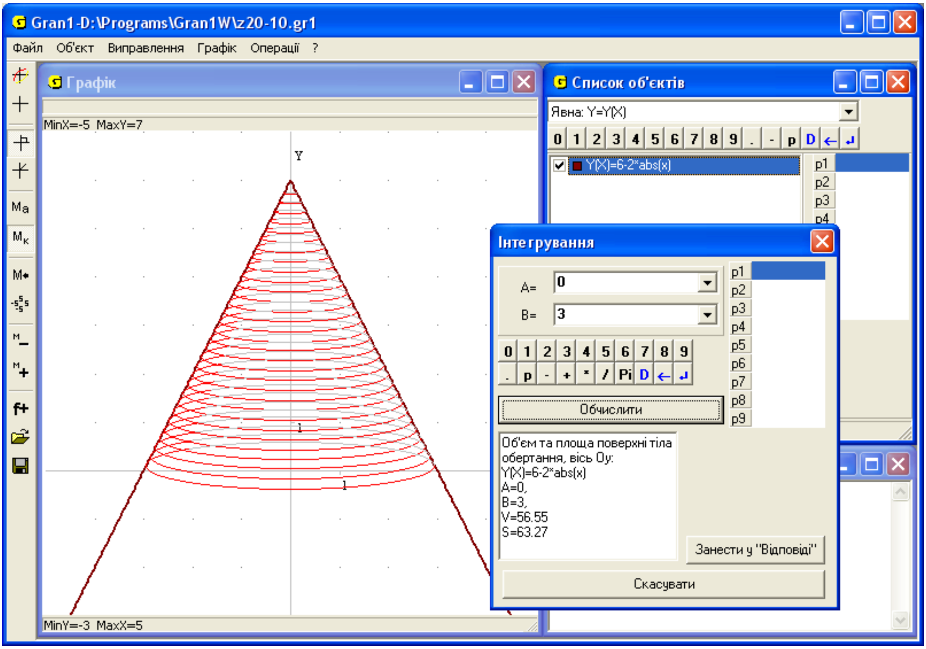


Рис. 20.14

Oy ...” і вказавши межі інтегрування $a = 0$, $b = 3$, одержимо $V \approx 56.55$, а також $S \approx 63.27$ – Рис. 20.14.

6. Обчислити об’єми конусів, утворених обертанням навколо осі Ox і осі Oy відрізка прямої $y = 1 - x$ між точками (0, 1) і (1, 0).

Побудуємо графік залежності $y = 1 - x$. Звернувшись спочатку до послуги “Операції / Інтеграли / Об’єм і площа поверхні тіла обертання, вісь Ox ...” і вказавши межі інтегрування $a = 0$, $b = 1$, одержимо $V \approx 1.047$, $S \approx 4.439$ (Рис. 20.15).

Звернувшись далі до послуги “Об’єм…, вісь Oy ” і знову вказавши межі $a = 0$, $b = 1$, одержимо $V \approx 1.047$, $S \approx 4.446$ (Рис. 20.16).

7. Обчислити об’єм кулі, утвореної обертанням півкруга радіуса 2 з центром в початку координат навколо осі Ox.

Побудуємо графік півкола $y = \sqrt{4 - x^2}$, яким обмежується вказаний півкруг. Звернувшись до послуги “Операції / Інтеграли / Об’єм і площа поверхні тіла обертання, вісь Ox ...” і вказавши межі інтегрування $a = -2$, $b = 2$, одержимо $V \approx 33.51$, $S \approx 50.27$ (Рис. 20.17).

Зокрема, якщо цей самий об’єм обчислювати за формулою $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$, коли $R = 2$, одержимо $V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 2^3 \approx 33.51$.

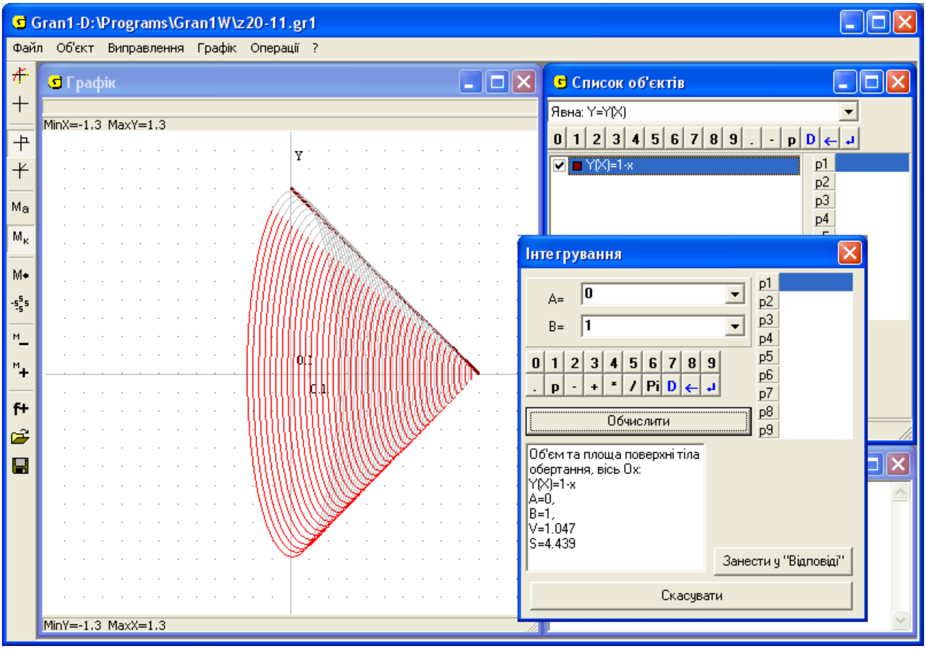


Рис. 20.15

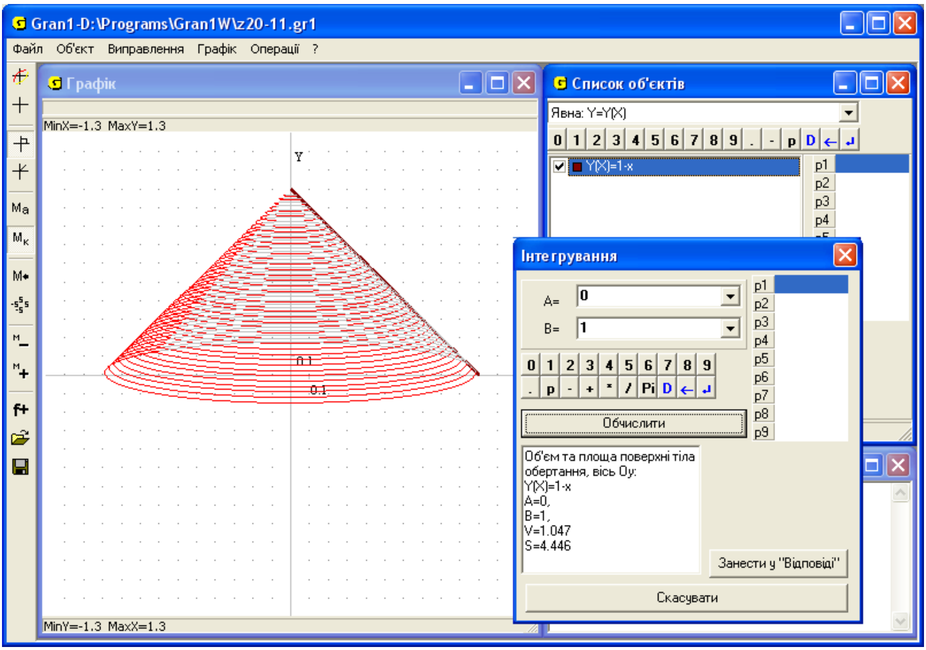


Рис. 20.16

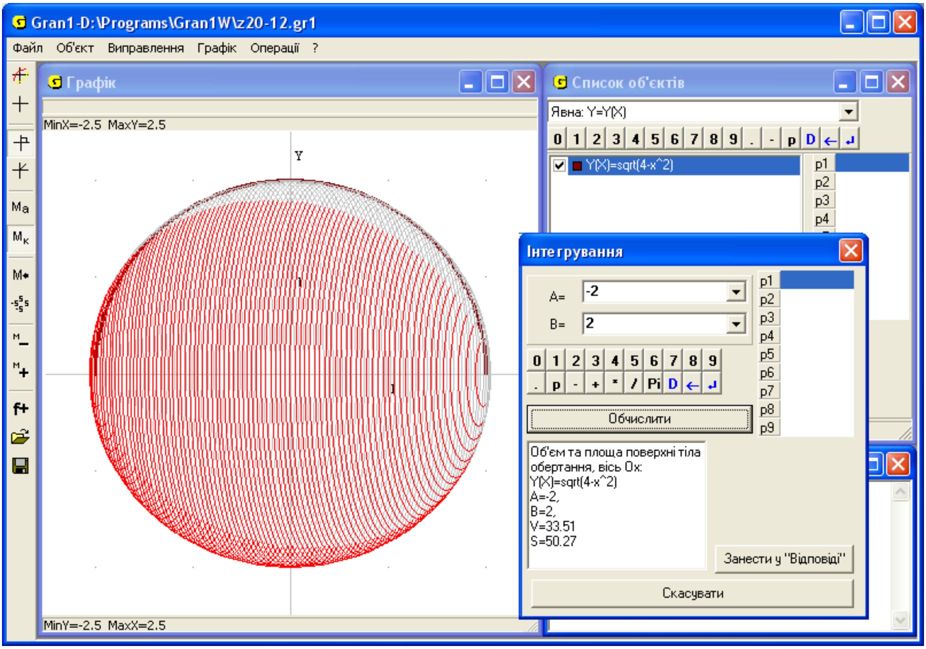


Рис. 20.17

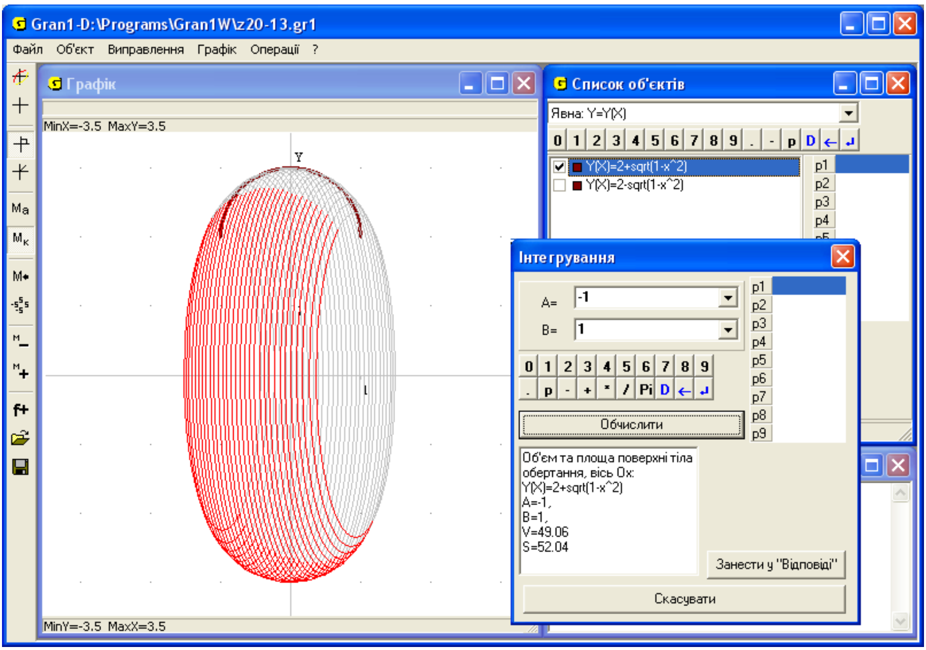


Рис. 20.18

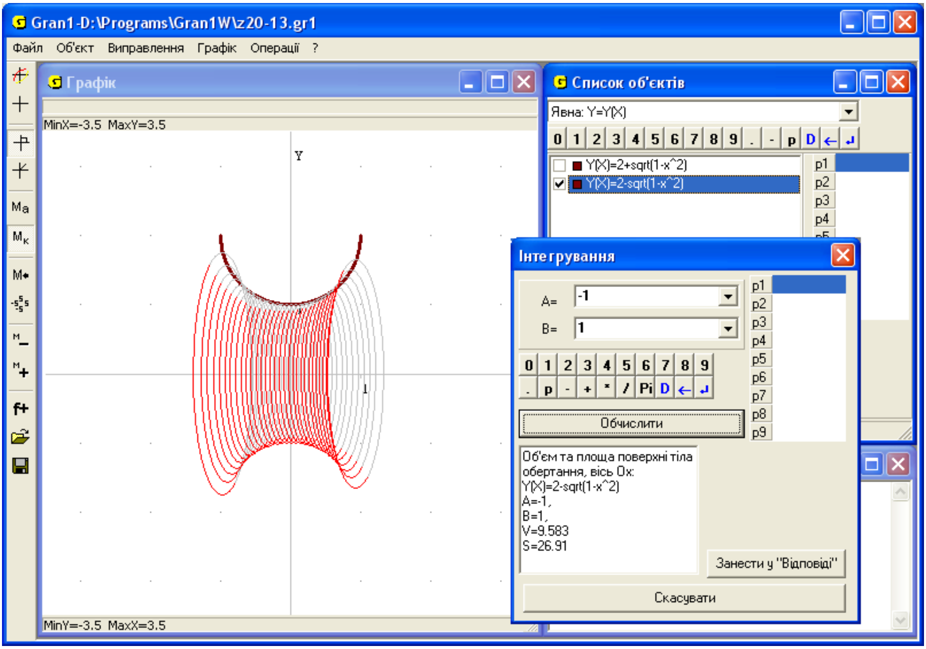


Рис. 20.19

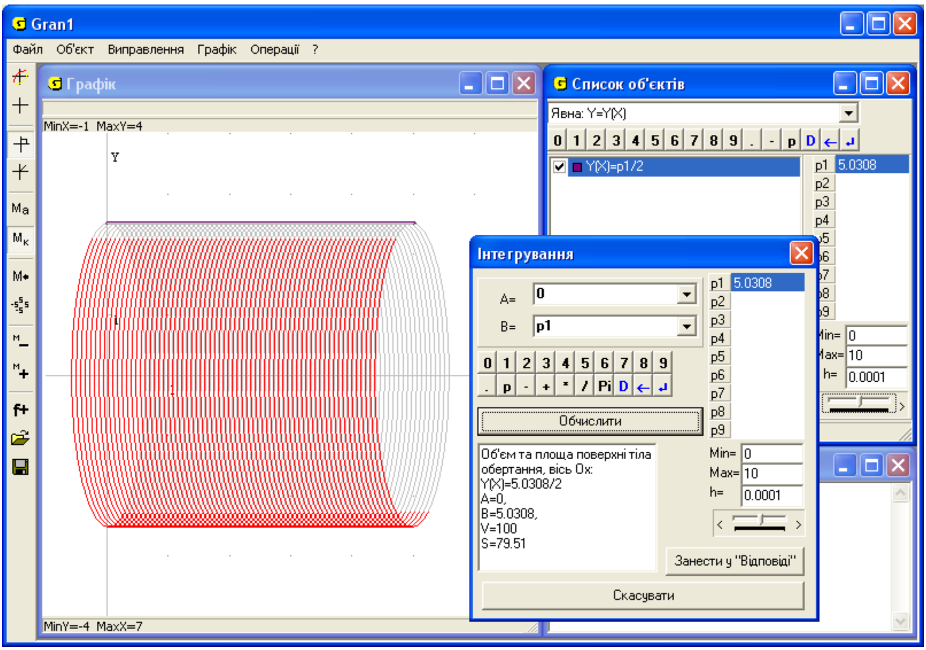


Рис. 20.20

8. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням круга радіуса 1 з центром в точці (0, 2) навколо осі Ox .

Побудувавши графіки функцій $y = 2 + \sqrt{1 - x^2}$, $y = 2 - \sqrt{1 - x^2}$, обчислимо різницю об'ємів $V_1 = \int_{-1}^{1} \pi y_1^2(x)dx$ і $V_2 = \int_{-1}^{1} \pi y_2^2(x)dx$. Для цього побудуємо графіки обох функціональних залежностей. Потім обчислимо об'єм тіла обертання V_1, для чого знімемо мітку з позначення другої залежності. В результаті одержимо $V_1 \approx 49.06$ (Рис. 20.18). Потім обчислимо об'єм тіла обертання V_2, для чого знімемо мітку з позначення першої залежності і поставимо на другу. Одержимо $V_2 \approx 9.583$ (Рис. 20.19). Віднявши від першого об'єму другий, одержимо $V = V_1 - V_2 \approx 39.48$. Таким чином, шуканий об'єм $V \approx 39.48$.

Порівнюючи цей результат з результатом, одержаним з використанням ламаної (приклад 3, Рис. 20.10), можна бачити, що точність обчислень об'ємів тіл обертання шляхом заміни ділянки кривої на ламану досить висока і залежить від того, наскільки ламана близька до графіка функціональної залежності.

Зауважимо, що коли одночасно відмітити обидві функції $y = 2 + \sqrt{1 - x^2}$ та $y = 2 - \sqrt{1 - x^2}$, то знайдені об'єми будуть додаватися один до одного.

9. Відомо, що висота циліндра вдвічі більша за радіус його основи. Визначити висоту циліндра, якщо його об'єм дорівнює 100 кубічних одиниць.

Для розв'язування задачі потрібно створити об'єкт – функцію виду $y = P1/2$, визначену на відрізку від 0 до $P1$. Графік такої функції відповідає твірній бічної поверхні шуканого циліндра.

Звернувшись до послуги "Операції / Інтеграли / Об'єм і площа поверхні тіла обертання, вісь Ox ..." і вказавши межі інтегрування $a = 0$, $b = P1$, і деяке значення параметра $P1$, обчислимо об'єм циліндра. Плавно змінюючи значення параметра $P1$, знайдемо таке, за якого об'єм дорівнює 100 – $P1 = 5.0308$ (Рис. 20.20). Це і буде шукана висота циліндра.

Запитання для самоконтролю

1. Як обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнею, одержуваною обертанням деякої замкненої ламаної лінії навколо осі Ox? навколо осі Oy?
2. Чи обов'язково будувати графіки заданих функцій перед зверненням до послуг "Операції / Інтеграли / Об'єм і площа поверхні тіла обертання, ..."?
3. Як обчислити об'єм та площу поверхні тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox кривої $y = f(x)$ у межах від $x = a$ до $x = b$?
4. Як можна обчислити об'єм та площу поверхні тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox кривої $y = f(x)$ і прямих $x = a$, $x = b$, $y = 0$, використовуючи програму GRAN1?
5. Як можна обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнею обертання навколо осі Ox кривих $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ і прямих $x = a$, $x = b$?
6. Якою повинна бути крива $y = f(x)$ для того, щоб можна було правильно обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнею, утвореною обертанням навколо осі Oy кривої $y = f(x)$ в межах від $y = c$ до $y = d$?
7. Як обчислити об'єм тіла, обмеженого обертанням навколо осі Ox (чи осі Oy) кривої, заданої параметрично через рівняння $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$?
8. Як обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox (чи осі Oy) кривої, заданої параметрично через рівняння $x = \varphi(t)$, $y = \phi(t)$?

Вправи для самостійного виконання

1. Обчислити об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Ox прямокутника $\{(x, y) : x \in [a, b], y \in [c, d]\}$, (коли $a < b$, $0 < c < d$ і задані конкретні значення a, b, c, d).
2. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнею, утвореною обертанням навколо осі Ox відрізка прямої $y = 2$ для x в межах від –3 до 3.
3. Обчислити площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox кола радіуса 2 з центром в точці (0, 3).
4. Знайти об'єм зрізаного конуса, утвореного обертанням навколо осі Oy трапеції, обмеженої лініями $x = 0$, $y = 0$, $y = 3$, $y = 4 - 2x$.
5. Знайти об'єм тіла, обмеженого поверхнями, утвореними обертанням навколо осі Oy кривої $y = 2^x$ і прямих $y = 0.5$, $y = 4$.
6. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y = 4 - |4 - x|$, $x = 3$, $x = 5$, $y = 0$.
7. Знайти об'єм тіла, утвореного обертанням навколо осі Oy фігури, обмеженої лініями $y = 6 - x$, $y = x + 5$, $x = 1$, $x = 2$. Знайти також площу поверхні цього тіла.
8. Знайти площу поверхні, утвореної обертанням навколо осі Ox кривої $y = 2 + \cos(\sin(9x))$ в межах від $x = -4$ до $x = 4$.

9. Визначити, за якого значення параметра $P1$ об'єм V або площа поверхні S тіла обертання набуватиме наперед заданого значення, якщо аргумент x змінюється в межах від 0 до $P1$:

- $y = \sqrt{x}$, $V = 57$;
- $y = \sqrt{x+5}$, $S = 84$;
- $y = \log_2(x+5)$, $S = 14$;
- $y = \sin(x^2) + x$, $V = 20$;
- $y = x + \sin(\sin(\sin(x)))$, $V = 65$;
- $y = x^2 + \sin(\cos(\sin(\cos(x))))$, $V = 400$.

§21. Елементи статистичного аналізу експериментальних даних. Основні поняття

Нехай в результаті спостережень за деяким процесом чи явищем, які за необхідності можуть бути повторені досить велику кількість разів, отримано певний набір значень деякої характеристики цього процесу чи явища: x_{cn1}, x_{cn2}, ... , $x_{cn\,n}$. Надалі досліджувані характеристики будемо позначати великими літерами X, Y, Z і т.п. Отримані значення характеристики X будемо називати варіантами.

Набір отриманих значень називають статистичною вибіркою з множини можливих значень досліджуваної характеристики. Точна закономірність, яку задовольняють значення досліджуваної характеристики, невідома, тому неможливо передбачати, які саме її значення будуть спостережені в той чи інший момент. Цю закономірність принаймні наближено і необхідно встановити за результатами аналізу набору спостережених значень.

Наприклад, неможливо наперед точно встановити, який саме врожай певної культури буде отриманий, якщо внести ту чи іншу кількість добрив на 1 гектар землі, тому що неможливо точно передбачити і врахувати вплив усіх факторів, від яких залежить врожай – вологість і температура повітря і ґрунту, сусідство з іншими культурами, наявність корисних комах і шкідників і т.д.

Можна навести й інші приклади процесів і явищ, значення окремих характеристик яких неможливо передбачити в наперед вказані моменти часу.

Зауважимо однак, що якщо проведена досить велика кількість спостережень, то на їх підставі з великою мірою впевненості можна говорити про деякі межі, в яких слід очікувати значення спостережуваної характеристики.

Розглянемо наступний приклад. Нехай є шестигранний кубик зі зміщеним центром мас, причому деяким чином (наприклад, на підставі дуже великого числа спостережень) встановлено, що різні “цифри” на верхній грані випадають з різними частотами: “1”– у $p_1 = 5\%$ спостережень (відносна частота 0.05), “2” – у $p_2 = 5\%$ (відносна частота 0.05), “3” – у $p_3 = 10\%$ (відносна частота 0.10), “4” – у $p_4 = 10\%$ (відносна частота 0.10), “5” – у $p_5 = 20\%$ (відносна частота 0.20), “6” – у $p_6 = 50\%$ спостережень (відносна частота 0.50). Будемо говорити, що в розглянутому експерименті відбулася подія E_1, якщо на верхній грані кубика виявилося “1”, E_2 – якщо “2”, ... , E_6 – якщо “6”. Позначимо через Ω множину всіх можливих наслідків розглядуваного випробування – одного підкидання кубика: $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$. В даному разі самі E_i можна трактувати як одноелементні підмножини множини Ω. Тоді на підставі властивості адитивності відносної частоти (статистичної ймовірності) відносна частота попадання в будь-яку підмножину $A \subset \Omega$ дорівнює

$$P_n^*(A) = \sum_{E_i \in A} p_i$$

(тут через індекс n вказують на кількість спостережень). Якщо проводити механічну аналогію між розподілом відносних частот на множині Ω і розподілом одиничної маси таким, що на точку E_i припадає маса p_i, то тоді в механічній інтерпретації $P_n^*(A) = \sum_{E_i \in A} p_i$ є маса, що припадає на множину A, тобто сума мас, що припадають на точки E_i з множини A. Слід зауважити, що для обчислення відносних частот (статистичних ймовірностей) використовуються формули, цілком аналогічні до тих, які використовуються для обчислення мас за заданим розподілом одиничної маси на деякій множині точок.

Надалі будемо вважати, що в результаті кожного спостереження (випробування) з деякої множини Ω елементів (точок) навмання (незалежно від спостерігача) вибирається один єдиний елемент (точка). Поява того чи іншого елемента ототожнюється з відбуванням відповідної елементарної події. Тим самим встановлюється взаємно однозначна відповідність між елементами розглядуваної множини і елементарними подіями, що дає підстави розглядувану множину елементів і відповідну множину елементарних подій вважати еквівалентними. Множину елементарних подій також будемо позначати через Ω. Наприклад, в результаті підкидання монети вибирається один елемент із двохелементної множини Ω={“герб”, “цифра”}; в результаті підкидання шестигранного грального кубика вибирається один елемент із множини Ω={“1”, “2”, “3”, “4”, “5”, “6”}; в результаті пострілу в круглу мішень радіуса 1 відстань точки влучення від центра мішені може набувати будь-якого значення в межах від 0 до 1 (мається на увазі, що влучення за межі мішені неможливе), тому в такому випадку можна вважати, що навмання вибирається точка з нескінченної неперервної множини розмірності 1 – відрізка Ω=[0, 1]; якщо після пострілу в мішень фіксуються координати x і y точки влучення, тоді можна вважати, що навмання вибирається точка з нескінченної неперервної множини розмірності 2 – круга $\Omega = \{ (x,y) : x^2 + y^2 \le 1 \}$ і т.д.

Якщо навмання обрана в результаті випробування (спостереження) точка E із множини Ω належить до деякої підмножини A множини Ω, тобто $E \in A$, тоді говорять, що відбулася подія A. Таким чином, події ототожнюються з деякими підмножинами множини Ω. Очевидно, подія, яка відповідає множині Ω, відбувається в кожному випробуванні, тому таку подію називають вірогідною. Подію, яка відповідає порожній множині $\varnothing$, називають неможливою.

Над подіями вводяться такі самі операції, як і над множинами:

1. Сума подій A і B означає об'єднання відповідних множин і позначається $A+B$ (чи $A \bigcup B$).
2. Добуток подій A і B означає перетин відповідних множин і позначається AB (чи $A \bigcap B$).
3. Різниця подій A і B означає різницю відповідних множин і позначається $A \setminus B$.
4. Подія $\overline{A}$, протилежна до події A, означає доповнення множини A до множини Ω, тобто $\overline{A} = \Omega \setminus A$.

Події A і B вважаються рівними (еквівалентними), якщо кожен елемент множини A є і елементом множини B, тобто $A \subset B$, і навпаки кожен елемент множини B є елементом множини A, тобто $B \subset A$. У такому випадку пишуть $A = B$.

Нехай спостерігається деяка подія A і проведена серія з n випробувань, у яких могла відбуватися подія A. Нехай $k_n(A)$ – кількість випробувань, у яких подія A відбулася.

Відношення $P_n^*(A) = \dfrac{k_n(A)}{n}$ називають *статистичною імовірністю* (або *відносною частотою відбування*) події A в розглянутій серії з n випробувань. Саме число $k_n(A)$ називають абсолютною частотою відбування події A в серії з n випробувань.

Очевидно, $P_n^*(A)$ має наступні властивості:

$1_р$. $0 \le P_n^*(A)$.

$2_р$. Якщо $AB = \varnothing$, то $P_n^*(A+B) = P_n^*(A) + P_n^*(B)$.

$3_р$. $P_n^*(\Omega) = 1$.

Властивості $1_р$–$3_р$ називаються основними. З них випливають всі інші властивості статистичної ймовірності:

4. Якщо $\overline{A} = \Omega \setminus A,$ то $P_n^*(\overline{A}) = 1 - P_n^*(A)$.

5. $P_n^*(\varnothing) = 0$, де $\varnothing = \overline{\Omega} = \Omega \setminus \Omega$.

6. Якщо $A \subset B,$ то $P_n^*(A) \le P_n^*(B)$.

7. $0 \le P_n^*(A) \le 1$, тому що $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

З 2 випливає, що для будь-яких $A \subset \Omega$, $B \subset \Omega$ $P_n^*(A+B) = P_n^*(A) + P_n^*(B) - P_n^*(AB)$, оскільки $A+B = A+(B \setminus AB)$, $B = AB + (B \setminus AB)$, $A(B \setminus AB) = \varnothing$, $AB(B \setminus AB) = \varnothing$.

Зауважимо, що $P_n^*(A)$ є функцією від множин $A \subset \Omega$ і задається на деякій сукупності S підмножин множини Ω такій, що задовільняє вимоги:

1_s. $\Omega \in S$;

2_s. якщо $A \in S$, то і $\overline{A} \in S$;

3_s. якщо $A_i \in S$, то і $\bigcup_i A_i \in S$, $i = 1, 2, \ldots$.

Слід підкреслити, що до сукупності S не обов'язково повинні належати всі елементарні події чи всі підмножин множини Ω.

Набір об'єктів (Ω, S, P_n^*) називається ймовірнісним простором, елементи $E \in \Omega$ називаються елементарними подіями, а множина Ω – простором елементарних подій, елементи сукупності S називаються подіями, а сама сукупність S – простором подій, числа $P_n^*(A)$, $A \in S$, називаються статистичними ймовірностями подій A із S.

Якщо задано ймовірнісний простір (Ω, S, P_n^*), то говорять, що задано розподіл статистичних ймовірностей на множині Ω (оскільки задані статистичні ймовірності попадання в підмножини A множини Ω, $A \in S$).

Задану на сукупності S підмножин множини Ω, що задовільняє вимоги 1_s–3_s, функцію $P(A)$, таку, що задовільняє вимоги 1_p–3_p, називають ймовірнісною мірою (або просто ймовірністю) подій A із S.

Очевидно, статистична ймовірність $P_n^*(A)$, $A \in S$, є ймовірнісною мірою на S.

Нехай проведена досить велика серія випробувань, в кожному з яких могла відбутися одна з елементарних подій E з деякої множини елементарних подій Ω, і в серії спостережень відбулися елементарні події E_{cn1}, E_{cn2}, ... , $E_{cn\,n}$, де $E_{cn\,i}$ – елементарна подія, що відбулася в i-му випробуванні.

Будемо розрізняти випадки, коли множина Ω дискретна і скінченна – $\Omega = \{E_1, E_2, \ldots, E_k\}$, і коли множина Ω нескінченна і неперервна типу $\Omega = [a, b)$.

Наприклад, в разі підкидань шестигранного кубика, коли $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$, ($E_i = "i"$), цілком можливо, що в деякій серії випробувань могли бути отримані результати:

$E_{сп\,1} = E_5 =$ “5” $E_{сп\,2} = E_6 =$ “6” $E_{сп\,3} = E_6 =$ “6”
$E_{сп\,4} = E_6 =$ “6” $E_{сп\,5} = E_4 =$ “4” $E_{сп\,6} = E_3 =$ “3”
$E_{сп\,7} = E_5 =$ “5” $E_{сп\,8} = E_2 =$ “2” $E_{сп\,9} = E_6 =$ “6”
$E_{сп\,10} = E_4 =$ “4” $E_{сп\,11} = E_5 =$ “5” $E_{сп\,12} = E_6 =$ “6”
$E_{сп\,13} = E_5 =$ “5” $E_{сп\,14} = E_6 =$ “6” і т.д.

Слід підкреслити, що в даному випадку ніякі інші результати випробувань, окрім відбування однієї із шести можливих елементарних подій із $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$, бути отримані не могли.

Нехай проведено n випробувань і подія E_1 відбулася m_1 разів, E_2 – m_2 разів, ..., E_k – m_k разів, причому $m_1 + m_2 + ... + m_k = n$.

Тоді $P_n^*(E_1) = \dfrac{m_1}{n}$, $P_n^*(E_2) = \dfrac{m_2}{n}$, ..., $P_n^*(E_k) = \dfrac{m_k}{n}$.

Очевидно, $P_n^*(E_i) \geq 0$, $\sum\limits_{i=1}^{k} P_n^*(E_i) = 1$.

Зауважимо, що статистичні ймовірності $P_n^*(A)$ визначаються лише для таких підмножин A із множини Ω, які належать до S, тобто $A \in S$.

Слід підкреслити, що далеко не завжди зручно і коректно розглядати як події будь які підмножини множини Ω.

Будемо вважати, що $E_i \in S$ за будь якого $i \in \overline{1, k}$, звідки слідує, що для будь якого $A \subset \Omega$ буде $A \in S$, тобто всі підмножини множини Ω належать до S.

В такому разі статистична ймовірність (відносна частота) $P_n^*(A)$ попадання в будь-яку підмножину $A = \bigcup\limits_{i \in I} E_i$, $I \subset \{1, 2, ..., k\}$, $A \subset \Omega$, за результатами даних n спостережень дорівнює

$$P_n^*(A) = \sum_{i \in I} P_n^*(E_i).$$

У такий спосіб отриманий розподіл статистичних ймовірностей (відносних частот) на скінченній множині $\Omega = \{E_1, E_2, ..., E_k\}$ елементарних подій за елементарними подіями.

Таблицю виду

E_i	E_1	E_2	...	E_k
$P_n^*(E_i)$	$P_n^*(E_1)$	$P_n^*(E_2)$	...	$P_n^*(E_k)$

називають рядом розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот) на множині елементарних подій $\Omega=\{E_1,E_2,...,E_k\}$.

Якщо кожній елементарній події поставити у взаємно однозначну відповідність деяку точку на осі Ox, так що елементи E_i множини Ω фактично лише перепозначаються новими позначеннями x_i, то тоді сукупність спостережених значень x_{cn1}, x_{cn2}, ... , $x_{cn\,n}$ називають вибірковою сукупністю чи вибіркою обсягу n, елементи вибірки називають варіантами, а впорядкований за зростанням набір спостережених значень (елементів вибірки) називають варіаційним рядом.

У наведеному прикладі серії із 14 випробувань з гральним кубиком варіаційний ряд буде мати вигляд 2, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6, а ряд розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот) на множині Ω матиме вигляд:

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_n^*(\{x_i\})$	0	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{6}{14}$

Зауважимо, що на практиці до таблиці заносять лише варіанти (елементарні події), що були спостережені хоча б один раз у проведеній серії випробувань. Разом з тим занесення до таблиці варіант, що не були, але могли бути спостережені, ніяк не впливає на результати наступних обчислень статистичних ймовірностей (відносних частот) попадання в будь-які підмножини множини Ω, деяких числових характеристик розподілу статистичних ймовірностей і ін.

Якщо на координатній площині побудувати точки (x_i, $P_n^*(\{x_i\})$) і з'єднати їх ламаною лінією, то одержимо так званий многокутник розподілу статистичних ймовірностей (або полігон відносних частот, Рис. 21.1).

Розподіл статистичних ймовірностей (відносних частот) на скінченній множині $\Omega=\{E_1,E_2,...,E_k\}$ елементарних подій E_i такий, що для кожного $\{E_i\}\subset\Omega$, $\{E_i\}\in S$, визначено $P_n^*(\{E_i\})$, $i\in\overline{1,\,k}$, будемо називати поточковим розподілом. Аналогічні назви зберігаються й у випадку, якщо множина $\Omega=\{E_1,E_2,...,E_k,...\}$ зчисленна, тобто її елементи можна перенумерувати за допомогою всіх натуральних чисел.

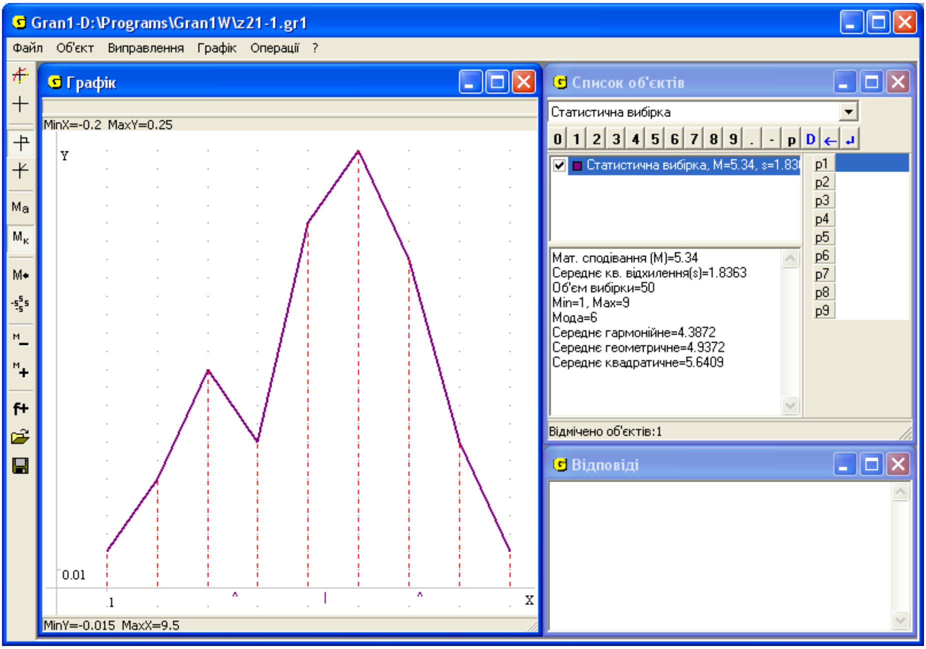


Рис. 21.1

Якщо множина Ω складається із скінченного числа елементів (точок) x_1, x_2, ..., x_k, а до таблиці заносять абсолютні частоти m_i появи значень x_i, то результати спостережень можна подати у вигляді таблиці

x_i	x_1	x_2	...	x_k
m_i	m_1	m_2	...	m_k

,

де x_i, ($i=1,2,\dots,k$), – можливі значення величини, що спостерігається, m_i – число появ значення x_i серед усіх спостережених значень $x_{cn\,1}$, $x_{cn\,2}$, ..., $x_{cn\,n}$. Не виключається, що $m_i = 0$ для деяких x_i.

Як правило, значення x_1, x_2, ..., x_k розташовують у порядку зростання, покладаючи $x_1 = \min\limits_{1\le i\le n}(x_i) = x_{\min}$, $x_k = \max\limits_{1\le i\le n}(x_i) = x_{\max}$.

Так побудовану таблицю називають рядом розподілу абсолютних частот на множині Ω можливих значень досліджуваної величини. Очевидно, сума абсолютних частот m_i, $(i=1,2,\dots,k)$, дорівнює n.

Якщо замість абсолютної частоти m_i значення x_i у таблицю заносять його статистичну ймовірність $P_n^*(\{x_i\}) = p_i^* = \dfrac{m_i}{n}$:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
p_i^*	p_1^*	p_2^*	...	p_k^*

,

то таку таблицю називають рядом розподілу статистичних ймовірностей (або відносних частот) на множині Ω можливих значень досліджуваної величини. Очевидно, сума відносних частот завжди дорівнює 1.

Нехай тепер Ω – нескінченна множина елементарних подій, для якої існує взаємно однозначна відповідність між її елементами і точками деякого інтервалу виду $[a,b)$, так що будь-яке значення $x \in [a,b)$ може бути отримане під час випробувань. Нехай в результаті якоїсь (досить довгої) серії випробувань спостережені ті чи інші елементарні події, у взаємно однозначну відповідність яким поставлені спостережені значення x_{cn1}, x_{cn2}, ... , $x_{cn\,n}$, $(x_{cni} \in [a,b))$. У цьому випадку будувати таблицю, подібну до ряду розподілу частот, некоректно, оскільки частота попадання в більшість точок буде дорівнювати нулю і лише для деяких (спостережених) буде відмінною від нуля, хоч немає ніяких підстав віддавати перевагу спостереженим точкам перед неспостереженими.

Зокрема, якщо спостережень дуже багато, а значення, що спостережені, різні, то відносна частота кожного з них буде близькою до нуля в межах точності обчислень, особливо якщо така точність невелика.

Оскільки в результаті спостережень можуть бути отримані будь-які значення з інтервалу $[a,b)$, доцільно поділити інтервал $[a,b)$ на скінченну кількість досить дрібних інтервалів $[a_0,a_1), [a_1,a_2), \dots, [a_{k-1},a_k)$ однакової довжини $h = \dfrac{b-a}{k}$, так що $a_0 = a$, $a_k = b$, $a_i = a_{i-1} + h = a_{i-1} + \dfrac{a_k - a_0}{k}$, і знайти статистичні ймовірності (відносні частоти) попадання в такі інтервали, а як події разом з множиною $\varnothing$ розглядати всеможливі об'єднання інтервалів $[a_{i-1},a_i)$: $A = \bigcup\limits_{i\in I}[a_{i-1},a_i)$, $I \subset \{1,2,\dots,k\}$, тобто до сукупності S включити $\varnothing$, всі інтервали $[a_{i-1},a_i)$ та всеможливі їх об'єднання по два, по три і т.д., і таким чином покласти

$$S = \{A \mid A = \bigcup_{i\in I}[a_{i-1},a_i),\ I \subset \{1,\ 2,\ \dots,\ k\}\}.$$

Таблицю виду

$[a_{i-1},a_i)$	$[a_0,a_1)$	$[a_1,a_2)$	...	$[a_{k-1},a_k)$
$P_n^*([a_{i-1},a_i))$	$P_n^*([a_0,a_1))$	$P_n^*([a_1,a_2))$	...	$P_n^*([a_{k-1},a_k))$

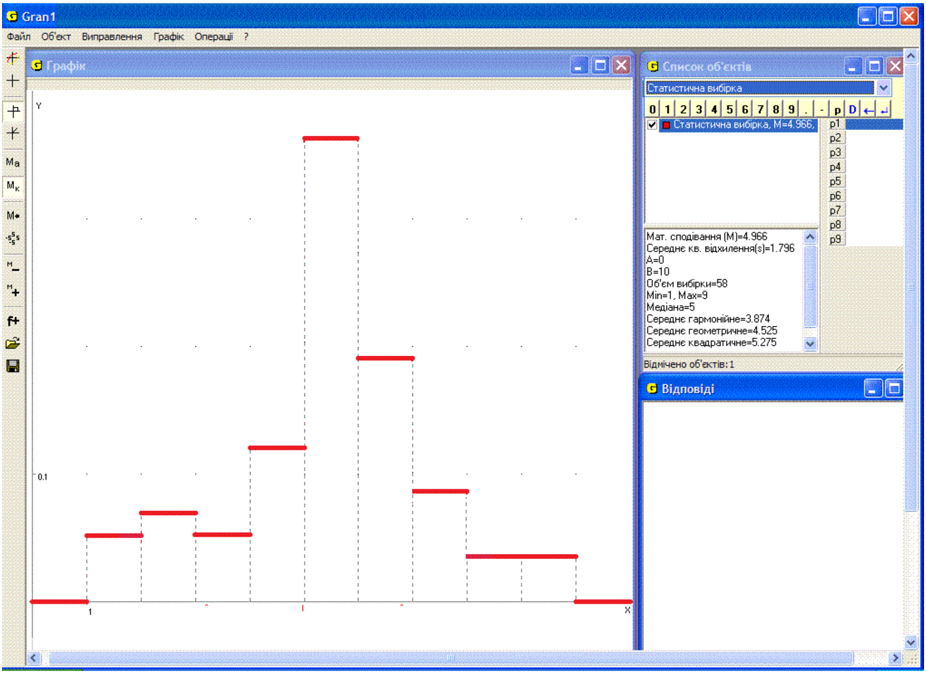


Рис. 21.2

називають поінтервальним розподілом статистичних ймовірностей (відносних частот) на множині $\Omega = \bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i) = [a, b)$ за інтервалами $[a_{i-1}, a_i) \in S$, $i \in \overline{1, k}$.

Тоді для довільного $A \in S$, $A = \bigcup_{i \in I} [a_{i-1}, a_i)$, $I \subset \{1, 2, \ldots, k\}$, буде $P_n^*(A) = \sum_{i \in I} P_n^*([a_{i-1}, a_i))$.

Якщо тепер на координатній площині xOy побудувати графік кусково сталої функції $y = f_n^*(x)$, рівної нулю за межами проміжка $[a_0,\ a_k)$ і $\dfrac{1}{h} P_n^*([a_{i-1},\ a_i)) = \dfrac{P_n^*([a_{i-1},\ a_i))}{a_i - a_{i-1}}$ на проміжку $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1, k}$, тобто

$$f_n^*(x) = \begin{cases} \dfrac{P_n^*([a_{i-1}, a_i))}{h}, & \text{коли } x \in [a_{i-1}, a_i),\ i \in \overline{1, k}, \\ 0, & \text{коли } x \,\overline{\in}\, [a_0, a_k), \end{cases}$$

то одержиться так звана гістограма поінтервального розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот) спостережених значень досліджуваної величини на множині $\Omega = \bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i)$ (Рис. 21.2). Функцію $f_n^*(x)$ називають усередненою щільністю розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот) на множині $\Omega = \bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i) = [a, b)$ за інтервалами $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1, k}$.

Оскільки в геометричній інтерпретації для $x \in [a_{i-1}, a_i)$ значення $f_n^*(x) \cdot h = P_n^*([a_{i-1}, a_i))$ є площа прямокутника, довжина основи якого дорівнює h, а висота $f_n^*(x) = \frac{1}{h} P_n^*([a_{i-1}, a_i))$, то $P_n^*([a_{i-1}, a_i))$ можна подати у вигляді:

$$P_n^*([a_{i-1}, a_i]) = \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x) dx .$$

Очевидно, функція $y = f_n^*(x)$ має властивості:

1. $f_n^*(x) \geq 0$,
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_n^*(x) dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x) dx = \sum_{i=1}^{k} P_n^*([a_{i-1}, a_i)) = 1$.

В геометричній інтерпретації це означає, що площа під графіком функції $y = f_n^*(x)$ (і над віссю Ox) завжди дорівнює 1 (Рис. 21.3).

Якщо тепер розглядати підмножину $A \subset \Omega$, яку можна подати як об'єднання деяких із зазначених інтервалів $A = \bigcup_{i \in I} [a_{i-1}, a_i) \in S$, $I \subset \{1, 2, \ldots, k\}$, тоді

$$P_n^*(A) = \int_A f_n^*(x) dx = \sum_{[a_{i-1}, a_i) \subset A} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f_n^*(x) dx = \sum_{[a_{i-1}, a_i) \subset A} P_n^*([a_{i-1}, a_i)) .$$

Слід підкреслити, що і у випадку неперервної множини $\Omega = [a, b)$ як події можна розглядати не будь-які підмножини множини $\Omega = [a, b)$, а лише такі, які належать до сукупності S так званих вимірних за заданою на S мірою $P_n^*(A)$, $A \in S$, підмножин множини Ω. На Рис. 21.4 показано некоректне задання меж інтегрування, оскільки $[3.3; 7.7) \overline{\in} S$, де $S = \{A \mid A = \bigcup_{i \in I} [a_{i-1}, a_i),\ I \subset \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots, 8, 9\}\}$, $a_0 = 1$, $a_9 = 10$, $a_i - a_{i-1} = 1$, $i \in \overline{1, 9}$.

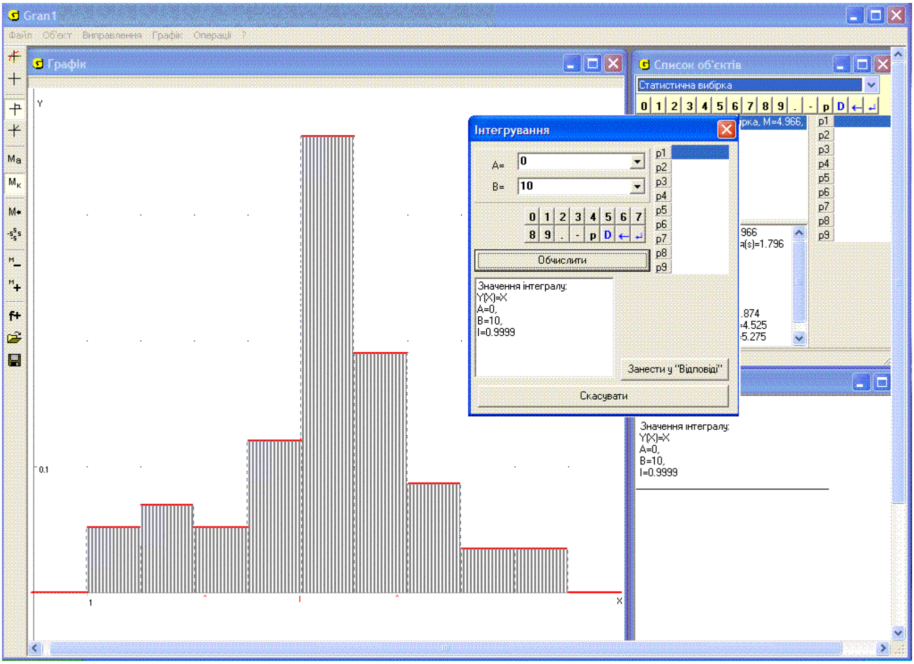


Рис. 21.3

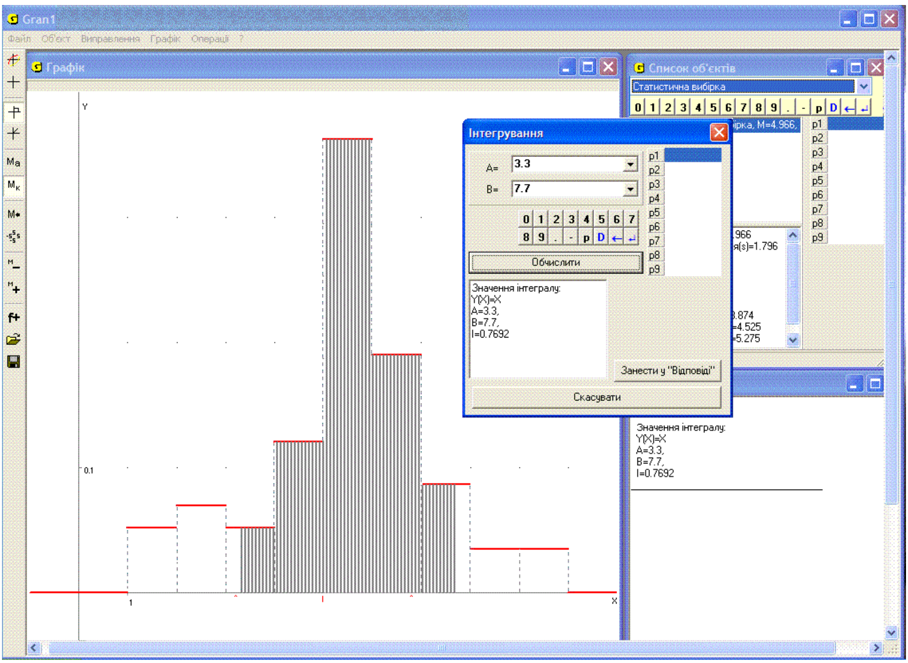


Рис. 21.4

Як і раніше, сукупність S повинна задовільняти вимоги:

1_s. $\Omega \in S$;

2_s. якщо $A \in S$, то і $\overline{A} = \Omega \setminus A \in S$;

3_s. якщо $A_i \in S,\ i = 1, 2, 3, \ldots$, то і $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i \in S,\ n \ge 1,\ \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in S$.

З зазначених властивостей випливає, що разом з будь-якими множинами A і B до сукупності S належать також $A \bigcup B$, $A \bigcap B$, $A \setminus B$, разом з множинами $A_i,\ i = 1, 2, 3, \ldots$, до сукупності S належать $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i,\ \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i,\ \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i, \bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i$. Зокрема до сукупності S належать всілякі об'єднання скінченного чи нескінченного числа проміжків виду $[\alpha_j, \beta_j),\ [\alpha_j, \beta_j]$, $(\alpha_j, \beta_j],\ (\alpha_j, \beta_j)$, що попарно не перетинаються, коли $\left\langle \alpha_j, \beta_j \right\rangle \in S$.

Позначимо $[a_{i-1}, a_i)$ через H_i , $m([a_{i-1}, a_i)) = a_i - a_{i-1}$ через $m(H_i)$.

Якщо $\tilde{\Omega} \supset \Omega$ деяка вимірна за мірою *m* множина, $\tilde{S} \supset S$ – сукупність вимірних за мірою *m* підмножин множини $\tilde{\Omega}$, що задовільняє вимоги 1_s-3_s , $G \in \tilde{S}$ – довільна вимірна за мірою *m* підмножина множини $\tilde{\Omega}$, тоді на сукупності $\tilde{S} \supset S$ вимірних за мірою *m* множин природно ввести нову ймовірнісну міру P , поклавши

$$P(G) = P(G \bigcap (\bigcup_{i=1}^{k} H_i)) = P(\bigcup_{i=1}^{k} (G \bigcap H_i)) = \sum_{i=1}^{k} P(G \bigcap H_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \frac{m(G \bigcap H_i)}{m(H_i)} P_n^*(H_i) = \sum_{i=1,\, E \in G \bigcap H_i}^{k} \frac{m(G \bigcap H_i)}{m(H_i)} f_n^*(E) m(H_i) =$$

$$= \sum_{i=1,\, E \in G \bigcap H_i}^{k} f(E) m(G \bigcap H_i) .$$

де $P(G)$, $G \in \tilde{S}$, вже не є статистична ймовірність $P_n^*(G) = \dfrac{k_n(G)}{k_n(\Omega)}$, $G \in \tilde{S}$, отримана за результатами серії із *n* проведених випробувань (за статистичними даними), а ймовірнісна міра, введена на основі припущення (гіпотези) про те, що на кожній із множин H_i статистичні ймовірності, отримані за статистичними даними (результатами серії із *n* проведених випробувань), розподілені рівномірно, тобто якщо є дві підмножини $Q \subset H_i$ і $G \subset H_i$ однакової міри $m(Q) = m(G)$, то і

$$P(Q)=\frac{m(Q)}{m(H_i)}\cdot P_n^*(H_i)=\frac{m(G)}{m(H_i)}\cdot P_n^*(H_i)=P(G),$$

$$f(E)=\begin{cases}\dfrac{P(G\bigcap H_i)}{m(G\bigcap H_i)}=f_n^*(E), & \text{коли } E\in G\bigcap H_i,\\ 0, & \text{коли } E\,\overline{\in}\, G\bigcap H_i.\end{cases}$$

Зауважимо, що коли $G=\Omega$, тоді $f(E)=f_n^*(E)$ для всіх $E\in\Omega$.

В такий спосіб *ймовірнісна міра* $P_n^*(A)$, $A\in S$, *задана на сукупності подій S, породженій системою підмножин* H_i, $i\in\overline{1,k}$, *поширюється* (*продовжується*) *на сукупність* $\tilde{S}\supset S$ *множин, вимірних за мірою т*. Очевидно, для $A\in S$ має місце рівність $P(A)=P_n^*(A)$.

Тут також робиться припущення (гіпотеза), що щільність розподілу статистичних ймовірностей на кожній із множин H_i стала, тобто $f_n^*(E)=c_i=\dfrac{P_n^*(H_i)}{m(H_i)}$, $E\in H_i$, $i\in\overline{1,k}$.

Насправді ж за результатами проведених випробувань (за статистичними даними) може виявитись (якщо фіксувати не тільки кількість точок, які попадають у множину H_i, а і кількості точок, які попадають у різні підмножини множини H_i, $i\in\overline{1,k}$), що $k_n(Q)\neq k_n(G)$, коли $Q\subset H_i$, $G\subset H_i$, $m(Q)=m(G)$, $Q\in\tilde{S}$, $G\in\tilde{S}$, тому ймовірнісні міри

$$P(G\bigcap H_i)=\frac{m(G\bigcap H_i)}{m(H_i)}P_n^*(H_i),\ G\in\tilde{S},$$

є гіпотетичними, які вводяться на підставі припущення, що на кожній із множин H_i статистичні ймовірності розподілені рівномірно, тобто $P_n^*(G\bigcap H_i)=P_n^*(Q\bigcap H_i)$, коли $m(G)=m(Q)$, $G\subset H_i$, $Q\subset H_i$, $G\in\tilde{S}$, $Q\in\tilde{S}$, і що $f(E)=f_n^*(E)$, коли $E\in G\subset H_i$, тобто що

$$f(E)=\frac{P(G\bigcap H_i)}{m(G\bigcap H_i)}=f_n^*(E)=\frac{P_n^*(H_i)}{m(H_i)},\ E\in G\bigcap H_i,$$

коли $E\in G\bigcap H_i$, $i\in\overline{1,k}$, $G\in\tilde{S}$, що за статистичними даними може виявитись не так.

Надалі ймовірнісну міру події *A*, $A\in S$, введену на основі припущення, яке базується на результатах деякої серії із *n* випробувань чи кількох таких серій, будемо позначати $P(A)$, $A\in S$, і називати *узагальненою статистичною ймовірністю*, або *гіпотетичною ймовірнісною мірою*, або *гіпотетичною ймовірністю*, або просто *ймовірністю*, якщо це не викликатиме суперечностей, невизначеності, необхідності додаткових пояснень.

Якщо ж гіпотетична ймовірнісна міра, задана на сукупності S підмножин множини Ω, що задовільняє вимоги 1_s-3_s, вводиться довільно, без проведення попередньо будь яких випробувань і збирання статистичних даних, лише вимагається, щоб така ймовірнісна міра задовільняла вимоги 1_p-3_p, тоді таку ймовірнісну міру також називатимемо гіпотетичною ймовірнісною мірою або гіпотетичною ймовірністю або просто ймовірністю і також позначатимемо $P(A)$, $A \in S$.

В такому разі ймовірнісний простір (Ω, S, P) не пов'язується з жодними конкретними випробуваннями і є лише теоретичною моделлю довільного ймовірнісного простору. Разом з тим всі теоретичні положення витікають із практики.

Зауважимо, що і у випадку, коли множина Ω скінченна, не завжди коректно до сукупності S включати будь які підмножини множини Ω.

Наприклад, якщо $\Omega = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_k\}$, де $x_0 = 0$, $x_k = 1$, $x_{i+1} = x_i + h$, $i \in \overline{0,k}$, $k = 10^{1000000}$, $h = 10^{-k}$, тоді хоч множина Ω і скінченна, швидше за все доцільно поділити її на практично прийнятну кількість m підмножин H_j, $j \in \overline{1,m}$, $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$. Наприклад, покласти $H_j = \{x_i | x_i \in [a_{j-1}, a_j)\}$, $j \in \overline{1,m}$, $a_0 = 0$, $a_m = 1 + \varepsilon$, $m \approx 25$, $\varepsilon = 0.001$, визначити $P_n^*(H_j)$, $j \in \overline{1,m}$, а як події разом з $\varnothing$ розглядати лише всеможливі об'єднання підмножин H_j, тобто до сукупності S разом з $\varnothing$ включити $A = \bigcup_{j \in I} H_j$, $I \subset \{1, 2, ..., m\}$. Тоді для кожного $A \in S$, $A = \bigcup_{i \in I} H_i$, буде $P_n^*(A) = \sum_{j \in I} P_n^*(H_j)$, $I \in \{1, 2, ..., m\}$.

Слід підкреслити, що і у випадку невеликої кількості елементів у множині Ω не завжди доцільно включати до сукупності S всі підмножини множини Ω. Нехай, наприклад, $\Omega = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ (експеримент полягав у підкиданні грального кубика). Нехай на підставі великої кількості n випробувань знайдено $P_n^*(\{E_6\}) = 0.60$, $P_n^*(\{E_5\}) = 0.30$, $P_n^*(\{E_1, E_2, E_3, E_4\}) = 0.10$. Тоді до сукупності S коректно разом з порожньою $\varnothing$ включити підмножини $H_1=\{E_1,E_2,E_3,E_4\}$, $H_2=\{E_5\}$, $H_3=\{E_6\}$, та всеможливі їх об'єднання, тобто покласти $S=\{\varnothing,H_1,H_2,H_3,H_1+H_2,H_1+H_3,H_2+H_3,H_1+H_2+H_3=\Omega\}$. В такому разі для довільного $A\in S$, $A=\bigcup_{i\in I}H_i$, буде $P_n^*(A)=\sum_{i\in I}P_n^*(H_i)$, $I\subset\{1,\ 2,\ 3\}$, а саме: $P_n^*(\varnothing)=0$, $P_n^*(H_1)=0.10$, $P_n^*(H_2)=0.30$, $P_n^*(H_3)=0.60$, $P_n^*(H_1+H_2)=0.40$, $P_n^*(H_1+H_3)=0.70$, $P_n^*(H_2+H_3)=0.90$, $P_n^*(H_1+H_2+H_3)=P_n^*(\Omega)=1$. Разом з тим за наведених умов на запитання, чому дорівнює $P_n^*(\{E_2,E_4,E_6\})$, $P_n^*(\{E_1,E_3,E_5\})$, $P_n^*(\{E_1,E_2,E_3\})$ і т.п., тобто як часто випадало парне число очок, непарне число очок, число очок було не більше 3 і т.п., відповісти неможливо.

Нехай в одновимірному координатному просторі дискретний поточковий розподіл статистичних ймовірностей на множині $\Omega=\{x_1,x_2,...,x_k\}$ визначається за таблицею 21.1:

Табл. 21.1.

x_i	x_1	x_2	...	x_k
$P_n^*(\{x_i\})$	$P_n^*(\{x_1\})$	$P_n^*(\{x_2\})$	...	$P_n^*(\{x_k\})$

а як простір подій S розглядається найширша сукупність підмножин множини Ω, тобто $S=\{A\,|\,A=\bigcup_{i\in I}\{x_i\},I\subset\{1,\ 2,\ \dots,\ k\}\}$.

Тоді за припущення, що $\tilde{\Omega}=(-\infty,\infty)$, $(-\infty,x)\in\tilde{S}$ для будь-якого $x\in(-\infty,\infty)$, тобто множини $(-\infty,x)$ для будь-якого $x\in(-\infty,\infty)$ є подіями з простору подій $\tilde{S}$, на якому визначена ймовірнісна міра $\tilde{P}_n^*(G)$, $G\in\tilde{S}$, для кожного $x\in\overline{R}=R\bigcup\{+\infty,-\infty\}$ можна підрахувати число $\tilde{P}_n^*((-\infty;x))$ – узагальнену статистичну ймовірність попадання спостережених значень $x_i\in\Omega$ у проміжок $(-\infty;\,x)$, яке дорівнює сумі усіх $P_n^*(\{x_i\})$, для яких $x_i\in(-\infty;\ x)$ (або, що те саме, $x_i<x$), тобто

$$\tilde{P}_n^*((-\infty;x))=\sum_{x_i\in(-\infty;x)\bigcap\Omega}P_n^*(\{x_i\})=\sum_{x_i<x}P_n^*(\{x_i\}).$$

Для цієї статистичної ймовірності $\tilde{P}_n^*((-\infty;x))$ простором елементарних подій вважають множину $\tilde{\Omega}=R=(-\infty,\infty)$, а простором подій – простір $\tilde{S}$, до якого належать будь-які проміжки, а також їх скінченні і зчисленні об'єднання і перетини та доповнення цих об'єднань до R. Зокрема $(-\infty, x) \in \tilde{S}$. Зауважимо разом з тим, що $(-\infty, x) \overline{\in} S$, і тому вираз $P_n^*((-\infty, x))$ не є коректним, оскільки ймовірнісна міра P_n^* задана лише на сукупності S підмножин множини Ω.

Функцію

$$F_n^*(x) = \tilde{P}_n^*((-\infty, x)) = \sum_{x_i \in (-\infty; x) \bigcap \Omega} P_n^*(\{x_i\}),\ i \in \overline{1, k},\ \ x \in R, \tag{21.1}$$

називають *функцією розподілу узагальнених статистичних ймовірностей* (*відносних частот*) *на скінченній множині* $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$.

Приклад 21.1. Нехай розподіл статистичних ймовірностей задано за таблицею 21.2.

Табл. 21.2

x_i	1	2	3	4	5	6
$P_n^*(\{x_i\})$	0	$\frac{1}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{5}{15}$

Тоді

$$F_n^*(x) = \tilde{P}_n^*((-\infty, x)) = \begin{cases} 0, \text{ коли } x \le 2, \\ \frac{1}{15}, \text{ коли } 2 < x \le 3, \\ \frac{4}{15}, \text{ коли } 3 < x \le 4, \\ \frac{6}{15}, \text{ коли } 4 < x \le 5, \\ \frac{10}{15}, \text{ коли } 5 < x \le 6, \\ 1, \text{ коли } 6 < x. \end{cases}$$

Оскільки $-\infty < x_i$ для всіх i, то $F_n^*(-\infty) = P_n^*(\varnothing) = 0$ як статистична ймовірність неможливої події, яка полягає у появі значення $x_{\text{сп } i}$, меншого за $-\infty$.

Так само, оскільки $x_i < +\infty$ для всіх i, то

$$F_n^*(+\infty) = \sum_{x_i \in (-\infty; \infty) \bigcap \Omega} P_n^*(\{x_i\}) = \tilde{P}_n^*((-\infty, +\infty)) = P_n^*(\Omega) = 1$$

як статистична ймовірність вірогідної події, яка полягає у попаданні точки $x_{\text{сп } i}$ на проміжок $(-\infty; +\infty)$.

На Рис. 21.5 зображено графік функції розподілу узагальнених статистичних ймовірностей, що визначається за таблицею 21.2.

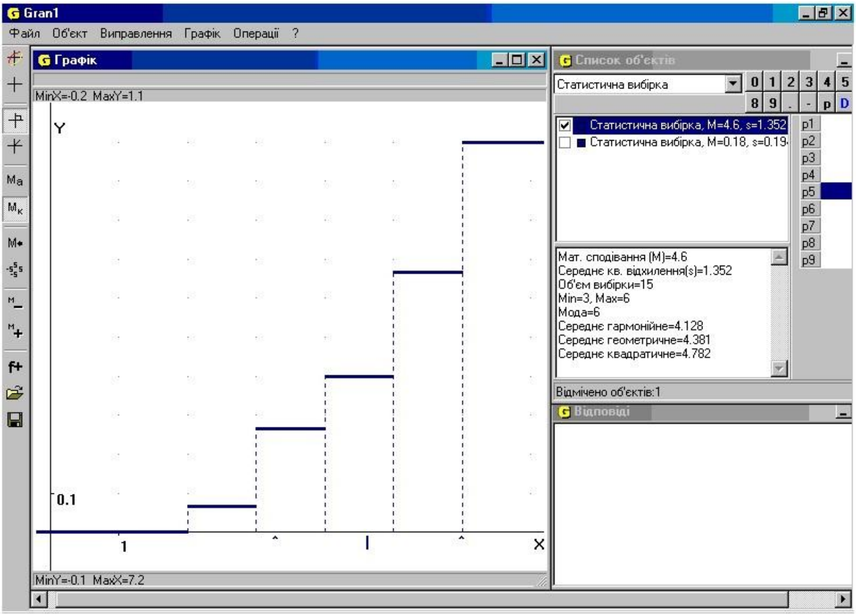


Рис. 21.5.

Відмітимо *основні властивості функції розподілу узагальнених статистичних ймовірностей*:

1. $F_n^*(x) \geq 0$, як узагальнена статистична ймовірність події $G = (-\infty; x) \subset \Omega$.

2. $F_n^*(-\infty) = 0$, як узагальнена статистична ймовірність неможливої події $\varnothing = \{x : x < -\infty\}$, тобто статистична ймовірність появи значень $x_{\text{сп}\, i}$, менших за $-\infty$.

3. $F_n^*(+\infty) = 1$, як узагальнена статистична ймовірність вірогідної події $\tilde{\Omega} = (-\infty; \infty)$, тобто статистична ймовірність появи значень $x_{\text{сп}\ i}$, менших за $+\infty$.

4. Якщо $u < v$, то $F_n^*(u) \leq F_n^*(v)$, тобто функція розподілу узагальнених статистичних ймовірностей неспадна.

Справді,

$$F_n^*(v) = \sum_{x_i < v} P_n^*(\{x_i\}) = \sum_{x_i < u} P_n^*(\{x_i\}) + \sum_{u \leq x_i < v} P_n^*(\{x_i\}) \geq \sum_{x_i < u} P_n^*(\{x_i\}) = F_n^*(u),$$

оскільки $P_n^*(\{x_i\}) \geq 0$ для всіх *i*.

З наведеного, зокрема, випливає, що

$$\tilde{P}_n^*([u;v)) = \sum_{x_i \in [u,v)} P_n^*(\{x_i\}) = F_n^*(v) - F_n^*(u),$$

тобто узагальнена статистична ймовірність попадання точок $x_{\text{сп } i}$ на проміжок $[u;v)$ дорівнює приростові функції розподілу узагальнених статистичних ймовірностей на цьому проміжку.

5. На кожному проміжку $(\alpha; x_i]$, що не містить інших точок множини $\{x_1, x_2, \ldots\}$, окрім точки x_i, функція розподілу узагальнених статистичних ймовірностей стала, причому $F_n^*(x) = F_n^*(x_i)$, коли $x \in (\alpha; x_i]$.

Будь-яку функцію, що задовольняє умови 1–5, називають *функцією розподілу узагальнених статистичних ймовірностей на множині* $\tilde{\Omega} = (-\infty, \infty)$, визначеною за поточковим розподілом статистичних імовірностей $P_n^*(\{x_i\})$, $i \in \overline{1,k}$, на скінченній множині $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$.

Зауважимо, що коли число k дуже велике, наприклад $k = 10^{1000\,000}$, $k = 10^{1000\,000\,000}$ і т.п., а всі $P_n^*(\{x_i\})$, $i \in \overline{1,k}$, рівні або близькі між собою, тоді обчислення $\tilde{P}_n^*((-\infty, x))$ безпосередньо за формулою (21.1) стає практично неприйнятним, оскільки всі $P_n^*(\{x_i\})$ практично дорівнюють нулеві і для довільного $x < \infty$ буде $\tilde{P}_n^*((-\infty, x)) = 0$, що призводить до суперечностей. Наприклад, якщо всі $x_i \in [0,1]$ і віддалені одна від одної на відстань $h = 10^{-1000\,000\,000}$, а всі $P_n^*(\{x_i\})$ рівні між собою, тоді для довільного $x \le \infty$ практично буде $F_n^*(x) = \tilde{P}_n^*((-\infty, x)) = \sum_{x_i < x} P_n^*(\{x_i\}) = 0$, що приводить до суперечностей, оскільки для довільного $x > 1$ повинно бути $F_n^*(x) = 1$.

В подібних випадках доцільно множину $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ замінити на $[x_1, x_k + \varepsilon)$ і поділити цей проміжок на практично прийнятну кількість m підмножин $H_i = [a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,m}$, де $a_0 = x_1$, $a_m = x_k + \varepsilon$, $a_i = a_{i-1} + h$, $h = \dfrac{a_m - a_0}{m}$, $\varepsilon > 0$ – досить мале число, і визначати не $P_n^*(\{x_i\})$, $i \in \overline{1,k}$, а $\tilde{P}_n^*(H_i)$, $i \in \overline{1,m}$, а $F_n^*(x)$ наближено обчислювати за формулою:

$$F_n^*(x) = \sum_{a_i < x} \widetilde{P}_n^*(H_i) + \frac{x - a_{i-1}}{h} \widetilde{P}_n^*(H_i)\,,\ x \in [a_{i-1}, a_i)\,,\ i \in \overline{1, m}\,.$$

Тоді для всіх x таких, що $x \le a_0$, буде $F_n^*(x) = 0$, а для всіх x таких, що $x > a_m$, буде $F_n^*(x) = 1$.

Зауважимо, що подібним чином діють і у випадку, коли множина Ω неперервна.

Перш ніж розглянути означення функції поінтервального розподілу узагальнених статистичних ймовірностей на неперервній множині точок, нагадаємо деякі поняття з теорії множин.

Нехай Ω – деяка фіксована непорожня множина.

Означення. Система V підмножин множини Ω називається *алгеброю*, якщо:

1) $\Omega \in V$;

2) з того, що $A \in V$, випливає, що $\overline{A} \in V$;

3) з того, що $A \in V$ і $B \in V$, випливає, що $A \bigcup B \in V$.

Легко бачити, що всі розглянуті раніше операції над скінченною кількістю підмножин не виводять з алгебри V.

Приклади алгебр підмножин множини Ω:

1. Сукупність $S_* = \{\varnothing, \Omega\}$ – *тривіальна або "найбідніша" алгебра підмножин множини* Ω.

2. $\{\varnothing, A, \overline{A}, \Omega\}$ – алгебра множин, що породжується множиною A.

3. Система S^* всіх підмножин множини Ω – "найбагатша" алгебра підмножин множини Ω.

4. Нехай $H_1, H_2, ..., H_k$ – деякі підмножини множини Ω такі, що $H_i\ H_j = \varnothing$, коли $i \ne j$, причому $H_i \ne \varnothing$, $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = \Omega$.

Якщо утворити систему множин, до якої входять порожня множина $\varnothing$, усі множини H_i, усі можливі суми множин H_i із двох, із трьох, із чотирьох і т.д. доданків, то така система множин буде алгеброю множин. Така *алгебра* множин називається *породженою поділом* $D = \{H_1, H_2, ..., H_n\}$ *множини* Ω *на підмножини* H_i, які попарно не перетинаються, тобто $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \ne j$. Множини H_i в такому разі називають *атомами поділу* D. Таким чином, за поділом D однозначно визначається алгебра $V = \alpha(D)$. Навпаки, за алгеброю множин, породженою поділом D, можна відновити цей поділ, причому єдиний.

Справді, якщо $H \in V$ таке, що для будь-якого $B \in V$ або $H \bigcap B = H$ або $H \bigcap B = \varnothing$, тоді сукупність таких H утворюватиме шуканий поділ.

Означення. Система S підмножин із Ω називається σ*–алгеброю*, якщо:

1_s. $\Omega \in S$;

2_s. з того, що $A \in S$, випливає, що $\overline{A} \in S$;

3_s. з того, що $A_i \in S,\ i = 1, 2, \ldots,$ випливає, що $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in S$.

Легко бачити, що всі розглянуті операції над скінченною або зчисленною кількістю підмножин не виводять з σ–алгебри S. Зокрема, $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in S$, коли $A_i \in S,\ i \in N$.

Прикладом σ–алгебри є сукупність S^* усіх підмножин множини Ω.

Системи множин $S_* = \{\varnothing, \Omega\}$, $S^* = \{A \mid A \subset \Omega\}$ є й алгебрами, й σ–алгебрами, причому S_* – тривіальна, "найбідніша" σ–алгебра, а S^* – "найбагатша" σ–алгебра, яка містить усі підмножини множини Ω. Якщо $D = (H_1,\ H_2, \ldots)$ – деякий зчисленний поділ множини Ω на непорожні підмножини

$$\Omega = H_1 + H_2 + \ldots,\ H_i\ H_j = \varnothing,\ i \neq j,$$

то система $S = \alpha(D)$, утворена з множин, що є сумами скінченної або зчисленної кількості елементів з D, і приєднаною до них порожньою множиною $\varnothing$, є і алгеброю, і σ–алгеброю.

Зрозуміло, що кожна σ–алгебра є й алгеброю, проте не навпаки.

Означення. Нехай W – деяка система підмножин із Ω.

σ*–алгебра* $\sigma(W)$ називається *найменшою, що містить систему* W, якщо:

1) $W \subset \sigma(W)$;

2) для будь-якої σ-алгебри S, яка також містить систему $W, W \subset S$, має місце включення $\sigma(W) \subset S$.

Для будь-якої системи множин W існує найменша σ–алгебра $\sigma(W)$, що містить систему W. Справді, існує принаймні одна σ–алгебра (а саме S^*), що містить систему W. Переріз усіх σ–алгебр, що містять систему W, і є шуканою σ–алгеброю. Систему $\sigma(W)$ називають σ–алгеброю, породженою системою множин W.

Нехай $\Omega = R^1 = (-\infty, \infty)$ – дійсна пряма,

$$[a, b) = \{x \in R^1 \mid a \le x < b\}$$

для всіх $-\infty \le a \le b \le \infty$. Зокрема $[a,\ a) = \varnothing$. Позначимо через $[-\infty,\ b)$ інтервал $(-\infty,\ b)$ (щоб доповнення до R^1 проміжка $[-\infty,\ b)$ було того самого типу, тобто відкритим праворуч і замкненим ліворуч).

Позначимо через L систему множин з R^1, що складаються із скінченних сум проміжків виду $[a, b)$:

$$A \in L \text{, якщо } A = \sum_{i=1}^{n} [\, a_i,\ b_i\ ),\ n < \infty.$$

Система L є алгеброю, але не σ–алгеброю, оскільки якщо $A_n = \left[\dfrac{1}{n}, 1\right) \in L$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = (0,1) \,\overline{\in}\, L$.

Означення. Нехай $\mathscr{B}(R^1)$ – найменша σ–алгебра $\sigma(L)$, що містить систему L. Елементи σ–алгебри $\sigma(L)$ називають *борелівськими множинами*, а сама σ–алгебра $\sigma(L)$ називається *σ–алгеброю борелівських множин в R^1*.

Оскільки $\{a\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\left[\, a, a + \dfrac{1}{n}\right) \in \sigma(L)$, то одноточкові множини є борелівськими. Проміжки $(a, b) = [a, b) - \{a\}$, $(a, b\,] = (a, b) + \{b\}$, $[a, b\,] = [a, b) + \{b\}$ є борелівськими множинами. Кожна відкрита множина є борелівською, оскільки будь-яка відкрита множина в R^1 є сумою скінченної або зчисленної кількості інтервалів. Кожна замкнена множина є також борелівською (доповнення замкненої множини до R^1 – відкрита множина).

Якщо $\Omega = R^n$ і L – система паралелепіпедів виду

$$\prod_{i=1}^{n} [\ a_i,\ b_i\ ) = \{\, x \mid x = (\, x_1,\ x_2,\ \ldots, x_n),\ a_i \le x_i < b_i,\ i = \overline{1,\ n}\},$$

то найменша σ–алгебра $\mathscr{B}(R^n)$, що містить систему L, називається *σ–алгеброю борелівських множин в R^n*.

Отже, якщо множину A можна дістати, виходячи із замкнених і відкритих множин, за допомогою скінченної або зчисленної кількості операцій об'єднання та перерізу, то множина A буде борелівською. *Обмежена борелівська множина називається $\mathscr{B}$–вимірною* (*вимірною за Борелем*).

Нехай $\Omega=[a,b)=\bigcup_{i=1}^{k}[a_{i-1},a_i)$, $a\in(-\infty,\infty)$, $b\in(-\infty,\infty)$, $0<b-a<\infty$, $H_i=[a_{i-1},a_i)$, $i\in\overline{1,k}$, $a_i-a_{i-1}=h>0$ для всіх $i\in\overline{1,k}$, $S=\{A\,|\,A=\bigcup_{i\in I}H_i, I\subset\{1,\ 2,\ \dots,\ k\}\}$, $\tilde{\Omega}=R^1=(-\infty,\infty)\supset\Omega$, $\tilde{S}=\mathscr{B}(R^1)$ – σ-алгебра борелівських множин із R^1, $\tilde{S}\supset S$, $m(H_i)=a_i-a_{i-1}=h>0$ і нехай на Ω задано поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей за таблицею 21.3

Табл. 21.3

$[a_{i-1};a_i)$	$[a_0;a_1)$	$[a_1;a_2)$	...	$[a_{k-1};a_k)$
$P_n^*([a_{i-1};a_i))$	$P_n^*([a_0;a_1))$	$P_n^*([a_1;a_2))$	...	$P_n^*([a_{k-1};a_k))$

звідки усереднена щільність $f(x)$ поінтервального розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega=[a,b)$ за інтервалами $[a_{i-1},a_i)$, $i\in\overline{1,k}$, набуває вигляду

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{P_n^*(H_i)}{m(H_i)}, & \text{коли } x\in H_i=[a_{i-1},a_i),\ i\in\overline{1,k},\\ 0, & \text{коли } x\,\overline{\in}\,\Omega.\end{cases}$$

Оскільки $0\le P_n^*(H_i)\le 1$, $m(H_i)=a_i-a_{i-1}=h>0$, $i\in\overline{1,k}$, то $0\le f(x)\le c<\infty$ для всіх $x\in\tilde{\Omega}\supset\Omega$, тобто значення функції $f(x)$ обмежені деяким сталим числом $c<\infty$.

Нехай $G=(-\infty,x)\subset\tilde{\Omega}$, $G\in\tilde{S}=\mathscr{B}(R^1)$.

Покладемо

$$F(x)=P_n^*(G_*)+\alpha(P_n^*(G^*)-P_n^*(G_*))=$$
$$=P(G)=P((-\infty,x)),\ \alpha\in[0,\ 1], \tag{21.2}$$

де $G_*=\bigcup_{\cup H_i\subset G\cap\Omega}(\cup H_i)$ - об'єднання всіх об'єднань $\cup H_i$ таких, що $\cup H_i\subset G\cap\Omega=(-\infty,x)\cap[a,b)$, $G^*=\bigcap_{G\cap\Omega\subset\cup H_i}(\cup H_i)$ - перетин всіх об'єднань $\cup H_i$ таких, що

$$G\cap\Omega=(-\infty,x)\cap[a,b)\subset\cup H_i=\cup[a_{i-1},a_i),$$

$P(G)=P(G_*)+\alpha(P(G^*)-P(G_*))$, $\alpha\in[0,\ 1)$, узагальнена статистична ймовірність на $(R^1,\ \mathscr{B}(R^1))$ - ймовірнісна міра на $(R^1,\ \mathscr{B}(R^1))$, одержана як продовження міри $P_n^*(A)$, $A\in S$, із простору подій S на простір

$\tilde{S} = \mathscr{B}(R^1)$.

Очевидно $G_* \subset G \cap \Omega \subset G^*$, тому $P(G_*) \le P(G^*)$.

Легко бачити, що функція $F(x) = P((-\infty, x))$ має такі властивості:

1. $F(x) \ge 0$, оскільки $P(G_*) \ge 0$, $P(G^*) - P(G_*) \ge 0$, $0 \le \alpha \le 1$.

2. $F(x)$ неспадна функція, тобто якщо $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \le F(x_2)$.

Справді, якщо $x_1 < x_2$, то $G_1 = (-\infty, x_1) \subset G_2 = (-\infty, x_2)$, тому $G_{1*} \subset G_{2*}$, $G_1^* \subset G_2^*$, $P(G_{1*}) \le P(G_{2*})$, $P(G_1^*) \le P(G_2^*)$, звідки $F(x_1) = (1-\alpha)P(G_{1*}) + \alpha P(G_1^*) \le (1-\alpha)P(G_{2*}) + \alpha P(G_2^*) = F(x_2)$.

3. $F(x) \to 0$, коли $x \to -\infty$.

Справді, коли $x \to -\infty$, то $(-\infty, x) \to (-\infty, -\infty) = \varnothing$, тому $G_* = \varnothing$, $G^* = \varnothing$, $P(G_*) = 0$, $P(G^*) = 0$, $(1-\alpha)P(G_*) + \alpha P(G^*) = 0$.

4. $F(x) \to 1$, коли $x \to \infty$.

Справді, коли $x \to \infty$, то $(-\infty, x) \to (-\infty, \infty) = \tilde{\Omega} \supset \Omega$, тому для $G = \tilde{\Omega}$ буде $G \cap \Omega = \Omega$, $G_* = \bigcup_{\cup H_i \subset G \cap \Omega} (\cup H_i) = \Omega$, $G^* = \bigcap_{G \cap \Omega \subset \cup H_i} (\cup H_i) = \Omega$, звідки

$$F(x) = (1-\alpha)P_n^*(\Omega) + \alpha P_n^*(\Omega) = (1-\alpha) \cdot 1 + \alpha \cdot 1 = 1.$$

Оскільки $P_n^*(H_i) = f(x) \cdot m(H_i) = \int_{H_i} f(x)dx$, $x \in H_i$, $i \in \overline{1,k}$, то

$$P(G) = (1-\alpha)P(G_*) + \alpha P(G^*) = (1-\alpha)\int_{G_*} f(x)dx + \alpha \int_{G^*} f(x)dx =$$

$$= \int_{G_*} f(x)dx + \alpha\left(\int_{G^*} f(x)dx - \int_{G_*} f(x)dx\right), \quad \alpha \in [0, 1]. \tag{21.3}$$

Оскільки $m(G^*) - m(G_*) \le h$, то

$$\int_{G^*} f(x)dx - \int_{G_*} f(x)dx \le \max_{x \in [a,b)} f(x) \cdot h = c \cdot h \to 0, \text{ коли } h \to 0.$$

5. Якщо $h > 0$, $x_1 \ne x_2$, $x_1 \in H_{i_0} = [a_{i_0-1}, a_{i_0})$, $x_2 \in H_{i_0} = [a_{i_0-1}, a_{i_0})$, тобто дві різні точки x_1 і x_2 лежать в одному і тому самому інтервалі, то $F(x_1) = F(x_2)$, тобто функція $F(x_1)$ набуває сталих значень c_i на кожному з інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$.

Оскільки $F(x) = 0$, коли $x \le a$, $F(x) = 1$, коли $b < x$, то, коли $h > 0$, існує принаймні два сусідні інтервали $[a_{i_1-1}, a_{i_1})$ і $[a_{i_2-1}, a_{i_2})$ такі, що $|F(x_2) - F(x_1)| > 0$, коли $x_1 \in [a_{i_1-1}, a_{i_1})$, $x_2 \in [a_{i_2-1}, a_{i_2})$, навіть коли $x_1 \to x_2$.

Це означає, що коли $h > 0$, то функція $F(x)$ поінтервального розподілу узагальнених статистичних ймовірностей не може бути неперервною і набуває не більше, ніж $k+2$, значень, де k - кількість інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$.

Разом з тим, коли $x_1 \in [a_{i_0-1}, a_{i_0})$, $x_2 \in [a_{i_0}, a_{i_0+1})$, тобто точки x_1 і x_2 лежать в сусідніх інтервалах, тоді

$$F(x_2) - F(x_1) \le \max_{x \in [a,b)} f(x) \cdot h = c \cdot h,$$

бо при переході точки x із інтервалу $[a_{i_0-1}, a_{i_0})$ в сусідній інтервал $[a_{i_0}, a_{i_0+1})$ значення функції $F(x)$ збільшується на величину $(1-\alpha)P_n^*([a_{i_0-1}, a_{i_0})) + \alpha P_n^*([a_{i_0}, a_{i_0+1})) \le c \cdot h$, оскільки до $G_* = \bigcup\limits_{\cup H_i \subset G \cap \Omega} (\cup H_i) \subset (-\infty, x) \cap [a,b)$ додається ще один інтервал, так само, як і до $G^* = \bigcap\limits_{G \cap \Omega \subset \cup H_i} (\cup H_i)$. Тому коли $h \to 0$, тоді $x_2 \to x_1$, $F(x_2) \to F(x_1)$, тобто за необмеженого зменшення $h > 0$, $h \to 0+0$, функція розподілу узагальнених статистичних ймовірностей стає практично неперервною (див. Рис. 21.11 а) – 21.11 д)), тобто для як завгодно малих $\varepsilon > 0$ і $\delta > 0$ матиме нерівність $|F(x_2) - F(x_1)| < \delta$, коли $|x_2 - x_1| \le 2h < \varepsilon$.

Окрім того, коли $h \to 0$, то і $G_* \to G$, $G^* \to G$, $\lim\limits_{h \to 0} G_* = \lim\limits_{h \to 0} G^* = G$, $m(G^* \setminus G_*) = m(G^*) - m(G_*) \to 0$, тому, враховуючи формулу (21.3), для $G = (-\infty, x)$ отримаємо

$$F(x) = P((-\infty, x)) = P(G) = \int_{G_*} f(x)dx + \alpha\Big(\int_{G^*} f(x)dx - \int_{G_*} f(x)dx\Big) \le$$

$$\le \int_{G_*} f(x)dx + ch \underset{h \to 0}{\to} \int_G f(x)dx = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Функція $F(x)$, *визначена за формулою* (21.2), *називається функцією поінтервального розподілу узагальнених статистичних ймовірностей на множині*

$$\tilde{\Omega} = (-\infty, \infty) \supset \Omega = [a,b) = \bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i), \; a_i - a_{i-1} = h > 0.$$

Якщо щільність $f(x)$ розподілу узагальнених статистичних ймовірностей обмежена, тобто $f(x) \le c < \infty$, тоді

$$F(x)=P(-\infty,x)=\int\limits_{G_*} f(x)dx+\alpha(\int\limits_{G^*} f(x)dx-\int\limits_{G_*} f(x)dx)\underset{h\to 0}{\to}\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx\,.$$

Така функція $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$ *є неперервною, а відповідний граничний поінтервальний розподіл узагальнених статистичних ймовірностей, коли* $h\to 0$*, також називається неперервним.*

Зауважимо, що коли $h>0$ досить мале додатне число, $a_i=a_{i-1}+h$, тоді

$$F(a_i)-F(a_{i-1})=P_n^*([a_{i-1},a_i))=f(x)\cdot h\,,\ x\in[a_{i-1},a_i)\,,$$

звідки

$$f(x)=\frac{F(a_i)-F(a_{i-1})}{a_i-a_{i-1}}\,,\ x\in[a_{i-1},a_i)\,,$$

тобто значення усередненої щільності $f(x)$ поінтервального розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega=[a,b)=\bigcup\limits_{i=1}^{k}[a_{i-1},a_i)$ характеризує середню швидкість зростання функції $F(x)$ під час переходу від точки $x=a_{i-1}$ до точки $x=a_i$. Якщо $h\to 0$, то $a_i\to a_{i-1}$ і

$$\frac{F(a_i)-F(a_{i-1})}{a_i-a_{i-1}}\to F'(a_i)=f(a_i)\,,$$

тобто в разі, коли $F(x)$ - неперервна функція на $\tilde{\Omega}=R^1$, то $f(x)=\frac{d}{dx}F(x)$ у всіх точках $x\in[a_{i-1},a_i)\subset(-\infty,\infty)$, для яких існує границя $\lim\limits_{a_i\to a_{i-1}}\frac{F(a_i)-F(a_{i-1})}{a_i-a_{i-1}}$, $x\in[a_{i-1},a_i)$.

Приклад 21.2. Якщо поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей визначається за таблицею 21.4:

Табл. 21.4

$[a_{i-1};a_i)$	$\left[0;\frac{1}{10}\right)$	$\left[\frac{1}{10};\frac{2}{10}\right)$	$\left[\frac{2}{10};\frac{3}{10}\right)$	$\left[\frac{3}{10};\frac{4}{10}\right)$	$\left[\frac{4}{10};\frac{5}{10}\right)$
$P_{100}^*([a_{i-1};a_i))$	0.5	0.2	0.1	0.1	0.04

$\left[\frac{5}{10};\frac{6}{10}\right)$	$\left[\frac{6}{10};\frac{7}{10}\right)$	$\left[\frac{7}{10};\frac{8}{10}\right)$	$\left[\frac{8}{10};\frac{9}{10}\right)$	$\left[\frac{9}{10};1\right)$
0	0.02	0.01	0.02	0.01

то

$$F(x)=P_n^*(G_*)=\begin{cases} 0, & \text{коли} \quad x<0.1, \\ 0.5, & \text{коли} \quad 0.1\le x<0.2, \\ 0.7, & \text{коли} \quad 0.2\le x<0.3, \\ 0.8, & \text{коли} \quad 0.3\le x<0.4, \\ 0.9, & \text{коли} \quad 0.4\le x<0.5, \\ 0.94, & \text{коли} \quad 0.5\le x<0.6, \\ 0.94, & \text{коли} \quad 0.6\le x<0.7, \\ 0.96, & \text{коли} \quad 0.7\le x<0.8, \\ 0.97, & \text{коли} \quad 0.8\le x<0.9, \\ 0.99, & \text{коли} \quad 0.9\le x<1, \\ 1, & \text{коли} \quad 1\le x \end{cases}$$

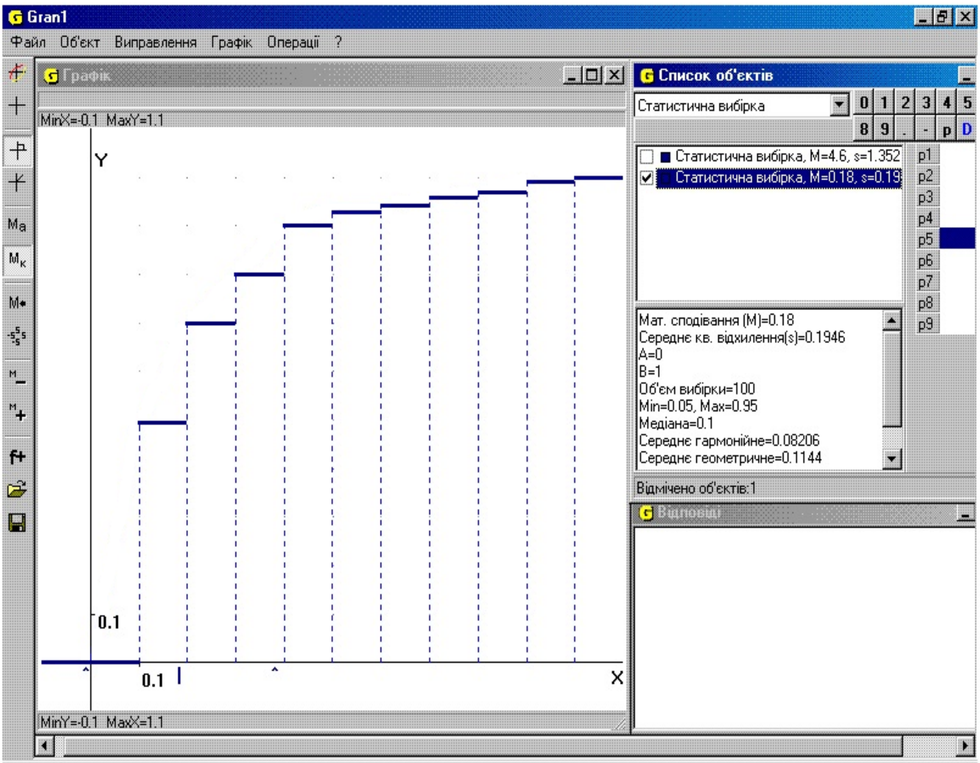


Рис. 21.6

На Рис. 21.6 подано графік функції поінтервального розподілу узагальнених статистичних (гіпотетичних) ймовірностей, визначених за поінтервальним розподілом статистичних ймовірностей, що заданий за таблицею 21.4.

Оскільки

$$F(a_i)=\int_{-\infty}^{a_i} f(x)dx=\int_{-\infty}^{a_{i-1}} f(x)dx+\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)dx=$$

$$=F(a_{i-1})+P_n^*([a_{i-1},a_i)),$$

то

$$P_n^*([a_{i-1};a_i))=F(a_i)-F(a_{i-1}).$$

Таким чином, за заданою функцією $F(x)$ поінтервального розподілу узагальнених статистичних імовірностей на множині $\tilde{\Omega}=(-\infty,\infty)\supset\Omega=\bigcup_{i=1}^{k}[a_{i-1},a_i)$, $a_i-a_{i-1}=h>0$, можна визначити статистичні ймовірності $P_n^*([a_{i-1};a_i))$ (відносні частоти попадання спостережуваних значень у проміжки $[a_{i-1};a_i)$) для будь-яких проміжків $[a_{i-1};a_i)$, заданих в таблиці 21.3. А тому через функцію $F(x)$ розподілу узагальнених статистичних ймовірностей цілком визначається узагальнена статистична (гіпотетична) ймовірність $P(x)$ будь-якої події (вимірної множини) $G\subset\tilde{\Omega}$, як гіпотетична ймовірність попадання в об'єднання проміжків виду $G\bigcap[a_{i-1},a_i)$, $i\in\overline{1,k}$, гіпотетичні ймовірності попадання в які обчислюються за формулою (21.3) або за формулою

$$P(G\bigcap[a_{i-1},a_i))=\frac{m(G\bigcap[a_{i-1},a_i))}{m([a_{i-1},a_i))}P_n^*([a_{i-1},a_i))=\int_{G\bigcap[a_{i-1},a_i)} f(t)dt,$$

$i\in\overline{1,k}$, тобто як сума приростів функції $F(x)$ розподілу статистичних ймовірностей на проміжках $G\bigcap[a_{i-1},a_i)$, $i\in\overline{1,k}$.

Якщо $G=\bigcup_{i\in I}[a_{i-1},a_i)$, $I\subset\{1,\ 2,\ldots,\ k\}$, тоді

$$P(G)=P_n^*(G),\ F(x)=F_n^*(x)=P_n^*((-\infty,x)\bigcap\bigcup_{i\in I}[a_{i-1},a_i))=$$

$$=P_n^*(\bigcup_{i\in I}[a_{i-1},a_i))=\sum_{i\in I}P_n^*([a_{i-1},a_i)). \qquad (21.4)$$

Нехай задано ймовірнісний простір (Ω,S,P_n^*), $\tilde{\Omega}=(-\infty,\infty)$,

$\tilde{S} = \mathscr{B}(R^1)$ - сукупність підмножин множини $\tilde{\Omega}$, яка задовольняє вимоги 1_s-3_s, зокрема до $\tilde{S}$ відносяться підмножини $(-\infty, x) \subset \tilde{\Omega}$ для довільних $x \in (-\infty, \infty)$, $S \subset \tilde{S}$.

Позначимо через $\bigcup\limits_{A \subset (-\infty, x)} A$ суму всіх подій A із S таких, що $A \subset (-\infty, x) \in \tilde{S}$. Очевидно така сума $\bigcup\limits_{A \subset (-\infty, x)} A$ буде належати до сукупності S, тобто буде подією.

Покладемо

$$F_n^*(x) = \tilde{P}_n^*((-\infty, x)) = P_n^*\left(\bigcup_{A \subset (-\infty, x)} A \right), \; A \in S, \; (-\infty, x) \in \tilde{S}.$$

Очевидно, функція $F_n^*(x)$ визначена для всіх $x \in (-\infty, \infty)$.

Легко бачити, що функція $F_n^*(x)$ задовільняє такі властивості:

1. $F_n^*(x) \geq 0$ як статистична ймовірність деякої події.

2. $F_n^*(-\infty) = 0$ як статистична ймовірність неможливої події, оскільки за довільного Ω

$$\bigcup_{A \subset (-\infty, -\infty)} A = \varnothing, \text{ бо } (-\infty, -\infty) = \varnothing.$$

3. Для довільного $x \in (-\infty, \infty)$

$$m_*((-\infty, x)) = \max_{\bigcup A \subset (-\infty, x) \bigcap \Omega} P_n^*(\bigcup A) \leq F_n^*(x) \leq \min_{(-\infty, x) \bigcap \Omega \subset \bigcup A} P_n^*(\bigcup A) =$$

$$= m^*((-\infty, x)), \; A \in S.$$

4. Функція $F_n^*(x)$ неспадна, тобто якщо $u < v$, то $F_n^*(u) \leq F_n^*(v)$.

Справді, нехай $u < v$. Тоді

$$\bigcup_{A \subset (-\infty, u)} A \subset \bigcup_{A \subset (-\infty, v)} A, \; A \in S,$$

а тому за властивостями ймовірнісної міри

$$P_n^*\left(\bigcup_{A \subset (-\infty, u)} \right) \leq P_n^*\left(\bigcup_{A \subset (-\infty, v)} \right),$$

тобто $F_n^*(u) \leq F_n^*(v)$.

Очевидно

$$P_n^*\left(\bigcup_{A \subset (-\infty, v)} A \setminus \bigcup_{A \subset (-\infty, u)} A \right) =$$

$$= P_n^*\left(\bigcup_{A\subset(-\infty,v)} A\right) - P_n^*\left(\bigcup_{A\subset(-\infty,u)} A\right) = F_n^*(v) - F_n^*(u)\,. \qquad (21.5)$$

Разом з тим не виключено, що $\bigcup\limits_{A\subset(-\infty,v)} A \setminus \bigcup\limits_{A\subset(-\infty,u)} A \neq \varnothing$, однак $\bigcup\limits_{A\subset[u,v)} A = \varnothing$. Наприклад, коли $\Omega = [a,b)$, простір подій S породжений поділом множини Ω на підмножини $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in \overline{1,k}$, такі, що $\bigcup\limits_{i=1}^{k}[a_{i-1}, a_i) = \Omega$, $A = \bigcup\limits_{i\in I}[a_{i-1}, a_i) \in S$, $I \subset \{1,2,...,k\}$, тобто $S = \{A \,|\, A = \bigcup\limits_{i\in I}[a_{i-1}, a_i),\ I \subset \{1,\ 2,\ ...,\ k\}\}$, $a_{i-1} < u < a_i$, $a_i < v < a_{i+1}$, тоді буде $\bigcup\limits_{A\subset(-\infty,v)} A \setminus \bigcup\limits_{A\subset(-\infty,u)} A = [a_{i-1}, a_i)$, однак $\bigcup\limits_{A\subset[u,v)} A = \varnothing$, оскільки жоден з проміжків $[a_{i-1}, a_i)$ не є підмножиною проміжка $[u,v)$. Тому не виключено, що

$$P_n^*\left(\bigcup_{A\subset[u,v)} A\right) \neq P_n^*\left(\bigcup_{A\subset(-\infty,v)} A\right) - P_n^*\left(\bigcup_{A\subset(-\infty,u)} A\right) = F_n^*(v) - F_n^*(u)\,.$$

Оскільки $\bigcup\limits_{A\subset[u,v)} A \subset \bigcup\limits_{A\subset(-\infty,v)} A \setminus \bigcup\limits_{A\subset(-\infty,u)} A$, то

$$P_n^*\left(\bigcup_{A\subset[u,v)} A\right) \leq P_n^*\left(\bigcup_{A\subset(-\infty,v)} A \setminus \bigcup_{A\subset(-\infty,u)} A\right) =$$

$$= P_n^*\left(\bigcup_{A\subset(-\infty,v)} A\right) - P_n^*\left(\bigcup_{A\subset(-\infty,u)} A\right) = F_n^*(v) - F_n^*(u).$$

Зауважимо, що записи вигляду $P_n^*([u,v)) = F_n^*(v) - F_n^*(u)$, $F_n^*(x) = P_n^*((-\infty, x))$ тощо можуть виявитись некоректними, якщо множини $[u,v]$, $(-\infty, x)$ і т.п. не є елементами простору подій S, тобто не є подіями, бо ймовірнісна міра P_n^* визначена лише на елементах сукупності S підмножин множини Ω, тобто на подіях A із простору подій S.

Із рівності (21.5) слідує, що і для поточкового розподілу статистичних ймовірностей на скінченній множині $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_m\}$, коли як події $A \in S$ разом з порожньою множиною $\varnothing$ розглядаються всеможливі об'єднання $A = \bigcup\limits_{i\in I} H_i$, $I \subset \{1,2,...,k\}$, $k \leq m$, підмножин H_i

множини Ω таких, що $H_i H_j = \varnothing$, коли $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{k} H_i = \Omega$ (зокрема H_i можуть бути одноелементними підмножинами множини Ω), і для поінтервального розподілу статистичних ймовірностей на нескінченній неперервній множині $\Omega = [a,b)$, коли як події $A \in S$ разом з порожньою множиною $\varnothing$ розглядаються всеможливі об'єднання $A = \bigcup_{i \in I} [a_{i-1}, a_i)$, $I \subset \{1, 2, ..., k\}$, інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$ таких, що $[a_{i-1}, a_i) \bigcap [a_{j-1}, a_j) = \varnothing$, коли $i \neq j$, $\bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i) = \Omega$, функція $F_n^*(x)$ кусково стала, тобто набуває одного і того самого значення, рівного $F_n^*(u)$, у всіх точках x із проміжка $[u,v)$, якщо $P_n^*\left(\bigcup_{A \subset (-\infty, v)} A \setminus \bigcup_{A \subset (-\infty, u)} A \right) = 0$, зокрема коли $\bigcup_{A \subset (-\infty, v)} A \setminus \bigcup_{A \subset (-\infty, u)} A = \varnothing$.

Очевидно, коли $\Omega = \{x_1, x_2, ..., x_k\}$, $A = \bigcup_{i \in I} \{x_i\} \in S$, $I \subset \{1, 2, ..., k\}$, і $u \in \{x_1, x_2, ..., x_k\}$, $v \in \{x_1, x_2, ..., x_k\}$, або коли $\Omega = [a,b) = \bigcup_{i=1}^{k} [a_{i-1}, a_i)$, $A = \bigcup_{i \in I} [a_{i-1}, a_i) \in S$, $I \subset \{1, 2, ..., k\}$, і $u \in \{a_0, a_1, ..., a_k\}$, $v \in \{a_0, a_1, ..., a_k\}$, тоді буде $[u,v) \in S$ і $P_n^*[u,v) = F_n^*(v) - F_n^*(u)$.

Приклад 21.3. Нехай на множині $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ задано розподіл статистичних ймовірностей через ряд розподілу

x_i	1	2	3	4	5
$P_n^*(\{x_i\})$	0.05	0.20	0.50	0.20	0.05

Як події разом з порожньою множиною $\varnothing$ розглядатимемо всеможливі об'єднання $A = \bigcup_{i \in I} \{x_i\}$, $I \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $x_i = i$, $i \in \overline{1,5}$, тобто всеможливі підмножини множини $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Таким чином $S = \{A \mid A = \bigcup_{i \in I} \{x_i\},\ I \subset \{1,\ 2,\ ...,\ 5\}\}$.

Тоді для даного розподілу статистичних ймовірностей буде:

1) $F_n^*(x) = 0$, коли $x \leq 1$, оскільки жодна із непорожніх підмножин

$\bigcup\limits_{i\in I}\{x_i\}$, $I\subset\{1,2,3,4,5\}$, $I\neq\varnothing$, множини Ω не є підмножиною множини $(-\infty,1)$;

2) коли буде $1<x\le 2$, тоді до множини $(-\infty,x)$ буде входити підмножина $\{1\}$ множини Ω, і тому

$$F_n^*(x)=P_n^*(\{1\})=0.05 \text{, коли } 1<x\le 2\text{;}$$

3) коли x буде змінюватись в межах від 2 до 3 включно, тобто буде $2<x\le 3$, тоді до множини $(-\infty,x)$ будуть входити підмножини $\{1\}$, $\{2\}$, $\{1,2\}$, які є елементами сукупності *S*, тобто подіями, і об'єднання яких $\{1\}\bigcup\{2\}\bigcup\{1,2\}$ буде множиною, що входить до сукупності *S*, тобто подією, і крім того буде підмножиною множини $(-\infty,x)$, коли $x\in(2,3)$. Тому

$$F_n^*(x)=P_n^*\left(\bigcup_{A\subset(-\infty,x)}A\right)=P_n^*(\{1\}\bigcup\{2\}\bigcup\{1,2\})=P_n^*(\{1,2\})=$$
$$=P_n^*(\{1\})+P_n^*(\{2\})=0.25,$$

коли $2<x\le 3$, тобто $F_n^*(x)=0.25$, коли $2<x\le 3$.

Міркуючи аналогічно, знайдемо

4) $F_n^*(x)=0.75$, коли $3<x\le 4$;

5) $F_n^*(x)=0.95$, коли $4<x\le 5$;

6) $F_n^*(x)=1.00$, коли $5<x$.

Остаточно одержуємо

$$F_n^*(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 1,\\ 0.05, & \text{коли } 1<x\le 2,\\ 0.25, & \text{коли } 2<x\le 3,\\ 0.75, & \text{коли } 3<x\le 4,\\ 0.95, & \text{коли } 4<x\le 5,\\ 1.00, & \text{коли } 5<x.\end{cases}$$

Графік такої функції $F_n^*(x)$ для заданого дискретного поточкового розподілу статистичних ймовірностей на скінченній множині точок $\Omega=\{1,2,3,4,5\}$ подано на Рис. 21.7.

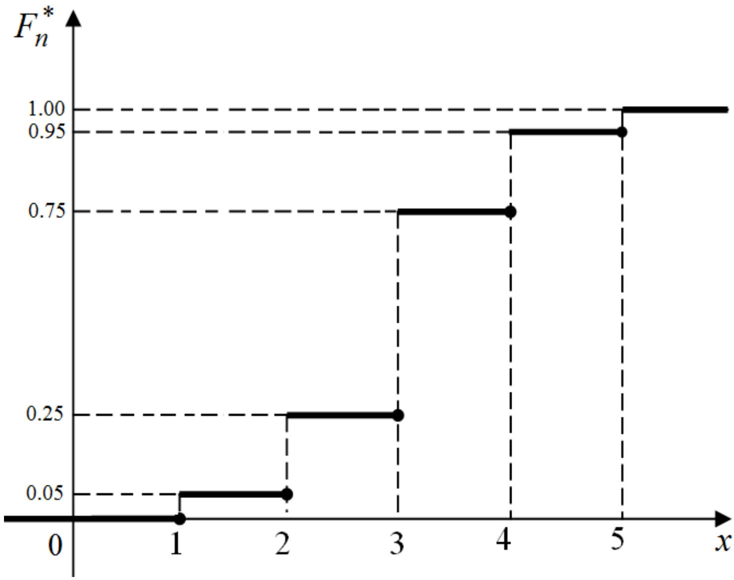


Рис. 21.7

Підкреслимо, що в даному прикладі множини вигляду $(-\infty, x)$ не є подіями відносно ймовірнісного простору (Ω, S, P_n^*), бо таких множин немає в сукупності S підмножин розглядуваної множини Ω, тобто в просторі подій, до якого разом з порожньою множиною $\varnothing$ віднесено підмножини $\bigcup\limits_{i\in I}\{x_i\}$, $I \subset \{1,2,3,4,5\}$, множини Ω, а тому записи вигляду $F_n^*(x) = P_n^*((-\infty, x))$ в розглядуваному випадку некоректні.

Приклад 21.4. Нехай на множині $\Omega = (0,5]$ задано поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей

$(a_{i-1}, a_i]$	$(0,1]$	$(1,2]$	$(2,3]$	$(3,4]$	$(4,5]$
$P_n^*((a_{i-1}, a_i])$	0.05	0.20	0.50	0.20	0.05

Графік усередненої щільності $f_n^*(x)$ цього розподілу статистичних ймовірностей за інтервалами $(i-1, i]$, $i \in \overline{1,5}$, на множині $\Omega = (0,5] = (0,1] \cup (1,2] \cup (2,3] \cup (3,4] \cup (4,5]$ подано на Рис. 21.8.

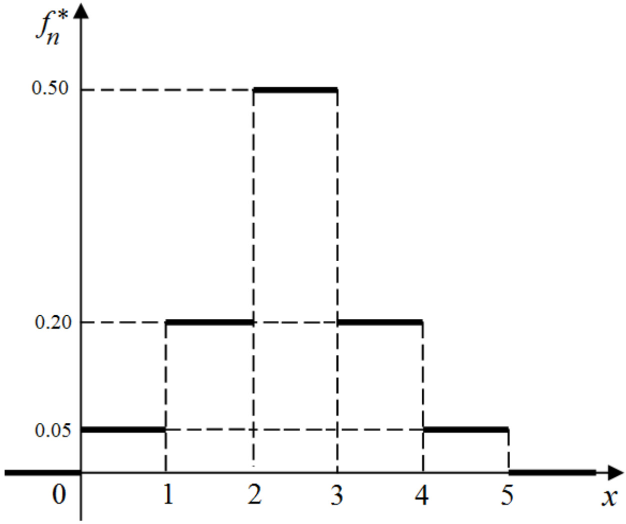


Рис. 21.8

Як події разом з порожньою множиною $\varnothing$ розглядатимемо всеможливі об'єднання інтервалів $(a_{i-1}, a_i]$, тобто $S = \{A \mid A = \bigcup_{i \in I} (a_{i-1}, a_i],\ I \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}\}$.

Нехай $\tilde{\Omega} = (-\infty, \infty) \supset \Omega$, $\tilde{S} = \mathscr{B}(R^1) \supset S$. Тоді, враховуючи формулу $F_n^*(x) = \tilde{P}_n^*((-\infty, x)) = P_n^*\left(\bigcup_{A \subset (-\infty, x)} A\right)$, $A \in S$, $(-\infty, x) \in \tilde{S} = \mathscr{B}(R^1)$, для даного поінтервального розподілу статистичних ймовірностей будемо мати: $F_n^*(x) = 0$, коли $x \le 1$, оскільки жодна з підмножин $A = \bigcup_{i \in I} (a_{i-1}, a_i] \in S$, $I \subset \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $I \ne \varnothing$, не є підмножиною множини $(-\infty, x)$, коли $x \le 1$. Коли x буде в межах від 1 до 2 включно, тобто $x \in (1, 2]$, тоді інтервал $(0,1]$ буде підмножиною множини $(-\infty, x)$, і тому для $x \in (1, 2]$ буде

$$F_n^*(x) = P_n^*([0,1)) = \int_0^1 f_n^*(x)dx = 0.05 \text{, коли } x \in (1, 2].$$

Коли x буде в межах від 2 до 3 включно, тобто $x \in (2, 3]$, тоді сума подій $(0,1] \in S$, $(1,2] \in S$, $(0,1] \bigcup (1,2] \in S$, тобто $(0,1] \bigcup (1,2] \bigcup ((0,1] \bigcup (1,2]) \in S$ буде підмножиною множини $(-\infty, x)$, $x \in (2, 3]$, тому

$$F_n^*(x) = P_n^*((0,1] \bigcup (1,2] \bigcup ((0,1] \bigcup (1,2])) =$$
$$= P_n^*((0,1] \bigcup (1,2]) = P_n^*((0,1]) + P_n^*((1,2]) =$$
$$= \int_0^1 f_n^*(x)dx + \int_1^2 f_n^*(x)dx = 0.05 + 0.20 = 0.25,$$

коли $x \in (2,3]$.

Міркуючи аналогічно, знайдемо

$$F_n^*(x) = 0.75, \text{ коли } x \in (3;4];$$
$$F_n^*(x) = 0.95, \text{ коли } x \in (4;5];$$
$$F_n^*(x) = 1.00, \text{ коли } x \in (5;+\infty).$$

Таким чином

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 1, \\ 0.05, & \text{коли } 1 < x \le 2, \\ 0.25, & \text{коли } 2 < x \le 3, \\ 0.75, & \text{коли } 3 < x \le 4, \\ 0.95, & \text{коли } 4 < x \le 5, \\ 1.00, & \text{коли } 5 < x. \end{cases}$$

Вигляд графіка так визначеної функції $F_n^*(x)$ поінтервального розподілу узагальнених статистичних ймовірностей на множині $\widetilde{\Omega} = (-\infty, \infty) \supset \Omega = [0,5)$, розглядуваного в прикладі 21.4, буде такий самий, як і вигляд графіка функції $F_n^*(x)$ дискретного поточкового розподілу статистичних ймовірностей на множині $\Omega = \{1,2,3,4,5\}$, розглянутого в прикладі 21.3 (див. Рис. 21.7, Рис. 21.11 а)). Однаковий вигляд мають і подання самих функцій $F_n^*(x)$ розподілу узагальнених статистичних ймовірностей в обох розглядуваних в прикладах 21.3 і 21.4 випадках.

Тому у випадках розглянутого способу побудови простору подій S, $S = \{A \mid A = \bigcup_{i \in I} H_i, I \subset \{1,\ 2,\ \dots,\ k\}\}$, *коли як події разом з порожньою множиною* $\varnothing$ *розглядаються всеможливі об'єднання* $A = \bigcup_{i \in I} H_i \in S$, $I \subset \{1,2,\dots,k\}$, *підмножин* (*можливо одноточкових*) H_i, $i \in \overline{1,k}$, *скінченної множини* $\Omega = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $(k \le m)$, *чи всеможливі* *об'єднання підмножин* $H_i=(a_{i-1},a_i]$, $i\in\overline{1,k}$, *нескінченної множини* $\Omega=(a,b]$, *таких, що* $H_iH_j=\varnothing$, *коли* $i\neq j$, $\bigcup_{i=1}^{k}H_i=\Omega$, *і* $(-\infty,x)\,\overline{\in}\,S$ *для довільних* $x\in(-\infty,\infty)$, *за виглядом опису функції* $F_n^*(x)$ *розподілу узагальнених статистичних ймовірностей неможливо визначити, розглядається поточковий розподіл статистичних ймовірностей на скінченній множині* $\Omega=\{x_1,x_2,...,x_m\}$, *чи поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей на нескінченній неперервній множині*

$$\Omega=(a,b]=\bigcup_{i=1}^{k}(a_{i-1},a_i],\ (a_{i-1},a_i]\bigcap(a_{j-1},a_j]=\varnothing,\ \text{коли } i\neq j.$$

Приклад 21.5. Нехай на множині $\Omega=(0{,}5]$ задано поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей такий самий, як і в прикладі 21.4, а простір подій S породжений поділом множини Ω на 25 інтервалів довжиною 0.2, тобто як події разом з порожньою множиною $\varnothing$ розглядаються всеможливі об'єднання $\bigcup_{i\in I}(a_{i-1},\ a_i],$, $I\subset\{1,2,...,25\}$, інтервалів $(a_{i-1},\ a_i]$, $i\in\overline{1,25}$, $a_0=0$, $a_i-a_{i-1}=0.2$.

Це означає, що розглядається новий простір $\hat S=\{A\,|\,A=\bigcup_{i\in I}(a_{i-1},\ a_i],\ I\subset\{1,\ 2,\ ....,25\}\},$, породжений сукупністю проміжків $(a_{i-1},a_i]$, $i\in\overline{1,25}$, елементами якого є множини виду $A=\bigcup_{i\in I}(a_{i-1},a_i]$, $I\subset\{1,2,...,25\}$. Очевидно, всі події із простору S, розглядуваного в прикладі 21.4, є також і елементами простору $\hat S$, тобто $S\subset\hat S$. Нову ймовірнісну міру $\hat P_n^*$ на просторі подій $\hat S$ визначимо за формулою

$$\hat P_n^*(A)=\int_A f_n^*(x)dx=\sum_{x\in(a_{i-1},a_i]\subset A}f_n^*(x)\cdot(a_i-a_{i-1}),\quad A\in\hat S,$$

де $f_n^*(x)$ – щільність розподілу статистичних ймовірностей така сама, як і в прикладі 21.4 (див. Рис. 21.8, Рис. 21.9).

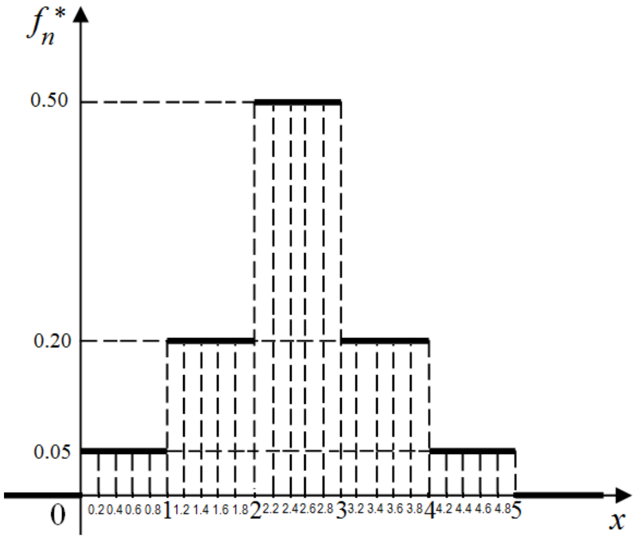


Рис. 21.9

Очевидно, за тієї самої усередненої щільності $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей, що і в прикладі 21.4, статистичні ймовірності попадання в проміжки, отримані подрібненням проміжків із прикладу 21.4 на 5 проміжків однакової довжини, в 5 разів меншої, ніж довжина вихідних проміжків, будуть в 5 разів менші, ніж статистичні ймовірності попадання у вихідні проміжки, і будуть, як і раніше, обчислюватися за формулою

$$\hat{P}_n^*((a_{i-1}, a_i]) = f_n^*(x)(a_i - a_{i-1}),\ i \in \overline{1{,}25}.$$

Очевидно, $\hat{P}_n^*(A) = P_n^*(A)$, коли $A \in S$. В такому разі говорять, що міра $\hat{P}_n^*(A)$, $A \in \hat{S}$, є продовженням міри $P_n^*(A)$, $A \in S$, із простору S на простір $\hat{S}$.

Якщо проміжки $(a_{i-1}, a_i]$, з яких складаються події $A = \bigcup_{i \in I} (a_{i-1}, a_i] \in \hat{S}$, $I \subset \{1, 2, ..., 25\}$, поділити кожен на якесь число ще дрібніших проміжків однакової довжини, отримаємо новий простір подій $\hat{\hat{S}}$ і нову ймовірнісну міру $\hat{\hat{P}}_n^*$ цілком аналогічно до попереднього. Таке подрібнення проміжків $(a_{i-1}, a_i]$ можна продовжувати як завгодно довго до тих пір, поки різниця $h = a_i - a_{i-1}$ стане меншою, ніж будь яке як завгодно мале наперед задане число $\varepsilon > 0$. В результаті кожного зменшення довжини $h = a_i - a_{i-1}$ проміжків $(a_{i-1}, a_i]$, однакової для всіх

i, будемо отримувати все нові і нові ймовірнісні простори $(\Omega, S^{(j)}, P_n^{*(j)})$, $j \in \{0,1,2,3,...\}$,(з одними і тими самими Ω і $f_n^*(x)$).

Очевидно, функція $F_n^*(x)$ набуватиме сталих значень на проміжках $(a_{i-1}, a_i]$, $i \in \overline{1,25}$, і в разі переходу через точку a_i отримуватиме приріст

$$f_n^*(x) \cdot (a_i - a_{i-1}), \; x \in (a_{i-1}, a_i]. \qquad (21.5)$$

Міркуючи аналогічно до того, як це було зроблено в прикладі 21.4 під час побудови функції $F_n^*(x)$ поінтервального розподілу узагальнених статистичних ймовірностей на множині $\Omega = (0,5]$ за інтервалами $(0,1],(1,2],(2,3],(3,4],(4,5]$, в розглядуваному прикладі одержимо:

$F_n^*(x) = 0$, коли $x \le 0.2$, $F_n^*(x) = 0.01$, коли $0.2 < x \le 0.4$,

$F_n^*(x) = 0.02$, коли $0.4 < x \le 0.6$, $F_n^*(x) = 0.03$, коли $0.6 < x \le 0.8$,

$F_n^*(x) = 0.04$, коли $0.8 < x \le 1.0$, $F_n^*(x) = 0.05$, коли $1.0 < x \le 1.2$,

$F_n^*(x) = 0.09$, коли $1.2 < x \le 1.4$, $F_n^*(x) = 0.13$, коли $1.4 < x \le 1.6$,

$F_n^*(x) = 0.17$, коли $1.6 < x \le 1.8$, $F_n^*(x) = 0.21$, коли $1.8 < x \le 2.0$,

$F_n^*(x) = 0.25$, коли $2.0 < x \le 2.2$, $F_n^*(x) = 0.35$, коли $2.2 < x \le 2.4$,

$F_n^*(x) = 0.45$, коли $2.4 < x \le 2.6$, $F_n^*(x) = 0.55$, коли $2.6 < x \le 2.8$,

$F_n^*(x) = 0.65$, коли $2.8 < x \le 3.0$, $F_n^*(x) = 0.75$, коли $3.0 < x \le 3.2$,

$F_n^*(x) = 0.79$, коли $3.2 < x \le 3.4$, $F_n^*(x) = 0.83$, коли $3.4 < x \le 3.6$,

$F_n^*(x) = 0.87$, коли $3.6 < x \le 3.8$, $F_n^*(x) = 0.91$, коли $3.8 < x \le 4.0$,

$F_n^*(x) = 0.95$, коли $4.0 < x \le 4.2$, $F_n^*(x) = 0.96$, коли $4.2 < x \le 4.4$,

$F_n^*(x) = 0.97$, коли $4.4 < x \le 4.6$, $F_n^*(x) = 0.98$, коли $4.6 < x \le 4.8$,

$F_n^*(x) = 0.99$, коли $4.8 < x \le 5.0$, $F_n^*(x) = 1.00$, коли $5.0 < x$.

На Рис. 21.11 б) подано графік так визначеної функції $F_n^*(x)$ поінтервального розподілу узагальнених статистичних ймовірностей на множині $\Omega = \bigcup_{i=1}^{25} (a_{i-1}, a_i]$, $a_0 = 0$, $a_i - a_{i-1} = 0.2$, $i \in \overline{1,25}$, за інтервалами $(a_{i-1}, a_i]$, $i \in \overline{1,25}$, із щільністю (див. Рис. 21.9, Рис. 21.10)

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \overline{\in} (a_0, a_{25}], \\ 0.05, & \text{коли } x \in (0,1] \cup (4,5], \\ 0.20, & \text{коли } x \in (1,2] \cup (3,4], \\ 0.50, & \text{коли } x \in (2,3]. \end{cases}$$

Зауважимо, що в програмі Gran1 передбачено послугу, за якою із подрібненням інтервалів $(a_{i-1}, a_i]$((за рахунок збільшення їх кількості) автоматично перебудовується графік функції $F(x)$ відповідного поінтервального розподілу узагальнених статистичних ймовірностей (див. Рис. 21.11 а) - Рис. 21.11 д)).

Для збільшення чи зменшення кількості інтервалів за рахунок їх подрібнення чи укрупнення, досить, використовуючи послуги програми Gran1, збільшувати чи зменшувати значення відповідного параметра $P \in \{P1, P2, ..., P9\}$, вибравши крок його зміни h рівним 1, щоб кількість інтервалів була цілим числом (див. Рис. 21.11 б)).

На Рис. 21.11 а) подано графік функції $F_n^*(x)$ поінтервального розподілу узагальнених статистичних ймовірностей на проміжку $(0,5]$, коли $h = 1$, а $f_n^*(x)$ із прикладу 21.4 (Рис. 21.10), а на Рис. 21.11 б) - Рис. 21.11 д) подано графіки функцій $F_n^*(x)$ поінтервальних розподілів узагальнених статистичних ймовірностей на тому самому проміжку $(0,5]$, коли довжину інтервала зменшено відповідно в 5 разів (Рис. 21.11 б)), в 10 разів (Рис. 21.11 в)), в 20 разів (Рис. 21.11 г)), в 100 разів (Рис. 21.11 д)) (див. значення параметра $P1$ на рисунках), а $f_n^*(x)$ така сама, як і раніше (Рис. 21.10).

Зауважимо, що коли для довільних $x \in (-\infty, \infty)$ множини $(-\infty, x)$ є подіями, тобто елементами простору подій *S*, $(-\infty, x) \in S$, що означає, що як простір елементарних подій розглядається множина $\Omega = R^1 = (-\infty, \infty)$, а як простір подій – $\mathscr{B}(R^1)$, тоді формула (21.1) набуває вигляду $F(x) = P_n^*((-\infty, x))$, $x \in (-\infty, \infty)$. *В такому разі за виглядом функції* $F(x)$ *можна з'ясувати, така функція побудована за поточковим розподілом статистичних ймовірностей на скінченній множині точок* $\{x_1, x_2, ..., x_k\} \subset \Omega = (-\infty, \infty)$, *чи за поінтервальним розподілом статистичних ймовірностей на неперервній множині* $(a,b] \subset \Omega = (-\infty, \infty)$.

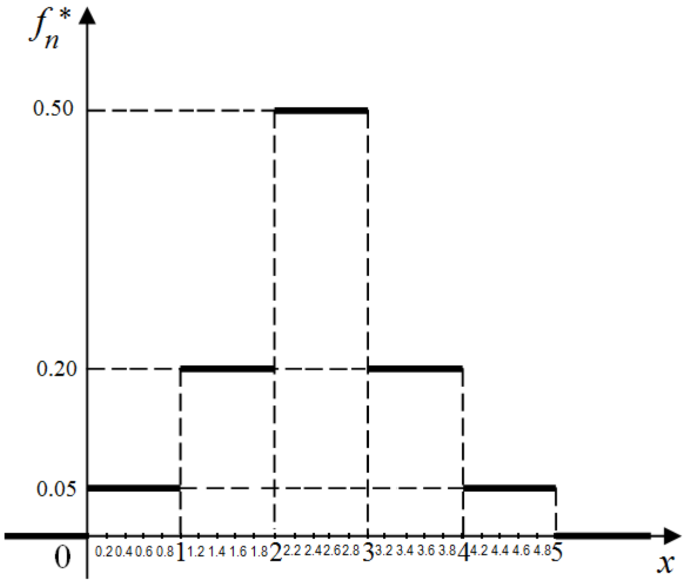


Рис. 21.10

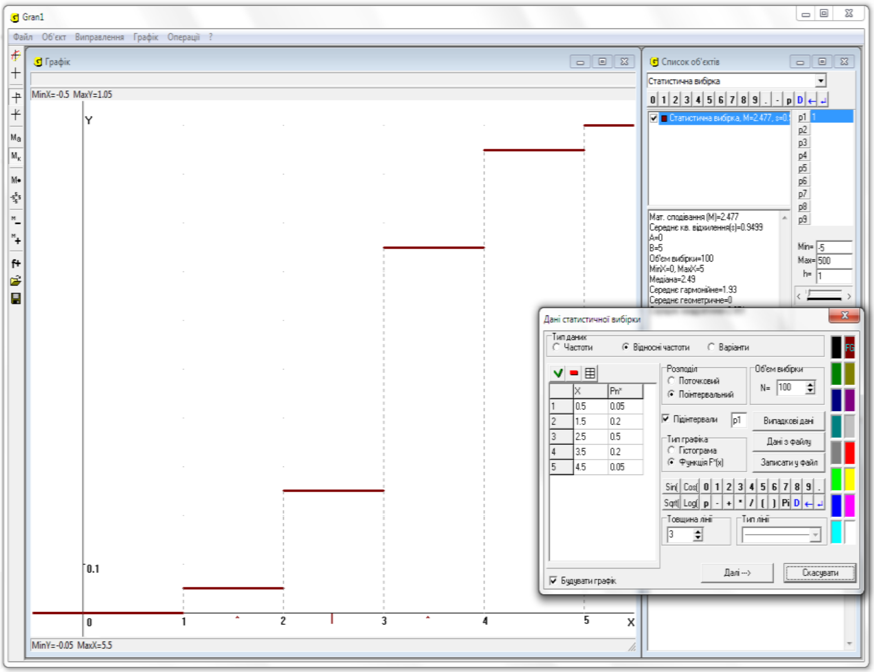


Рис. 21.11 а)

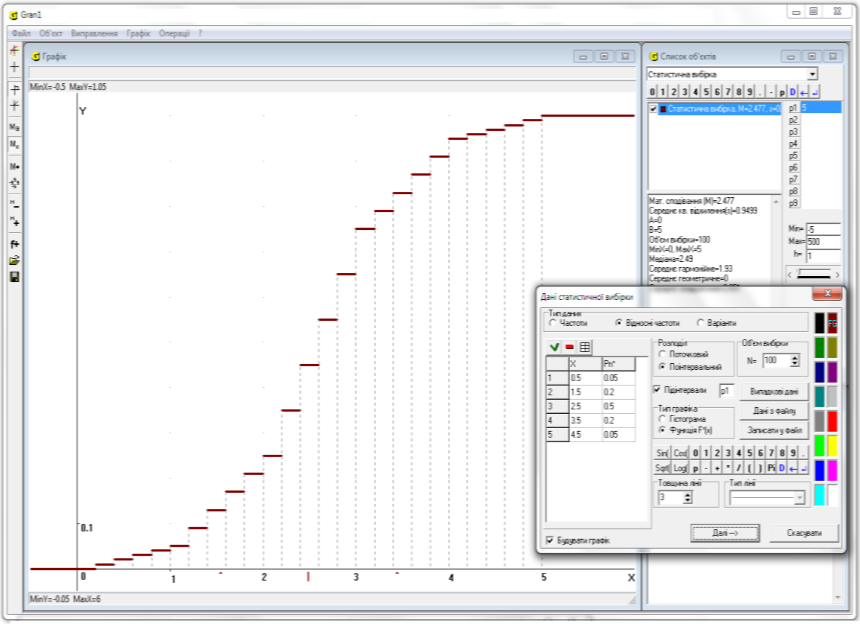


Рис. 21.11 б)

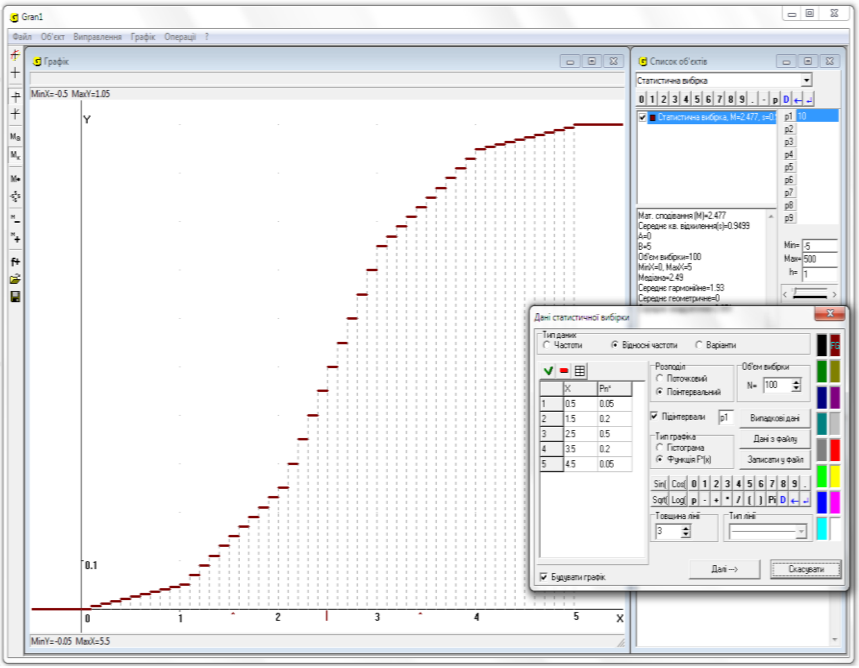
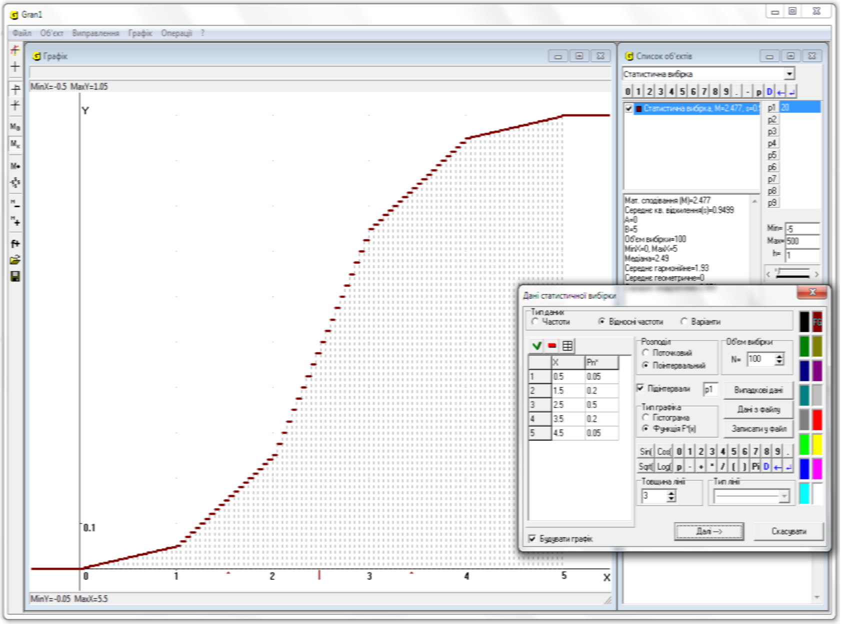
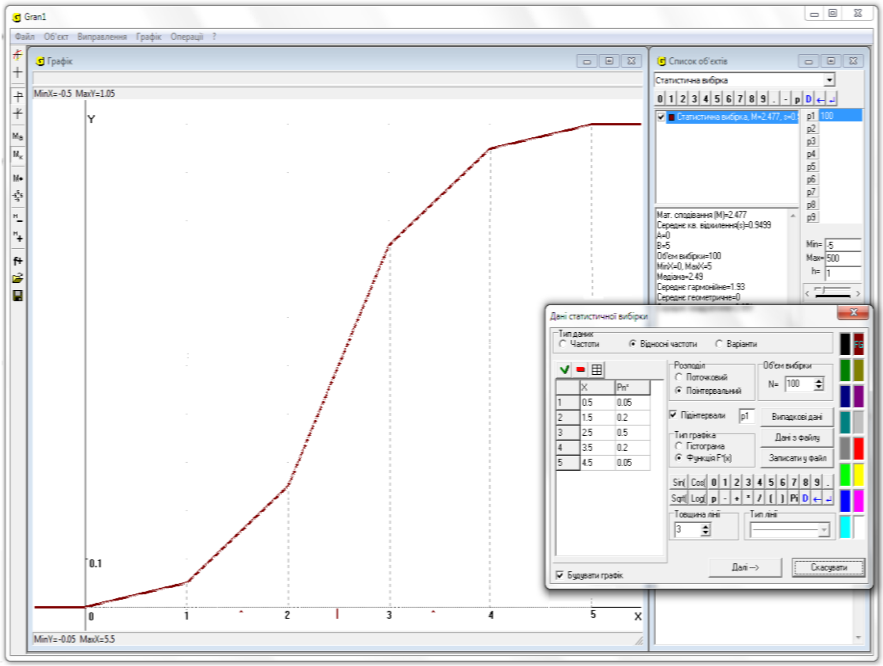


Рис. 21.11 в)



	X	Pn*
1	0.5	0.05
2	1.5	0.2
3	2.5	0.5
4	3.5	0.2
5	4.5	0.05

Рис. 21.11 г)



	X	Pn*
1	0.5	0.05
2	1.5	0.2
3	2.5	0.5
4	3.5	0.2
5	4.5	0.05

Рис. 21.11 д)

Приклад 21.6. Для поточкового розподілу статистичних ймовірностей на скінченній множині $\{1,2,3,4,5\} \subset \Omega = (-\infty, \infty)$, розглянутого в прикладі 21.3, за умови $(-\infty, x) \in S$ для довільного $x \in (-\infty, \infty)$ функція розподілу статистичних ймовірностей

$$F_n^*(x) = P_n^*((-\infty, x)), \ (-\infty, x) \in S, \ x \in (-\infty, \infty),$$

буде кусково сталою і матиме той самий вигляд, що і раніше, тобто

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le 1, \\ 0.05, & \text{коли } 1 < x \le 2, \\ 0.25, & \text{коли } 2 < x \le 3, \\ 0.75, & \text{коли } 3 < x \le 4, \\ 0.95, & \text{коли } 4 < x \le 5, \\ 1.00, & \text{коли } 5 < x. \end{cases}$$

Графік цієї функції має той самий вигляд, що і на Рис. 21.7.

Разом з тим, для поінтервального розподілу статистичних ймовірностей на множині $(0,5] \subset \Omega = (-\infty, \infty)$, розглянутого в прикладі 21.4, за умови $(-\infty, x) \in S = \mathscr{B}(R^1)$ для довільного $x \in (-\infty, \infty)$ функція розподілу статистичних ймовірностей

$$F_n^*(x) = P_n^*((-\infty, x)) = \int_{-\infty}^{x} f_n^*(x)dx, \ (-\infty, x) \in S, \ x \in (-\infty, \infty),$$

буде неперервною і матиме вигляд

$$F_n^*(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_n^*(x)dx = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \le a_0, \\ f_n^*(x) \cdot (x - a_0), & \text{коли } x \in (a_0, a_1], \\ \sum_{i=1}^{j-1} P_n^*([a_{i-1}, a_i)) + f_n^*(x)(x - a_{j-1}), & \\ & \text{коли } x \in (a_{j-1}, a_j], 2 \le j \le k, \\ 1, & \text{коли } a_k < x, \end{cases}$$

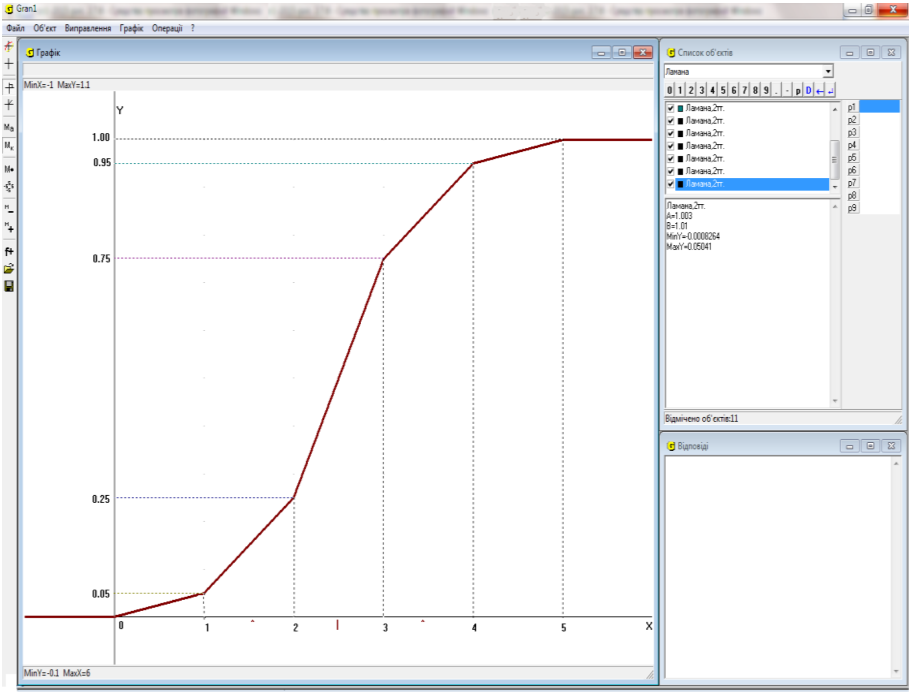


Рис. 21.12

тобто для наведених даних буде

$$F_n^*(x)=\begin{cases}0, & \text{коли } x\le 0,\\ 0.05x, & \text{коли } 0<x\le 1,\\ 0.05+0.20(x-1), & \text{коли } 1<x\le 2,\\ 0.25+0.50(x-2), & \text{коли } 2<x\le 3,\\ 0.75+0.20(x-3), & \text{коли } 3<x\le 4,\\ 0.95+0.05(x-4), & \text{коли } 4<x\le 5,\\ 1, & \text{коли } 5<x.\end{cases}$$

Графік останньої функції $F_n^*(x)$ подано на Рис. 21.12.

Зауважимо, що коли усереднена щільність $f_n^*(x)$ поінтервального розподілу узагальнених статистичних ймовірностей задана на інтервалах $(a_{i-1},a_i]$, $i\in\overline{1,k}$, фіксованої довжини h, таких, що, $(a_{i-1},a_i]\cap(a_{j-1},a_j]=\varnothing$, коли $i\ne j$, $\bigcup_{i=1}^{k}(a_{i-1},a_i]=\Omega$, $a_i-a_{i-1}=h$ (наприклад, на інтервалах довжини $h=1$, як в прикладі 21.4, див. Рис. 21.8), а простір подій S породжується поділом множини Ω на все дрібніші і дрібніші інтервали такі, що довжина найдовшого з таких інтервалів стає все меншою і меншою (див. приклад 21.5, Рис. 21.11 а) – Рис. 21.11 д)), тоді функція $F_n^*(x)$ такого поінтервального розподілу узагальнених статистичних ймовірностей із вказаною щільністю $f_n^*(x)$ за все більшого і більшого подрібнення інтервалів, з яких складаються події $A \in S$, все менше і менше відрізнятиметься від неперервної функції $F_n^*(x)$ поінтервального розподілу статистичних ймовірностей, побудованої за умови, що як події розглядаються всеможливі множини $(-\infty, x)$, $x \in (-\infty, \infty)$, тобто множини $(-\infty, x)$ є елементами простору подій $S = \mathscr{B}(R^1)$ (див. приклади 21.5, 21.6).

Зауважимо, що *коли* $F_n^*(x)$ *неперервна*, *тоді розподіл узагальнених статистичних ймовірностей на множині* $\Omega = (-\infty, +\infty)$ *називається неперервним*, а $(-\infty, x) \in S$ для довільних $x \in (-\infty, \infty)$. У випадку, коли $(-\infty, u) \in S$, $(-\infty, v) \in S$, $u < v$, $u \in (-\infty, \infty)$, $v \in (-\infty, \infty)$, як випливає з властивостей 1_s-3_s простору подій *S*, $[u, v) = (-\infty, v) - (-\infty, u)$ також є елементом простору подій *S*, тобто $[u, v) \in S$, бо коли $A \in S$ і $B \in S$, то

$B \setminus A = B \bigcap \overline{A} = \overline{\overline{B \bigcap \overline{A}}} = \overline{\overline{B} \bigcup \overline{\overline{A}}} = \overline{\overline{B} \bigcup A} \in S$ за властивостями 1_s-3_s простору подій *S*. Тому, як видно з формули (21.5), буде $P_n^*([u, v)) = F_n^*(v) - F_n^*(u)$, бо в розглядуваному випадку для $A \in S$ таких, що $A \subset (-\infty, v)$, та $A \in S$ таких, що $A \subset (-\infty, u)$, буде мати місце рівність

$$\bigcup_{A \subset (-\infty, v)} A \setminus \bigcup_{A \subset (-\infty, u)} A = (-\infty, v) \setminus (-\infty, u) = [u, v) \in S .$$

Зауважимо, що ймовірнісні міри P_n^*, розглянуті в прикладах 21.5 і 21.6, є гіпотетичні, знайдені за припущення, що щільність $f_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей має вигляд (див. Рис. 21.8, Рис. 21.10)

$$f_n^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{коли } x \overline{\in} [0, 5], \\ 0.05, & \text{коли } x \in (0, 1] \bigcup (4, 5], \\ 0.20, & \text{коли } x \in (1, 2] \bigcup (3, 4], \\ 0.50, & \text{коли } x \in (2, 3], \end{cases}$$

тобто за припущення, що щільність розподілу статистичних ймовірностей на проміжка $(0,1]$, $(1,2]$, $(2,3]$, $(3,4]$, $(4,5]$ набуває сталих значень відповідно 0.05, 0.20, 0.50, 0.20, 0.05, і значення 0 за межами проміжка $(0,5]$, що в дійсності може виявитись не так.

Крім самих розподілів статистичних ймовірностей важливе значення мають деякі числові характеристики цих розподілів.

Однією з найважливіших числових характеристик розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот) спостережених значень $x_{cn\,i}$ є їх середнє арифметичне

$$M_n^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_{cn\,i} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i = \sum_{i=1}^{k} x_i P_n^*(\{x_i\}) .$$

де $m_i = k_n(x_i)$ – число випробувань, в яких було спостережене значення x_i.

Це середнє арифметичне буде ближче до значень, що зустрічаються частіше, ніж до значень, що зустрічаються рідко. Тому число M_n^* є значенням, поблизу якого в першу чергу слід очікувати більшість значень у майбутніх спостереженнях, і є у певному розумінні центром розсіювання статистичних ймовірностей (відносних частот) спостережених значень досліджуваної величини.

Крім центра розсіювання важливими є характеристики величини розсіювання (чи скупченості) статистичних ймовірностей, тобто наскільки далеко можуть бути віддалені (у переважній більшості випадків) спостережені значення досліджуваної величини від центра розсіювання, у якому діапазоні (у переважній більшості випадків) вони будуть знаходитися і т.п.

Однією з характеристик розсіювання статистичних ймовірностей є розмах вибірки $x_{\max} - x_{\min}$.

Однак більш істотною характеристикою розсіювання статистичних ймовірностей навколо центра розсіювання є так зване середнє квадратичне відхилення спостережених значень досліджуваної величини від M_n^*, тобто від центра розсіювання. Таке середнє квадратичне відхилення обчислюється за формулою

$$\sigma_n^* = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_{cn\,i} - M_n^*)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(x_i - M_n^*)^2 P_n^*(\{x_i\})} .$$

Справа в тому, що найбільш істотними для визначення величини розсіювання статистичних ймовірностей (відносних частот) значень досліджуваної величини (за досить великого числа спостережень) будуть ті значення, які у вибірці зустрічаються найчастіше. Значення ж, частота появи яких у вибірці дуже мала, практично не впливають на характеристику σ_n^* розсіювання статистичних ймовірностей (відносних частот) основної маси спостережених значень досліджуваної величини.

Тому характеристика $x_{\max} - x_{\min}$ може виявитися дещо завищеною в порівнянні з більш істотною характеристикою σ_n^*.

Нехай, наприклад, серед 10000 спостережених значень 1 раз зустрічається значення –1, 1 раз – +1, 9998 разів – 0. Очевидно $M_n^* = 0$. Природно вважати, що розсіювання статистичних ймовірностей (відносних частот) окремих значень досліджуваної величини біля центра розсіювання $M_n^* = 0$ практично відсутнє:

$$\sigma_n^* = \sqrt{(-1-0)^2 \frac{1}{10000} + (0-0)^2 \frac{9998}{10000} + (1-0)^2 \frac{1}{10000}} = \sqrt{0.0002} \approx 0.014 \approx 0,$$

хоча $x_{\max} - x_{\min} = 1-(-1) = 2$. У даному випадку спостережені значення –1 і +1 несуттєві і практично не впливають на характеристики розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот) основної маси спостережених значень.

Іноді середнє значення характеризують не середнім арифметичним, а середнім гармонійним:

$$\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_{cn\,i}}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{x_i} P_n^*(\{x_i\})}.$$

Така характеристика може бути зручнішою у випадку, наприклад, визначення середньої швидкості руху деякого тіла вздовж прямої від точки $x=0$ до точки $x=n$, якщо відомо, що першу одиницю шляху тіло пройшло з швидкістю V_{cn1}, другу – з швидкістю V_{cn2}, … , n-у – з швидкістю $V_{cn\,n}$. Тоді час, витрачений на першу одиницю шляху, буде $\frac{1}{V_{cn1}}$, на другу – $\frac{1}{V_{cn2}}$, ... , на n-у – $\frac{1}{V_{cn\,n}}$. Загальний час, витрачений на n одиниць шляху, дорівнює $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{V_{cn\,i}}$ Таким чином середня швидкість на всьому шляху довжиною n одиниць дорівнює

$$\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{V_{cn\,i}}} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{V_{cn\,i}}}.$$

Якщо проміжки довжини 1, які тіло проходить з швидкістю V_1, зустрічаються m_1 разів, з швидкістю V_2 – m_2 разів і т.д., з швидкістю V_k – m_2 разів, тоді середня швидкість дорівнює:

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} m_i}{\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{V_i}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{V_i}} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{V_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \frac{m_i}{n} \cdot \frac{1}{V_i}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{V_i} P_n^*(\{V_i\})},$$

де $P_n^*(\{V_i\})$ – статистичні ймовірності (відносні частоти) проміжків, які тіло проходить з швидкістю V_i.

В разі розгляду добутку значень x_{cn1}, x_{cn2}, ... , $x_{cn\,n}$ використовується середнє геометричне значення $\sqrt[n]{x_{cn1}x_{cn2}...x_{cn\,n}}$. Очевидно, логарифм середнього геометричного дорівнює середньому арифметичному логарифмів значень x_{cn1}, x_{cn2}, ... , $x_{cn\,n}$:

$$\log_a(\sqrt[n]{x_{cn1}x_{cn2}...x_{cn\,n}}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log_a(x_{cn\,i}).$$

У конкретних ситуаціях можуть знадобитися і деякі інші характеристики вибірки x_{cn1}, x_{cn2}, ... , $x_{cn\,n}$.

Запитання для самоконтролю

1. Що називають статистичною вибіркою?
2. Що називають варіантами?
3. Що називають частотою появи значення x_i у вибірці x_{cn1}, x_{cn2}, … , $x_{cn\,n}$?
4. Що називають статистичною ймовірністю (відносною частотою) появи значення x_i у вибірці x_{cn1}, x_{cn2}, … , $x_{cn\,n}$?
5. Яка характеристика значення x_i більш інформативна – частота m_i чи статистична ймовірність (відносна частота) $\frac{m_i}{n}$?
6. Що називають рядом поточкового розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот) на скінченній множині значень досліджуваної дискретної величини?
7. Що називають поінтервальним розподілом статистичних ймовірностей появи значень досліджуваної неперервної величини?
8. Чому дорівнює сума статистичних ймовірностей появи всіх спостережених значень досліджуваної величини?
9. Що називають многокутником розподілу статистичних ймовірностей (полігоном відносних частот)?
10. Що називають гістограмою поінтервального розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот) попадання в задані інтервали значень досліджуваної величини?
11. Чому дорівнює площа під гістограмою (над віссю Ox)?
12. Що називають функцією розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот) появи значень досліджуваної величини?

13. Якого найменшого значення може набувати функція $F_n^*(x)$?
14. Якого найбільшого значення може набувати функція $F_n^*(x)$?
15. Чи може мати місце нерівність $F_n^*(x_1) > F_n^*(x_2)$, якщо $x_1 < x_2$?
16. Що характеризує середнє арифметичне M_n^* спостережених значень x_{cn1}, x_{cn2}, ..., $x_{cn\,n}$?
17. Чому точку з абсцисою $x = M_n^*$ називають центром розсіювання статистичних ймовірностей (відносних частот) появи значень x_i досліджуваної величини?
18. Чи може значення M_n^* не збігатися з жодним із значень $x_{cn\,i}$, що є у вибірці?
19. Які показники використовують, щоб охарактеризувати величину розсіювання статистичних ймовірностей (відносних частот) появи спостережених значень досліджуваної величини?
20. Чому середнє квадратичне відхилення σ_n^* слід вважати більш коректною характеристикою розсіювання статистичних ймовірностей (відносних частот) на множині можливих значень x_1, x_2, ..., x_k досліджуваної величини, ніж характеристика розсіювання $x_{\max} - x_{\min}$?

Вправи для самостійного виконання

Виконати вправи 1-6, використовуючи в разі необхідності для обчислень послугу “Операції / Калькулятор” чи інші послуги програми GRAN1.

1. Побудувати многокутник поточкового розподілу статистичних ймовірностей (полігон відносних частот) появи спостережених значень досліджуваної величини, якщо задано розподіл абсолютних частот:

x_i	–3	–2	–1	0	1	2	3
m_i	1	6	15	43	17	5	2

2. За даними вправи 1 побудувати графік функції $F_n^*(x)$ розподілу статистичних ймовірностей на множині значень досліджуваної величини.
3. За даними вправи 1 знайти M_n^* – середнє арифметичне спостережених значень досліджуваної величини.
4. За даними вправи 1 знайти σ_n^* – середнє квадратичне відхилення спостережених значень досліджуваної величини від їх середнього арифметичного M_n^*.
5. Побудувати гістограму поінтервального розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот) на сукупності інтервалів довжиною 1, якщо в таблиці зазначені центри цих інтервалів і частоти попадання в них:

–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
1	8	12	34	57	36	14	6	2

6. За даними вправи 5 побудувати функцію $F_n^*(x)$ поінтервального розподілу статистичних ймовірностей для інтервалів довжиною: 1; 0.2; 0.1; 0.05; 0.01.
7. Визначити, як зміниться функція поінтервального розподілу статистичних ймовірностей, коли замість проміжків $(a_{i-1}, a_i]$ розглядати проміжки: $[a_{i-1}, a_i)$. Знайти різницю функцій $F_1(x)$ і $F_2(x)$ поінтервального розподілу статистичних ймовірностей: $F_1(x)$ – за інтервалами $(a_{i-1}, a_i]$, $F_2(x)$ – за інтервалами $[a_{i-1}, a_i)$, $i \in 1, k$. Конкретні обчислення провести за даними вправи 5.
8. Задано:
1. $\Omega_1 = (0,5] = \bigcup_{i=1}^{5}(i-1, i]$,

$$S_1 = \{A \mid A = \bigcup_{i \in I}(i-1, i],\ I \subset \{1,2,3,4,5\}\},$$

міра P_{1n}^* визначена на S_1 через щільність розподілу статистичних ймовірностей

$$f_1(x) = \begin{cases} 0.05, \text{ коли } x \in (0.1] \bigcup (4,5], \\ 0.20, \text{ коли } x \in (1,2] \bigcup (3,4], \\ 0.50, \text{ коли } x \in (2,3], \\ 0, \quad \text{ коли } x \bar{\in} (0,5] \end{cases}$$

$\tilde{\Omega}_1 = R^1 \supset \Omega_1$, $\tilde{S}_1 = \mathscr{B}(R^1) \supset S_1$,

$\tilde{P}_1(G_1) = P_{1n}^*(G_{1*}) + \alpha P_{1n}^*(G_1^* \setminus G_{1*})$, $\alpha = 0,5$, $G_1 \in \tilde{S}_1$,

$G_{1*} = \bigcup_{\bigcup(i-1,i] \subset G_1 \cap \Omega_1} (\bigcup(i-1, i])$, $G_1^* = \bigcap_{G_1 \cap \Omega_1 \subset \bigcup(i-1,i]} (\bigcup(i-1, i]$.

а) Визначити функцію розподілу ймовірностей

$F_1(x) = \tilde{P}_1((-\infty,\ x))$.

б) Обчислити $\tilde{P}_1((1.3, 3.7])$.

в) Визначити $F_1(x)$ для випадку, коли як простір подій замість S_1 розглядається $\tilde{S}_1$.

г) Обчислити $\tilde{P}_1((1.3,\ 3.7])$ для випадку, коли як простір подій замість S_1 розглядається $\tilde{S}_1$.

2) $\Omega_2 = [0,5) = \bigcup_{i=1}^{5} [i-1, i)$

$$S_2 = \{A \mid A = \bigcup_{i \in I} [i-1, i),\ I \subset \{1,2,3,4,5\}\}$$

міра $\mathrm{P}^*_{2\mathrm{n}}$ визначена на S_2 через щільність розподілу статистичних ймовірностей

$$f_2(x) = \begin{cases} 0.05, \text{ коли } & x \in [0.1) \bigcup [4,5), \\ 0.20, \text{ коли } & x \in [1,2) \bigcup [3,4), \\ 0.50, \text{ коли } & x \in [2,3), \\ 0, \quad \text{ коли } & x \bar{\in} [0,5), \end{cases}$$

$$\widetilde{\Omega}_2 = R^1 \supset \Omega_2, \quad \widetilde{S}_2 = \mathscr{B}(R^1) \supset S_2,$$

$$\widetilde{P}_2(G_2) = P^*_{2\mathrm{n}}(G_{2*}) + \alpha P^*_{2\mathrm{n}}(G^*_2 \setminus G_{2*}), \quad \alpha = 0{,}5, \ G_2 \in \widetilde{S}_2,$$

$$G_{2*} = \bigcup_{\bigcup[i-1,i) \subset G_1 \bigcap \Omega_1} (\bigcup [i-1, i)), \quad G^*_2 = \bigcap_{G_2 \bigcap \Omega_2 \subset \bigcup [i-1,i)} (\bigcup [i-1, i)\ .$$

а) Визначити функцію розподілу ймовірностей $F_2(x) = \widetilde{P}_2((-\infty,\ x))$.

б) Обчислити $\widetilde{P}_2([1.3,\ 3.7))$.

в) Визначити $F_2(x)$ для випадку, коли як простір подій замість S_2 розглядається $\widetilde{S}_2$.

г) Обчислити $\widetilde{P}_2([1.3,\ 3.7))$ для випадку, коли як простір подій замість S_2 розглядається $\widetilde{S}_2$.

3) Визначити різницю $F_1(x) - F_2(x)$ для випадків:

а) $F_1(x)$ пов'язана з простором подій S_1, $F_2(x) -$ з S_2;

б) $F_1(x)$ пов'язана з простором подій $\widetilde{S}_1$, $F_2(x) -$ з $\widetilde{S}_2$.

4) Визначити різницю $\widetilde{P}_1((1.3,\ 3.7]) - \widetilde{P}_2([1.3,\ 3.7))$ для випадків:

а) $\widetilde{P}_1$ визначена через $\mathrm{G}_{1*} \in S_1$, $\mathrm{G}^*_1 \in S_1$, $\widetilde{P}_2$ визначена через $G_{2*} \in S_2$, $G^*_2 \in S_2$.

б) $\widetilde{P}_1$ визначена через $\mathrm{G}_{1*} \in \widetilde{S}_1$, $\mathrm{G}^*_1 \in \widetilde{S}_1$, $\widetilde{P}_2$ визначена через $G_{2*} \in \widetilde{S}_2$, $G^*_2 \in \widetilde{S}_2$.

§22. Введення експериментальних даних

Деякі елементи статистичного аналізу набору спостережених значень досліджуваної величини можна виконати з використанням послуг програми GRAN1. Однак перш ніж приступити до аналізу набору спостережених значень з використанням послуг програми GRAN1, ці дані необхідно ввести з клавіатури, з панелі введення даних чи з деякого файлу на дискові в робочий файл програми.

Перед початком введення набору спостережених значень слід встановити у вікні “Список об’єктів” тип задання залежності “Статистична вибірка”. Далі необхідно звернутися до послуги створення нового об’єкта (за допомогою головного меню, контекстного меню або кнопки панелі інструментів).

Під час створення об’єкта типу “Статистична вибірка” з’являється допоміжне вікно “Дані статистичної вибірки” (Рис. 22.1). Вигляд вікна може змінюватись в залежності від типу вибірки і способу її задання.

За допомогою кнопкового перемикача “Розподіл” можна вказати, який з двох можливих типів розподілів статистичних ймовірностей досліджується:

- “Поточковий” – це буде означати, що досліджується поточковий розподіл статистичних ймовірностей на скінченній множині точок. В цьому випадку неможливо буде побудувати гістограму (графік щільності розподілу частот), неперервну функцію розподілу частот, а під час введення даних необхідно вказувати окремі можливі значення досліджуваної величини і частоти появи цих значень, або ж вводити одне за одним спостережені значення.
- “Поінтервальний” – це буде означати, що досліджується поінтервальний розподіл статистичних імовірностей. В цьому випадку неможливо буде побудувати полігон частот, а під час введення даних необхідно вказувати рівновіддалені середини інтервалів (однакової довжини) і частоти попадання в ці інтервали, або ж вводити одне за одним спостережені значення.

Набір спостережених значень в обох випадках вводиться однаково.

Після того, як вказано тип досліджуваного розподілу частот, необхідно вказати тип даних (частоти, відносні частоти або варіанти). Тип даних необхідно вказати перед початком введення самих даних, оскільки в разі змінювання типу даних таблиця, де вони містяться, очищується.

Дані вводяться в таблицю так само, як це робилось під час введення координат вершин ламаної. Для поточкового розподілу статистичних ймовірностей:

- в разі введення частот – слід вказати в стовпці “X” можливе значення досліджуваної величини, а в стовпці “n” – кількість появ даного значення (Рис. 22.1);

- в разі введення відносних частот – слід вказати в стовпці “X” можливе значення досліджуваної величини, а в стовпці “Pn*” – відносну частоту появи даного значення. Крім того також необхідно вказати об’єм вибірки в рядку “N=” (Рис. 22.2);
- в разі введення варіант – в єдиному стовпці “X” вказуються значення варіант (спостережені значення) досліджуваної величини (Рис. 22.3).

Для поінтервального розподілу:

- в разі введення частот – слід вказати в стовпці “X” середину інтервалу, в який попадають спостережені значення, а в стовпці “n” – кількість попадань таких значень (варіант) в цей інтервал (Рис. 22.4);
- в разі введення відносних частот – слід вказати в стовпці “X” середину інтервалу, в який попадають варіанти, а в стовпці “Pn*” – відносну частоту попадання варіант в такий інтервал. Крім того також необхідно вказати об’єм вибірки в рядку “N=” (Рис. 22.5);
- в разі введення варіант – в єдиному стовпці “X” вказуються значення варіант (Рис. 22.6).

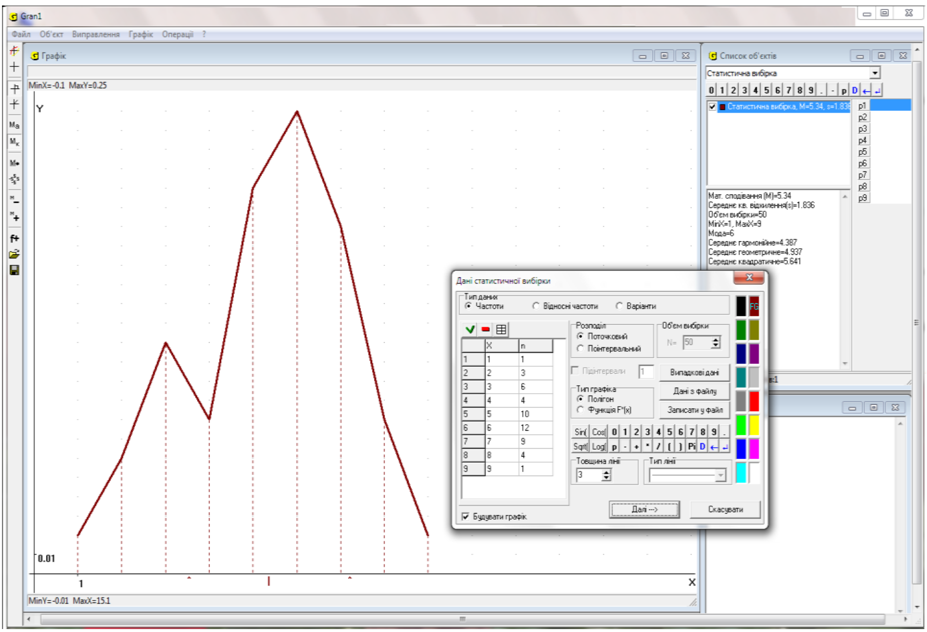


Рис. 22.1

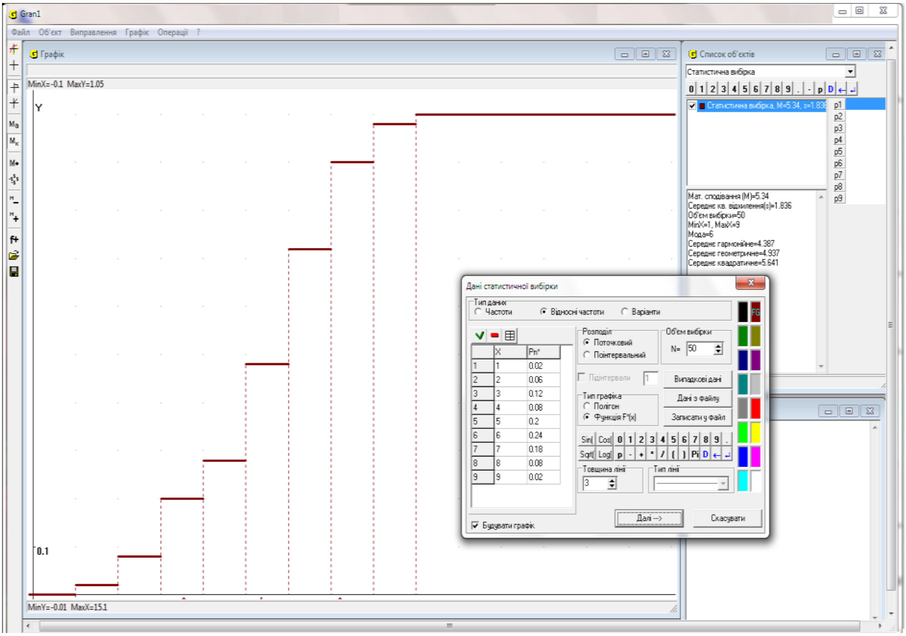


Рис. 22.2

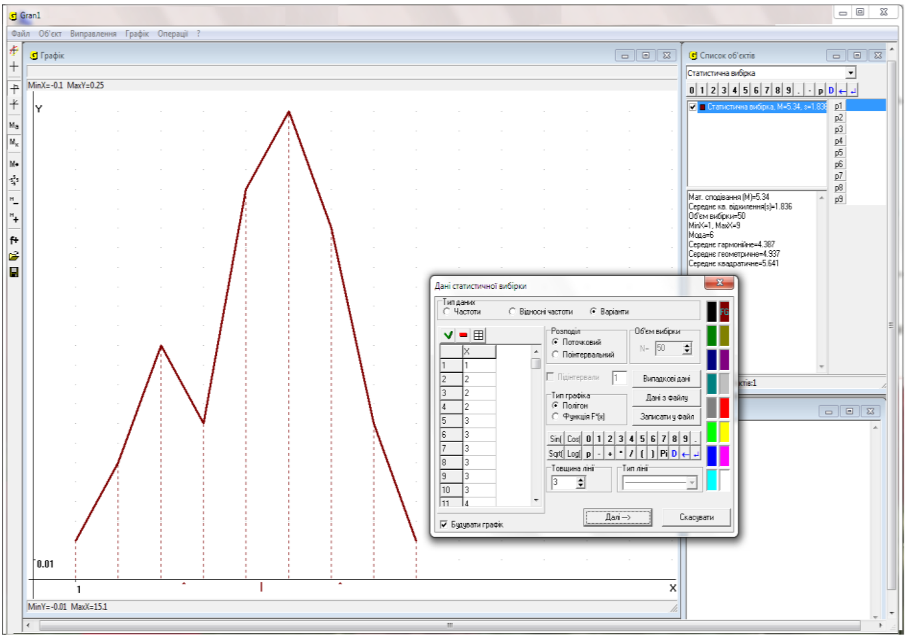


Рис. 22.3

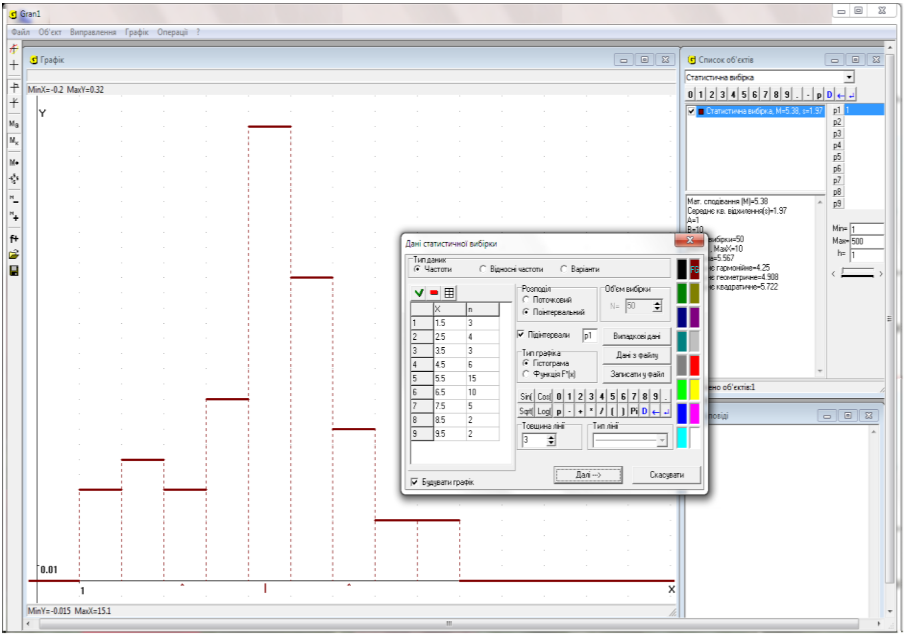


Рис. 22.4

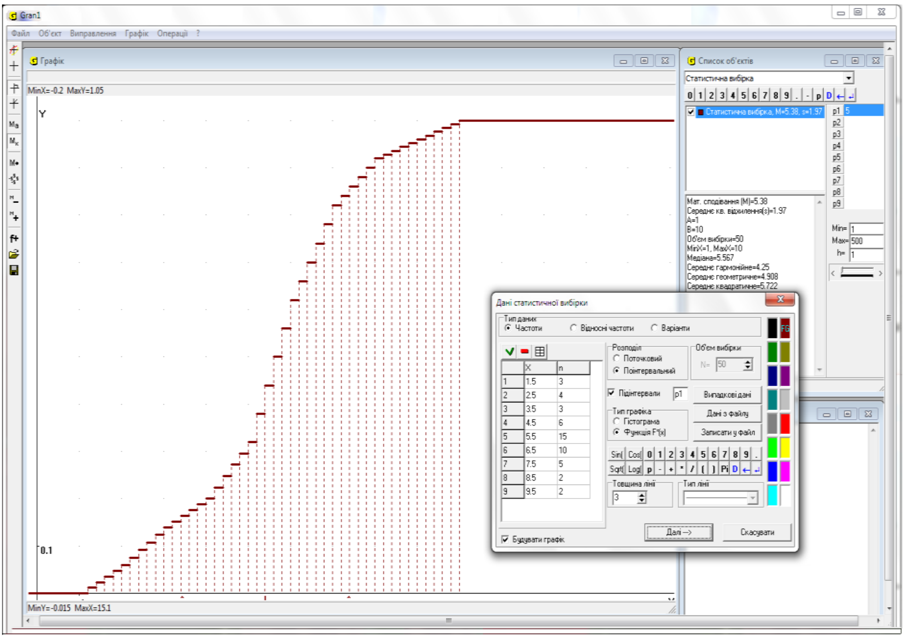


Рис. 22.5

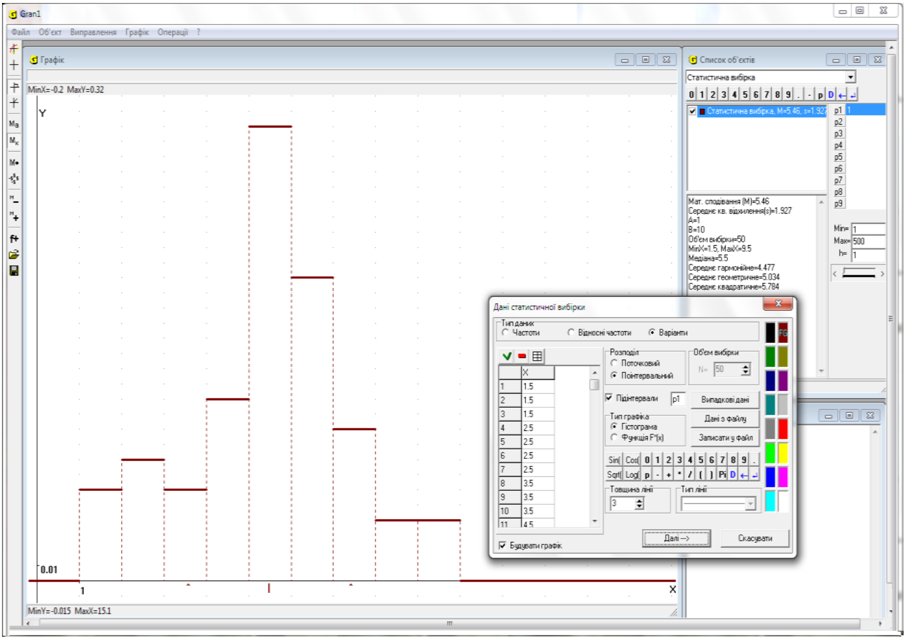


Рис. 22.6

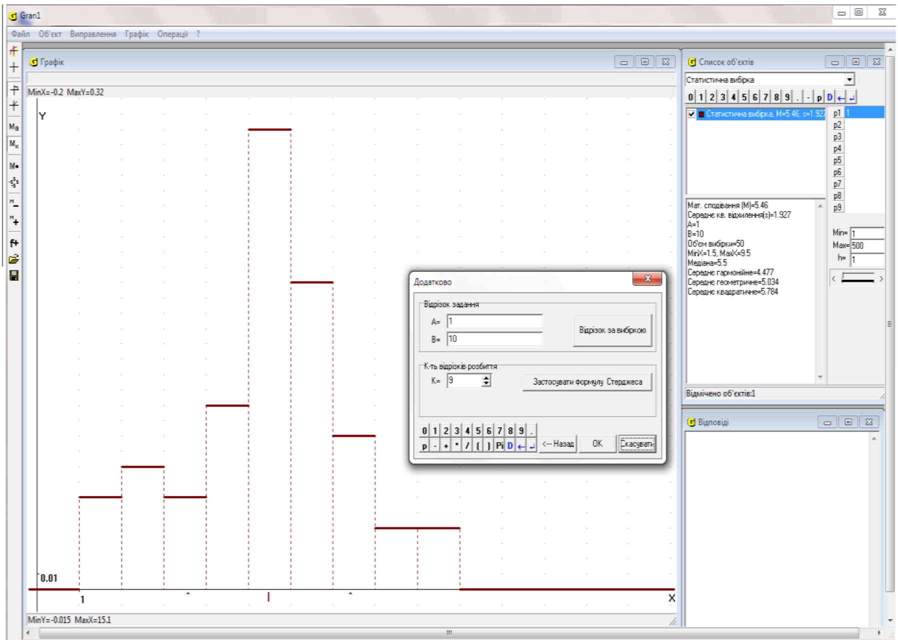


Рис. 22.7

За допомогою перемикача “Тип графіка” вказується тип графічного подання опису даної статистичної вибірки. Для поточкового розподілу частот це полігон або функція розподілу (Рис. 22.1 – Рис. 22.3), а для поінтервального – гістограма або функція розподілу (Рис. 22.4 – Рис. 22.6).

Після закінчення введення даних потрібно натиснути кнопку “Далі-->”. В результаті у вікні “Список об’єктів” з’явиться позначення нового об’єкта – статистичної вибірки.

Задаючи поінтервальний розподіл за допомогою частот або відносних частот, значення середин інтервалів слід розташовувати на однаковій відстані (тобто довжини всіх інтервалів повинні бути рівні між собою). Кількість інтервалів співпадає з кількістю введених середин інтервалів.

Однак, якщо поінтервальний розподіл задається за допомогою варіант, то після “натиснення” кнопки “Далі-->” з’являється допоміжне вікно “Додатково” (Рис. 22.7). В цьому вікні необхідно вказати відрізок, на якому знаходяться всі введені значення варіант. За допомогою кнопки “відрізок за вибіркою” встановлюються як значення лівого і правого кінців відрізка мінімальне та максимальне значення варіант вибірки. Також в цьому вікні необхідно вказати кількість інтервалів (від 2 до 50), на які ділиться відрізок задання вибірки, або скористатись кнопкою “Застосувати формулу Стерджеса”, за якою обчислюється рекомендована кількість інтервалів $K = [1 + 3.222 \cdot \ln N]$, де N – об’єм вибірки. За необхідності після “натиснення” кнопки “<---Назад” можна повернутися до режиму введення даних вибірки.

Введення набору випадкових значень можна здійснити також, скориставшись послугою програми Gran1 “Випадкові дані” (Рис. 22.6). Відповідаючи на запити, що подаються за програмою, можна ввести потрібну кількість випадкових значень, розподілених рівномірно на проміжку $[-1, 1]$ і далі аналізувати поінтервальний розподіл статистичних імовірностей, як і раніше, будувати графіки щільності поінтервального розподілу статистичних імовірностей, функції поінтервального розподілу статистичних ймовірностей, визначати числові характеристики розподілу статистичних імовірностей і т.д.

Введення вибірки можна здійснити із заздалегідь заготовленого текстового файлу так само, як це робилося під час введення з файлу координат вершин ламаної. Для цього необхідно під час формування вибірки “натиснути” кнопку “Дані з файлу” і потім вказати місце розташування та ім’я потрібного файлу.

Файл даних є звичайним текстовим файлом, де в кожному окремому рядку записані пари значень – варіанта і частота, варіанта і відносна частота чи тільки варіанта в залежності від типу задання вибірки. Такий файл можна створити за допомогою будь-якого текстового редактора. Саму вибірку також можна записати в текстовий файл за допомогою кнопки “Записати у файл” допоміжного вікна, що використовується під час введення даних вибірки (Рис. 22.1 – Рис. 22.6).

Загальна кількість рядків частотної таблиці введення даних не повинна перевищувати 10000. В разі введення відносних частот слід пам’ятати, що сума відносних частот повинна дорівнювати 1. Якщо сума відносних частот не дорівнює 1, виводиться повідомлення “Сума відносних частот < > 1”, а також вказується, чому саме дорівнює сума введених відносних частот. Після цього введені відносні частоти потрібно відредагувати.

Врахування об’єму вибірки дає можливість оцінювати степінь вірогідності поданих у таблиці результатів – чим більший об’єм вибірки, тим вірогідніші результати. Крім того дані про об’єм вибірки необхідні для визначення узгодженості з експериментальними даними різних гіпотез про реальний розподіл частот (див. §24).

У вікні “Список об’єктів” для статистичної вибірки виводяться деякі її характеристики: статистичне математичне сподівання (середнє арифметичне спостережених значень), статистичне середнє квадратичне відхилення, об’єм вибірки, мінімальне і максимальне значення варіант, мода (для поточкового розподілу статистичних ймовірностей) чи медіана (для поінтервального розподілу), середнє геометричне, середнє гармонійне, середнє квадратичне, а також для поінтервального розподілу – відрізок задання (Рис. 22.8).

Щоб змінити вибірку, можна скористатись пунктом меню “Об’єкт / Змінити”.

В разі аналізу поточкового розподілу статистичних ймовірностей на скінченній множині точок можна не тільки вводити нові або змінювати чи вилучати вже введені дані, але і змінювати тип даних (частоти, відносні частоти чи варіанти). Для поінтервального розподілу це недоступно.

Пункт “Об’єкт / Змінити” можна використовувати також за необхідності змінити тип графічного подання розподілу статистичних імовірностей: “полігон” – “функція розподілу” для поточкового розподілу чи “гістограма” – “функція розподілу” для поінтервального.

За необхідності переглянути таблицю частот поточної вибірки використовується послуга “Операції / Статистика / Частотна таблиця”. У цій таблиці подані п’ять стовпчиків чисел (Рис. 22.9, 22.10):

- перший стовпчик – це можливі значення досліджуваної величини (Рис. 22.9) або межі інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$ можливих значень досліджуваної величини (Рис. 22.10);

- другий – частоти появи значень, вказаних у першому стовпчику, або частоти попадання в інтервали, межі яких вказані в першому стовпчику;
- третій стовпчик – накопичена сума всіх попередніх частот;
- четвертий – відносні частоти появи значень, вказаних у першому стовпчику, або відносні частоти попадання в інтервали, межі яких вказані в першому стовпчику;
- п’ятий – накопичена сума всіх попередніх відносних частот.

Важливу роль у теорії ймовірностей і математичній статистиці відіграє нормальний розподіл статистичних ймовірностей.

Нормальний розподіл з параметрами a і σ – це неперервний розподіл статистичних ймовірностей на множині $\Omega = R^1 = (-\infty;+\infty)$, щільність якого $f_n^*(x)$ практично збігається з функцією $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$, де a і $\sigma > 0$ – задані дійсні числа.

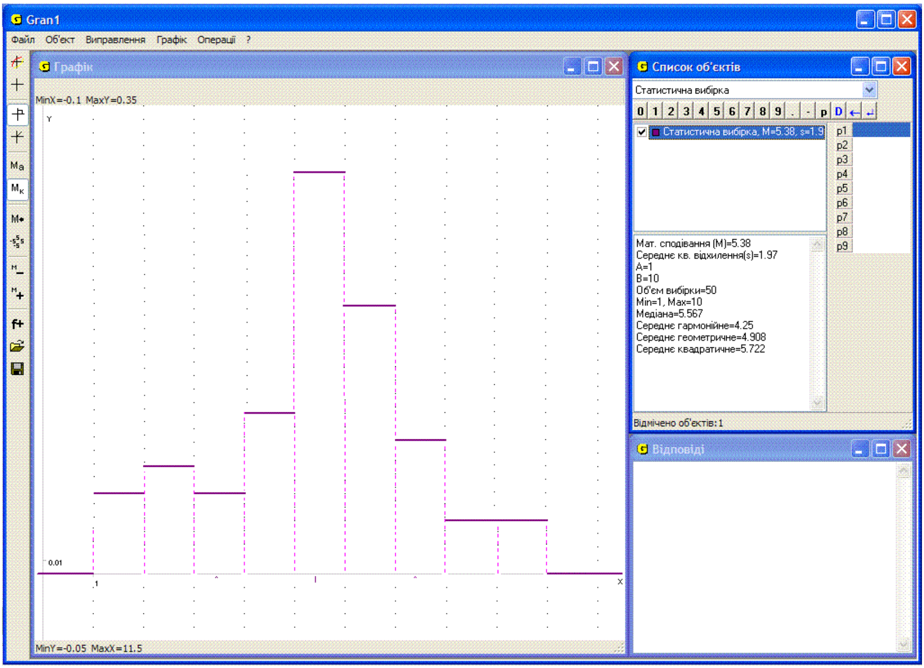
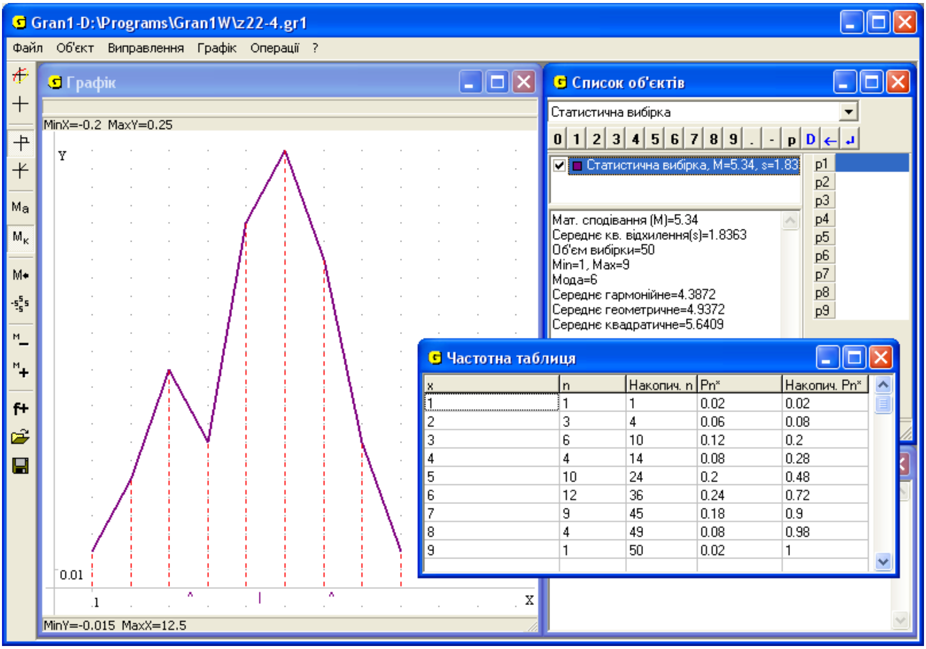
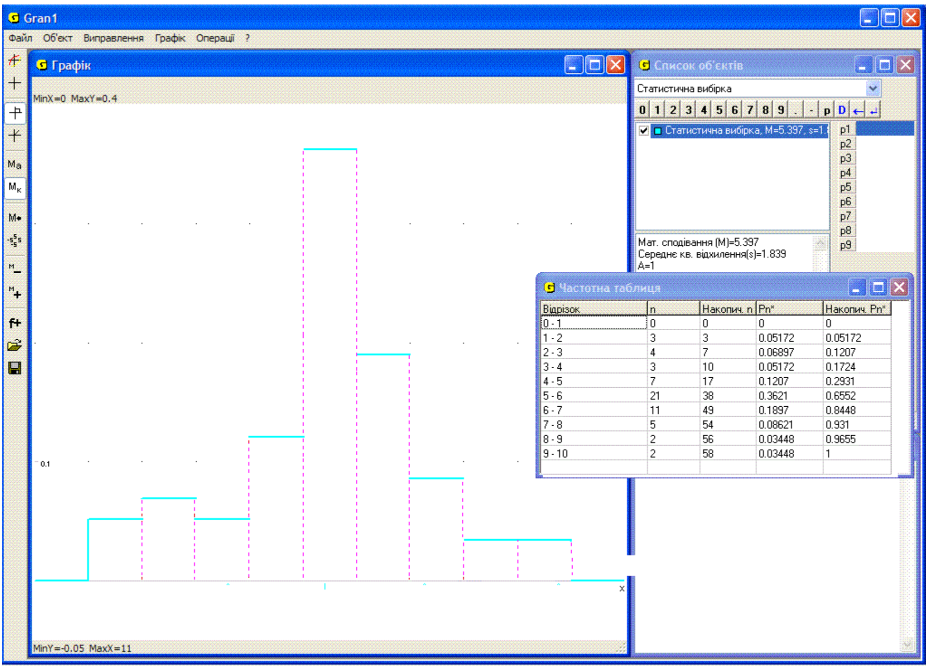


Рис. 22.8



x	n	Накопич. n	Pn*	Накопич. Pn*
1	1	1	0.02	0.02
2	3	4	0.06	0.08
3	6	10	0.12	0.2
4	4	14	0.08	0.28
5	10	24	0.2	0.48
6	12	36	0.24	0.72
7	9	45	0.18	0.9
8	4	49	0.08	0.98
9	1	50	0.02	1

Рис. 22.9



Відрізок	n	Накопич. n	Pn*	Накопич. Pn*
0 - 1	0	0	0	0
1 - 2	3	3	0.05172	0.05172
2 - 3	4	7	0.06897	0.1207
3 - 4	3	10	0.05172	0.1724
4 - 5	7	17	0.1207	0.2931
5 - 6	21	38	0.3621	0.6552
6 - 7	11	49	0.1897	0.8448
7 - 8	5	54	0.08621	0.931
8 - 9	2	56	0.03448	0.9655
9 - 10	2	58	0.03448	1

Рис. 22.10

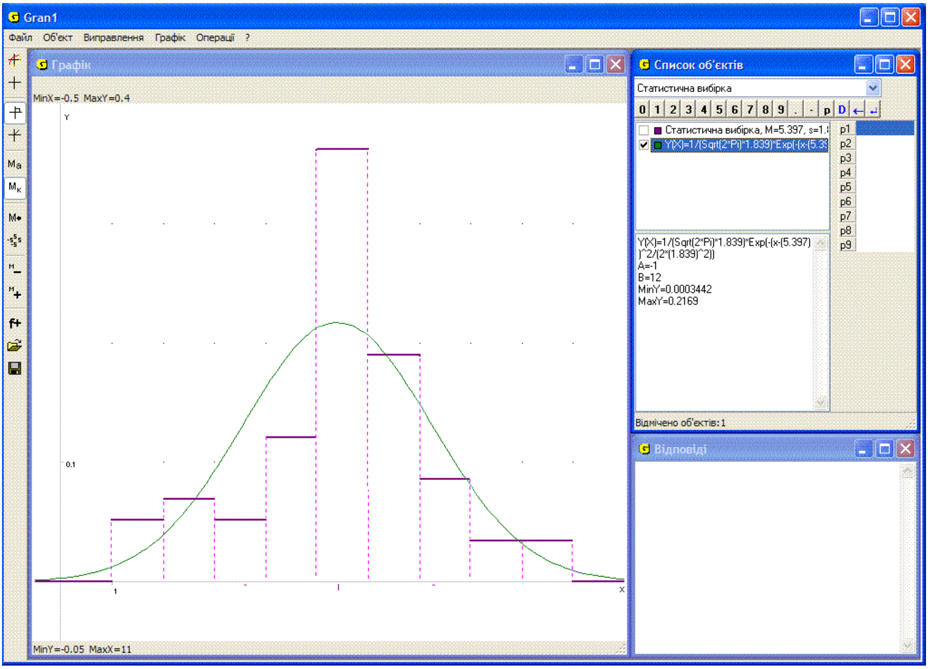


Рис. 22.11

У програмі GRAN1 передбачена послуга "Операції / Статистика / Щільність нормального розподілу за вибіркою", за допомогою якої для поточного поінтервального розподілу статистичних ймовірностей можна побудувати новий об'єкт – функцію, що визначається за формулою $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}s} e^{-\frac{(x-M)^2}{2s^2}}$, де M – статистичне математичне сподівання, а s – статистичне середнє квадратичне відхилення для заданої вибірки (Рис. 22.11).

Запитання для самоконтролю

1. Який тип задання залежності потрібно встановити перед початком статистичного аналізу експериментальних даних за допомогою програми GRAN1?
2. Як вводяться експериментальні дані для їх опрацювання за програмою GRAN1?
3. Чи передбачено в програмі GRAN1 розгляд окремо поточкового та поінтервального розподілу статистичних ймовірностей (частот)?
4. Чим відрізняються поточкові та поінтервальні розподіли статистичних ймовірностей (частот)?
5. Як вводяться варіанти під час роботи з програмою GRAN1?

6. В чому полягає різниця між введенням варіант для поточкового та поінтервального розподілу статистичних ймовірностей?
7. Як вводяться частоти під час роботи з програмою GRAN1?
8. Як вводяться відносні частоти (статистичні ймовірності) під час роботи з програмою GRAN1?
9. Яку додаткову вимогу повинні задовільняти відносні частоти (статистичні ймовірності), що вводяться?
10. Яку додаткову вимогу повинні задовільняти середини інтервалів під час введення частот та статистичних ймовірностей (відносних частот) для поінтервального розподілу статистичних ймовірностей?
11. Як вводяться дані з файла на диску?
12. Чи є різниця в структурі файла для введення варіант та частот?
13. Як створити текстовий файл для введення даних вибірки?
14. Як переглянути дані, що зберігаються в файлі?
15. Як за необхідності можна коригувати раніше введені дані?
16. Чи можна змінити тип розподілу частот під час редагування даних, через які задають вибірку?
17. Чи можна змінити тип даних, через які задають вибірку? Чому?
18. Чи можна змінити тип графічного подання розподілу статистичних ймовірностей?
19. Чи можна відрізнити – поточковий чи поінтервальний розподіл частот описується в частотній таблиці?

Вправи для самостійного виконання

1. Ввести з клавіатури в робочий файл програми GRAN1 50 навмання взятих значень з проміжка [0, 1], через які задається поточковий розподіл статистичних ймовірностей.
2. Виконати вправу 1 для випадку поінтервального розподілу статистичних ймовірностей. Задати кількість інтервалів за формулою Стерджеса.
3. Ввести з клавіатури спостережені значення досліджуваної величини і відповідні їм частоти:

x_i	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7
m_i	2	8	14	20	37	42	18	16	5	1

4. Виконати вправу 3, вважаючи, що множина значень Ω неперервна.
5. Ввести з клавіатури ряд розподілу відносних частот появи значень досліджуваної величини, якщо вона може набувати цілих значень від -5 до 5.
6. Виконати вправу 5, вважаючи, що множина значень Ω неперервна.
7. Ввести набір спостережених значень досліджуваної величини з наперед створеного файлу в підкаталозі GRAN1.
8. Ввести з наперед створеного файлу в підкаталозі GRAN1 ряд розподілу частот появи спостережених значень досліджуваної величини.
9. Ввести з наперед створеного файлу в підкаталозі GRAN1 ряд розподілу відносних частот появи спостережених значень досліджуваної величини.
10. Ввести набір із 200 випадкових значень, використовуючи послугу програми GRAN1 "Випадкові дані", задавши поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей за 10-тьма інтервалами.

§23. Графічне подання результатів статистичного аналізу експериментальних даних

Для графічного подання многокутників розподілу статистичних ймовірностей (полігонів частот), гістограм, функцій розподілу статистичних ймовірностей появи значень досліджуваної величини, деяких числових характеристик розподілу статистичних ймовірностей і т.п. можна скористатися послугою “Графік / Побудувати” (або відповідною послугою контекстного меню чи кнопкою на панелі інструментів).

Під час роботи із статистичними вибірками побудова графіків здійснюється цілком аналогічно, як і під час побудови графіків інших залежностей.

Приклад

Нехай розподіл частот появи спостережених значень досліджуваної величини задано за таблицею:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_i	12	17	19	37	30	10	8	5	4

Наведені в таблицях значення x_i можна інтерпретувати по різному – як центри інтервалів можливих значень величини, що спостерігається, чи як елементи дискретної множини можливих значень. Припустимо, що досліджується розподіл частот на неперервній множині $\Omega=[a,b)$ і потрібно побудувати гістограму поінтервального розподілу відносних частот спостережених значень.

Встановивши у вікні “Список об’єктів” тип задання залежності “Статистична вибірка”, звернемося до послуги “Об’єкт / Створити”. У вікні, що з’явилось, вкажемо тип досліджуваного розподілу “Поінтервальний”, тип даних – “Частоти”, тип графіка – “Гістограма”, та введемо таблицю, через яку задається вибірка (Рис. 23.1).

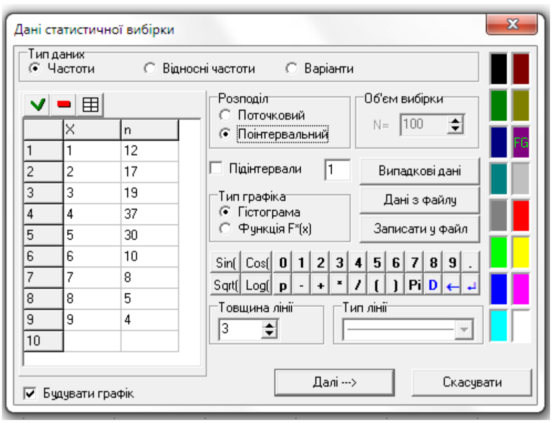


Рис. 23.1

В результаті у вікні "Список об'єктів" з'являється позначення щойно введеної вибірки і деякі її характеристики (Рис. 23.2). Якщо тепер звернутись до послуги "Графік / Побудувати", то одержимо гістограму поінтервального розподілу відносних частот на проміжку [0.5, 9.5), поділеному на 9 інтервалів довжиною 1 з центрами в точках 1, 2, 3, ..., 8, 9 (Рис. 23.2).

У вікні "Графік" також можна бачити деякі характеристики вибірки:

- найменше і найбільше значення частот можна одержати, визначивши за полігоном частот або гістограмою відповідні координати точок;
- відносні частоти кожного з можливих значень дискретної величини або попадання в кожен інтервал також можна визначити за графіком як відповідні ординати точок (на полігоні частот або на гістограмі);
- накопичені відносні частоти для кожної з варіант можна визначити за графіком функції розподілу статистичних імовірностей;
- статистичне математичне сподівання M відмічене на осі абсцис міткою "|";
- статистичне середнє квадратичне відхилення s можна визначити, враховуючи, що на осі абсцис мітками "^" позначені межі відрізка $[M-s,\ M+s]$.

На осі Ox позначаються точки з абсцисами $x = M_n^*$ (центр розсіювання, на Рис. 23.2 точка на осі Ox з абсцисою $x = 4.43$) і абсцисами $x = M_n^* - \sigma_n^*$ і $x = M_n^* + \sigma_n^*$ (вліво і вправо від центра розсіювання відкладається σ_n^*).

Щоб переконатися, що площа під гістограмою (над віссю Ox) дорівнює 1, можна використати послугу "Операції / Інтеграли / Інтеграл...". Вказавши межі інтегрування $a = 0.5$, $b = 9.5$, одержимо $I \approx 1$ (Рис. 23.3).

Щоб побудувати графік функції $F_n^*(x)$ розподілу статистичних імовірностей, потрібно звернутися до послуги "Об'єкт / Змінити..." та вказати тип графіка "Функція F*(x)", і потім знову побудувати графік, що відповідає цьому об'єкту. В результаті одержимо графік функції $F_n^*(x)$ (Рис. 23.4).

Основні числові характеристики розглядуваної вибірки можна побачити в нижній частині вікна "Список об'єктів", а переглянути частотну таблицю можна за допомогою послуги "Операції / Статистика / Частотна таблиця" (Рис. 23.5).

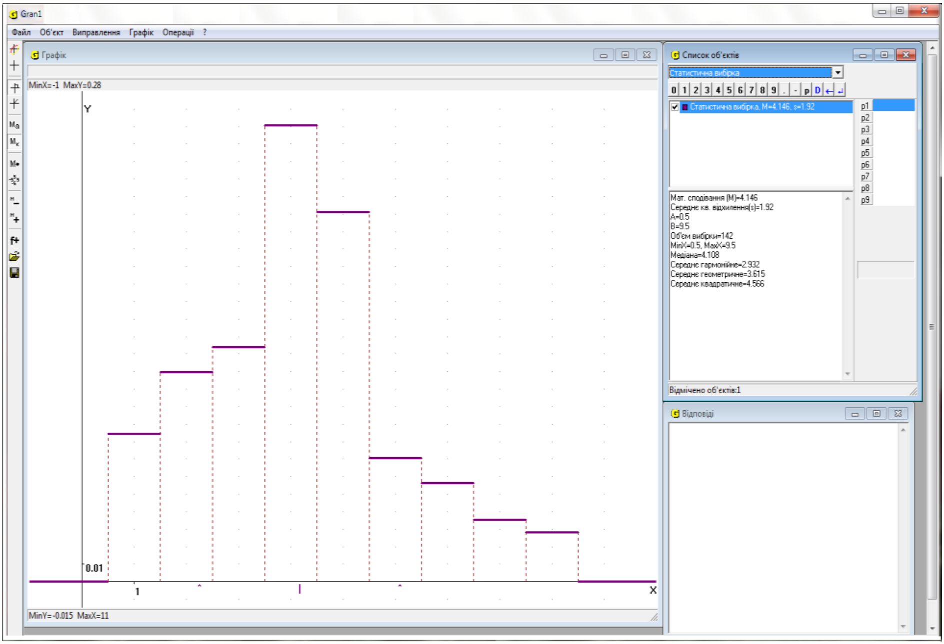


Рис. 23.2

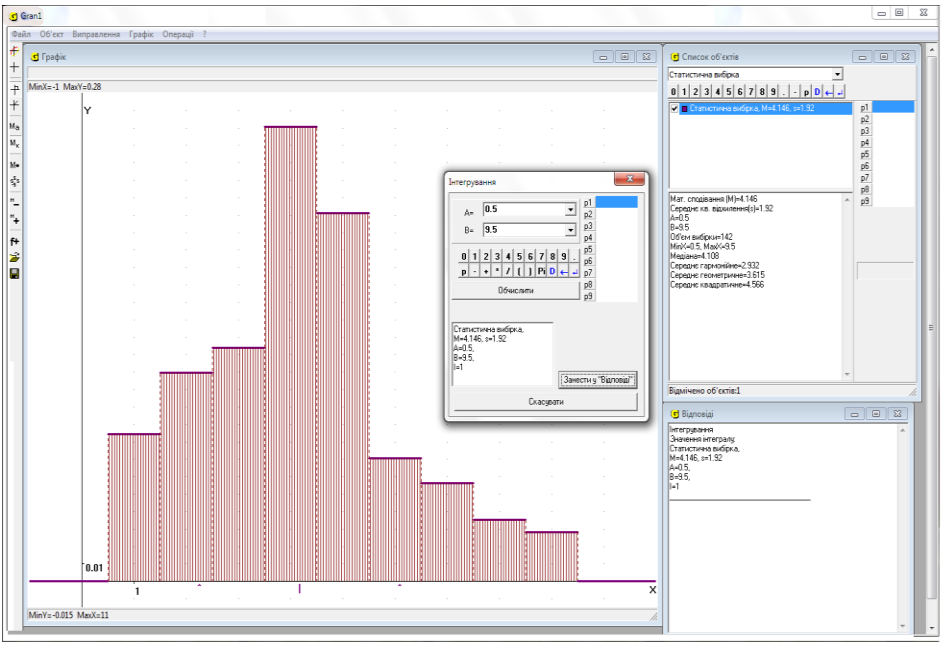


Рис. 23.3

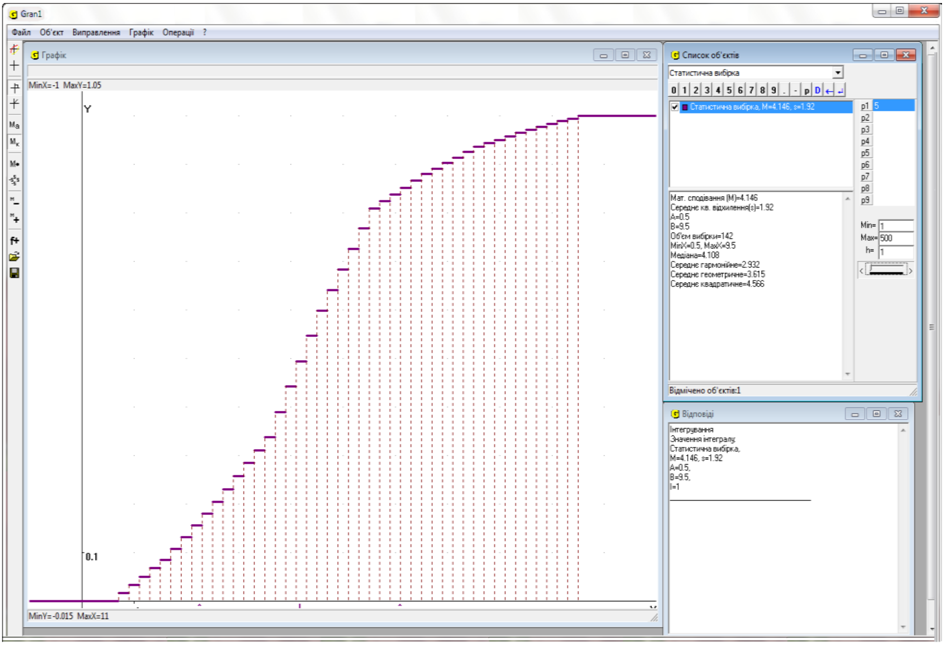
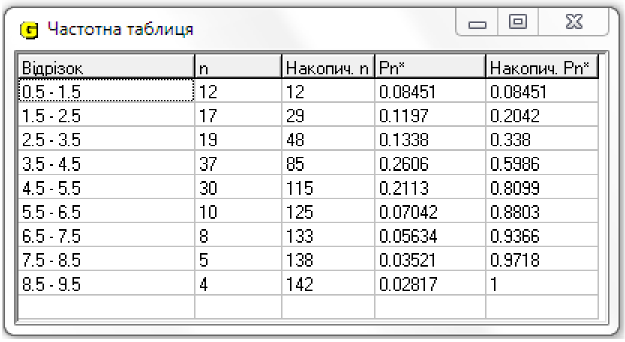


Рис. 23.4



Відрізок	n	Накопич. n	Pn*	Накопич. Pn*
0.5 - 1.5	12	12	0.08451	0.08451
1.5 - 2.5	17	29	0.1197	0.2042
2.5 - 3.5	19	48	0.1338	0.338
3.5 - 4.5	37	85	0.2606	0.5986
4.5 - 5.5	30	115	0.2113	0.8099
5.5 - 6.5	10	125	0.07042	0.8803
6.5 - 7.5	8	133	0.05634	0.9366
7.5 - 8.5	5	138	0.03521	0.9718
8.5 - 9.5	4	142	0.02817	1

Рис. 23.5

Запитання для самоконтролю

1. Як з використанням послуг програми GRAN1 побудувати:
   - ➢ гістограму поінтервального розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот) появи спостережених значень досліджуваної величини?
   - ➢ Функцію $F_n^*(x)$ поточкового розподілу статистичних ймовірностей на скінченній множині точок?

- функцію $F_n^*(x)$ поінтервального розподілу статистичних ймовірностей на обмеженій неперервній множині точок?
- многокутник поточкового розподілу статистичних ймовірностей на скінченній множині точок (полігон частот)?

2. Як з використанням послуг програми GRAN1 одержати основні числові характеристики досліджуваного розподілу статистичних ймовірностей ?
3. Як визначити найбільшу відносну частоту і відповідне значення досліджуваної величини, якщо побудовано полігон частот?
4. Чи потрібно виконувати які-небудь обчислення перед зверненням до послуг програми GRAN1 для статистичного аналізу експериментальних даних?
5. Як за гістограмою визначити статистичну ймовірність (відносну частоту) попадання спостережених значень досліджуваної величини на проміжок $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$? Тут a і b відповідно нижня і верхня межі інтервалу, на якому побудована гістограма. Припускається, що інтервали $[a_{i-1}, a_i)$, на яких визначені відповідні значення ординат на гістограмі, досить дрібні, а проміжок $[\alpha, \beta]$ складений з досить великого числа таких інтервалів).
6. Для якого розподілу статистичних ймовірностей – поточкового чи поінтервального будують: многокутник розподілу статистичних ймовірностей (полігон частот)? гістограму розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот)? функцію розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот)?

Вправи для самостійного виконання

1. Побудувати ряд розподілу і полігон частот для вибірки, в якій містяться відхилення результатів вимірювання відстані між двома точками від істинного значення цієї відстані: 50, 20, –10, 10, 20,–50, –20, –10, 40, –20, –30, –10, 10, 20, –40, 50, –10, 10, 50.
2. Для визначення похибки вимірювального приладу зроблено 40 вимірювань, в яких зафіксовані похибки: –2.5; 3; 4; 2; 0.5; –1; 2; 4; –4; 0; –0.5; –0.5; 1; 0.5; 2.5; –0.5; 2; 1; –4; –2; –1; 1,5; 0.5; 4; –1.5; –1; 0; 1; 0; 1; –1.5; 1.5; 0.5; 0.5; –0.5; –1.5; –0.5; –1; 2; 0.5.
   Побудувати поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей і гістограму, поклавши кількість інтервалів рівною 8.
3. 20 навмання взятих учнів виконують стрибки у висоту, за якими зафіксовані такі результати: 137, 140, 143, 135, 142, 139, 141, 137, 142, 131, 145, 138, 141, 143, 130, 138, 140, 135, 137, 138.
   Побудувати ряд розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот), полігон частот, функцію розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот), вважаючи множину значень досліджуваної величини скінченною.
4. Обстежено 10 навмання взятих 7-х класів. Кількість відмінників у кожному з них виявилася відповідно: 5, 8, 3, 4, 5, 1, 6, 4, 2, 3.
   Побудувати ряд розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот), полігон частот, функцію розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот) для досліджуваної величини.

5. Навмання перевірено 50 телеприймачів і дані цієї перевірки зведені в таблицю

Час безвідмовної роботи в роках	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
Кількість телеприймачів	1	1	2	4	4	7	10	10	6	3	1	1

Побудувати функцію поінтервального розподілу статистичних ймовірностей $F_{50}^*(x)$ та її графік, вважаючи центрами інтервалів точки $x_0 = 0.25$, $x_{i+1} = x_i + 0.50$, $i = 1, 2, ..., 11$.

6. На 100 навмання взятих ділянках землі в даному районі посаджені на кожній 100 саджанців фруктових дерев. Для кількості саджанців, що прийнялися, побудовано поінтервальний розподіл спостережених відносних частот (статистичних ймовірностей):

I_i	[0,10)	[10,20)	[20,30)	[30,40)	[40,50)
p_{ni}^*	0.05	0.08	0.12	0.14	0.15
I_i	[50,60)	[60,70)	[70,80)	[80,90)	[90,100]
p_{ni}^*	0.20	0.10	0.08	0.06	0.02

Визначити значення функції $F_{100}^*(x)$ поінтервального розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот) в кінцях заданих інтервалів і побудувати її графік.

7. На 100 однакових за розмірами навмання взятих ділянках землі з однаковою кількістю внесених добрив зібрані різні врожаї зерна. Результати проведених спостережень наведені в таблиці:

Врожай (в ц / га)	14	15	16	17	18	19	20
Кількість ділянок	6	10	18	28	20	12	6

Побудувати полігон частот. Визначити середнє арифметичне M_n^* і середнє квадратичне відхилення σ_n^*.

8. Кількість викликів, що надходять на АТС за 1 годину, випадкова. Для спостережень протягом кількох днів навмання взято 10 разів одну годину між дев'ятою і дванадцятою годинами; отримано такі результати:

№ спостереження	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Кількість викликів	280	320	315	300	285	270	300	330	310	290

Побудувати полігон частот. Знайти середнє арифметичне і середнє квадратичне відхилення для досліджуваної величини.

9. Одна і та сама віддаль вимірюється багато разів. Результати вимірювань зведені в таблицю:

№ вимірювання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Результат вимірювання	41	39.5	40	40.2	39.9	40.2	39.8	40.1	40	39.9

Знайти числові характеристики M_n^*, σ_n^* розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот) на множині спостережених значень.

10. Для визначення середнього часу безвідмовної роботи електроприладу обстежені 100 приладів. За результатами спостережень отримано ряд розподілу відносних частот (статистичних ймовірностей):

x_i	1070	1120	1170	1220	1270	1320	1370	1420
p_{100i}^*	0.02	0.08	0.11	0.20	0.35	0.15	0.06	0.03

Побудувати гістограму і функцію поінтервального розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот), вважаючи наведені значення x_i серединами інтервалів. Знайти числові характеристики M_n^*, σ_n^*.

§24. Визначення узгодженості із спостереженими даними гіпотез про розподіли ймовірностей

На практиці часто виникає необхідність вирішити питання, чи узгоджується із статистичними даними гіпотеза про те, що насправді розподіл ймовірностей описується через щільність $f(x)$, тобто що функцію $f_n^*(x)$ можна наближено замінити деякою невід'ємною функцією $f(x)$ такою, що $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$, і що для будь-яких α, β значення

$$P_n^*([\alpha,\beta)) = \int_{\alpha}^{\beta} f_n^*(x)dx$$

з достатньою точністю співпадатиме із значенням $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$, і в такий спосіб таблично задану функцію $f_n^*(x)$ наближено описати деяким аналітичним виразом $f(x)$. Або вирішити питання про те, чи узгоджується із статистичними даними гіпотеза про те, що поточковий розподіл ймовірностей має наперед визначений (гіпотетичний) вигляд.

Один із критеріїв перевірки гіпотези про те, що функцією $f(x)$ досить добре наближається функція $f_n^*(x)$, є так званий критерій Пірсона.

Відповідно до цього критерію для всіх інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$, ($i = 1, 2, \ldots, m$), для значень $p_i^* = P_n^*([a_{i-1}, a_i))$, знаходять наближення p_i за формулою $p_i = \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)dx$, після чого оцінюють величину χ^2 (хі-квадрат): $\chi^2 = \sum_{i=1}^{m} c_i (p_i - p_i^*)^2$, де $c_i = \dfrac{n}{p_i}$ – "вагові" коефіцієнти значень $(p_i - p_i^*)^2$, n – об'єм вибірки.

Так отримане значення χ^2 називають спостереженим значенням $\chi^2_{експ}$ (χ^2 експериментальне).

Однак, якщо проводити інші серії спостережень тієї самої величини, то в кожній з них можуть бути отримані інші значення $\chi^2_{експ}$. Якщо таких серій спостережень проведено дуже багато, то для величини χ^2 можна побудувати функції $f_\chi(x)$ і $F_\chi(x)$, аналогічні до функцій $f_n^*(x)$ і $F_x(x)$, розглянутих раніше, і в такий спосіб (з використанням, наприклад, функції $F_\chi(x)$) визначити, за якого значення $\chi^2_{кр}$ відносна частота попадання спостережених значень величини χ^2 на проміжок $(0, \chi^2_{кр})$ буде набувати наперед заданого значення α :

$$P_N^*(\chi^2 < \chi^2_{кр}) = \alpha \text{ , } 0 < \alpha < 1 .$$

Якщо α дорівнює, наприклад, 0.99, то відносна частота попадання значень χ^2 правіше значення $\chi^2_{кр}$ дорівнює 0.01, тобто попадання значення χ^2 правіше від значення $\chi^2_{кр}$ можна вважати практично неможливим. Зауважимо, що якщо число спостережень дуже велике, то усереднений результат усієї маси спостережень стає передбачуваним у досить чітких межах з досить великою мірою впевненості. Таким чином, якщо спостережене значення $\chi^2_{експ}$ більше, ніж $\chi^2_{кр}$, то такий результат $\chi^2_{експ}$ слід вважати практично неможливим (малоймовірним), і тому гіпотезу про те, що функція $f(x)$ є коректним наближенням функції $f_n^*(x)$, слід відхилити, не ризикуючи припуститися значної помилки, оскільки в 99 випадках із 100 значення $\chi^2_{експ}$ менше, ніж значення $\chi^2_{кр}$, якщо через $f(x)$ дійсно коректно описується розподіл статистичних ймовірностей за дуже великої кількості випробувань.

Число α називають рівнем значущості оцінки $\chi^2_{кр}$. Значення $\chi^2_{кр}$ знаходять за спеціальними таблицями, побудованими для величини χ^2, за якими за заданим рівнем значущості α і числом m інтервалів $[a_{i-1}, a_i)$ можна визначити відповідне значення $\chi^2_{кр}$. Іноді $\chi^2_{кр}$ називають також теоретичним значенням оцінки χ^2 і позначають $\chi^2_{теор}$. Таким чином, обчисливши $\chi^2_{експ}$ і визначивши $\chi^2_{кр}$, що відповідає заданому рівню значущості α, потрібно співставити $\chi^2_{експ}$ і $\chi^2_{кр}$. Якщо $\chi^2_{експ} > \chi^2_{кр}$, то гіпотезу про те, що функція $f(x)$ є коректним наближенням функції $f_n^*(x)$, слід відхилити як таку, що не узгоджується з результатами спостережень. Якщо ж $\chi^2_{експ} < \chi^2_{кр}$, тоді вважається, що така гіпотеза не суперечить експериментальним даним і немає підстав її відхиляти.

У програмі GRAN1 передбачена перевірка за критерієм Пірсона гіпотези про коректність заміни функції $f_n^*(x)$ функцією $f(x)$. Для цього використовується послуга "Операції / Статистика / Критерій Пірсона...".

В разі звернення до даної послуги у вікні "Список об'єктів" повинні бути відмічені міткою ☑ позначення залежності, заданої явно у вигляді $y = f(x)$, і вибірки, чи позначення двох вибірок, що співставляються. Якщо у вікні "Список об'єктів" відмічено більше чи менше, ніж два позначення залежностей вказаного типу задання, що співставляються, послуга "Операції / Статистика / Критерій Пірсона..." стає недоступною.

Область задання функції $f(x)$ повинна охоплювати область, до якої належать варіанти вибірки.

Співставити за критерієм Пірсона можна щільність поінтервального розподілу статистичних імовірностей $f_n^*(x)$ і функцію $f(x)$, дві щільності поінтервальних розподілів статистичних імовірностей для вибірок, варіанти яких змінюються в тих самих межах (співпадають "відрізки задання" вибірок), а також поточкові гіпотетичний та експериментально отриманий розподіли, що задані на одній і тій самій скінченній множині можливих значень досліджуваної величини.

В разі звернення до послуги "Операції / Статистика / Критерій Пірсона..." для того, щоб співставити щільність $f_n^*(x)$ поінтервального розподілу статистичних імовірностей з функцією $f(x)$, за програмою перевіряються дві умови:

Відрізок $[a,b]$, на якому задана гіпотетична функція $f(x) \geq 0$, повинен охоплювати межі u і v, $u < v$, в яких змінюються варіанти вибірки, тобто має бути $[u,v] \subset [a,b]$.

Повинна виконуватися умова $\int_a^b f(x)dx = 1$.

Якщо перша умова не виконується, у вікні "Графік" з'являється повідомлення "Неспівпадання відрізків задання!". Це означає, що необхідно змінити відрізок $[a,b]$, на якому задана функція $y = f(x)$, так, щоб виконувалась вимога $[u,v] \subset [a,b]$. Для цього використовується послуга "Об'єкт / Змінити".

В разі невиконання другої умови виводиться повідомлення "Інтеграл $f(x)$ на $[a,\ b] <> 1!$", а також значення інтеграла від функції $y = f(x)$ на відрізку $[a,b]$.

Аналогічні повідомлення з'являються в разі спроби порівняти за критерієм Пірсона два поінтервальні розподіли, у яких різні відрізки задання, чи два поточкові розподіли, у яких різні множини можливих значень, а також в разі спроби порівняти поточковий розподіл з поінтервальним.

Якщо обидві вимоги $[u,v]\subset[a,b]$ і $\int_a^b f(x)dx=1$ виконуються, то з'являється допоміжне вікно "Критерій Пірсона" (Рис. 24.1, Рис. 24.2). В цьому вікні потрібно вказати, який з вказаних раніше об'єктів (із списку об'єктів) розглядається як гіпотетичний розподіл частот, а через який описуються статистичні дані. Причому, якщо порівнюються щільність розподілу статистичних імовірностей $f_n^*(x)$ з функцією $f(x)$, то за гіпотетичну автоматично вибирається функція $f(x)$ (Рис. 24.1). Якщо ж порівнюються дві щільності розподілу статистичних імовірностей, то необхідно вказати, яка з них є гіпотетичною, а яка – експериментальною (Рис. 24.2).

У цьому вікні також вказується кількість k інтервалів для експериментальної вибірки, що необхідно для задання кількості степенів свободи. Рекомендується за наявності гіпотези про нормальний розподіл статистичних ймовірностей задавати число степенів свободи рівним $k-3$, а в інших випадках рівним $k-1$. Однак можна ввести й інше число.

Крім того слід вказати рівень значущості α, відносно якого буде визначатися $\chi^2_{теор}$. За замовчуванням пропонується значення, рівне 0.95. Можна із пропонованого списку також вибрати одне з інших значень.

Після натиснення кнопки "ОК" у вікні "Відповіді" виводиться повідомлення, у якому вказуються рівень значущості, число степенів свободи, значення $\chi^2_{теор}$ і $\chi^2_{експ}$, а також повідомлення про те, підтверджується чи не підтверджується гіпотеза (Рис. 24.3, Рис. 24.4).

Якщо гіпотеза про те, що функцією $y=f(x)$ коректно наближається функція $f_n^*(x)$, чи про те, що дві вибірки належать до однієї і тієї самої генеральної сукупності (порівнюються дві функції $f_n^*(x)$), не узгоджується зі статистичними даними, у вікні "Відповіді" виводиться повідомлення "Гіпотеза не підтверджується" (Рис. 24.3). Якщо ж гіпотеза узгоджується зі статистичними даними, у вікні "Відповіді" виводиться повідомлення "Гіпотеза підтверджується" (Рис. 24.4).

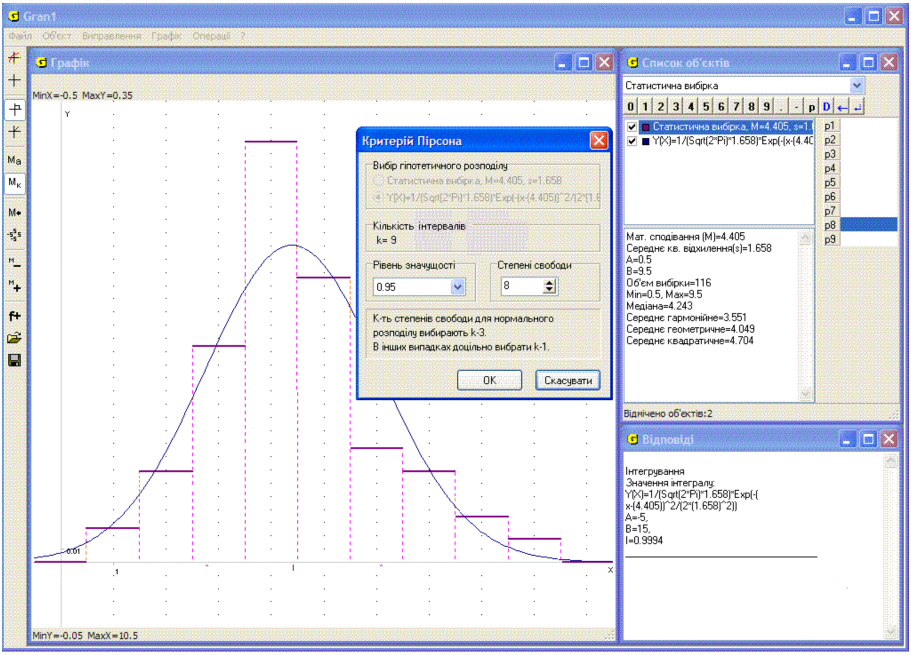


Рис. 24.1

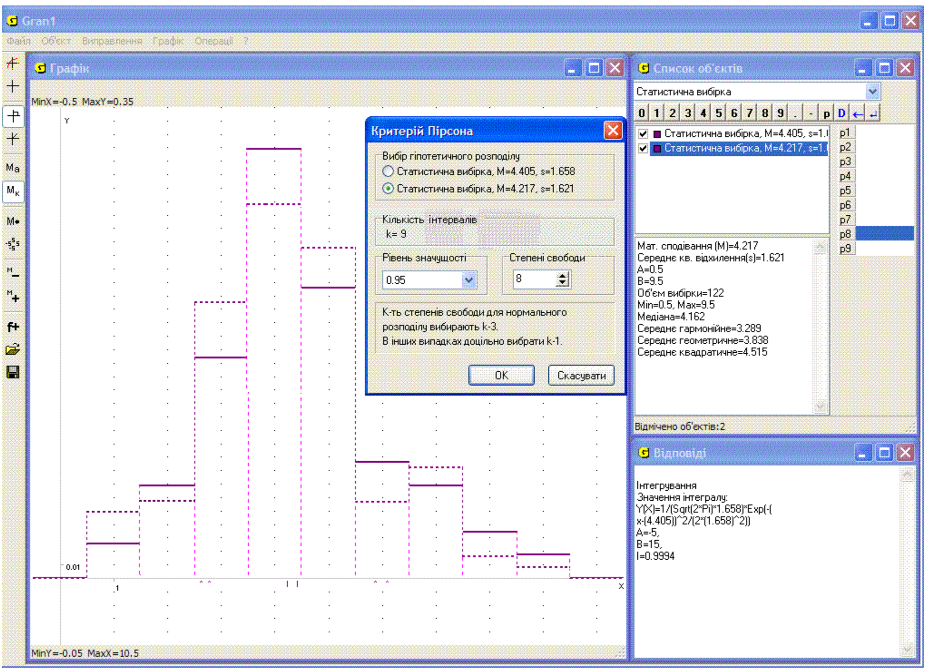


Рис. 24.2

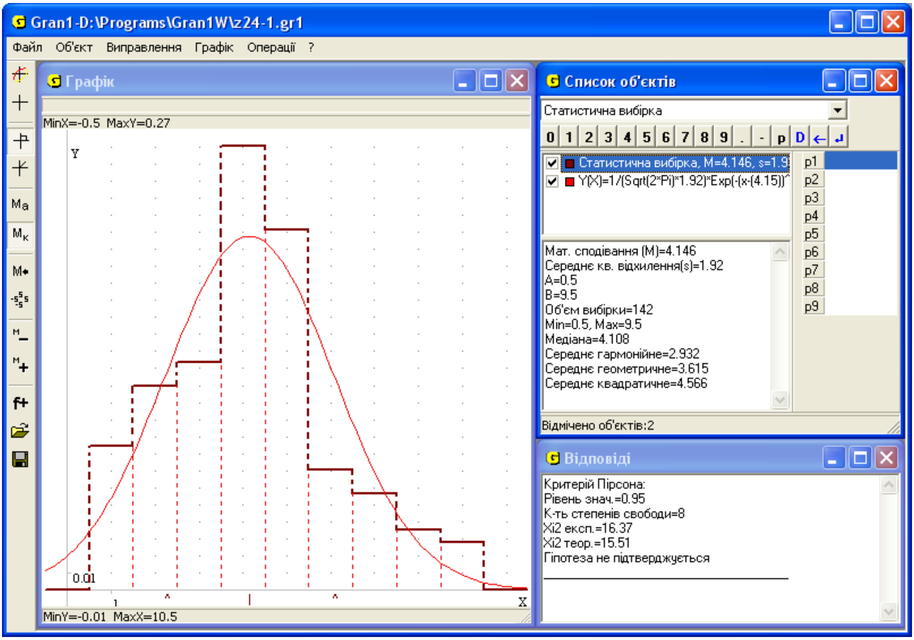


Рис. 24.3

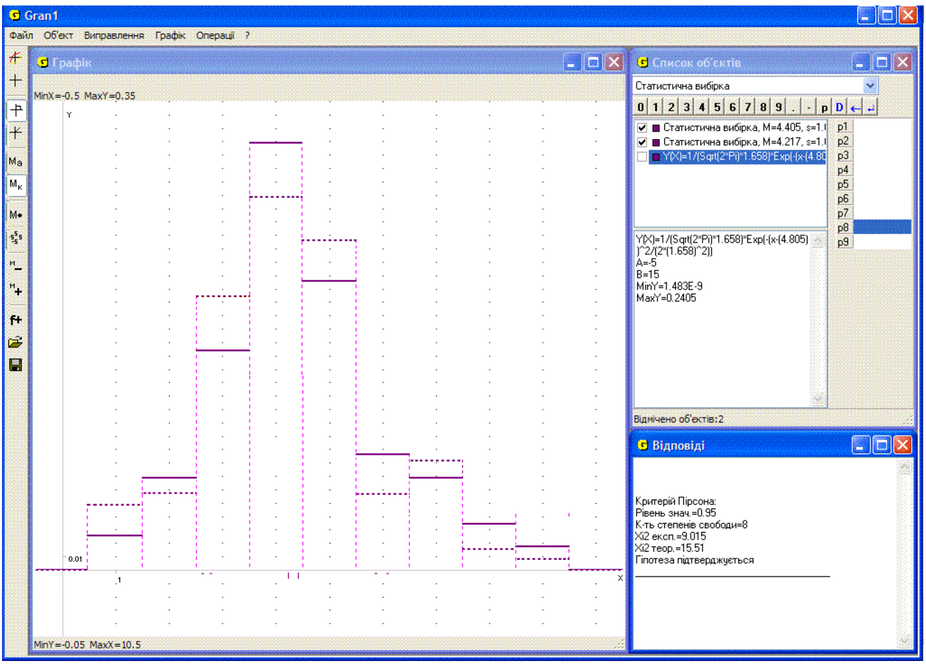


Рис. 24.4

Зауважимо, що одна і та сама гіпотеза може підтверджуватися чи не підтверджуватися в залежності від того, який вказаний рівень значущості α чи об'єм вибірки під час введення відносних частот. В разі великого об'єму вибірки спостережуваний розподіл частот повинен дуже мало у вказаному розумінні відрізнятися від гіпотетичного. У протилежному випадку гіпотеза про коректність наближення функції $f_n^*(x)$ функцією $f(x)$ підтверджуватися не буде.

Аналогічно до попереднього, можна перевірити і гіпотезу про те, що поточковий розподіл статистичних ймовірностей на скінченній множині $\Omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ за дуже великих n має вигляд

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_k

де $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ (Рис. 24.5).

Близькість такого гіпотетичного поточкового розподілу статистичних ймовірностей на скінченній множині точок з експериментально отриманим розподілом за конкретної кількості випробувань n

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
$P_n^*(x_i)$	p_1^*	p_2^*	$\ldots$	p_k^*

оцінюється, як і раніше, за допомогою величини χ^2:

$$\chi^2_{експ} = n\sum_{i=1}^{k} \frac{(p_i - p_i^*)^2}{p_i} .$$

Далі так само, як і раніше, визначається значення $\chi^2_{кр}$ (χ^2 критичне) за заданих кількості степенів свободи і рівня значущості α, а потім порівнюються значення $\chi^2_{кр}$ і $\chi^2_{експ}$. Якщо виявиться $\chi^2_{експ} > \chi^2_{кр}$, тоді вважається, що гіпотеза про те, що за дуже великих n розподіл статистичних імовірностей матиме наперед передбачений (гіпотетичний) вигляд, не узгоджується з експериментальними даними за конкретного n.

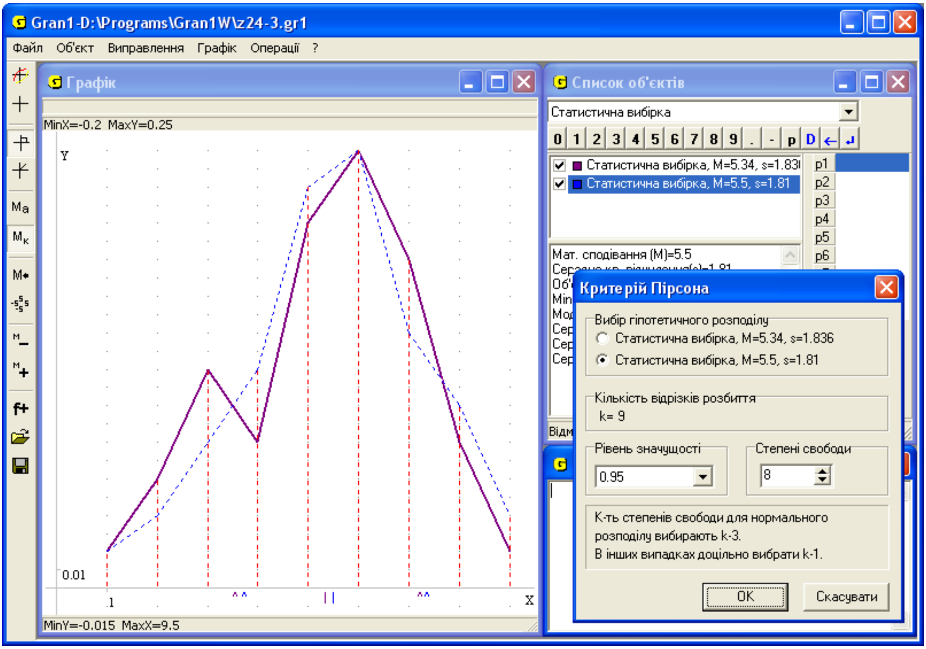


Рис. 24.5

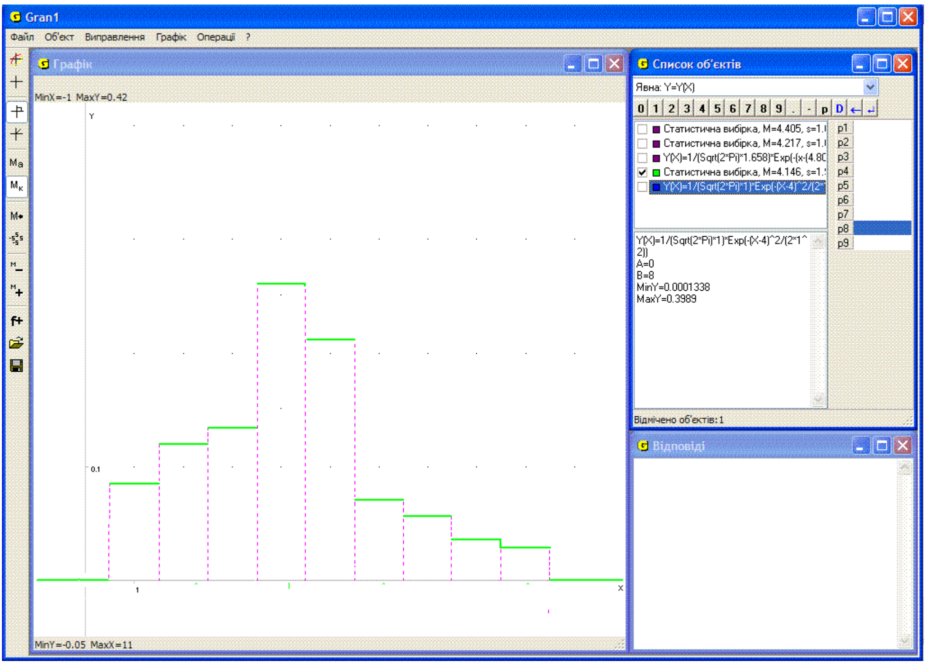


Рис. 24.6

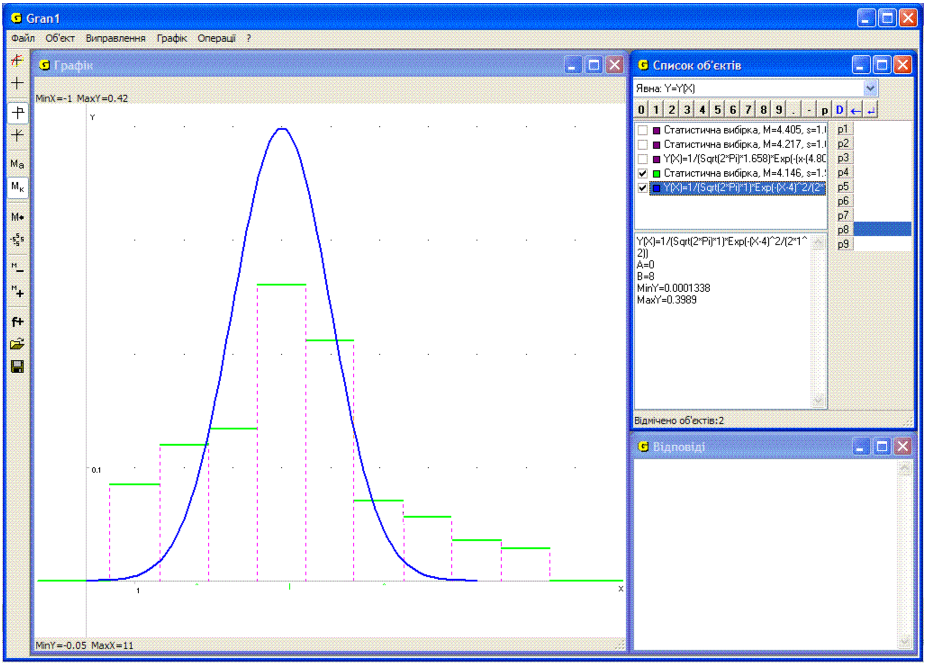


Рис. 24.7

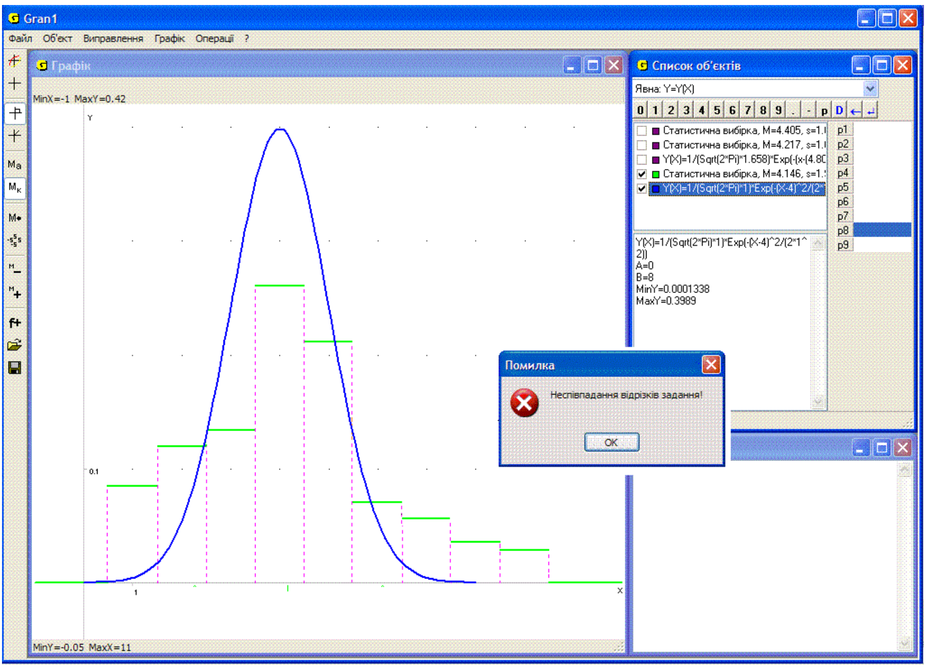


Рис. 24.8

Приклади

1. Нехай необхідно перевірити гіпотезу про коректність заміни функції $f_n^*(x)$, графік якої показаний на Рис. 24.6, функцією $f(x)$ виду $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$, заданою на проміжку $[a,b]$. Покладемо спочатку $m=4$, $\sigma=1$, $a=0$, $b=8$ і побудуємо графіки залежностей $y=f_n^*(x)$ і $y=f(x)$ (Рис. 24.7). Якщо тепер звернутися до послуги "Операції / Статистика / Критерій Пірсона...", на екрані дисплея з'явиться повідомлення "Неспівпадання відрізків задання" (Рис. 24.8).

Виберемо далі функцію $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}1.8}e^{-\frac{(x-4.2)^2}{2(1.8)^2}}$, поклавши $a=-3$, $b=11$, $m=4.2$, $\sigma=1.8$. Тепер відрізок [–3, 11] задання функції $f(x)$ цілком охоплює відрізок [0.5; 9.5] задання функції $f_n^*(x)$ і $\int\limits_a^b f(x)dx=1$ з достатньою точністю (Рис. 24.9). Після звернення до послуги "Операції / Статистика / Критерій Пірсона" вказані раніше повідомлення про невідповідність відрізків задання чи про те, що інтеграл $\int\limits_\alpha^\beta f(x)dx$ не дорівнює одиниці, тепер не з'являються, а з'являється вікно "Критерій Пірсона", в якому слід вказати рівень значущості і кількість степенів свободи. Вибравши $\alpha=0.95$ і вказавши $k=6$, у вікні "Відповіді" одержуємо результат (Рис. 24.10):

$\chi^2_{експ}=17.85$,

$\chi^2_{теор}=12.59$.

Гіпотеза не підтверджується.

2. З одного і того самого файлу, в якому містяться список варіант і відносних частот, введені дві вибірки, об'єм однієї з яких вказано "N=200", а іншої – "N=1000". Співставити їх за критерієм Пірсона.

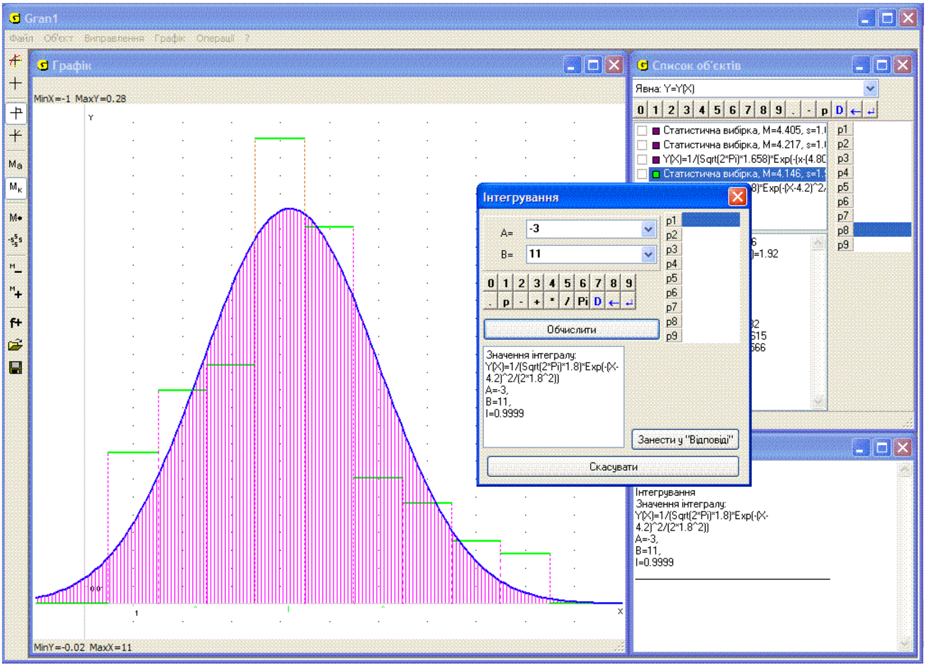


Рис. 24.9

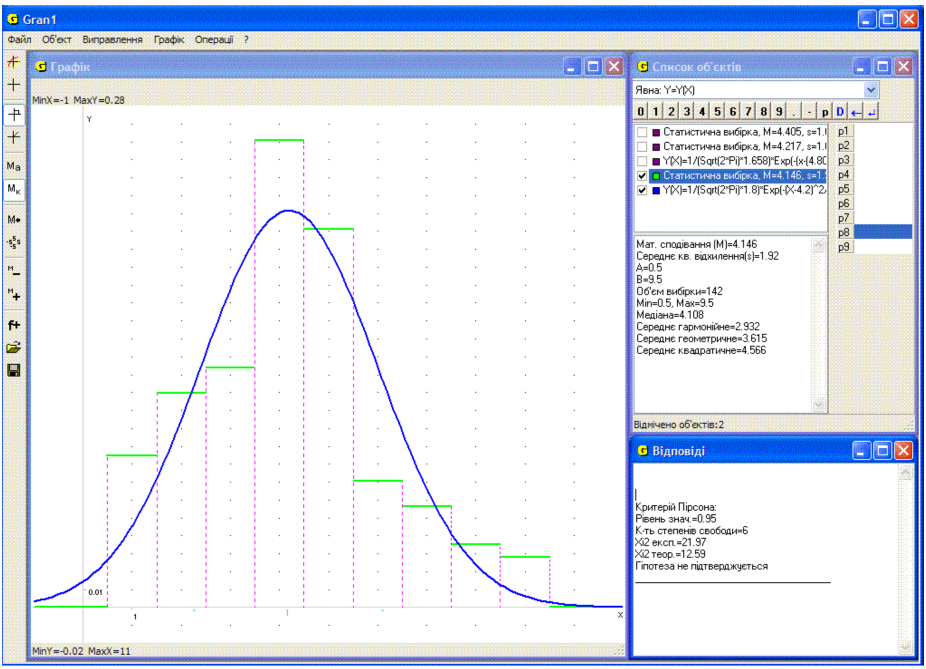


Рис. 24.10

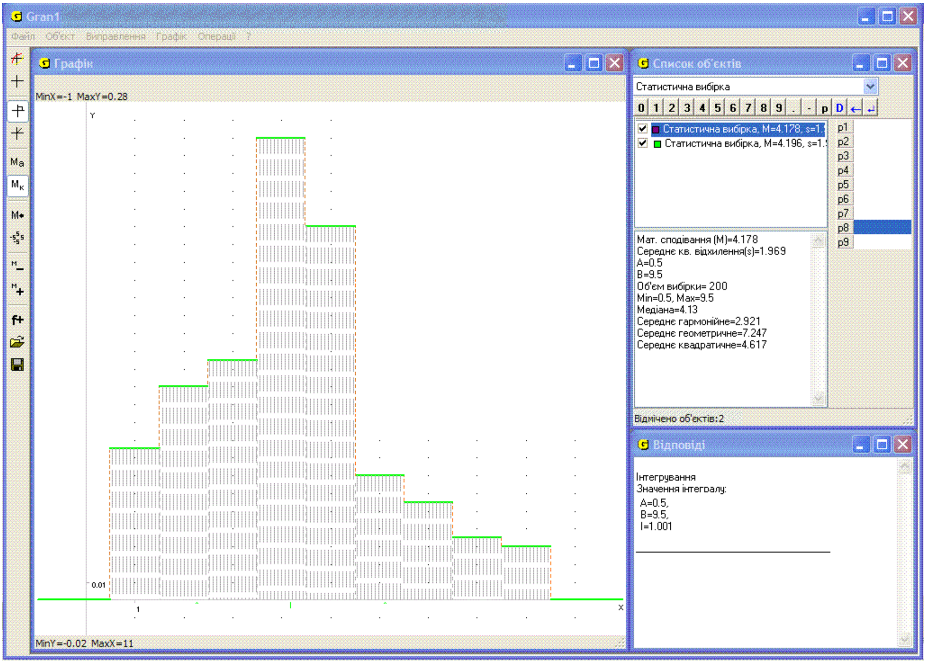


Рис. 24.11

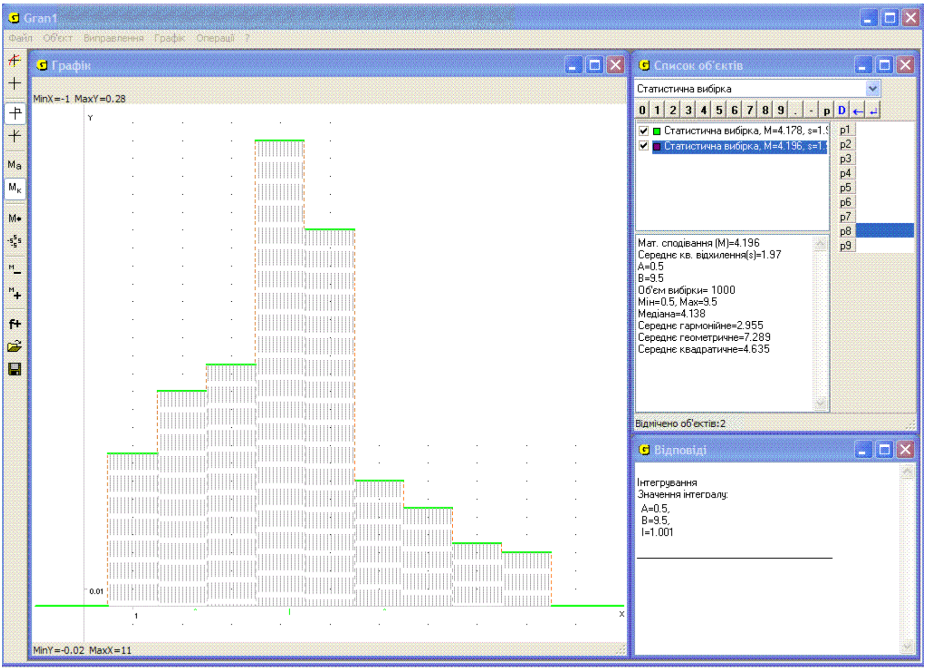


Рис. 24.12

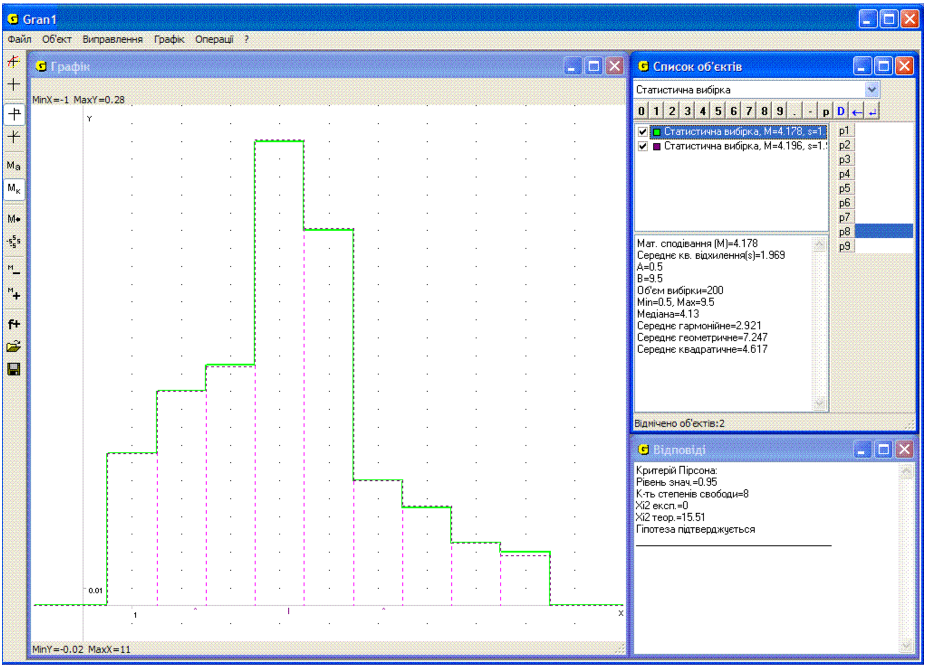


Рис. 24.13

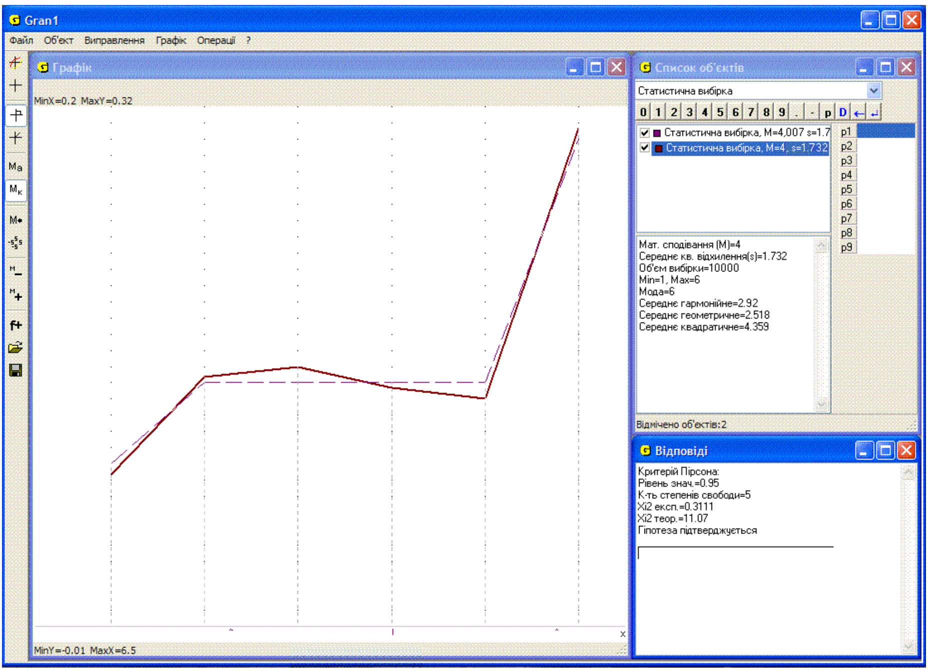


Рис. 24.14

Порівнюючи Рис. 24.11 і Рис. 24.12, бачимо, що в основному, числові характеристики обох вибірок співпадають, а графіки накладаються один на інший.

Цього разу гіпотеза про те, що функція $f_n^*(x)$ коректно може бути замінена нею ж, не викликає сумнівів. Цей очевидний результат підтверджується і за критерієм Пірсона (Рис. 24.13).

3. Гральний кубик підкидали 150 разів. Результати звели в наступну таблицю частот кількості очок, що випадали на гранях кубика:

x_i	1	2	3	4	5	6
k_i	14	23	24	22	21	46

Перевірити за критерієм Пірсона гіпотезу про те, що за дуже великої кількості випробувань дискретний розподіл статистичних ймовірностей буде мати вигляд

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0.1	0.15	0.15	0.15	0.15	0.3

Введемо в програму дві вибірки: в першій задаються частоти, а в другій – відносні частоти, причому кількість елементів другої вибірки вкажемо рівним “N=10000”. Звернувшись тепер до послуги “Операції / Статистика / Критерій Пірсона…” і вказавши рівень значущості $\alpha = 0.95$ і кількість степенів свободи $k = 5$, одержимо у вікні “Відповіді” повідомлення про те, що гіпотеза підтверджується (Рис. 24.14).

Запитання для самоконтролю

1. Як знайти статистичну ймовірність (відносну частоту) попадання значень досліджуваної величини на проміжок $[\alpha, \beta)$, якщо відома щільність $f_n^*(x)$ поінтервального розподілу статистичних ймовірностей?
2. Чому дорівнює $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f_n^*(x)dx$?
3. Як, знаючи функцію $F_n^*(x)$, знайти статистичну ймовірність (відносну частоту) попадання значень досліджуваної величини на проміжок $[\alpha, \beta)$?
4. Що характеризує $f_n^*(x)$ відносно $F_n^*(x)$?
5. Як, знаючи $f_n^*(x)$, знайти $F_n^*(x)$?
6. Як, знаючи $F_n^*(x)$, знайти $f_n^*(x)$ в разі поінтервального розподілу частот?
7. Чому дорівнюють значення: $F_n^*(-\infty)$, $F_n^*(+\infty)$?
8. Чи може $f_n^*(x)$ набувати від’ємних значень?

9. Чи може $F_n^*(x)$ набувати від'ємних значень?
10. Чи може функція $F_n^*(x)$ спадати із зростанням x ?
11. Чи може функція $f_n^*(x)$ спадати із зростанням x ?
12. Чи обов'язково $F_n^*(x_1) < F_n^*(x_2)$, якщо $x_1 < x_2$?
13. Як за критерієм Пірсона встановити коректність припущення про те, що функцію $f_n^*(x)$ можна замінити функцією $f(x)$, тобто що насправді розподіл ймовірностей описується через щільність $f(x)$?
14. Які умови повинна задовільняти функція $f(x)$, якою пропонується наближено замінити функцію $f_n^*(x)$?
15. Як за критерієм Пірсона оцінюється близькість функцій $f_n^*(x)$ і $f(x)$? Як обчислюється міра такої близькості ?
16. Яке значення називають спостереженим значенням міри близькості функцій $f_n^*(x)$ і $f(x)$, оцінюваної за критерієм Пірсона ?
17. Як для заданого рівня значущості визначають критичне значення, правіше від якого практично неможлива поява спостережуваних значень $\chi^2_{експ}$?
18. У яких випадках вважають, що за критерієм Пірсона гіпотеза про коректність заміни функції $f_n^*(x)$ функцією $f(x)$ не узгоджується з експериментальними даними ?
19. Як перевірити за критерієм Пірсона гіпотезу про коректність заміни функції $f_n^*(x)$ функцією $f(x)$, використовуючи послуги програми GRAN1?
20. Якщо введені кілька вибірок і кілька функцій $f(x)$, які саме серед них будуть аналізуватися за критерієм Пірсона в разі використання послуги "Операції / Статистика / Критерій Пірсона"?
21. Як з використанням послуг програми GRAN1 визначити значення $\chi^2_{експ}$ і $\chi^2_{кр}$ для заданого рівня значущості?
22. Як вказати рівень значущості в разі використання послуги "Операції / Статистика / Критерій Пірсона" для вирішення за критерієм Пірсона питання, чи узгоджується з експериментальними даними гіпотеза про коректність наближеної заміни функції $f_n^*(x)$ функцією $f(x)$?
23. Чи може гіпотеза про коректність заміни функції $f_n^*(x)$ однієї і тією самою функцією $f(x)$ в одних випадках підтверджуватися, а в інших ні? Від чого це залежить?
24. Як за критерієм Пірсона перевірити гіпотезу про те, що поточковий розподіл статистичних імовірностей на скінченній множині точок $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ за дуже великої кількості випробувань має заданий вигляд?

Вправи для самостійного виконання

1. Задано поінтервальний розподіл статистичних ймовірностей (відносних частот) появи спостережених значень досліджуваної величини X :

x_i	[–4, –3)	[–3, –2)	[–2, –1)	[–1, 0)	[0, 1)	[1, 2)	[2, 3)	[3, 4)
m_i	0.002	0.019	0.144	0.335	0.321	0.156	0.022	0.001

   Записати аналітичні вирази для функцій $f_n^*(x)$ і $F_n^*(x)$.

2. Записати дані в робочий файл (вводячи замість обох абсцис кінців кожного інтервалу абсцису його середини).
3. Побудувати графіки функцій $f_n^*(x)$ і $F_n^*(x)$, використовуючи послуги програми GRAN1.
4. Побудувати полігон частот, вважаючи середини інтервалів представниками всіх точок відповідних інтервалів і переходячи в такий спосіб від поінтервального розподілу частот до поточкового.
5. За функціями $f_n^*(x)$ і $F_n^*(x)$ визначити статистичні ймовірності (відносні частоти) попадання спостережуваних значень досліджуваної величини на проміжки: [–4, –3); [–3, –2); [–2, –1); [–1, 0); [0, 1); [0, 2); [0, 3); [1, 2); [1, 3); [2, 3), [0.25, 0.75); [2.5, 3.5).
6. Використовуючи послуги програми GRAN1, визначити M_n^* і σ_n^* для розподілу статистичних ймовірностей (відносних частот) із вправи 5.
7. За критерієм Пірсона визначити, чи узгоджується з наведеним у вправі 5 поінтервальним розподілом статистичних ймовірностей гіпотеза про те, що функція $f_n^*(x)$ може бути коректно замінена функцією $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$, заданою на проміжку [–5, 5], коли об'єм вибірки $n=50$; $n=100$; $n=500$; $n=1000$.
8. Завдання із вправи 7 виконати для поінтервального розподілу статистичних імовірностей:

[–4, –3.5)	[–3.5, –3)	[–3, –2.5)	[–2.5, –2)	[–2, –1.5)	[–1.5, –1)	[–1, –0.5)
0.0001	0.0010	0.0047	0.0164	0.0440	0.0920	0.1500

[–0.5, 0)	[0, 0.5)	[0.5, 1)	[1, 1.5)	[1.5, 2)	[2, 2.5)	[2.5, 3)	[3, 3.5)	[3.5, 4)
0.1918	0.1918	0.1500	0.0920	0.0440	0.0164	0.0047	0.0010	0.0001

9. Перевірити за критерієм Пірсона гіпотезу про те, що за дуже великої кількості випробувань дискретний розподіл статистичних ймовірностей буде мати вигляд

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_i	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1	0.1

   якщо за результатами 100 випробувань одержано розподіл

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
p_i	0.08	0.12	0.05	0.10	0.16	0.06	0.09	0.11	0.15	0.08

Література

1. М.І. Жалдак. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів. – Київ: Техніка, 1997. – 303 с.: іл.
2. М.І. Жалдак, Ю.В. Горошко, Є.Ф. Вінниченко. Математика з комп'ютером: посібник для вчителів. – К.: РННЦ «ДІНІТ». – 2004. – 255 с.
3. М.І. Жалдак., Н.М. Кузьміна, Г.О. Міхалін. Теорія ймовірностей і математична статистика. Підручник для студентів фізико-математичних та інформатичних спеціальностей педагогічних університетів. Видання 3-тє, перероблене і доповнене. – Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. 2015. – 705 с.

Зміст

Навчальне видання

М. І. Жалдак, Ю. В. Горошко, Є. Ф. Вінниченко

Математика з комп'ютером

Посібник для вчителів

Видання третє, доповнене

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України