УДК 372.851: 373.1

Школьний О. В., Захарійченко Ю. О.

МЕТОДИКА ПІДГОТОВКИ ДО РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ТЕСТОВИХ ЗАВДАНЬ ЗНО З МАТЕМАТИКИ

Наразі ЗНО з математики виконує подвійну функцію: конкурсний відбір до вищих навчальних закладів та державна підсумкова атестація випускників. У зв'язку з цим підготовка до нього набула додаткової актуальності. Також до тесту ЗНО з математики повернуто завдання з повним поясненням, які були відсутні протягом тривалого часу. Через це багато вчителів відчувають нестачу в публікаціях, пов'язаних із методикою підготовки до розв'язування таких завдань. У даній роботі ми наводимо типові тестові завдання, які можуть бути використані вчителями математики під час підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання. До кожного із цих завдань наведено повне розв'язання і методичні коментарі, у яких ми робимо акцент на їх характерних особливостях. Особливу увагу при цьому приділено завданням на встановлення відповідності та завданням із повним поясненням, оскільки за статистикою при виконанні завдань саме цих типів учнів допускають найбільшу кількість помилок. Ми вважаємо, що пропоновані методичні рекомендації сприятимуть забезпеченню якісної підготовки до ЗНО з математики учнів української старшої школи.

Ключові слова: *ЗНО з математики, ДПА з математики, учні старшої школи, навчальні досягнення з математики, завдання на встановлення відповідностей, завдання з повним поясненням.*

Протягом останніх двох років формат тесту зовнішнього незалежного оцінювання з математики (далі – ЗНО) не зазнає структурних змін. Це дає можливість вчителям продовжувати вдосконалювати методику підготовки до цього виду загальнодержавного стандартизованого оцінювання, яке має подвійну функцію: формування ранжованого списку абітурієнтів та здійснення державної підсумкової атестації (далі – ДПА) українських випускників.

Дворічна практика проведення тестування, яке містить завдання відкритої форми з повним поясненням, показує, що саме ці завдання є найбільшим для учнів каменем спотикання. Крім того, надзвичайно важливими для кінцевого результату є завдання на відшукання логічних пар (встановлення відповідностей), оскільки разом із завданнями з розгорнутою відповіддю вони складають 30 тестових балів із 62, тобто більше 48%! Зрозуміло, що саме на методиці підготовки до розв'язування завдань цих двох форм природно зосередити значну увагу.

Будова завдань із повним поясненням, що входять до тесту ЗНО з математики, має особливості, найбільш принциповою з яких є намагання авторів тестів сприяти тому, щоб учні розв'язували завдання одним і тим самим способом. Це дозволяє уникнути проблем з еквівалентністю оцінювання при перевірці завдання, розв'язаного різними способами, оскільки нелегко написати еквівалентні схеми оцінювання, якщо різні способи його розв'язання містять різну кількість логічних кроків.

У процесі навчання математики природно заохочувати учнів до творчості, але під час проходження стандартизованого оцінювання подібна варіативність може призвести до описаних вище проблем зі шкалюванням. Тому в завданні з повним поясненням тесту ЗНО з математики в умові часто вказують кроки, які має виконати учень для його розв'язання, або формулюють завдання таким чином, щоб спосіб його розв'язання для більшості учнів був стандартним.

Іншою проблемою підготовки до розв'язування завдань із повним поясненням є невизначеність ступеня деталізації розв'язання таких завдань. Особливо це стосується розв'язування геометричних задач, де доведення окремих фактів є принциповим для їх оцінювання. Однозначної відповіді, наскільки детальним має бути обґрунтування того чи іншого тестового завдання, дати практично неможливо, оскільки ступінь деталізації залежить від схеми оцінювання. Розгляд конкретних прикладів завдань з розгорнутою відповіддю та їх схем оцінювань дозволить учням зрозуміти типові підходи до вирішення цієї проблеми.

Методика підготовки українських випускників до розв'язування завдань ЗНО математики різних форм систематично розглядається у фахових науково-педагогічних виданнях. Активно працюють у цьому напрямку В. Г. Бевз, М. І. Бурда, Г. І. Білянін, О. Я. Біляніна, О. П. Вашуленко, Л. П. Дворецька, О. В. Єргіна, О. С. Істер, А. Г. Мерзляк, Є. П. Нелін, В. Б. Полонський, В. К. Репета, О. М. Роганін, О. П. Томащук, М. С. Якір та інші.

Наш авторський колектив (автори статті разом із Л. І. Захарійченко та О. В. Школьною) протягом останніх 12 років активно працює над методичним забезпеченням процесу підготовки до ЗНО з математики. Основи теорії та методики оцінювання навчальних досягнень учнів старшої школи в Україні описано в монографії [1], для підготовки учнів до ЗНО та ДПА з математики ми використовуємо методичний комплект із посібників [2] та [3]. Методичні рекомендації щодо тематичної та комплексної підготовки учнів до ЗНО з математики можна знайти в наших численних публікаціях у фахових науково-педагогічних виданнях України.

Метою статті є надання методичних рекомендацій фахівцям, які здійснюють підготовку випускників до ЗНО з математики. Найбільш детально при цьому ми зупинимось на завданнях на встановлення відповідностей і на завданнях із розгорнутою відповіддю.

Комбіновані тренувальні тести у форматі ЗНО з математики здебільшого завершують курс підготовки до тестування. Розв'язанню таких тестів найчастіше передує тематична підготовка, яка містить повторення теоретичного матеріалу та розв'язування типових тестових завдань усіх потрібних форм (із альтернативами, з короткою відповіддю, на відшукання логічних пар, із повним поясненням), що стосуються кожної окремої теми. Корисними при цьому є тематичні тести, які дозволяють отримати зворотний зв'язок і за необхідності повернутися до матеріалу, який викликає найбільші труднощі. Тренувальні завдання і завдання тематичних тестів можуть не задовольняти всіх вимог до якісного тестового завдання, оскільки вони виконують, у першу чергу, не контролюючу функцію, а навчальну. Завдання ж комбінованих тестів бажано підбирати з урахуванням усіх вимог, оскільки ці тести моделюють діяльність учня під час проходження "бойового" тесту ЗНО. При розв'язуванні комбінованих тестів учень уже не повторює матеріал, а здійснює тренінг безпосереднього проходження тестування, зокрема, визначає послідовність виконання завдань (за номерами, за зростанням складності, за формами), розраховує час тощо.

Далі ми наведемо розв'язання тестових завдань, що можуть входити до комбінованих тестів, а також методичні коментарі до них.

1. Укажіть рівняння, яке НЕ має коренів.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$\lg x = 5$	$\operatorname{ctg} x = 5$	$\lvert x\rvert = 5$	$\cos x = 5$	$5^x = 0{,}1$

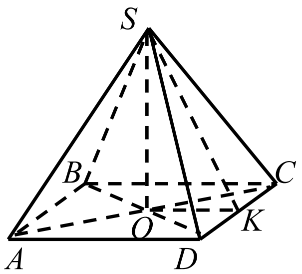
Розв'язання. Проаналізуємо множини значень функцій із лівих частин рівнянь альтернатив. **А:** $D(y) = R$; Б: $D(y) = R$; **В:** $D(y) = [0;+\infty)$; **Г:** $D(y) = [-1;1]$; **Д:** $D(y) = (0;+\infty)$. Тепер очевидно, що правильна відповідь – **Г**.

Складність цього завдання полягає в тому, що в ньому розглядаються рівняння принципово різних класів, а розв'язання базується більше на властивостях функцій, ніж на методах розв'язування рівнянь. Під час тематичного повторення, очевидно, такі завдання розглядаються рідко, вони природні саме в комбінованих тестах і демонструють учням цілісність математики та органічні зв'язки, які існують між її розділами.

2. Задано правильну чотирикутну піраміду, у якої бічні ребра дорівнюють 5 см, а периметр основи дорівнює 8 см. Установіть відповідність між відрізками (1-4) та їх довжинами (А-Д).

Відрізок
1 Сторона основи піраміди
2 Діагональ основи піраміди
3 Апофема піраміди
4 Висота піраміди

Довжина відрізка
А $\sqrt{23}$ см
Б $\sqrt{21}$ см
В 2 см
Г $2\sqrt{2}$ см
Д $2\sqrt{6}$ см



Розв'язання. Нехай на малюнку зображено дану піраміду $SABCD$, SO – висота піраміди, SK – її апофема, SA – бічне ребро. Оскільки піраміда є правильною, то $ABCD$ – квадрат, а тому сторона основи $AB = 8:4 = 2$ см. Діагональ квадрата $AC = AB\cdot\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ см. Очевидно, що $AO = \frac{1}{2}AC = \sqrt{2}$ см. Із прямокутного трикутника AOS за теоремою Піфагора $SO = \sqrt{5^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{23}$ см. Оскільки $OK = \frac{1}{2}AB = 1$ см, то з прямокутного трикутника KOS за теоремою Піфагора $SK = \sqrt{(\sqrt{23})^2 + 1^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ см.

Отже, правильна відповідь: **1 – В**, **2 – Г**, **3 – Д**, **4 – А**.

Для розв'язання цього завдання надзвичайно важливим є виконаний належним чином малюнок. Фактично, після зображення піраміди та всіх потрібних її елементів для підготовленого учня розв'язання стає практично очевидним. Для учнів зі слабшим рівнем математичної підготовки малюнок також є суттєвою підказкою для виконання хоча би частини цього завдання. Тому вчителям варто приділити додаткову увагу зображенню просторових геометричних тіл під час підготовки до ЗНО.

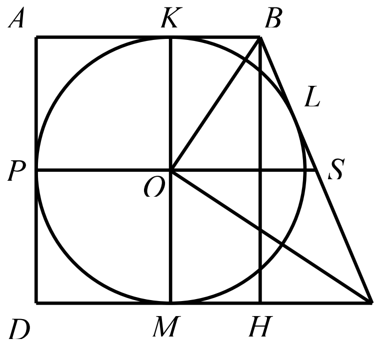
3. Обчисліть інтеграл $\int_1^3 \left(2x - 4f(x)\right)dx$, якщо $\int_1^3 f(x)dx = 12$.

Розв'язання. Для розв'язання використаємо властивості інтеграла і умову завдання:

$$\int_1^3 \left(2x - 4f(x)\right)dx = \int_1^3 2x\,dx - 4\int_1^2 f(x)dx = x^2\Big|_1^3 - 4\cdot 12 = 9 - 1 - 48 = -40.$$

На перший погляд, це завдання видається простим, але насправді це не так. У багатьох учнів є певний страх перед нетиповими, незвично сформульованими завданнями, навіть тоді, коли, по суті, вони нескладні. Тому вчителю варто проявляти певну фантазію під час підготовки до ЗНО, включаючи до тренувальних завдань такі, аналогів яких учні ніколи не зустрічали. На нашу думку, вчителю не варто захоплюватися так званими "уроками підготовки до контрольних робіт", на яких учням дають завдання, аналогічні тим, які будуть на контрольній роботі. Такі уроки лише шкодять підготовці до стандартизованих оцінювань, оскільки внаслідок подібних "тепличних умов" в учнів може сформуватися страх перед наперед невідомими типами завдань, яких вдосталь у "бойовому" тесті ЗНО з математики.

4. У прямокутну трапецію *ABCD* вписано коло. Бічна сторона *BC* ділиться точкою дотику на відрізки 9 см і 4 см. Знайдіть: а) висоту трапеції; б) відношення довжин відрізків, на які центр кола ділить середню лінію трапеції; в) кут, під яким видно сторону ВС із центра кола.



Розв'язання. Нехай на малюнку зображено прямокутну трапецію $ABCD$ і вписане в неї коло з центром у точці O. Точки K, L, M, P є точками дотику впсианого кола до сторін AB, BC, CD, DA трапеції відповідно, PS – середня лінія трапеції.

а) За умовою задачі $BL = 4$ см, а $LC = 9$ см, тому $BC =$ 13см. Проведемо висоту BH трапеції. За властивістю відрізків дотичних, проведених до кола з однієї точки, $BK = BL = 4$ см і $CM = CL = 9$ см. Оскільки $KBHM$ – прямокутник, то $MH = BK = 4$ см, а отже, $CH = 9 - 4 = 5$ см. Із прямокутного трикутника BHC за теоремою Піфагора $BH = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$ см.

б) Оскільки радіус вписаного кола $r = \frac{1}{2}BH = 6$ см, то $PO = 6$ см. Відрізок OS є середньою лінією трапеції $KBCM$, тому $OS = \frac{1}{2}(BK + CM) = 6,5$ см. Отже, $\frac{PO}{OS} = \frac{6}{6,5} = \frac{12}{13}$.

в) Із прямокутного трикутника OKB за теоремою Піфагора $OB^2 = 4^2 + 6^2 = 52$. Аналогічно з прямокутного трикутника OMC за теоремою Піфагора $OC^2 = 9^2 + 6^2 = 117$. За теоремою косинусів для сторони BC трикутника BOC маємо: $13^2 = 52 + 117 - 2\sqrt{52} \cdot \sqrt{117} \cdot \cos \angle BOC$, звідки $\cos \angle BOC = \frac{169 - 52 - 117}{2 \cdot \sqrt{52} \cdot \sqrt{117}} = 0$. Таким чином, $\angle BOC = 90^{\circ}$.

Схема оцінювання до цього завдання могла би бути наступною: 1 бал – за обгрунтування рівностей $BK = BL$, $CM = CL$ і $KB = MH$; 1 бал – за правильне знаходження висоти трапеції; 1 бал – за правильне знаходження відношення $\frac{PO}{OS}$; 1 бал – за правильне знаходження кута BOC. Отже, за повне і правильне розв'язання даного завдання учень отримує 4 бали.

Під час оформлення пояснення до завдання 4 важливо акцентувати увагу учнів на виконанні малюнка з описом відповідності всіх його елементів умові задачі. Це спрощує перевірку і не допускає двозначності тлумачень, а отже, сприяє правильності оцінювання. Однак, учні також мають знати, що лише за правильно виконаний малюнок до геометричної задачі без будь-яких інших пояснень бали не нараховуються. Через обмеженість бланку відповідей не варто при посиланні на ту чи іншу теорему формулювати її в загальному випадку. Наприклад, при застосуванні теореми Піфагора в прямокутному трикутнику BHC можна не записувати рівність $BC^2 = BH^2 + CH^2$. Не варто детально обгрунтовувати, що чотирикутник $KBHM$ є прямокутником, а OS є середньою лінією трапеції $KBCM$, досить обмежитися констатацією цих фактів. Також слід застерегти учнів від застосування загальної формули розв’язування тригонометричного рівняння $\cos x = 0$ у пункті в), оскільки в разі відповіді $\angle BOC = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ останній бал за схемою оцінювання не буде зараховано.

5. Розв’яжіть нерівність $\left(x^2-(a+5)x+9\right)\cdot \log_a\left(|x|+a\right) \le 0$ залежно від значень параметра а.

Розв’язання. Знайдемо область допустимих значень M параметра а: $\begin{cases} a>0, \\ a \ne 1, \\ |x|+a>0, \end{cases}$ звідки $M=(0;1)\cup(1;+\infty)$. При всіх інших значеннях а нерівність розв’язків не має. Дослідимо квадратний тричлен $f(x)=x^2-(a+5)x+9$. Знайдемо дискримінант: $D=(a+5)^2-36=(a+11)(a-1)$. При $a\in(0;1)$ $D<0$, а отже, $f(x)>0$ для всіх $x\in R$. При $a\in(1;+\infty)$ $D>0$ і корені квадратного тричлена $f(x)$: $x_1=\frac{a+5-\sqrt{a^2+10x-11}}{2}$ та $x_2=\frac{a+5+\sqrt{a^2+10x-11}}{2}$. Отже, $f(x)>0$ для всіх $x\in(-\infty;x_1)\cup(x_2;+\infty)$ і $f(x)<0$ для всіх $x\in(x_1;x_2)$.

Таким чином, при всіх $a\in(0;1)$ початкова нерівність рівносильна нерівності $\log_a(|x|+a)\le 0$. Маємо: $\log_a(|x|+a)\le \log_a 1$, звідки $|x|+a\ge 1$, $|x|\ge 1-a$. Оскільки при всіх $a\in(0;1)$ $1-a>0$, то, використовуючи геометричний зміст модуля, отримуємо розв’язок початкової нерівності: $(-\infty;a-1]\cup[1-a;+\infty)$. Оскільки $|x|\ge 0$, то при всіх $a\in(1;+\infty)$ $\log_a(|x|+a)\ge \log_a a=1>0$, а отже, початкова нерівність рівносильна нерівності $f(x)\le 0$, розв’язком якої є проміжок $\left[\frac{a+5-\sqrt{a^2+10a-11}}{2};\frac{a+5+\sqrt{a^2+10a-11}}{2}\right]$.

Схема оцінювання до цього завдання могла би бути такою: 1 бал – за правильне знаходження ОДЗ параметра а; 1 бал – за правильне знаходження коренів квадратного тричлена; 1 бал – за дослідження квадратного тричлена при $a\in(0;1)$; 1 бал – за правильне дослідження квадратного тричлена при $a\in(1;+\infty)$; 1 бал – за отримання правильної відповіді до початкової нерівності при $a\in(0;1)$ або при $a\in(1;+\infty)$; 1 бал – за отримання повної та правильної відповіді до завдання в залежності від значень параметра а. Отже, за повне і правильне розв’язання завдання 5 учень отримує 6 балів.

Зауважимо, що послідовність виконання етапів розв’язання цього завдання може бути й іншою, принципово лише, щоб усі етапи розв’язання, за які нараховуються бали, були присутні. При знаходженні множини допустимих значень параметра учень може не наводити останньої нерівності, оскільки при виконанні перших двох вона також має місце. Не варто також вимагати від учнів при розв’язуванні квадратного рівняння записувати загальну формулу для дискримінанта ($D=b^2-4ac$) і загальну формулу коренів квадратного рівняння

($x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$), бо це може лише заплутати їх, оскільки для даного квадратного тричлена $b = -(a+5)$. Подібна плутанина нерідко призводить до прикрих арифметичних помилок. Учень може розв'язувати це завдання й іншими способами: за допомогою сукупності рівносильних систем або за допомогою методу інтервалів. Однак, кожен із цих способів також міститиме всі етапи з наведеної схеми оцінювання, а тому можна вважати, що дане завдання не містить принципово різних альтернативних розв'язань.

Висновки. Методика належної підготовки учнів старшої школи до розв'язування тестових завдань ЗНО з математики є актуальною проблемою сучасної педагогічної науки. При цьому наразі в цьому контексті особливої уваги заслуговують завдання на відшукання логічних пар та завдання з повним поясненям. При розв'язуванні останніх учневі слід виокремити етапи розв'язання, за які будуть нараховуватися бали при оцінюванні, також врахувати, що лише строге обгрунтування всіх теоретичних положень або акуратне виконання обчислень дозволить учневі отримати бал за відповідний етап розв'язання.

Сподіваємося, що дана стаття стане в пригоді вчителям математики і сприятиме забезпеченню належної якості процесу систематизації та повторення курсу математики перед проходженням тестування, а також покращенню учнівських результатів на ЗНО з математики. Автори готові до конструктивної дискусії з читачами з приводу тематики даної статті. Усі зауваження та пропозиції можна надсилати безпосередньо авторам на їх електронні адреси: shkolnyi@ukr.net і yzakhar@gmail.com.

Використана література:

1. *Школьний О. В.* Основи теорії та методики оцінювання навчальних досягнень з математики учнів старшої школи в Україні : монографія / О. В. Школьний. – Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2015. – 424 с.
2. Повний курс математики в тестах. Енциклопедія тестових завдань : у 2 ч. – Ч. 1 : Різнорівневі завдання / Ю. О. Захарійченко, О. В. Школьний, Л. І. Захарійченко, О. В. Школьна. – 6 вид., випр. – Харків : Вид-во "Ранок", 2017.– 496 с.
3. Повний курс математики в тестах. Енциклопедія тестових завдань : у 2 ч. – Ч. 2: Теоретичні відомості. Тематичні та підсумкові тести / Ю. О. Захарійченко, О. В. Школьний, Л. І. Захарійченко, О. В. Школьна. – Харків : Вид-во "Ранок", 2017.– 176 с.

References:

1. *Shkolnyi O. V.* Osnovy teorii ta metodyky otsiniuvannia navchalnykh dosiahnen z matematyky uchniv starshoi shkoly v Ukraini : monohrafiia / O. V. Shkolnyi. – Kyiv : NPU imeni M. P. Drahomanova, 2015. – 424 s.
2. Povnyi kurs matematyky v testakh. Entsyklopediia testovykh zavdan : u 2 ch. – Ch. 1 : Riznorivnevi zavdannia / Yu. O. Zakhariichenko, O. V. Shkolnyi, L. I. Zakhariichenko, O. V. Shkolna. – 6 vyd., vypr. – Kharkiv : Vyd-vo "Ranok", 2017.– 496 s.
3. Povnyi kurs matematyky v testakh. Entsyklopediia testovykh zavdan : u 2 ch. – Ch. 2: Teoretychni vidomosti. Tematychni ta pidsumkovi testy / Yu. O. Zakhariichenko, O. V. Shkolnyi, L. I. Zakhariichenko, O. V. Shkolna. – Kharkiv : Vyd-vo "Ranok", 2017.– 176 s.

Школьный А. В., Захарийченко Ю. А. Методика решения тестовых заданий в процессе подготовки к ВНО по математике.

Сейчас ВНО по математике выполняет двойную функцию: конкурсный отбор в ВУЗы и государственная итоговая аттестация выпускников. В связи с этим подготовка к нему приобрела дополнительную актуальность. Также в тест ВНО по математике возвращены задания с полным объяснением, которые отсутствовали в течение длительного времени. Из-за этого многие учителя испытывают недостаток в публикациях, связанных с методикой подготовки к решению таких *заданий. Целью статьи является заполнение указанных выше методических пробелов в подготовке к внешнему независимому оцениванию по математике путем рассмотрения методики подготовки к решению тестовых заданий тех типов, которые вызывают наибольшие трудности при прохождении тестирования.*

В данной работе мы приводим некоторые тестовые задания, которые могут быть использованы учителями математики при подготовке к внешнему независимому оцениванию. К каждому из этих задач приведены полное решение и методические комментарии, в которых мы делаем акцент на их характерных особенностях. Особое внимание при этом уделено задачам на установление соответствия и задачам с полным объяснением, поскольку по статистике при выполнении задач именно этих типов учеников допускают наибольшее количество ошибок. Мы считаем, что предложенные в данной работе методические рекомендации будут способствовать обеспечению качественной подготовки к ВНО по математике учеников украинской старшей школы.

***Ключевые слова**: ВНО по математике, ГИА по математике, ученики старших классов, учебные достижения по математике, задания на установление соответствий, задачи с полным объяснением.*

Shkolnyi O., Zakhariychenko Y. Methodology of test items solving during the preparation to IEA in mathematics.

Currently independent external assessment in mathematics has a dual function: competitive selection to universities and state final examination senior school pupils. In this regard, the preparation for it has become more relevant. Also to the test of the EIA in mathematics were returned tasks with complete explanations that were missing for there for a long time. Because of this many teachers are feeling some lacks in publications related to the methodology for preparing for such problems solving. In this paper we present some test items, which can be used by teachers of mathematics in preparation for independent external assessment. Complete solution and methodical comments for each of these tasks are given. In the mentioned above comments we pay much attention to their especial characteristics. Particular attention is paid to the items for finding of logic pairs and problems with a full explanation, because according to statistics in meeting the objectives of these types of students allow the greatest number of errors. We believe that the guidelines proposed in this paper will help to ensure quality training for IEA in mathematics for Ukrainian pupils of senior school.

***Keywords:** IEA in mathematics, SFE in mathematics, pupils of senior school, learning achievements in mathematics, items for finding of logic pairs, items with full explanation.*