МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМЕНИ А.М.ГОРЬКОГО

На правах рукописи

В.К.ГРИГОРЕНКО

"ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ РАЗЛОЖЕНИИ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ"

№ 01. 003 / дифференциальные и интегральные уравнения /

А В Т О Р Е Ф Е Р А Т

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Диссертация написана на русском языке

К и е в - 1 9 7 2

Работа выполнена в Киевском государственном педагогическом институте имени А.М.Горького

Научный руководитель -
доктор физико-математических наук,
профессор Н.И.ШКИЛЬ

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук,
профессор Ю.А.РЯБОВ

Кандидат физико-математических наук,
доцент Н.И.ТЕРЕЩЕНКО

Ведущее предприятие - Одесский государственный университет имени И.И.Мечникова

Автореферат разослан "21" июня 1972 г.

Защита диссертации состоится " " в октябре 1972 г. на заседании Ученого Совета физико-математического факультета Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького.

Отзывы просим присылать по адресу:
г. Киев - 30, ул. Пирогова, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ

Многочисленные задачи физики, механики, автоматического регулирования и оптимального управления приводят к дифференциальным уравнениям. На первых исторических этапах их изучения основной целью являлось получение точного решения. Однако в дальнейшем выяснилось, что представление решений через элементарные функции возможно лишь только в некоторых исключительных случаях. Поэтому все больше и острее вставал вопрос о способах построения приближенных решений дифференциальных уравнений в виде равномерно сходящихся, а также в виде асимптотических рядов. Особенно удобны асимптотические ряды.

Несмотря на то, что они, как правило расходящиеся, тем не менее приближенное решение - решение, полученное из формальных рядов путем обрыва их на каком-то m -члене - оказывается весьма пригодным как для исследования качественной картины, так и для практических расчетов.

Построению решений дифференциальных уравнений в виде асимптотических и равномерно сходящихся рядов посвящены работы многих авторов как за рубежом, так и в нашей стране. В частности это работы А.Пуанкаре, Г.Биркгофа, Я.Д.Тамаркина, Н.Н.Боголюбова, А.Н.Тихонова, В.Трджидвинского, О.Перрона, М.Хукухара, Ю.А.Митропольского, Н.П.Еругина, С.Ф.Фещенко, У.Сибуя, И.З.Штокало, К.Я.Латышевой, В.В.Хорошилова, Л.И.Донской, Ю.Л.Далецкого, С.Г.Крейна, И.М.Рапопорта, Х.Л.Территина, В.П.Басова, Д.П.Костомарова, Н.И.Шкиля, Н.И.Терещенко, М.В.Федорюка, А.Б.Васильевой, И.А.Павлюка, В.Вазова и др.

Следует отметить, что развитие асимптотических методов в теории дифференциальных уравнений ведется по двум направлениям. Одно направление исследований связано с изучением поведения решений дифференциальных уравнений в окрестности, особых точек /чаще всего это точки $x=0$ и $x=\infty$ /, где x - независимое переменное. Второе направление связано с изучением поведения решений при стремлении параметра, входящего в уравнение или систему уравнений, к своему предельному значению.

Исследования, проведенные в реферируемой работе, тесно связаны с обеими этими направлениями и по своей идее примыкают к исследованиям Э.А.Коддингтона, Н.Левинсона, Н.И.Шкиля, С.Ф.Фещенко, В.Вазова.

В работах Э.А.Коддингтона, Н.Левинсона и Н.И.Шкиля исследовались системы с иррегулярной особой точкой вида

$$\frac{dw}{dz} = z^{2} A(z)\, w, \qquad /2/$$

где w - n - мерный вектор, $A(z)$ -квадратная матрица порядка n , которая допускает разложение в степенной ряд

$$A(z) = \sum_{s=0}^{\infty} z^{-s} A^{(s)}, \qquad /2/$$

а z -неотрицательное целое число.

В основном исследовался случай, когда характеристическое уравнение

$$\det\left[A^{(0)} - \lambda E\right] = 0 \qquad /3/$$

/ E -единичная матрица/

имеет лишь простые корни. В случае же кратных корней, обладающих кратными элементарными делителями, отыскание решений значительно усложняется.

Н.И.Шкиль предложил метод отыскания частных решений системы /I/ в случае, когда характеристическое уравнение/8/ имеет кратные корни и им отвечают элементарные делители тождественной кратности. В работах Н.И.Шкиля и наших работах [I-4] указан метод построения асимптотических решений систем линейных дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой в случае, когда кратному корню характеристического уравнения соответствуют несколько кратных элементарных делителей.

В работах С.Ф.Фещенко и В.Вазова исследованы системы линейных дифференциальных уравнений содержащие малый параметр

$$\varepsilon^{\ell} \frac{dx}{d\tau} = A(\tau,\varepsilon)\, x, \qquad /4/$$

где x – n – мерный вектор, $A(\tau,\varepsilon)$ -квадратная матрица, которая допускает разложение

$$A(\tau,\varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^{s} A^{(s)}(\tau) \qquad /5/$$

Исследование проводилось в случае целого положительного ℓ. Мы же занимаемся построением асимптотического решения при ℓ – дробном.

Отметим, что вся теория асимптотических представлений для таких типов дифференциальных уравнений тесно связана с исследованием некоторого алгебраического уравнения, аналогичного характеристическому уравнению для случая дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, которое мы также будем называть характеристическим. Свойства корней такого алгебраического уравнения в значительной степени предопределяют структуру решений системы дифференциальных уравнений.

Диссертация состоит из введения и двух глав, в конце диссертации приводится список литературы.

Во введении дается обзор работ посвященных исследованию асимптотического поведения решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с иррегулярной особой точкой и линейных дифференциальных уравнений с малым параметром.

Глава I в основном посвящается исследованию системы дифференциальных уравнений вида:

$$\varepsilon^{h}\frac{dx}{d\tau} = A(\tau,\varepsilon)x + f(\tau,\varepsilon)e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \qquad /6/$$

где $A(\tau,\varepsilon)$ - действительная / $n \times n$ / - матрица, $f(\tau,\varepsilon)$ - n -мерный вектор, $h=\frac{p}{q}$ -дробное число, где p и q взаимно простые числа, $\tau \in [0,L]$. Система /6/ является системой с особенностью по параметру в точке $\varepsilon = 0$.

§ I этой главы носит вспомагательный характер. В нем приводятся основные положения из теории преобразующих матриц в случае простых и кратных корней характеристического уравнения.

В §§ 2-6 рассматривается однородная система, соответствующая системе /6/. В § 2 строится формальное решение такой системы в случае простых корней характеристического уравнения. Основной результат этого параграфа дается теоремой.

ТЕОРЕМА I. Если на сегменте $[0, L]$ матрицы $A^{(s)}(\tau)$ $(s=0,1,2,\ldots)$ неограниченно дифференцируемые и корни характеристического уравнения

$$\det\left[A^{(0)}(\tau)-\lambda(\tau)E\right]=0 \qquad /7/$$

различные при всех $\tau\in[0,L]$, то однородная система, соответствующая системе /6/, имеет формальную матрицу решений вида

$$\Phi(\tau,\mu)=U(\tau,\mu)\exp\left(\int_0^\tau \mu^{-p}\Lambda(\tau,\mu)\,d\tau\right), \qquad /8/$$

где $U(\tau,\mu)$ – $(n\times n)$ -матрица, а $\Lambda(\tau,\mu)$ -квадратная диагональная матрица порядка n, которые имеют разложения в формальные ряды

$$U(\tau,\mu)=\sum_{s=0}^{\infty}\mu^{s}U^{(s)}(\tau), \quad \Lambda(\tau,\mu)=\sum_{s=0}^{\infty}\mu^{s}\Lambda^{(s)}(\tau), \qquad /9/$$

где $\mu=\sqrt[q]{\varepsilon}$.

На асимптотический характер построенных решений указывает теорема I.2, метод доказательства которой принадлежит Э.Коддингтону и Н.Левинсону и приведен нами в § 3.

§ 4 посвящен построению частных формальных решений однородной системы в случае кратного корня, которому соответствует один кратный элементарный делитель тождественной кратности Как следует из изложения построение формальных решений существенно зависит от соотношений между p, q и n. Например, в случае $q=n$ и $p>q$ справедлива теорема.

ТЕОРЕМА 2. Пусть для однородной системы выполняются условия:

1/ матрицы $A^{(s)}(\tau)$ / $s=0,1,2,\dots$ /на сегменте $[0,L]$ неограниченно дифференцируемые;

2/ характеристическое уравнение /7/ имеет один кратный корень $\lambda^{(0)}(\tau)$, которому соответствует один элементарный делитель тождественной кратности;

3/ матрица $A^{(1)}(\tau)$ такова, что ее элемент $\{a^{(1)}(\tau)\}_{n1}$ при всех $\tau\in[0,L]$ не равен нулю, тогда эта система имеет формальное частное решение вида

$$x(\tau,\varepsilon)=u(\tau,\mu)\exp\left(\int_0^{\tau}\mu^{-p}\lambda(\tau,\mu)\,d\tau\right), \qquad /10/$$

где $u(\tau,\mu)$ - n -мерный вектор, $\lambda(\tau,\mu)$ -скалярная функция, допускающие формальные разложения:

$$u(\tau,\mu)=\sum_{s=0}^{\infty}\mu^{s}u^{(s)}(\tau), \quad \lambda(\tau,\mu)=\sum_{s=0}^{\infty}\mu^{s}\lambda^{(s)}(\tau), \qquad /11/$$

где $\mu=\sqrt[q]{\varepsilon}$.

Асимптотический характер построенного формального решения доказывается с помощью теоремы I.6, метод доказательства которой принадлежит Н.И.Шкилю и приведен нами в § 5.

§ 6 посвящен асимптотическому расщеплению системы линейных дифференциальных уравнений,

$$\varepsilon^{\frac{p}{q}}\frac{dx}{d\tau}=A(\tau,\varepsilon)x \qquad /12/$$

на подсистемы более низкого порядка с помощью неособенного преобразования.

В § 7 рассматривается неоднородная система /6/. Рассмотрены как "резонансный" случай, когда внешняя частота становится равной корню характеристического уравнения, так и "нерезонансный" случай, когда ни при каких $\tau \in [0, L]$ внешняя частота не равна корням характеристического уравнения.

Оказывается, что в случае простых корней характеристического уравнения, способ построения асимптотического решения системы /6/ не зависит от того "резонансный" или "нерезонансный" случаи имеют место. В частности доказана теорема.

<u>ТЕОРЕМА 8.</u> Если на сегменте $[0, L]$ матрицы $A^{(s)}(\tau)$ и векторы $f^{(s)}(\tau)$ / $s = 0, 1, 2, \ldots$ / неограниченно дифференцируемы, то система дифференциальных уравнений /6/ имеет формальное решение вида

$$x(\tau, \varepsilon) = U(\tau, \mu)\, h(\tau, \mu)\, e^{i\theta(t, \mu^q)}, \qquad /13/$$

где $U(\tau, \mu)$ - квадратная матрица порядка n, а $h(\tau, \mu)$ - n - мерный вектор, определяемый системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dh(\tau, \mu)}{d\tau} = \left[\mu^{-p} \Lambda(\tau, \mu) - i\nu(\tau)E\right] h(\tau, \mu) + z(\tau, \mu), \qquad /14/$$

где $\Lambda(\tau, \mu)$ -диагональная квадратная матрица порядка n, $z(\tau, \mu)$ - n - мерный вектор, причем имеют место формальные разложения:

$$U(\tau, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s U^{(s)}(\tau), \quad \Lambda(\tau, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s \Lambda^{(s)}(\tau),$$

$$z(\tau, \mu) = \mu^{-p} \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s z^{(s)}(\tau), \qquad /15/$$

в которых $\mu = \sqrt[q]{\varepsilon}$.

Дальше рассмотрен случай, когда характеристическое уравнение /7/ имеет кратный корень $\lambda^{(0)}(\tau)$ и ему соответствует один кратный элементарный делитель тождественной кратности. В этом случае мы уже различаем случаи "резонанса" и "нерезонан са". Построение формальных решений дается теоремами I.9, I.I и I.II.

Случай кратного корня с несколькими кратными элементарными делителями рассмотрен в § 8.

В § 9 построено асимптотическое решение системы дифференциальных уравнений вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A_1(\tau,\varepsilon,x)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \varepsilon A_2(\tau,\varepsilon,x)\frac{\partial u}{\partial t} + \varepsilon A_3(\tau,\varepsilon,x)\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon A_4(\tau,\varepsilon,x)u, \qquad /16/$$

где $0 \le x \le l$, $0 \le \tau = \varepsilon t \le L < \infty$, ε -малый параметр, $u(t,x)$ — n-мерный вектор, $A_k(\tau,\varepsilon,x)$ $(k = 1,2,3,4)$ -квадратные матрицы порядка n, с начальными

$$u\Big|_{t=0} = \varphi(x,\varepsilon), \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \psi(x,\varepsilon) \qquad /17/$$

и граничными условиями

$$u\big|_{x=0} = u\big|_{x=l} = 0. \qquad /18/$$

Эта система приводится к системе первого порядка вида

$$\frac{dq_m(t)}{dt} = H_m(\tau)q_m(t) + \varepsilon\sum_{k=1}^{\infty} H_{mk}(\tau,\varepsilon)q_k(t), \qquad /19/$$

где $q_m(t)$ $(m = 1,2,\ldots)$ -векторы размерности $2n$, $H_m(\tau)$, $H_{mk}(\tau,\varepsilon)$ $(m,k = 1,2,\ldots)$ -квадратные матрицы порядка $2n$.

В работах С.Фещенко, Н.И.Шкиля, И.И.Маркуша исследованы такие системы в случае простого корня и в случае кратного корня с соответствующим ему одним кратным элементарным делителем тождественной кратности соответствующего характеристического уравнения

$$\det\left[H_m(\tau) - \lambda_m(\tau)E\right] = 0, \; m = 1,2,\ldots \qquad /20/$$

Нами рассмотрен более общий случай, когда кратному корню соответствуют несколько кратных элементарных делителей, кратность которых не зависит от τ. Построенные решения имеют асимптотический характер, что подтверждается теоремой 1.17, которая доказана здесь же в § 9.

И, наконец, в заключительном § 10 рассмотрена система линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t,\varepsilon)}{dt} = A(\tau,\varepsilon)\,x(t,\varepsilon), \qquad /21/$$

где $\tau = \varepsilon t$, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$, $0 \le \tau \le L$, когда характеристическое уравнение имеет один кратный корень $\lambda^{(0)}(\tau)$ и ему отвечает один кратный элементарный делитель $[\lambda(\tau)-\lambda^{(0)}(\tau)]^n$.

Система /21/ рассматривалась в работах Н.И.Шкиля в предположении, что выполняется условие

$$\{C(\tau)\}_{n,1} \ne 0, \qquad /22/$$

а также в случае, когда

$$\{C(\tau)\}_{n,1} \equiv 0, \qquad /23/$$

а

$$\{C(\tau)\}_{n,2} + \{C(\tau)\}_{n-1,1} \ne 0 \qquad /24/$$

для всех $\tau \in [0,L]$, в которых

$$C(\tau) = T^{-1}(\tau)\left[T'(\tau) - A^{(0)}(\tau)T(\tau)\right], \qquad /25/$$

где $T(\tau)$ – преобразующая матрица для матрицы $A^{(0)}(\tau)$. Нами построено асимптотическое решение системы /21/ в случае когда выполняется условие /23/, но

$$\{C(\tau)\}_{n,2} + \{C(\tau)\}_{n-1,1} \equiv 0 \qquad /26/$$

и

$$\{C(\tau)\}_{n,3} + \{C(\tau)\}_{n-1,2} + \{C(\tau)\}_{n-2,1} \neq 0, \qquad /27/$$

т.е. нами строится асимптотическое решение системы /21/ при других достаточных условиях.

Вторая глава посвящена исследованию линейных дифференциальных уравнений с изолированными особенностями вида

$$\frac{dw}{dz} = z^{2} A(z) w, \qquad /28/$$

где z - неотрицательное целое или дробное число и матрица $A(z)$ имеет представление в виде ряда

$$A(z) = \sum_{s=0}^{\infty} z^{-s} A^{(s)}. \qquad /29/$$

§ I, как и в первой главе, носит вспомагательный характер. В частности; в § 1 приводятся сведения о линейных дифференциальных уравнениях с иррегулярной особой точкой.

В § 2 строятся формальные частные решения системы/28/ в случае, когда характеристическое уравнение

$$\det[A^{(0)} - \lambda E] = 0 \qquad /30/$$

имеет кратный корень, которому соответствуют $z_1 \geq 2$ кратных элементарных делителей, т.е. когда матрица $A^{(0)}$ с помощью неособенной матрицы T приводится к матрице $W = T^{-1} A^{(0)} T$, где

$$W = \begin{bmatrix} W_{s_1} & & O \\ & W_{s_2} & \\ O & & \ddots \; W_{s_{z_1}} \end{bmatrix}, \qquad /31/$$

а

$$W_{s_j} = \begin{bmatrix} \lambda^{(0)} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda^{(0)} & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda^{(0)} \end{bmatrix} - (s_j \times s_j), \quad j = 1, 2, \ldots, r_1. \qquad /22/$$

Рассмотрены следующие случаи.

1/ Кратность элементарных делителей одинакова, т.е.

/A/ $$s_1 = s_2 = \cdots = s_{r_1}. \qquad /23/$$

2/ Кратность элементарных делителей удовлетворяет условию

/B/ $$s_1 > s_2 > \cdots > s_{r_1}. \qquad /24/$$

Для обоих случае /A/ и /B/ даны необходимые и достаточные условия существования частного решения. При этом метод доказательства достаточного условия является и методом построения данного формального решения.

В § 2 доказаны теоремы.

<u>ТЕОРЕМА 4.</u> Пусть для системы дифференциальных уравнений /29/ выполняются условия:

1/ характеристическое уравнение /30/ имеет один корень $\lambda^{(0)}$ кратность которого равна p ;

2/ корню $\lambda^{(0)}$ соответствует $r_1 \geq 2$ кратных элементарных делителей $[\lambda - \lambda^{(0)}]^{s_1}, [\lambda - \lambda^{(0)}]^{s_2}, \ldots, [\lambda - \lambda^{(0)}]^{s_{r_1}}$, где $\sum_{i=1}^{r_1} s_i = p$;

3/ $s_1 = s_2 = \cdots = s_{r_1}$, то для того, чтобы вектор

$$W(r) = u(\mu) \exp\left(\int -s_1 \mu^{-[s_1(r+1)+1]} \lambda(\mu)\, d\mu\right), \qquad /25/$$

где $u(\mu)$ – n – мерный вектор, $\lambda(\mu)$. – скалярная функция, допускающие разложения

$$u(\mu)=\sum_{s=0}^{\infty}\mu^{s}u^{(s)}, \quad \lambda(\mu)=\sum_{s=0}^{\infty}\mu^{s}\lambda^{(s)}, \quad \mu=\sqrt[s_1]{\tfrac{1}{z}}, \qquad /36/$$

был формальным решением системы /29/, необходимо, чтобы число $\omega_1=[\lambda^{(1)}]^{s_1}$ было корнем уравнения

$$\det\begin{bmatrix} \omega-\{C_1\}_{s_1,1} & -\{C_1\}_{s_1,s_1+1} & \cdots & -\{C_1\}_{s_1,\ell_{z_1-1}+1} \\ -\{C_1\}_{2s_1,1} & \omega-\{C_1\}_{2s_1,s_1+1} & \cdots & -\{C_1\}_{2s_1,\ell_{z_1-1}+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -\{C_1\}_{p,1} & -\{C_1\}_{p,s_1+1} & \cdots & \omega-\{C_1\}_{p,\ell_{z_1-1}+1} \end{bmatrix}=0, \qquad /37/$$

где $\{C_1\}_{s_1,1}, \{C_1\}_{s_1,s_1+1}, \dots, \{C_1\}_{p,\ell_{z_1-1}+1}$ -соответственные элементы матрицы $C_1=T^{-1}A^{(1)}T$, а $\ell_{z_1-1}=s_1+s_2+\dots+s_{z_1-1}$.

<u>ТЕОРЕМА 5.</u> Если выполняются условия 1/, 2/, 3/ теоремы 4 и число $\omega_1=[\lambda^{(1)}]^{s_1}$ является простым не нулевым корнем уравнения /37/, то система дифференциальных уравнений /29/ имеет формальное решение вида /35/-/36/. Здесь же показано /теоремы 2.3 и 2.4/, что если числа $s_1, s_2, \dots, s_{z_1}$ удовлетворяют соотношению /В/, то система /29/ имеет формальные решения

$$w_j(z)=u_j(\mu_j)\exp\left(\int -s_j\mu^{-[s_j(z+1)+1]}\lambda_j(\mu_j)\,d\mu_j\right), \qquad /38/$$

где $u_j(\mu_j)$ -векторы размерности p и $\lambda_j(\mu_j)$ скалярные функции, допускающие разложения

$$u_j(\mu_j)=\sum_{s=0}^{\infty}\mu_j^{s}u_j^{(s)}, \quad \lambda_j(\mu_j)=\sum_{s=0}^{\infty}\mu_j^{s}\lambda_j^{(s)}, \quad \mu_j=\sqrt[s_j]{\tfrac{1}{z}}, \qquad /39/$$

$j=1,2,\dots,z_1.$

Одним из требований, при которых доказаны теоремы 4 и 5 является следующее требование: уравнение /37/ не должно иметь нулевых корней. От этого требования мы освобождаемся дальше в § 3, где приведена теорема 2.5.

Построенные выше формальные решения не дают возможности построить общее формальное решение в любом приближении. Дело в том, что хотя теоремы § 2 и позволяют для каждого корня $\lambda^{(0)}$ кратности ρ строить ρ линейно независимых формальных решений системы /29/, все эти решения в нулевом приближении вырождаются в одно решение. Следовательно, в нулевом приближении, нельзя получить общего решения системы /29/.

[illegible] 4,5 этой главы позволяют строить общее асимптотическое решение системы /29/ в любом приближении, а именно доказана теорема в случае /A/.

<u>ТЕОРЕМА 6.</u> Будем предполагать, что выполняются условия теоремы 4 и уравнение /37/ имеет r_1 простых, отличных от нуля корней $\omega_1 = [\lambda_{11}^{(1)}]^{s_1}, \dots, \omega_{r_1} = [\lambda_{1r_1}^{(1)}]^{s_{r_1}}$, тогда система дифференциальных уравнений /29/ имеет общее формальное решение вида

$$w(z) = \sum_{j=1}^{r_1} \mathcal{U}_j(\mu)\, h_j(\mu), \qquad /40/$$

где $\mathcal{U}_j(\mu)$ -прямоугольные матрицы размеров/ $n \times s_j$ / и имеющие вид

$$\mathcal{U}_j(\mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s \mathcal{U}_j^{(s)}, \quad \mu = \sqrt[s_1]{\varepsilon}, \qquad /41/$$

а $h_j(\mu)$ – s_j - мерные вектора, которые определяются системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dh_j(\mu)}{d\mu} = -s_1 \mu^{-[s_1(r+1)+1]} \left[W_j + \sum_{s=1}^{\infty} \mu^s \mathcal{A}_j^{(s)} \right] h_j(\mu), \qquad /42/$$

где W_j -клетка Жордана, отвечающая элементарному целителю $[\lambda-\lambda^{(0)}]^{s_j}$, $\Lambda_j^{(s)}$ -диагональная матрица, $j=1,2,\dots,r_1$.

Затем в § 6 этой главы строится по общему формальному решению фундаментальная матрица решений системы /29/. Тогда в случае действительного r мы доказываем, что соответственно каждому формальному вектору - решению системы /29/ существует истинное решение, которое имеет это формальное решение своим асимптотическим разложением. Об этом свидетельствует теорема.

Теорема 7. Пусть $\bar{\varphi}_i = p_i \mu^{\rho_i} e^{q_{i(m)}}$ -произвольный вектор-столбец формальной матрицы решений

$$\bar{\Phi} = P \mu^{-s_1 \Lambda_N} e^{\int -s_1 \mu^{-[s_1(r+1)+1]} \Lambda(\mu)\, d\mu} \qquad /43/$$

системы /29/, тогда существует для всех достаточно малых μ истинный вектор - решение φ_i этой системы, такой, что оценка

$$|\varphi_i(\mu) - \bar{\varphi}_{(m)i}(\mu)| = O(\mu^{m+\operatorname{Re}\rho_i-(s_1-1)s_1(r+1)} e^{\operatorname{Re} q_{i(m)}(\mu)}), \qquad /44/$$
$\mu \to 0$,

имеет место для всех $m=0,1,2,\dots$. В частности, $\varphi_i \sim \bar{\varphi}_i$.

В §§ 8-11 исследуется система /29/ при $r=\frac{m}{n}$ -дробном т.е. исследуется система дробного ранга. В случае простых корней характеристического уравнения построена формальная матрица решений

$$\bar{\Phi}(r) = U(\mu) \exp\left(\int -n\mu^{-n-m-1} \Lambda(\mu)\, d\mu\right), \qquad /45/$$

где $U(\mu)$ и $\Lambda(\mu)$ -квадратные матрицы с разложениями по степеням μ , причем $\Lambda(\mu)$ - диагональная матрица, $\mu = \sqrt[k]{\frac{1}{\varepsilon}}$

Асимптотический характер полученных формальных решений можно показать методом § 7.

В § 9 исследуется система дробного ранга в случае, когда характеристическое уравнение /30/ имеет кратный корень $\lambda^{(o)}$ и ему соответствует один кратный элементарный делитель $[\lambda-\lambda^{(o)}]^{l}$. Построение частных решений существенно зависит от соотношений между p, m и n . § 11 содержит результаты для систем дробного ранга в случае, когда кратному корню соответствуют несколько кратных элементарных делителей.

В § 10 система дробного ранга расщепляется на подсистемы более низкого порядка, что подтверждает следующая теорема

Теорема 8. Пусть собственные значения матрицы $A^{(o)}$ разделяются на две группы $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ и $\lambda_{k+1}, \ldots, \lambda_p$, причем $\lambda_i \neq \lambda_j$, если $i \leq k; j > k$. Тогда существует формальный степенной ряд

$$\sum_{s=0}^{\infty} P^{(s)} \mu^{s}, \qquad /46/$$

где $\det P^{(o)} \neq 0$, такой, что формальная замена переменных

$$w = \left(\sum_{s=0}^{\infty} P^{(s)} \mu^{s}\right) V \qquad /47/$$

переводит дифференциальное уравнение /29/ при $\varepsilon = \frac{m}{n}$ в формальное дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{n} \mu^{n+m+1} \frac{dV}{d\mu} = B(\mu) V, \qquad /48/$$

где все $B^{(s)}$ - имеют блочно-диагональный вид

$$B^{(s)} = \begin{bmatrix} B_{11}^{(s)} & 0 \\ 0 & B_{22}^{(s)} \end{bmatrix} . \qquad /49/$$

Методом В.Вазова можно доказать асимптотический характер формального расщепления.

Результаты диссертации докладывались на семенаре по дифференциальным уравнениям при КГУ им.Т.Г.Шевченко и на отчетных конференциях профессорско-преподавательского состава КГПИ имени А.М.Горького и опубликованы в работах:

I. М.І.Шкіль і В.К.Григоренко - Про формальні розв"язки системи лінійних диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою, ДАН УРСР, серія А, I, 1972.

2. М.І.Шкіль, В.К.Григоренко - Асимптотичний розв"язок системи лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними у випадку кратних елементарних дільників, УМЖ, т.24, № 2, 1972.

3. М.І.Шкіль, В.К.Григоренко - Про формальні розв"язки системи лінійних диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою, Вісник КДУ, серія мат. та мех., № 15, 1973.

4. М.І.Шкіль, В.К.Григоренко - Про загальний формальний розв"язок системи лінійних диференціальних рівнянь з іррегулярною особливою точкою, ДАН, УРСР, серія А, № 5, 1972.

5. В.К.Григоренко - Про формальний розв"язок системи диференціальних рівнянь дробового рангу з іррегулярною особливою точкою, ДАН УРСР, серія А, № 7, 1972.

БФ 19298. 8.УI-1972 г.
Объем I п.л. формат 60 х 84 I/I6 .
Тираж 200 экз.
Зак..3201...

Киевская книжная типография № 5, Киев, Репина,4.