МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ им. А. М. ГОРЬКОГО

И. П. ГАЛЕТОВ

Обоснование теории действительных чисел в курсе теоретической арифметики педагогических институтов

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата педагогических наук

Киев — 1955

51
Гал

137 (группа) 1/6

1. Исторические решения XIX съезда Коммунистической партии Советского Союза полностью определили дальнейшее развитие народного образования в нашей стране. Повсеместно наблюдается невиданный рост сети средних школ и числа старших классов в них. Достаточно указать, что число учащихся VIII—X классов в 1954 году увеличилось по сравнению с 1950 годом на 4 млн. 111 тыс. человек, а выпуск из десятых классов в 1954 году увеличился по сравнению с 1953 годом на 76 процентов *. Разрабатываются действенные мероприятия, направленные к осуществлению политехнического обучения в средней школе.

Такое небывалое развитие среднего образования в нашей стране требует значительного пополнения многочисленной армии учителей новыми высококвалифицированными специалистами, подготовка которых соответствовала бы современным требованиям советской школы. В связи с этим перед педагогической наукой стоит ответственная и актуальная задача: обеспечить высокий уровень общенаучной и специальной подготовки учителей, в том числе и учителей математики, которые в свою очередь могли бы вести преподавание своего предмета на должном научном и методическом уровне. Повышение научного и методического уровня школьного преподавания является основной задачей профессионально-педагогической направленности в деле подготовки учительских кадров. Необходимо, чтобы на протяжении своей учебы в педагогическом институте будущим учителям было дано глубокое и детальное освещение на вполне современном научном уровне наиболее важных в идейном и трудных в научно-методическом отношении вопросов программы средней школы. К таким вопросам следует прежде всего отнести понятие действительного числа.

2. С идеей обоснования теории действительных чисел студент-математик педагогического института встречается несколько раз: в общем курсе математического анализа, в курсе теории функций действительного переменного, в курсе теории чисел и теоретической арифметики **. «Множество действительных чисел» — первая тема, с которой студент первого курса начинает изучать математический анализ. Однако время, отводимое учебным планом, и педагогические соображения не позволяют развить эту тему в обстоятельное построение теории действительных чисел. Логические

* См. «Об итогах выполнения государственного плана развития народного хозяйства СССР в 1954 году», газета «Правда» от 21 января 1955 года.

** По учебному плану, действовавшему до начала 1954—1955 учебного года, теория действительных чисел изучалась в специальном курсе элементарной математики. Теоретической арифметики, как отдельной дисциплины, в старом учебном плане не было.

трудности, связанные с таким построением, могут подорвать веру вчерашнего абитуриента в свои силы и повлиять на его интерес к дальнейшему изучению математических наук в институте. Это тем более вероятно, что от него требуют осилить абстрактную в своей основной концепции теорию Дедекинда. Поэтому мы считаем, что при наличии курса теоретической арифметики (раньше — соответствующий раздел специального курса элементарной математики) в курсе математического анализа достаточно ограничиться детальным выяснением необходимости построения теории действительных чисел и формулировкой общего определения действительного числа, показав на нескольких примерах сущность такого определения. Теорему о непрерывности множества всех действительных чисел, которая лежит в основе доказательств теорем существования (например, граней ограниченного множества, предела монотонной и ограниченной последовательности), можно сформулировать без приведения доказательства, ссылаясь на то, что обстоятельное построение теории действительных чисел будет осуществлено в другом курсе.

По новому учебному плану (утвержденному Министерством высшего образования 8 июня 1954 г.) построение теории действительных чисел осуществляется в курсе теоретической арифметики на III курсе, что делает детальное изложение этой теории в курсе теории функций действительного переменного, который изучается на том же курсе, излишним параллелизмом.

Каким должно быть построение теории действительных чисел в курсе теоретической арифметики? Какую из известных теорий действительных чисел, или, быть может, какую модификацию этих теорий положить в основу? Исходя из задач профессионально-педагогической направленности, курс теоретической арифметики в педагогических институтах должен служить не только общенаучной, но в значительной мере и научно-методической базой, на основе которой будущий учитель сможет должным образом построить преподавание иррациональных чисел в средней школе. Реферируемая диссертация и ставит своей задачей построение соответствующего раздела курса теоретической арифметики в педагогических институтах.

3. Диссертация состоит из введения (стр. 3—10) и трех разделов:

Раздел I. Методологическая критика преподавания иррациональных чисел в средней школе (стр. 11—31).

§ 1. Анализ наиболее типичных ошибок (стр. 11—18).

§ 2. Десятичные дроби как действительные числа (стр. 18—25).

В разделе III дано последовательное и детальное развитие теории действительных чисел в том виде (за исключением некоторых деталей § 9), как она неоднократно излагалась мною в лекциях по специальному курсу элементарной математики в течение трех последних лет в Мелитопольском государственном педагогическом институте. Основные определения развиваемой в разделе III теории действительных чисел принадлежат чл.-корр. АН УССР Е. Я. Ремезу*. Практика преподавания показала, что обоснование теории действительных чисел по способу проф. Е. Я. Ремеза в предлагаемой нами разработке вполне доступна для глубокого и критического усвоения студентами 2-го семестра первого курса. Перенесение излагаемого материала в курс теоретической арифметики, который читается на III курсе, еще в большей мере будет

* См. Е. **Я. Ремез,** Системи наближень і основи теорії ірраціональних чисел, наукові записки Київського держ. пед. ін-ту ім. О. М. Горького, т. II, фіз.-мат. збірник, Київ, 1939, стор. 5—16. Эта статья проф. Е. Я. Ремеза напечатана также в книге: Питання методики викладання математики в середній школі, Алгебра, збірник статей. Упоряд. В. А. Зморович, М. Б. Гельфанд, «Радянська школа», Київ, 1951, стор. 144—153. См. также Е. Я. Рамез, Вступ до математичного аналізу, «Радянська школа», Київ, 1952, стор. 11—22, 107—110.

способствовать прочному усвоению предлагаемой нами разработки теории действительных чисел.

Список литературы состоит из 91 названия использованных (различного рода ссылки, цитирование) источников.

I *.

Представляется естественным, прежде чем говорить о построении теории действительных чисел в педагогическом институте, остановиться на некоторых вопросах школьного преподавания этих чисел.

§ 1 **. Общепризнано, что систематическое развитие какой бы то ни было **теории** действительных чисел находится пока еще за пределами возможностей средней школы. Вместе с тем, многие вопросы школьного курса элементарной математики требуют введения понятия иррационального числа уже в восьмом классе. Поэтому учитель должен сообщить ученикам известный минимум сведений, относящихся к идее иррациональных чисел, и, прежде всего, дать четкое и в то же время доступное их возрасту **определение иррационального числа.** Практика показывает, что именно эта часть школьного преподавания иррациональных чисел чаще всего изобилует логическими неувязками, порочными суждениями, которые порой остаются незамеченными самими учителями.

Нередко в школе дается определение положительного иррационального числа как длины отрезка, несоизмеримого с отрезком, длина которого принята равной единице. Нетрудно видеть, что такое определение содержит в себе порочный круг: **длина произвольного отрезка** это, прежде всего, **число,** а числа-то такого в известной нам рациональной числовой области еще нет. В теории измерения, которая базируется на арифметике действительных чисел и системе аксиом геометрии, доказывается, что каждому отрезку, при произвольно выбранной единице длины, можно поставить в однозначное соответствие положительное действительное число. Эта теорема имеет точный смысл только при наличии арифметического определения иррационального числа. Принятие этой теоремы в качестве аксиомы до введения арифметического определения иррационального числа положения не меняет. Привлечение геометрического материала должно показать, что задача при заданной единице масштаба выразить числом длину любого отрезка в об-

* Цифры I, II и III соответствуют номерам разделов диссертации.

** Нумерация параграфов соответствует их нумерации в рукописи диссертации.

ласти рациональных чисел не разрешима, и это в глазах учащихся должно служить основным стимулом необходимости расширения имеющейся числовой области.

В школьной практике и нередко в методической литературе с целью введения числа новой природы, которого нет среди чисел рациональных, например, числа, квадрат которого равен двум,— строят две последовательности рациональных чисел:

$$1;\quad 1{,}4;\quad 1{,}41;\quad 1{,}414;\quad \ldots \qquad (\text{а})$$
$$2;\quad 1{,}5;\quad 1{,}42;\quad 1{,}415;\quad \ldots \qquad (\text{в})$$

квадраты членов которых:

$$1;\quad 1{,}96;\quad 1{,}9881;\quad 1{,}999396;\quad \ldots \qquad (\text{а}')$$
$$4;\quad 2{,}25;\quad 2{,}0164;\quad 2{,}002225;\quad \ldots \qquad (\text{в}')$$

дают как угодно точные приближения 2, соответственно с недостатком (а′) и с избытком (в′). Из этого делают заключение, что члены последовательности (а) и (в) дают приближения с любой степенью точности «$\sqrt{2}$» соответственно с недостатком и с избытком. Но такое заключение (á posteriori справедливое), сделанное до того, как «$\sqrt{2}$» определен, введен, лишено логической состоятельности. Необходимо сперва определить, ввести новый для нас объект, в данном случае «$\sqrt{2}$», и лишь после этого можно говорить о приближении к этому, уже определенному, а следовательно, существующему объекту.

В школьной практике преподавания математики имеется тенденция формулировать определение иррационального числа как предел последовательности рациональных чисел. Если иррациональное число **впервые** вводится, как предел последовательности рациональных чисел $\{a_n\}$, то это означает, что последовательность $\{a_n\}$ не имеет рационального предела, но тогда мы не можем говорить о пределе такой последовательности, так как этот предел есть число, которого нет в известной нам числовой области.—Налицо порочный круг.

Иногда встречается еще такое „введение" понятия иррационального числа. Ученикам показывают, что число, квадрат которого равен двум, не может быть числом рациональным. После этого объявляется, что, в отличие от чисел рациональных, число, квадрат которого равен двум, называется иррациональным и обозначается знаком $\sqrt{2}$. Далее ученикам говорят, что числа, обозначаемые через $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{5}$, π и т. д., также называются иррациональными, и все они выражаются бесконечными непериодическими десятичными дробями. Последнее иллюстрируется на примере извлечения квадратного корня из двух. Логическая ошибка подобного введения понятия иррационального числа состоит в том, что наименование или обозначение числа, например, квадрат которого равен двум, не может служить его определением. Обозначение символами $\sqrt{2}$, π и др. относятся к числам новой природы, которых нет среди чисел нам известных, а потому пока мы эти числа не создали на основе четкого определения, любое обозначение, равно как и наименование не имеют точного смысла и не могут решить проблемы введения чисел новой природы.

Отмеченные выше дефекты, которыми отнюдь не исчерпываются все логические неувязки, встречающиеся в практике школьного преподавания иррациональных чисел, выявляют все еще недостаточную научно-методологическую подготовку многих учителей математики в вопросах истории и теоретического обоснования учения о действительных числах и в основных вопросах, связанных с идеей действительного числа: приближенные вычисления, предел, мера и т. д.

§ 2. Аппарат десятичных дробей дает наиболее естественный, непосредственно примыкающий к идее измерения величин алгорифм для выражения приближенных значений иррациональных чисел. Однако определение действительного числа как бесконечной десятичной дроби, не будучи отнюдь ошибочным, все же не является ни наиболее общим, ни логически совершенным.

Во-первых, досятичные дроби ничем логически существенным не отличаются от двоичных, троичных или других систематических дробей, а общее определение иррационального числа не должно зависеть от такого логически несущественного элемента, как выбор конкретного основания, будь то число 10 или какое иное.

Во-вторых, имея бесконечные непериодические десятичные дроби в качестве первичного определения иррациональных чисел, мы не можем дать определения арифметических операций, являющихся обобщением соответствующих определений в поле рациональных чисел, с сохранением всех основных свойств этих операций без того, чтобы не прибегнуть к понятию более общему, чем понятие бесконечной десятичной дроби. К таким понятиям относятся, например, последовательность стягивающихся рациональных сегментов, сходящиеся последовательности и др. Всё это делает детальное изложение теории действительных чисел, определённых как бесконечные десятичные дроби, громоздким и усложненным. Недостаточная общность аппарата десятичных дробей выявляет также их неудобство при трактовании многих основных понятий математического анализа, который, как правило, базируется на более общей теории действительных чисел.

Таким образом, несмотря на неоспоримо большую практическую значимость десятичных дробей, последние в вопросе логического обоснования теории действительных чисел следует рассматривать лишь как конкретную, практически очень важную интерпретацию поля действительных чисел. Это должно быть известно учителю средней школы.

§ 3. Приближеные вычисления в школьном преподавании имеют большое педагогическое значение. Они не только придают школьной математике жизненный характер, но и приучают учащихся к самоконтролю в вычислительных процессах, поскольку это связано с оценкой ожидаемого результата, содействуют развитию функционального мышления, так как точность результатов действий зависит от точности компонентов, от характера производимых действий. Но что ещё важно — без приближённых вычислений нельзя правильно построить методику преподавания таких серьёзных разделов школьной программы, как иррациональные числа, пределы, логарифмы.

Необходимость согласовать школьное преподавание иррациональных чисел с приближенными вычислениями особенно выявляется, когда дело доходит до определения арифметических операций. Если учащиеся знакомы с элементарными сведениями из области приближённых вычислений и умеют, следовательно, оперировать с приближёнными числами, то и определения арифметических действий над действительными числами — бесконечными десятичными дробями предстанут перед ними понятными и естественными, так как *правила действий над (рациональными) приближениями иррациональных чисел ничем не отличаются от соответствующих правил действий над приближениями рациональных чисел.*

В заключение раздела I отмечается, что правильная научно-методическая постановка преподавания иррациональных чисел в средней школе должна удовлетворять следующим основным требованиям:

1) преподавание иррациональных чисел должно быть доступным математической зрелости учащихся, соответствовать

их возрасту и психическим особенностям. Это означает, что преподавание иррациональных чисел должно быть проведено наглядно, с использованием геометрического материала;

2) преподавание иррациональных чисел должно быть свободно от ошибочных положений. Это требование вовсе не означает, что преподавание иррациональных чисел в средней школе должно быть проведено с педантичной строгостью. Некоторые предложения можно сформулировать без их общего доказательства, если последние ученикам недоступны. Важно, однако, чтобы среди допускаемых по необходимости упрощений не было таких, которые могут привести к ошибочным положениям и тем самым способствовать созданию у учащихся ложных представлений об иррациональных числах;

3) преподавание иррациональных чисел должно вестись в тесной связи с приближёнными вычислениями. Это требование означает, что методика преподавания иррациональных чисел в средней школе должна базироваться на практике приближённых вычислений, что в свою очередь должно обеспечить сознательное, не формальное усвоение понятия об иррациональных числах и действий над ними;

4) преподавание должно содержать некоторый минимум исторических сведений, освещающих с позиций диалектического материализма развитие идеи иррационального числа. Это будет иметь большое общеобразовательное и воспитательное значения и будет способствовать более прочному усвоению всего этого трудного раздела школьной программы.

II.

§ 1. Проведённый в разделе I диссертации критический анализ преподавания действительных чисел в практике средней школы позволяет судить, насколько высокой должна быть общематематическая культура и профессионально-педагогическая подготовка учителя, чтобы обеспечить должное преподавание этого раздела школьной программы. Вместе с тем этот анализ позволяет сформулировать те основные требования, которым должно удовлетворять построение теории действительных чисел в курсе теоретической арифметики:

1) построение теории действительных чисел в курсе теоретической арифметики должно быть *детальным и логически безупречным*, в духе современного научного обоснования. Учитель, не владеющий вполне современным обоснованием теории действительных чисел, не сможет препода-

вать на должном научном уровне, а это приводит к тому, что у учащихся создаются поверхностные, зачастую неправильные представления о действительных числах и арифметических операциях над ними;

2) построение теории действительных чисел в курсе теоретической арифметики должно лучшим образом освещать школьное преподавание. Это значит, что и определение действительного числа и развитие самой теории (сравнение действительных чисел, определение и свойства арифметических операций и т. д.) должны быть такими, чтобы соответствующие вопросы школьного преподавания действительных чисел нашли свое правильное и непосредственное решение;

3) построение теории действительных чисел в курсе теоретической арифметики должно быть элементарным как в смысле простоты своей основной концепции, так и в своём детальном построении. Это значит, что основная концепция теории, с помощью которой конструируется понятие действительного (иррационального) числа, и всё развитие теории должно базироваться на возможно более простых понятиях школьного курса элементарной математики.

Если требованию 1) удовлетворяет, вообще говоря, любая из известных строгих теорий, то требования 2) и 3) налагают определенные условия на способ обоснования теории действительных чисел и на методику её изложения.

§ 2. Наиболее известные теории действительных чисел Дедекинда, Мере-Кантора, Вейерштрасса не удовлетворяют второму и третьему из сформулированных выше требований. Логически простейшая из них Дедекинда абстрактна в своей основной концепции о сечении в множестве рациональных чисел. Ближе к курсу средней школы теория Мере-Кантора, построенная на понятии фундаментальной последовательности, частным случаем которой является последовательность десятичных приближений любой бесконечной десятичной дроби, и теория Вейерштрасса, построенная на понятии агрегата, частным случаем которого является любая бесконечная десятичная дробь. Но эти теории далеко не элементарны. Например, теория Мере-Кантора предполагает знакомство с критерием сходимости Больцано-Коши. Кроме того, эти теории не дают практически удобного алгорифма для производства операций над действительными числами. Еще менее алгорифмична теория Дедекинда.

Что же касается известных педагогических модификаций вейерштрассовой теории, в которых действительное число определяется как бесконечная десятичная дробь, то, как это показано в разделе I, такое определение не обладает достаточной общностью, что особенно выявляется в ряде трудностей при установлении основных операций над действительными числами. Более последовательное изложение теории действительных чисел, как бесконечных десятичных дробей, весьма сложно. Необходимость показать однозначность и выполнимость свойств арифметических операций требует введения понятия более общего, чем понятие бесконечной десятичной дроби, и доказательства ряда вспомогательных теорем, относящихся больше к математическому анализу, нежели к арифметике как таковой.

Понятие последовательности стягивающихся рациональных сегментов ведет к известной бахмановой модификации теории Кантора, к так называемой теории двойных монотонных последовательностей рациональных чисел, которую — при соответствующей дидактической обработке — часто считают наиболее пригодной для целей школьного изложения. Однако эта теория по сути представляет собой лишь один частный случай более общей и, вместе с тем, более элементарной и удобной в применениях теории действительных чисел, предложенной чл.-корр. АН УССР проф. Е. Я. Ремезом, которую мы и считаем наиболее приемлемой в смысле высказанных выше требований.

Теория действительных чисел проф. Е. Я. Ремеза, построенная на концепции системы совместных приближений с произвольно малой амплитудой или, короче, определяющей системы приближений, не уступает в строгости известным теориям Дедекинда, Мере-Кантора, Вейерштрасса и имеет вместе с тем ряд существенных дидактических и методологических преимуществ.

В о - п е р в ы х, эта теория элементарна как в смысле простоты своей основной концепции, так и в своем детальном построении, для осуществления которого достаточно начальных сведений из приближённых вычислений, не идущих дальше умения сознательно производить арифметические операции над приближёнными числами хотя бы по методу границ.

В о - в т о р ы х, построение теории действительных чисел по способу проф. Е. Я. Ремеза самым последовательным образом базируется на практике приближённых вычислений и измерений, что придает всей теории вполне е с т е с т в е н н ы й и я р к о в ы р а ж е н н ы й а р и ф м е т и ч е с к и й х а р а к т е р. Например, все арифметические операции над действительными числами в этой теории являются непосредственным обобщением соответствующих правил, выработанных в практике приближённых вычислений по методу границ.

В-третьих, теория действительных чисел проф. Е. Я. Ремеза подлинно *алгорифмична*. Это достигается благодаря тому, что и действительное число и арифметические операции определены в соответствии с правилами приближённых вычислений, а *правила действий над (рациональными) приближениями иррациональных чисел ничем не отличаются от соответствующих правил действий над приближениями рациональных чисел*. При этом осуществляется непосредственная связь с употребляемыми в вычислительной практике систематическими десятичными дробями. Последние представляют собой лишь условную запись практически очень важного случая системы совместных приближений, которые наверняка являются определяющими; известные правила оперирования с приближениями десятичных дробей прекрасно сочетаются с определениями арифметических операций в рассматриваемой теории.

В-четвертых, теория действительных чисел проф. Е. Я. Ремеза, в силу большой общности своей основной концепции—определяющей системы приближений,—позволяет самым *естественным образом трактовать основные понятия математического анализа*. Многочисленные виды предельных переходов, понятие меры, интеграла с большой простотой укладываются в логическую схему системы совместных приближений.

Перечисленные особенности теории действительных чисел проф. Е. Я. Ремеза: связь с практикой приближённых вычислений, алгорифмичность, подлинный арифметический характер в сочетании с большой общностью своей основной концепции следует рассматривать не только как дидактические преимущества, но и как несомненные преимущества методологического характера. Элементарность и непосредственная связь этой теории с практикой приближённых вычислений и с систематическими десятичными дробями позволяют лучшим образом редуцировать её для целей школьного преподавания. Все отмеченные качества теории действительных чисел проф. Е. Я. Ремеза отчетливо выявляются уже при ближайшем ознакомлении с самой сутью теории, детальное построение которой дается в третьем разделе диссертации.

§ 3. Студент педагогического института, будущий учитель, нуждается в анализе принципиальных вопросов преподносимой ему теории, тем более, если эти вопросы имеют первостепенное значение и для школьного преподавания. Обсуждение и анализ принципиальных вопросов теории действительных чисел будет будить интерес и творческую мысль студента, будет способствовать сознательному и глубокому усвоению фактического материала, будет способствовать выработке правильных методологических взглядов. Соблюдая разумную меру, такой анализ ни в коем случае не будет затенять фактический материал, а напротив, поможет вскрыть содержательную сторону излагаемой теории, её связи с практикой и с другими математическими науками. Такой подход к построению теории действительных чисел осуществлен нами в разделе III, при изложении фактического материала теории.

Современное обоснование теории действительных чисел строится чисто арифметическим путем и формально свободно от всяких ссылок на факты геометрического характера. Однако с методической точки зрения вряд ли целесообразно подавлять у студентов наглядные геометрические представления, связанные с процессом построения теории действительных чисел. К тому же такой подход не оправдывается и научным генезисом рассматриваемого понятия. Но в то же время важно, чтобы студент всё время имел в виду, что привлечение геометрических рассуждений при построении арифметической теории действительных чисел имеет предварительный, наводящий или поясняющий характер, что это иллюстрация, призванная помочь лучше уяснить суть факта с арифметическим содержанием или лучше понять строгое, т. е. арифметическое доказательство. Такое изложение соответствует профессионально-педагогическим интересам будущих учителей, так как в школьном преподавании действительных чисел привлечение геометрического материала надо признать крайне желательным. Заметим, что основные положения теории действительных чисел проф. Е. Я. Ремеза чрезвычайно просто иллюстрировать графически.

Что же касается истории развития идеи иррационального числа, то она до того важна и поучительна, что ей надо уделить особое внимание и наряду с теоретическим обоснованием фактического материала следует дать историко-генетический обзор отдельных, наиболее существенных стадий развития учения об иррациональных числах. При этом необходимо указать на исследования наших отечественных и советских учёных в этой области.

III.

§§ 1—2. Изложению теории действительных чисел предпосылаются некоторые сведения из геометрии прямой (§ 1) и изучение свойств множества рациональных чисел (§ 2), считая арифметику последних известной. Изложение материала этих параграфов в деталях несколько отличается от общепринятого, при этом уделено значительное внимание методологическому анализу рассматриваемых вопросов.

§ 3. Пусть дано произвольное рациональное число x. Всегда можно указать любое число пар рациональных чисел a и A таких, что $a \leqslant x \leqslant A$, откуда следует, что $a \leqslant A$. Систему таких пар рациональных чисел a и A будем называть системой приближений числа x. Если среди пар рациональных чисел a и A, образующих систему приближений числа x, найдется хотя бы одна пара (одно приближение) a' и A' такая, что

$$A' - a' < \varepsilon, \tag{1}$$

~~где~~ причём ε — любое рациональное положительное число, то такая система приближений может быть отнесена только к одному рациональному числу x. Из этого следует, что каждое рациональное число вполне определяется заданием соответствующей для него системой приближений, которая удовлетворяет условию (1). Такую систему приближений можно, следовательно, рассматривать в качестве эквивалента соответствующего рационального числа. Мы можем также утверждать, что любая система приближений рационального числа x, удовлетворяющая условию (1), вполне определяет положение соответствующей рациональной точки на прямой.

В связи с этим возникает вопрос, нельзя ли положение иррациональных точек на прямой определить с помощью подобных систем приближений, состоящих из пар известных нам рациональных чисел, и тем самым каждой иррациональной точке отнести какую-то числовую характеристику?

Ответ на поставленный вопрос следует дать положительный, но для этого необходимо введенное выше понятие о системе приближений сформулировать без ориентации на какое-либо заданное число x. Такой переход крайне необходим, поскольку введенное ранее понятие о системе приближений исходило из неравенства $a \leqslant x \leqslant A$, которые (до введения иррациональных чисел) имеют смысл, если x — число рациональное. Что касается возможности такого перехода, то он обеспечивается условиями: $a \leqslant A$ и $A - a < \varepsilon$, в которых число x не участвует. При этом, конечно, для любых двух пар приближений $<a', A'>$ и $<a'', A''>$ рассматриваемой системы, должны выполняться условия $a' \leqslant A''$ и $a'' \leqslant A'$.

Приведённые рассуждения имеют предварительный характер: цель их — лишь приближённо наметить основную линию образования понятия иррационального числа с помощью чисел рациональных. Далее эти предварительные соображения приводятся в систему определений.

Определение 4*. Всякую пару рациональных чисел a и A, удовлетворяющих условию $a \leqslant A$, будем называть *приближением* и обозначать символом $<a, A>$ **. Числа a и A называются соответственно *нижней* и *верхней границами*, разность $A - a$ — *амплитудой* рассматриваемого приближения.

Наименование „приближение" находит свое оправдание в соображениях, высказанных выше, и в дальнейшем развитии теории.

Определение 5. Два приближения $<a', A'>$ и $<a'', A''>$ называются *совместными*, если нижняя граница одного приближения не превышает верхней границы другого, т. е. если $a' \leqslant A''$ и $a'' \leqslant A'$. В противном случае, т. е. если $A' < a''$ или $A'' < a'$, то рассматриваемые два приближения называются *несовместными*.

В дальнейшем символ $<a, A>$, в котором числа a и A не фиксированы, будет обозначать наличие системы (конечной или бесконечной) приближений.

Определение 6. Будем говорить, что $<a, A>$ есть *система совместных приближений с как угодно малой амплитудой*, если выполняются следующие два условия:

а) любые два приближения $<a', A'>$ и $<a'', A''>$, входящие в систему, являются совместными, т. е. $a' \leqslant A''$ и $a'' \leqslant A'$;

б) для всякого $\varepsilon > 0$ в системе найдется по крайней мере одно приближение $<a', A'>$, амплитуда которого меньше ε: $A' - a' < \varepsilon$.

Система совместных приближений с как угодно малой амплитудой может состоять из конечного или бесконечного числа приближений (в первом случае система содержит приближение $<a', A'>$ такое, что $a' = A'$), может быть упорядоченной или неупорядоченной.

---

* Нумерация определений и теорем в автореферате соответствует их нумурации в рукописи диссертации.

** Обозначение $<a, A>$ принадлежит проф. Е. Я. Ремезу.

§ 4. Среди всевозможных систем совместных приближений $\langle a, A \rangle$ с как угодно малой амплитудой имеются системы, к которым можно отнести некоторое рациональное число r, удовлетворяющее системе неравенств $a \leqslant r \leqslant A$ (такое число может быть только единственным), и такие системы, к которым в известной нам области рациональных чисел такого числа отнести нельзя. Пример такой системы приближений можно получить, пользуясь известным алгорифмом извлечения квадратного корня из 2:

$$\langle 1; 2 \rangle, \langle 1{,}4; 1{,}5 \rangle, \langle 1{,}41; 1{,}42 \rangle, \langle 1{,}414; 1{,}415 \rangle, \ldots \quad (2)$$

Это свидетельствует о том, что множество всех рациональных чисел свойством непрерывности не обладает (см. определение 18).

Определение 7. Каждый раз, когда система совместных приближений с как угодно малой амплитудой не определяет никакого рационального числа, мы будем говорить, что эта система определяет собой некоторое иррациональное число.

Определение 8. Всякая система совместных приближений с как угодно малой амплитудой определяет некоторое действительное число.

Существование таких систем приближений для иррациональных чисел следует из определения 7. Для рационального числа r мы всегда, без ограничения общности, можем взять систему приближений, состоящую из одного приближения $\langle r, r \rangle$. В дальнейшем систему совместных приближений с как угодно малой амплитудой будем коротко называть определяющей системой приближений.

§ 5. **Определение 9.** Пусть даны два действительных числа α и β и пусть $\langle a, A \rangle$ и $\langle b, B \rangle$ — соответствующие им определяющие системы приближений. Будем говорить, что $\alpha = \beta$, если каждое приближение числа α совместно с каждым приближением числа β, т. е. если все приближения в обеих системах удовлетворяют условию $a \leqslant B$ и $b \leqslant A$.

В противном случае будем считать, что $\alpha \neq \beta$.

Теорема 3. Равенство двух действительных чисел (определение 9) удовлетворяет требованиям рефлексивности, симметрии и транзитивности.

Называя эквивалентными две определяющие системы приближений, удовлетворяющие определению 9 (т. е. соответствующие одному и тому же действительному числу), мы данное выше определение действительного числа можем сформулировать следующим образом:

Определение 8а. Любая совокупность (класс) всех определяющих и эквивалентных между собой систем приближений определяет некоторое действительное число.

Определение 10. Два действительные числа α и β находятся в соотношении $\alpha < \beta$ $(\beta > \alpha)$, если определяющие их системы приближений $< a, A >$ и $< b, B >$ содержат хотя бы по одному приближению $< a', A' >$ и $< b', B' >$ такому, что $A' < b'$.

Определение 10 позволяет разбить все действительные числа на положительные и отрицательные, т. е. большие нуля и меньшие нуля. При этом полагаем, что число нуль определяется системой приближений, состоящей из одного приближения $< 0, 0 >$.

Определение 11. Действительное число $\alpha > 0$ $(\alpha < 0)$, если определяющая система приближений этого числа $< a, A >$ содержит по крайней мере одно приближение $< a', A' >$ такое, что $a' > 0$ $(A' < 0)$.

Далее, в терминах развиваемой нами теории, доказывается, что для любых двух действительных чисел α и β имеет место одно и только одно из трёх соотношений: $\alpha = \beta$, $\alpha < \beta$, $\alpha > \beta$ (теорема 4) и что соотношение больше (меньше) транзитивно (теорема 5). Это даёт основание утверждать, что множество всех действительных чисел есть множество упорядоченное (теорема 6).

После установления смысла соотношений „$\leqslant$" доказывается важная для дальнейшего изложения теорема:

Теорема 7. Если $<a, A>$—определяющая система приближений действительного числа α, то α удовлетворяет всем неравенствам

$$a \leqslant \alpha \leqslant A \tag{3}$$

(Очевидно, что равенство возможно лишь в случае рационального α).

Заметим, что в общем случае будет неправильным вместо неравенств (3) рассматривать неравенства вида $a < \alpha < A$ в качестве общего инструмента для определения действительных чисел. Такой системе неравенств может, вообще говоря, не удовлетворять никакое действительное число, как это видно из простого примера:

$$0 < \alpha < \frac{1}{n} \ (n=1,\ 2,\ 3,..).$$

§ 6. Определения арифметических операций над действительными числами являются, по идее проф. Е. Я. Ремеза, непосредственным обобщением соответствующих операций над приближениями рациональных чисел. В основе этой идеи лежит тот естественный факт, что правила действий над (рациональными) приближениями иррациональных чисел ничем не отличаются от соответствующих правил действий над приближениями рациональных чисел.

Определение 12. Пусть α и β—два действительных числа и $<a, A>$, $<b, B>$ — соответствующие им определяющие системы приближений.

Суммой $\alpha+\beta$ чисел α и β назовём число γ, имеющее своими приближениями числа $a+b$ и $A+B$:

$$a+b \leqslant \gamma \leqslant A+B \tag{4}$$

Показывается, что система приближений $<a+b, A+B>$ является определяющей, откуда следует существование и единственность числа γ. Доказывается (теорема 8), что введённая посредством определения 12 операция сложения действительных чисел коммутативна, ассоциативна, монотонна и что число нуль сохраняет свое особое свойство.

Определение 13. Если $<a, A>$ — определяющая система приближений числа α, то число, определяемое системой $<-A, -a>$, будем называть симметричным числу α и обозначать через $-\alpha$. Показывается (теорема 9), что $\alpha+(-\alpha)=0$.

Определение 14. Пусть α и β—два действительных числа и $<a, A>$, $<b, B>$ — соответствующие им определяющие системы приближений.

Разностью $\alpha-\beta$ чисел α и β назовём число γ, имеющее своими приближениями числа $a-B$ и $A-b$:

$$a-B \leqslant \gamma \leqslant A-b \tag{5}$$

Теорема 10. Для любых двух действительных чисел α и β имеет место $\alpha \lesseqgtr \beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha-\beta \lesseqgtr 0$.

Определениям операций умножения и деления предпосылаются две леммы, устанавливающие, что среди всех определяющих и эквивалентных между собой систем приближений любого действительного числа α имеются такие, у которых все числовые значения границ a и A ограничены (лемма 1) и если $\alpha \neq 0$, то числа a и A имеют одинаковый знак с α (лемма 2).

Определение 15. Пусть α и β—два положительных действительных числа и $<a, A>$, $<b, B>$ — соответствующие им определяющие системы приближений.

Произведением $\alpha \cdot \beta$ двух чисел α и β назовём число γ, имеющее своими приближениями числа ab и AB:

$$ab \leqslant \gamma \leqslant AB \tag{6}$$

Показывается, что система приближений $<ab, AB>$ является определяющей. Расширение определения умножения на случай произвольной пары действительных чисел (не обязательно положительных) выполняется с помощью аналогичных соглашений, как и для рациональных чисел. Доказывается (теорема 11), что введённая посредством определения 15 операция умножения коммутативна, ассоциативна, монотонна, что $\alpha \cdot 1=\alpha$ и что умножение дистрибутивно относительно сложения.

Определение 16. Если $<a, A>$ — определяющая система приближений числа $\alpha>0$, то число, определяемое системой $<\frac{1}{A}, \frac{1}{a}>$, будем называть обратным числу α и обозначать $\frac{1}{\alpha}$. Если $\alpha<0$, то полагаем $\frac{1}{\alpha}=-\frac{1}{|\alpha|}$.

При этом для всякого действительного числа $\alpha \neq 0$ выполняется условие $\alpha \cdot \frac{1}{\alpha}=1$ (теорема 12);

Определение 17. Пусть α и β — два положительных действительных числа и $<a, A>$, $<b, B>$ — соответствующие им определяющие системы приближений. Частным $\frac{\alpha}{\beta}$ чисел α и β назовём число γ, имеющее своими приближениями числа $\frac{a}{B}$ и $\frac{A}{b}$:

$$\frac{a}{B} \leqslant \gamma \leqslant \frac{A}{b}, \tag{7}$$

Теорема 13. Если определяющие системы приближений $<a, A>$ и $<b, B>$ соответственно эквивалентны определяющим системам приближений $<c, C>$ и $<d, D>$, то будут соответственно эквивалентны и системы приближений $<a+b, A+B>$ и $<c+d, C+D>$; $<a-B, A-b>$ и $<c-D, C-d>$; $<ab, AB>$ и $<cd, CD>$; $<\frac{a}{B}, \frac{A}{b}>$ и $<\frac{c}{D}, \frac{C}{d}>$.

Обращаем внимание, что формулы (4), (5), (6) и (7) совершенно аналогичны правилам нахождения суммы, разности, произведения и частного, выработанным в практике приближённых вычислений по способу границ. Система неравенства (3) очень близко напоминает определение результата измерения или вычисления в практике приближённых вычислений по способу границ. Система приближений (2) свидетельствует, что систематические десятичные дроби представляют собой не что иное, как условную запись системы совместных приближений, которые обязательно являются определяющими.

Укажем еще на одну интересную связь, которая существует между определёнными выше арифметическими операциями и практикой приближённых вычислений. Пусть действительные числа α и β заданы соответственно определяющими системами приближений $< a, A >$ и $< b, B >$. Обозначим амплитуды приближений этих систем соответственно через $\Delta\alpha$ и Δb: $A - a = \Delta a$ и $B - b = \Delta b$. Тогда амплитуды определяющих систем приближений для суммы, разности, произведения и частного чисел α и β имеют такие же выражения, как и соответствующие формулы абсолютных погрешностей в приближённых вычислениях:

$$(A + B) - (a + b) = (A - a) + (B - b) = \Delta a + \Delta b;$$

$$(A - b) - (a - B) = (A - a) + (B - b) = \Delta a + \Delta b;$$

$$AB - ab = AB - Ab + Ab - ab = A(B - b) + b(A - a) =$$
$$= A\Delta b + b\Delta a;$$

$$\frac{A}{b} - \frac{a}{B} = \frac{AB - ab}{bB} = \frac{A\Delta b + b\Delta a}{bB}$$

§ 7. В этом параграфе показывается выполнение аксиомы Архимеда (теорема 14); что между двумя любыми действительными числами имеется бесконечное множество как рациональных, так и иррациональных чисел (теорема 15); что область действительных чисел обладает свойством непрерывности (теорема 16). Доказательство последней теоремы основывается на следующем определении непрерывности (в смысле Кантора) числовой области:

Определение 18. Упорядоченная и плотная в себе числовая область Q называется *непрерывной*, если для всякой определяющей системы приближений $< a, A >$, составленной из пар элементов a и A области Q, существует элемент x, *принадлежащий этой области* и удовлетворяющий всем неравенствам $a \leqslant x \leqslant A$.

Таким образом, построенная нами область действительных чисел обладает свойством упорядоченности (§ 5); в ней однозначно определены и однозначно обратимы операции сложения и умножения, которые коммутативны, ассоциативны, а умножение дистрибутивно относительно сложения (§ 6); справедливы аксиома Архимеда и свойство непрерывности (§ 7). Все это даёт основание считать, что построенная нами область действительных чисел является непрерывным, коммутативным, архимедовски расположенным полем (теорема 17).

§ 8. В этом параграфе освещается вопрос логической правомерности использования геометрических представлений при построении математического анализа и доказывается (теорема 18) соответствие подобия между множеством действительных чисел и множеством точек прямой. Этим заканчивается построение теории действительных чисел по способу проф. Е. Я. Ремеза.

Заметим, что проф. Е. Я. Ремез не ставил своей задачей развернутого и детализированного построения предложенной им теории. Им сформулированы основные определения, намечена общая идея развития теории, сформулированы и доказаны некоторые теоремы. В нашем тексте это будут теоремы 3, 5, 16, частично теоремы 4, 11. Наши доказательства этих теорем, в целях методических, несколько модифицированы. Остальные теоремы сформулированы и доказаны автором диссертации, Им же сформулированы некоторые определения (например, определения 11, 13, 16, 18), необходимые для полноты развития рассматриваемой теории действительных чисел.

§ 9. Мы сочли необходимым в работе, посвященной обстоятельному изложению теории действительных чисел в педагогическом институте, уделить соответствующее внимание теоремам, характеризующим несчётность множества действительных чисел, мощность множества иррациональных чисел, а также теоремам, устанавливающим существование и мощность множества трансцендентных чисел. Доказательства этих теорем изложены более доступными и элементарными средствами и этим отличаются от соответствующих доказательств, встречающихся в известной нам литературе.

Добавление имеет целью показать, что теория действительных чисел проф. Е. Я. Ремеза, — в силу большой общности и гибкости своей основной концепции, определяющей системы приближений, — позволяет самым естественным образом трактовать основные понятия математического анализа (и следовательно соответствующие понятия школьного курса элементарной математики). Это иллюстрируется трактовкой следующих вопросов: представление действительных чисел бесконечными дробями, измерение отрезков, длина окружности: мера плоских фигур, интеграл Коши-Римана, степень с иррациональным показателем, доказательство критерия сходимости Больцано-Коши. Первым трём вопросам уделено внимание и в основном тексте диссертации.

БФ 10622 30.6.55 Тип. КГПИ, Франко, 44. Зак. 461—100