МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. А.М.ГОРЬКОГО

На правах рукописи

Б.В.Василишин

О РЕШЕНИИ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ БОЛЬШОМ КОЛИЧЕСТВЕ УЗЛОВ СЕТКИ

/008 - дифференциальные и интегральные уравнения/

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев - 1968

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. А.М.ГОРЬКОГО

На правах рукописи

Б.В.Василишин

О РЕШЕНИИ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ БОЛЬШОМ КОЛИЧЕСТВЕ УЗЛОВ СЕТКИ

/003 - дифференциальные и интегральные уравнения/

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев - 1968

Работа выполнена на кафедре математики Киевского государственного педагогического института им.А.М.Горького.

Научный руководитель - член-корреспондент АН УССР, доктор физико-математических наук, профессор Г.Н.Положий

Официальные оппоненты:

1. Доктор технических наук М.И.Длугач.
2. Кандидат физико-математических наук Е.М.Приходько.

Ведущее предприятие - Институт кибернетики АН УССР

Автореферат разослан "   "..................1968 г.

Защита состоится "   "................1968 г. на заседании Совета физико-математического факультета Киевского государственного педагогического института им.А.М.Горького /г.Киев, ул.Бульвар Шевченко 22/24, ауд. 231   /.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Ученый секретарь Совета

Плоские задачи теории упругости являются предметом исследований многих математиков и механиков [1]. Это объясняется важностью подобных задач и серьезными математическими трудностями, которые возникают при их решении. Только ограниченный круг плоских задач может быть решен в замкнутом виде, в рядах или квадратурах [1]. Поэтому естественно, что в применении к решению плоских задач теории упругости разработка приближенных методов приобретает большое значение. В частности, для решения плоских задач теории упругости широкое развитие получил метод конечных разностей [6] - [8].

Однако при большом количестве узлов сетки, соответствующие конечноразностные краевые задачи /или, что все равно, системы линейных алгебраических уравнений/, к которым приводит указанный метод, становятся очень громоздкими и их решение с доведением результатов до числа затруднительно даже при использовании современной вычислительной техники.

Поэтому весьма актуальной является проблема разработки всякого рода специализированных методов решения краевых задач математической физики в их дискретной постановке при большом количестве узлов сетки. Одним из таких методов есть метод суммарных представлений, предложенный Г.Н. Положим [2].

Общие принципы метода суммарных представлений наиболее полно изложены в работах [3], [4]. Мы же только отметим, что характерным для этого метода является "выборочный счет" по формулам суммарных представлений, которые иногда дают решение конечноразностных краевых задач в явном виде, но, как правило, содержат сравнительно небольшое число параметров, подлежащих определению из той или иной системы линейных алгебраических уравнений сравнительно невысокого порядка.

Обратим внимание на то, что при использовании этого метода для решения задач математической физики в дискретной постановке в отличие от метода конечных разностей часто, приступая к решению той или иной задачи, можно не знать соответствующей системы линейных алгебраических уравнений, можно даже не указывать заранее дискретного множества точек, на котором ищется решение, и только на последнем этапе находить точки, в которых нас может интересовать численное решение задач и вычислять эти числовые значения по указанным выше формулам суммарных представлений.

Настоящая работа посвящена развитию метода суммарных представлений в применении к численному решению плоских задач теории упругости.

При большом числе узлов равномерной прямоугольной сетки рассматриваются задачи о плоском напряженном состоянии прямоугольной пластины при всевозможных краевых условиях и в частности при смешанных условиях, когда на части границы прямоугольника заданы смещения, а на другой части - усилия. При этом каждая из сторон не обязательно полностью должна относиться к одной и той же из указанных двух частей.

Показывается, что решение подобного рода задач сводится к численному решению вполне определенных систем линейных алгебраических уравнений сравнительно невысокого порядка, равного числу предконтурных узлов одной из сторон прямоугольника / а не числу внутренних узлов сетки прямоугольника, что соответствует общему методу конечных разностей/.

Приведены численные примеры /при числе внутренних узлов прямоугольника равном 741 /, выполненные на ЭЦВМ "Минск-2" с использованием алгоритмического языка автокод "Инженер".

Объем вычислительной работы и вычислительная погрешность при этом оказались сравнительно малыми.

Работа состоит из введения, трех глав и приложения.

Первая глава носит в основном вспомогательный характер. В § I приводятся необходимые для дальнейшего сведения о плоских задачах теории упругости /1/.

В § 2 изложены основы метода суммарных представлений /2/-/4/. Выводится основная формула суммарных представлений для решения конечноразностной задачи

$$\Delta_h V = f(x,y), \qquad /1/$$

$$V_{|L} = V(S) \qquad /2/$$

в сеточном прямоугольнике /количество внутренних узлов равно $m \times n$ /. Эта формула имеет вид

$$\vec{V}(x_i) = S(m+1-i)\vec{V}(x_0) + S(i)\vec{V}(x_{m+1}) - \sum_{j=1}^{m}[S'(i,m+1-j) - S''(i-j)][h^2\vec{f}(x_j) - \gamma^2\vec{W}(x_j)] \qquad /3/$$

$$(i=0,1,\dots m+1),$$

где $\Delta_h V$ – конечноразностный оператор Лапласа, построенный по пяти точкам прямоугольной равномерной сетки

$$x_i = x_0 + ih \quad (i=0,1,\dots,m+1), \quad y_k = y_0 + kh_1 \quad (k=0,1,\dots,n+1), \quad \gamma = \frac{h}{h_1},$$

$\vec{V}(x_i)$, $\vec{f}(x_i)$, $\vec{W}(x_i)$ – n – мерные векторы

$$\vec{V}(x_i) = \{V_1(x_i), V_2(x_i), \dots, V_n(x_i)\}, \quad V_k(x_i) = V(x_i, y_k),$$

$$\vec{f}(x_i) = \{f_1(x_i), f_2(x_i), \dots, f_n(x_i)\}, \quad f_k(x_i) = f(x_i, y_k),$$

$$\vec{W}(x_i) = \{V_0(x_i), 0, \dots, 0, V_{n+1}(x_i)\},$$

$$S(i) = P\,G(i)\,G^{-1}(m+1)P,$$

$$S'(i, m+1-j) = P\,G(i)\,G(m+1-j)\,G^{-1}(m+1)\,P\,,$$

$$S''(i-j) = P\,G(i-j)\,P\,,$$

$G(i)$, μ, ν - диагональные матрицы n -го порядка,

$G(i) = (\mu^i - \nu^i)(\mu - \nu)^{-1}$ при $i > 0$ и $G(i) = 0$ при $i \leq 0$

$$\mu = [\mu_k]_{k=1}^{n}\,, \quad \nu = [\nu_k]_{k=1}^{n}$$

$$\mu_k = \eta_k + \sqrt{\eta_k^2 - 1}\,, \quad \nu_k = \eta_k - \sqrt{\eta_k^2 - 1}\,,$$

$$\eta_k = 1 + (1 - \cos\frac{k\pi}{n+1})\gamma^2\,, \quad (k = 1, 2, \dots, n)\,,$$

P - квадратная матрица n -го порядка

$$P = \sqrt{\frac{2}{n+1}}\left[\sin i\frac{k\pi}{n+1}\right]_{i,k=1}^{n}$$

Формула /3/ дает точное решение конечноразностной краевой задачи /1/, /2/ в сеточном прямоугольнике.

В § 3 приводится решение методом суммарных представлений краевой задачи /1/, /2/ для области, составленной из двух прямоугольников, и для областей, ограниченных произвольными криволинейными контурами.

Во второй главе дано развитие метода суммарных представлений в применении к численному решению плоских задач теории упругости в смещениях при большом количестве узлов сетки.

В § 1 рассматривается плоская задача теории упругости в смещениях для прямоугольника в дискретной постановке.

Представляя бигармоническую функцию U в виде $U = 2xp + \psi$, где p и ψ - гармонические функции от x и y, для общего решения уравнений плоской теории упругости в смещениях [1]

$$2\mu(u + iv) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right) + (k+1)\varphi(z)\,, \quad \varphi(z) = p + ip_1$$

получаем выражение [5]

$$2\mu(u+iv) = -\frac{\partial}{\partial x}(2xp+q)+2(k+1)p - i\frac{\partial}{\partial y}(2xp+q) \;. \qquad /4/$$

где p и q – произвольные гармонические функции

$$p=\frac{\partial P}{\partial x}\,, \quad p_1=-\frac{\partial P}{\partial y}\,, \quad q=\psi+(k+1)P$$

Формула /4/ показывает, что компоненты вектора смещений могут быть найдены в любой точке области, если будут известны две гармонические функции p и q .

Гармонические функции p и q дискретного аргумента представляются при помощи формул суммарных представлений /3/. Тогда бигармоническая функция $2xp+q$ дискретного аргумента запишется в виде формулы

$$2x_i\vec{p}(x_i)+\vec{q}(x_i) = S(m+1-i)[2x_i\vec{p}(x_0)+\vec{q}(x_0)]+S(i)[2x_i\vec{p}(x_{m+1})+\vec{q}(x_{m+1})]+$$

$$+\gamma^2\sum[S'(i,m+1-j)-S''(i-j)][2x_i\vec{\omega}(x_j)+\vec{\omega}^*(x_j)] \qquad /5/$$

$$(i=0,1,\dots,m+1),$$

где $\vec{\omega}(x_j)$ и $\vec{\omega}^*(x_j)$ n – мерные векторы

$$\vec{\omega}(x_j)=\{p_0(x_j),0,\dots,0,p_{n+1}(x_j)\},$$

$$\vec{\omega}^*(x_j)=\{q_0(x_j),0,\dots,0,q_{n+1}(x_j)\}$$

На формулу /5/ следует смотреть, как на формулу суммарных представлений для бигармонического уравнения в частных производных. Характерным является то, что при этом алгебраические уравнения, соответствующие дискретной постановке бигармонической задачи, то есть уравнения, которым удовлетворяет бигармоническая функция, как функция дискретного аргумента, можно в явном виде не выписывать и даже можно не знать.

Обратим внимание на то, что представление бигармонической функции в виде линейной комбинации гармонических функций есть результат анализа бесконечно малых. Использование этого результата в "анализе конечно малых" свидетельствует о том, что метод суммарных представлений, как аппарат "анализа конечно малых", не отвергает аппарата дифференциального и интегрального исчисления, а наоборот, предполагает его использование в тех случаях, когда он может оказаться полезным.

Примем значения функции $P(x,y)$ в узлах на горизонтальных сторонах и значения функции $p(x,y)$ в узлах на вертикальных сторонах границы прямоугольника в качестве параметров. Значения функций $p(x,y)$ и $q(x,y)$ /а следовательно и функции $2xp+q$ / во внутренних точках прямоугольника будут выражаться через эти $2(m+n)$ числовые параметры.

Используя краевые условия, для определения указанных $2(m+n)$ параметров, получаем систему линейных алгебраических уравнений такого же порядка, которая может быть сведена к следующей системе $2m$ уравнений

$$
\begin{aligned}
&2(k+1)P_0(x_i) - 2\gamma^2\sum_{j=1}^{m} b_{ij}P_0(x_j) - 2\gamma^2\sum_{j=1}^{m} a_{ij}P_{n+1}(x_j) = d_1(x_i) \\
&-2(k+1)P_{n+1}(x_i) + 2\gamma^2\sum_{j=1}^{m} a_{ij}P_0(x_j) + 2\gamma^2\sum_{j=1}^{m} b_{ij}P_{n+1}(x_j) = d_n(x_i)
\end{aligned}
\qquad /6/
$$

$$(i=1,2,\dots,m)$$

где a_{ij}, b_{ij}, $d_1(x_i)$, $d_n(x_i)$ - известные величины.

Полагая $\alpha_i = P_0(x_i) - P_{n+1}(x_i)$, $\beta_i = P_0(x_i) + P_{n+1}(x_i)$, получаем

$$2(k+1)\alpha_i + 2\gamma^2\sum_{j=1}^{m}[a_{ij} - b_{ij}]\alpha_j = d_1(x_i) + d_n(x_i) \qquad /7/$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m) ;$$

$$2(k+1)\beta_i - 2\gamma^2\sum_{j=1}^{m}[a_{ij} + b_{ij}]\beta_j = d_1(x_i) - d_n(x_i) \qquad /8/$$

$$(i = 1, 2, \ldots, m)$$

Следовательно, система $2m$ линейных алгебраических уравнений /6/ распадается на две независимые системы /7/, /8/ с m неизвестных в каждой.

Решая системы уравнений и подставляя результаты вычислений в формулу суммарных представлений /5/ в соответствии с формулой /4/, получаем явные формулы /§ 2/ для вектора смещений во внутренних узлах прямоугольника. Выполняя по этим формулам расчеты, находим численные значения всех элементов напряженного состояния.

В третьей главе дано развитие метода суммарных представлений в применении к численному решению различных смешанных задач плоской теории упругости при большом количестве узлов сетки.

Представляя бигармоническую функцию Эри в виде $U = 2x\varphi + \psi$, где φ и ψ – гармонические функции от x и y, для тензора напряжений плоской теории упругости имеем [1]

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}$$

или [5]

$$\sigma_x = 4p - \frac{\partial}{\partial x}(2xp+q),\ \sigma_y = \frac{\partial}{\partial x}(2xp+q),\ \tau_{xy} = -\frac{\partial}{\partial y}(2xp+q), \qquad /9/$$

где p и q – произвольные гармонические функции от x и y

$$p = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad q = 2\varphi + \frac{\partial\psi}{\partial x}$$

Используя представление /9/ и выражая компоненты вектора смещений через эти же функции p и q ,сводим задачи и в этом случае к определению двух функций, гармонических в области $\mathfrak{D}$.

Представляя гармонические функции p и q дискретного аргумента при помощи формул суммарных представлений, получаем в явном виде решение смешанных задач плоской теории упругости для прямоугольника при различных краевых условиях:

а/ для случая, когда на вертикальных сторонах прямоугольника заданы смещения, а на горизонтальных сторонах – усилия / §1/;

б/ для случая, когда на вертикальных сторонах прямоугольника заданы усилия, а на горизонтальных сторонах – смещения/ § 2/;

в/ для случая, когда на трех сторонах прямоугольника заданы усилия, а на одной – смещения / § 3/;

г/ для общего случая смешанных краевых условий, когда на одной части стороны прямоугольника заданы усилия, а на другой части – смещения /§ 4, § 5/.При этом такая сторона может быть не одна, а несколько.

Из полученных решений в виде формул суммарных представлений, но с исключенными неопределенными параметрами,выводятся все элементы напряженного состояния. Численные значения параметров определяются в результате численного решения систем линейных алгебраических уравнений сравнительно невысокого порядка, равного числу предконтурных узлов одной из сторон прямоугольника.

Таким образом, в случае многих задач плоской теории упругости получается сравнительно малый объем вычислительной работы, необходимый для получения решения, достигается некоторая возможность избежать большую вычислительную погрешность. Практические возможности получения вполне удовлетворительных численных решений задач плоской теории упругости, особенно при достаточно мелких шагах сетки, сильно расширяются.

Следует отметить, что вычисление ряда величин для различных краевых задач производится по однотипным формулам. Это обстоятельство создает определенное преимущество при решении плоских задач теории упругости с использованием ЭЦВМ.

В приложении рассматривается конкретная задача плоской теории упругости /задача в смещениях/ с доведением результата до числа при сравнительно большом количестве внутренних узлов сетки прямоугольника равном 741. При этом системы линейных алгебраических уравнений, подлежащих непосредственно численному решению, оказались 19-го порядка.

Приведен алгоритм решения задачи на языке автокод"Инженер". Этот алгоритм был реализован при рассмотрении численного примера на ЭЦВМ "Минск-2".

Основные результаты работы освещены в статьях [9]-[11] и докладывались на Республиканском семинаре по вычислительной математике при Научном Совете по кибернетике АН УССР /Киевский государственный университет/, на Третьей республиканской конференции молодых математиков Украины /апрель 1966 г./, на научной конференции профессорско-преподавательского состава Киевского государственного педагогического института им.А.М.Горького /февраль 1966 г./.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н.И.Мусхелишвили, Некоторые основные задачи математической теории упругости, Изд-во "Наука", М., 1966.

2. Г.Н. Положий, Численное решение двумерных и трехмерных краевых задач математической физики и функции дискретного аргумента, Изд-во Киевского университета, 1962.

3. G.N.Polozhii, The Method of Summary Representation for Numerical Solution of Problems of Mathematical Physics; Pergamon Press, Oxford, London, Edinburg, New York, Paris, Frankfurt, 1965.

4. G.N.Polosci, Numerische Losung von Randwertproblemen der mathematischen Physik und Funktionen diskreten Arguments, B.G.Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1966.

5. Г.Н. Положий, О краевых задачах осесимметричной теории упругости. Метод p -аналитических функций комплексного переменного, УМЖ, т.XУ, № I, 1963.

6. П.М.Варвак, Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок, ч.I, Изд-во АН УССР, К., 1949.

7. П.М.Варвак, Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок, ч.2, Изд-во АН УССР, К., 1952.

8. М.И.Длугач, Метод сеток в смешанной плоской задаче теории упругости, Изд-во "Наукова думка", К., 1964.

9. Б.В. Василишин, Решение основной плоской задачи теории упругости при заданных на контуре смещениях методом суммарных представлений, Межведомственный научный сборник "Вычислительная и прикладная математика", Изд-во Киевского университета, вып.3, 1967.

IO. Б.В.Василишин, Применение метода суммарных представлений к решению смешанной плоской задачи теории упругости, Межведомственный научный сборник "Вычислительная и прикладная математика", Изд-во Киевского университета, вып.4, I967.

II. Б.В. Василишин, Розв"язування другої основної плоскої задачі теорії пружності при великій кількості вузлів сітки, Матеріали Третьої наукової конференції молодих математиків України, Київ, I966.

БФ-24662. Подписано к печати 3.04.68
Заказ № 160/76. Тираж 150.
Учебно-производственный комбинат УСХА