МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

Киевский государственный педагогический институт
им. А.М. Горького

На правах рукописи

АЛЕКСЕЕВА Эмилия Сергеевна

НЕПРИМАРНО ФАКТОРИЗУЕМЫЕ ГРУППЫ

01.01.03. Алгебра и теория чисел

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев - 1973

М И Н И С Т Е Р С Т В О   П Р О С В Е Щ Е Н И Я   У С С Р

Киевский государственный педагогический институт
им. А.М.Горького

На правах рукописи

Алексеева Эмилия Сергеевна

НЕПРИМАРНО ФАКТОРИЗУЕМЫЕ ГРУППЫ

01.01.03. Алгебра и теория чисел.

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев - 1973

Работа выполнена на кафедре алгебры и геометрии
Киевского государственного педагогического института
имени А.М.Горького

Научный руководитель — член-корреспондент АН УССР, доктор физико-математических наук, профессор С.Н.Черников

Официальные оппоненты: доктор физико-математических наук Ю.М.Горчаков; кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник И.Д.Иванюта

Ведущее предприятие — Кишиневский государственный университет.

Автореферат разослан "___" ___________ 197__ г.

Защита диссертации состоится "___" ___________ 197__ г.
в ______ часов на заседании Ученого совета физико-математического факультета Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького /ауд. 446/.

Отзывы просим присылать по адресу: г. Киев, 30, ул. Пирогова, 9.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ СОВЕТА

Одно из основных направлений в теории групп определяется исследованиями групп с теми или иными свойствами /ограничениями/ для подгрупп. Налагая на все подгруппы той или иной системы /определяющей системы/ подгрупп произвольной группы то или иное ограничение /определяющее ограничение/, можно получать самые разнообразные классы групп. Одним из первых классов, выделенных этим способом, был класс гамильтоновых групп - класс неабелевых групп, все подгруппы которых инварианты. Конечные гамильтоновы группы были описаны Дедекиндом еще в конце прошлого столетия, бесконечные гамильтоновы группы были описаны много позднее Бэром. О.Ю.Шмидт, обобщая гамильтоновы группы, описал конечные группы с одним и с двумя классами неинвариантных подгрупп. Этот вопрос получил развитие в исследованиях групп с условием инвариантности для той или иной системы подгрупп. Так, С.Н.Черников изучал бесконечные неабелевы группы, все бесконечные подгруппы которых инвариантны, бесконечные неабелевы группы, все бесконечные абелевы подгруппы которых инвариантны и др.

В начале XX века Миллер и Морено изучали конечные неабелевы группы, все истинные подгруппы которых абелевы. Детальное описание таких групп было получено много позднее Реден. В 1924 г. О.Ю.Шмидт, ослабив определяющее ограничение Миллера и Морено, описал конечные ненильпотентные группы, все истинные подгруппы которых нильпотентны. Эта работа О.Ю.Шмидта явилась источником многочисленных теоретико-групповых исследований как в Советском Союзе, так и за границей.

Большую роль в современной теории групп играют классы групп, для которых определяющей системой подгрупп является совокупность всех конечно порожденных подгрупп. Если в качестве определяющего ограничения для таких подгрупп берется условие разрешимости или нильпотентности подгрупп, то получается соответственно класс локально разрешимых или класс локально нильпотентных групп. Эти два класса групп были выделены в 1939-1940 годах в связи с изучением С.Н.Черниковым бесконечных групп с условием минимальности для подгрупп.

Важное место в рассматриваемом направлении занимают исследования групп с особого рода ограничением для подгрупп – с условием дополняемости. Подгруппа A группы G называется дополняемой в G, если в G существует такая подгруппа B, что выполняются условия:

$$G = AB, \quad A \cap B = 1.$$

Конечные группы, в которых дополняемы все подгруппы, изучались в 30-х годах Ф.Холлом. Полное описание как конечных, так и бесконечных групп, в которых дополняемы все подгруппы /вполне факторизуемые группы/ было получено в 50-х годах Н.В.Черниковой.

В 1953 г. появилась работа С.Н.Черникова "Группы с системами дополняемых подгрупп", в которой ставится общая задача изучения групп путем выделения в них той или иной системы дополняемых подгрупп. В этой работе С.Н.Черников изучает, в частности, абелевы группы, в которых дополняемы все сервантные подгруппы, локально конечные группы с условием дополняемости для абелевых подгрупп, а также некоторые виды групп с условием дополняемости для нормальных делителей.

Вскоре после появления указанной работы С.Н.Черникова группы с системами дополняемых подгрупп заняли видное место в исследованиях советских алгебраистов, а несколько позднее – и зарубежных. Были выделены и полностью описаны некоторые новые классы групп. При этом появились различные обобщения как самого понятия дополняемости подгрупп, так и способа выделения системы дополняемых подгрупп.

Начатое С.Н.Черниковым изучение групп с системой дополняемых нормальных делителей продолжалось в работах С.Н.Черникова, Д.И.Зайцева, И.Курцио, М.Эмальди, Ф.Наполитани и др. С.Н.Черников изучал также бесконечные группы, в которых дополняемы все бесконечные подгруппы, и бесконечные группы, в которых дополняемы все силовские подгруппы. В работах О.Н.Зуб изучались группы, в которых дополняемы все нециклические подгруппы. В работах Л.М.Кляцкой и Д.И.Зайцева изучались абелевы группы, в которых дополняемы все максимальные подгруппы фиксированного ранга r, а также некоторые обобщения таких групп.

В последние годы исследования групп с системами дополняемых подгрупп распространяются и на топологические группы /В.С.Чарин, Т.М.Лозбень и др./.

В работах Ю.М.Горчакова описаны так называемые примарно факторизуемые группы - группы, в которых дополняемы все их p - подгруппы по любому простому числу p, а также и обобщение таких групп - примитивно факторизуемые группы /т.е. группы, в которых дополняемы все циклические подгруппы простых порядков/.

В связи с изучением Ю.М.Горчаковым примарно факторизуемых групп естественно возникла двойственная задача - изучить группы /непримарные/, в которых дополняемы все непримарные подгруппы - непримарно факторизуемые группы. Эта задача была предложена автору С.Н.Черниковым. Ее решению и посвящена настоящая диссертация.

Диссертация состоит из введения, раздела "Предварительные сведения и обозначения" и двух глав. Охарактеризуем содержание диссертации.

Приведем некоторые обозначения, используемые ниже.

$A \cap B$ - пересечение множеств A и B.

$A \times B$ - прямое произведение подгрупп A и B.

$A \leftthreetimes B$ - полупрямое произведение инвариантной подгруппы A на подгруппу B.

$\{a\}$ - циклическая подгруппа, порожденная элементом a.

$|a|$ - порядок элемента a.

$\pi(N)$ - множество всех простых чисел, делящих порядок элементов группы N.

H - допустимая подгруппа - подгруппа, инвариантная относительно подгрупп H.

q - допустимая подгруппа - подгруппа, инвариантная относительно хотя бы одного элемента порядка q.

В первой главе диссертации изучаются конечные непримарно факторизуемые группы /будем их называть короче нпф - группами/. В первом параграфе первой главы приводятся простейшие свойства конечных нпф - групп. Прежде всего устанавливается соотношение между классом нпф - групп и классом вполне факторизуемых групп. Понятно, что всякая вполне факторизуемая непримарная группа является нпф - группой. Однако, не всякая нпф - группа вполне факторизуема. Например, симметрическая группа S_4 является нпф - группой и, очевидно, не вполне факторизуема. В леммах I.3 и I.4 диссертации даются некоторые условия, при которых конечная нпф - группа вполне факторизуема. Так как вполне факторизуемые группы детально изучены, то мы изучаем только те нпф - группы, которые не являются вполне факторизуемыми. В первом параграфе отмечается, что абелевы и нильпотентные нпф - группы вполне факторизуемы, и потому изучению подлежат ненильпотентные группы. Следующий вопрос, который решается в этом параграфе, - существуют ли неразрешимые нпф - группы. Ответ на этот вопрос оказался отрицательным: любая конечная нпф - группа разрешима. Как известно, всякая вполне факторизуемая группа не более чем двуступенно разрешима. Из описания конечных нпф - групп, полученного в диссертации, следует, что они не более чем трехступенно разрешимы. В первом параграфе указывается также, что класс конечных нпф - групп замкнут относительно взятия подгрупп и фактор-групп, и отмечаются некоторые другие свойства конечных нпф - групп.

Во втором параграфе продолжается изучение свойств конечных нпф - групп. Здесь доказаны, в частности, следующие три леммы, которые используются в теореме I.I диссертации для описания конечных нпф - групп определенного вида.

Лемма I /лемма I.6 диссертации/.

Пусть $G = F \leftthreetimes H$ – группа Фробениуса с инвариантным множителем F и дополнительным множителем H. Тогда, если подгруппа H вполне факторизуема, то она циклическая.

Лемма 2 /лемма I.7 диссертации/.

Пусть нпф – группа $G = F \leftthreetimes \{a\}$ является группой Фробениуса, причем ее инвариантный множитель F есть элементарная абелева p -подгруппа, а дополнительный множитель $\{a\}$ – циклическая вполне факторизуемая подгруппа порядка $q_1 q_2 \dots q_s$ / $q_1, q_2, \dots, q_s$ – различные простые числа, отличные от p /. Тогда наименьшее натуральное число α_i, удовлетворяющее сравнению

$$p^{\alpha_i} \equiv 1 \pmod{q_i},$$

не зависит от i /обозначим его через α /, и любая минимальная q_i – допустимая подгруппа группы F имеет порядок p^{α}.

Лемма 3 /лемма I.8 диссертации/.

Пусть группа G имеет разложение

$$G = F \leftthreetimes (\{x\} \leftthreetimes \{y\}),$$

где F – элементарная абелева силовская p – подгруппа, являющаяся минимальной инвариантной подгруппой в G, $F \leftthreetimes \{x\}$ – вполне факторизуемая неабелева подгруппа, и централизатор $C_{\{y\}}(x)$ элемента x в подгруппе $\{y\}$ равен I; пусть $|x| = q$ – простое число, и $|y| = n$. Тогда существует разложение

$$F = \{a_1\} \times \dots \times \{a_n\},$$

где подгруппы $\{a_i\}$ инвариантны относительно элемента x, и

$$y^{-1} a_1 y = a_2, \; y^{-1} a_2 y = a_3, \dots, y^{-1} a_n y = a_1.$$

В заключение второго параграфа устанавливается, что центр конечной нпф – группы G является элементарной абелевой p – подгруппой и выделяется в G прямым множителем /лемма I.9 диссертации и следствие из нее/. Это позволяет свести описание конечных нпф - групп к случаю нпф - групп с тривиальным центром.

В третьем параграфе первой главы излагается основной результат диссертации - теорема I.I, описывающая строение конечных не вполне факторизуемых нпф - групп с тривиальным центром.

Теорема I /теорема I.I диссертации/.

Всякая конечная не вполне факторизуемая нпф - группа с тривиальным центром может быть представлена в виде полупрямого произведения

$$G = F \leftthreetimes H, \qquad (*)$$

где F - элементарная абелева p - подгруппа, а H - группа одного из следующих трех типов.

I. $H=\{a\}$ - циклическая вполне факторизуемая группа и

$$|a| = q_1 q_2 \dots q_s, \quad q_i \neq 2 \ (i=1,\dots,s).$$

2. $H=\{b\}\leftthreetimes\{c\}$ - неабелева группа порядка qr /q и r - различные простые числа, отличные от p/, где

$$b^q = 1, \quad c^r = 1$$

и

$$c^{-1}bc = b^\beta, \quad \beta^r \equiv 1 \ (mod\ q).$$

3. $H=\{a\}\leftthreetimes\{d\}$ - группа Фробениуса с инвариантным множителем $\{a\}$ и дополнительным множителем $\{d\}$ порядка p. При этом подгруппы F и H в разложении $(*)$ связаны следующим образом.

1/ Если $H=\{a\}$ - группа типа I, то группа $G=F\leftthreetimes\{a\}$ является группой Фробениуса, и любая минимальная q_i - допустимая $(i=1,\dots,s)$ подгруппа группы F имеет один и тот же порядок /указанный в лемме 2/.

2/ Если $H=\{b\}\leftthreetimes\{c\}$ - группа типа 2, и $F=F_1'\times\dots\times F_n'$ - разложение группы F в прямое произведение минимальных нормальных делителей F_i $(i=1,\dots,n)$ группы G, то подгруппа $F\leftthreetimes\{b\}$ группы

$$G = F \leftthreetimes (\{b\}\leftthreetimes\{c\})$$

является неабелевой вполне факторизуемой группой, а ее подгруппа F_i $(i=1,\dots,n)$ либо имеет простой порядок p /тогда подгруппа $F_i\leftthreetimes\{b\}$ абелева/, либо удовлетворяет следующим условиям.

а/ Ее можно представить в виде

$$F_i = \{a_{1i}\}\times\dots\times\{a_{ri}\},$$

где

$$a_{ji}^{p} = 1 \quad (j=1,\dots,r),$$

$$b^{-1}a_{ji}\,b = a_{ji}^{\alpha^{p^{(j-1)(r-1)}}} \qquad (j=1,\dots,r),$$

$$\alpha^{q} \equiv 1 \pmod{p}$$

и

$$c^{-1}a_{1i}\,c = a_{2i},\ \ c^{-1}a_{2i}\,c = a_{3i},\dots, c^{-1}a_{ri}\,c = a_{1i}$$

б/ Циклическая подгруппа $\{a_{1i}a_{2i}\dots a_{ri}\}$, порожденная элементом $a_{1i}a_{2i}\dots a_{ri}$ порядка p, является центром группы $F_i\leftthreetimes\{c\}$, а любая минимальная r - допустимая подгруппа группы F_i, не содержащаяся в подгруппе $\{a_{1i}a_{2i}\dots a_{ri}\}$, имеет порядок либо p, либо p^2.

3/ Если $H=\{a\}\leftthreetimes\{d\}$ - группа типа 3, то подгруппа $F\leftthreetimes\{a\}$ группы $G = F\leftthreetimes\{a\}\leftthreetimes\{d\}$ обладает свойствами, описанными в пункте I/.

Произвольную группу $G=F\leftthreetimes H$ с описанными здесь /в пунктах I/, 2/, 3/ / множителями будем называть соответственно группой типа I, 2/ или 3/.

Таким образом, ввиду теоремы I все нпф - группы находятся среди произвольных групп указанных в ней трех типов.

В следующей теореме /теорема 1.2 четвертого параграфа диссертации/ дается условие, которое выделяет нпф - группы из произвольных групп этих трех типов. Оно описывается следующим определением.

Определение. Подгруппа F имеет φ - свойство в группе

$$G = F \leftthreetimes H,$$

если для произвольной инвариантной в H подгруппы $H_1 \neq 1$ и H_1 - допустимой подгруппы F_1 группы F существуют разложения

$$F = F_1 F_2, \quad F_1 \cap F_2 = 1$$

и

$$H = H_1 H_2, \quad H_1 \cap H_2 = 1,$$

где F_2 является H_2 - допустимой подгруппой.

Теорема 2 /теорема 1.2 диссертации/.

Конечная группа $G = F \leftthreetimes H$ любого из трех типов 1/, 2/, 3/ тогда и только тогда является нпф - группой, когда ее подгруппа F обладает φ - свойством в G.

При доказательстве теоремы 2 используется следующая лемма, устанавливающая φ - свойство силовской p - подгруппы F нпф - группы $G = F \leftthreetimes H$ первого и второго типов.

Лемма 4 /лемма 1.5 диссертации/.

Пусть $G = F \leftthreetimes H$ - нпф - группа, и F - элементарная абелева силовская p- подгруппа группы G. Если $F_1 \neq 1$ - подгруппа группы F, инвариантная относительно некоторой подгруппы $H_1 \neq 1$ группы H, то одним из дополнений подгруппы $F_1 \leftthreetimes H_1$ в группе G служит подгруппа $F_2 \leftthreetimes H_2$, где

$$F_1 \times F_2 = F, \quad H_1 H_2 = H, \quad H_1 \cap H_2 = 1.$$

Во второй главе изучаются бесконечные нпф - группы. В первом параграфе отмечаются простейшие свойства бесконечных нпф -

групп, аналогичные свойствам конечных нпф - групп, и устанавливается периодичность бесконечных нпф - групп. Так же, как и для конечных нпф - групп, устанавливается, что класс бесконечных нпф - групп шире класса бесконечных вполне факторизуемых групп, причем бесконечные нильпотентные нпф - группы являются абелевыми вполне факторизуемыми. Следующая лемма дает признак полной факторизуемости произвольной нпф - группы, который применяется в теореме 2.I второго параграфа диссертации.

Лемма 5 /лемма 2.I диссертации/.

Если в некоторой нпф - группе G существуют два таких нетривиальных нормальных делителя N_1 и N_2, что $\pi(N_1)\cap\pi(N_2)=\emptyset$, то G - вполне факторизуемая группа.

Теорема 3 /теорема 2.I диссертации/.

Если бесконечная нпф -группа локально вполне факторизуема, то она вполне факторизуема.

При доказательстве этой теоремы используется установленная в первом параграфе периодичность нпф - групп, некоторые результаты Н.В.Черниковой о вполне факторизуемых группах, С.Н.Черникова о разрешимых периодических группах, Ю.М.Горчакова о примитивно факторизуемых группах и теорема Диксона об условиях дополняемости периодического нормального делителя группы G.

Теорема 3 дает возможность утверждать, что в локально конечной не вполне факторизуемой нпф - группе существует хотя бы одна конечная не вполне факторизуемая нпф - группа одного из описанных в теореме I типов, и тем самым свести описание локально конечных не вполне факторизуемых нпф - групп к изученным конечным нпф - группам.

Основным результатом второй главы является следующая теорема третьего параграфа, дающая описание строения локально конечных не вполне факторизуемых нпф - групп.

Теорема 4 /теорема 2.2 диссертации/. Бесконечная локально конечная не вполне факторизуемая группа G тогда и только тогда является нпф - группой, когда она может быть представлена в виде полупрямого произведения

$$G = (R_1 \times \dots \times R_\alpha \times \dots) \lambda H,$$

удовлетворяющего следующим условиям.

1/ $R_1 \times \dots \times R_\alpha \times \dots$ - элементарная абелева p - группа с инвариантными в G конечными прямыми множителями $R_1, R_2, \dots, R_\alpha, \dots$.

2/ Хотя бы одна из групп $R_\alpha \lambda H$ является не вполне факторизуемой нпф - группой.

3/ Все не вполне факторизуемые группы $R_\alpha \lambda H$ являются конечными нпф - группами одного и того же типа /см. т.1/.

При доказательстве теоремы 4 существенно используются теоремы I и 3, лемма 2.

Результаты диссертации докладывались на семинаре по теории групп Института математики АН УССР, на отчетно-научных конференциях профессорско-преподавательского состава Нежинского государственного педагогического института им. Н.В.Гоголя.

Основные результаты диссертации опубликованы в статьях:

I. Э.С.Алексеева, Конечные непримарно факторизуемые группы, сборник "Группы с системами дополняемых подгрупп", изд. Ин-та мат. АН УССР, отв.редактор член-корр. АН УССР С.Н.Черников, 1971 г., 147-179.

2. Э.С.Алексеева, Про скінченні нпф - групи, ДАН УРСР, серия А, 1972, № 12, 1059-1061.

БФ 19698. НДПІ. Лабораторія друку. Зам. 2133. Тираж 200. 28.08.73.