МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УКРАИНСКОЙ ССР
КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. А. М. ГОРЬКОГО

Г. Г. БАРАНОВСКАЯ

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬШОГО ПОРЯДКА АЛЬТЕРНИРУЮЩИМ МЕТОДОМ

(003—дифференциальные и интегральные уравнения)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических
наук

Киев — 1968

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УКРАИНСКОЙ ССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ИМЕНИ А.М.ГОРЬКОГО

Г.Г.БАРАНОВСКАЯ

На правах рукописи

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ БОЛЬШОГО ПОРЯДКА АЛЬТЕРНИРУЮЩИМ МЕТОДОМ

(003 - дифференциальные и интегральные уравнения)

А в т о р е ф е р а т
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев - 1968

Работа выполнена на кафедре математики Киевского Государственного педагогического института им. А.М.Горького.

Научный руководитель - доктор физико-математических наук В.Н.ОСТАПЕНКО.

Официальные оппоненты:
доктор физико-математических наук В.В.ИВАНОВ,
кандидат физико-математических наук Е.И.ФИЛИППОВИЧ.

Внешняя рецензия - Киевский государственный университет имени Т.Г.Шевченко.

Автореферат разослан "____"______________1968 г.

Защита состоится "_____"________________1968 г.

на заседании Учен совета Киевского государственного педагогического института имени А.М.Горького. (г.Киев-30, Бульвар Шевченко, 22/24).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Ученый секретарь Совета

К численному решению алгебраических и дифференциальных систем с большим числом неизвестных сводятся многие задачи прикладной математики, механики и физики, в частности конечноразностные методы решения краевых задач для уравнений в частных производных, особенно эллиптического типа, расчет обширного класса инженерных сооружений, так называемых стержневых систем, задачи анализа электрических и механических цепей, экономики, геодезии и многие другие.

Серьезным препятствием к решению указанных систем известными численными методами служит то, что программы, реализующие их, обычно требуют размещения всей матрицы коэффициентов и столбца свободных членов в оперативной памяти вычислительной машины. Тем самым сравнительно небольшой объем быстродействующей памяти ограничивает порядок решаемых систем.

Поэтому возникает необходимость в разработке методов численного решения систем уравнений с большим числом неизвестных, которые позволили бы наиболее рационально использовать как внутреннюю, так и внешнюю память машины и тем самым давали бы существенное сокращение времени счета задачи.

В ряде работ [1-3] рассматриваются клеточные модификации некоторых известных методов решения систем алгебраических уравнений: метода Гаусса- Зейделя, методов квадратного корня, Жордана, окаймления, ортогонализации, предполагающие размещение матрицы коэффициентов во внешнем накопителе и позволяющие оперировать в быстродействующей памяти лишь с отдельными клетками исходной матрицы.

Системы конечноразностных уравнений с положительно определенной матрицей эффективно решаются методами блочной итерации [4, 5], которые позволяют решать на каждом шаге системы конечноразностных уравнений более низкого порядка.

Ряд методов решения разностных уравнений для самосопряженных эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, которые дают возможность хранить в процессе счета на ЭЦВМ только часть информации об узлах сеточной области, рассмотрены в [6].

В настоящей диссертации рассматривается численное решение линейных алгебраических и дифференциальных уравнений с большим числом неизвестных альтернирующим методом, позволяющим решать системы в известном смысле "по частям": решая подсистемы сравнительно небольшого порядка, путем последовательных поправок получаем искомое решение исходной системы. Порядок подсистем, на которые условно разбивается исходная система уравнений, выбирается произвольно в зависимости от емкости оперативной памяти конкретной ЦВМ.

В работе исследуются условия сходимости полученного итерационного процесса, скорость сходимости, зависимость скорости сходимости от способа разбиения исходной системы уравнений на подсистемы, а также устанавливается целесообразность применения альтернирующего метода с точки зрения сокращения числа арифметических операций и времени счета задачи.

Рассматриваемый метод является обобщением на численное решение систем уравнений большого порядка известного альтернирующего алгоритма Шварца [7], который был предложен первоначально для решения краевых задач и обобщенный затем на численное решение конечноразностных уравнений [8, 9, 10].

Диссертация состоит из введения, трех глав, объединяющих двенадцать параграфов, приложения и списка цитированной литературы (содержащего 122 наименования).

Во введении содержится постановка задачи и приводится обзор литературы по существующим методам решения систем уравнений большого порядка и обзор литературы по применению алгорифма Шварца для решения многих возникающих проблем.

В первой главе дается описание вычислительной схемы и исследуются условия сходимости альтернирующего процесса для систем линейных алгебраических уравнений.

В первом параграфе данной главы рассматривается решение альтернирующим методом систем конечноразностных уравнений.

В результате применения альтернирующего метода к решению системы разностных уравнений

$$AU = F \tag{I}$$

для сеточной области D_h, содержащей mn узлов, получаем итерационный процесс, на каждом шаге которого решаются последовательно две взаимоперекрывающиеся подсистемы:

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \cdots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{k,k-1} & A_{kk} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^{(N)} \\ U_2^{(N)} \\ \vdots \\ U_k^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_k - U_{k+1}^{(N-1)} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$\begin{bmatrix} A_{r+1,r+1} & A_{r+1,r+2} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{r+2,r+1} & A_{r+2,r+2} & A_{r+2,r+3} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{r+1}^{(N)} \\ U_{r+2}^{(N)} \\ \vdots \\ U_n^{(N)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{r+1} - U_r^{(N)} \\ f_{r+2} \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix} \tag{3}$$

$$(N = 1, 2, 3, \ldots),$$

где система (2) содержит разностные уравнения, записанные для первых k столбцов области D_h, а система (3)- для столбцов области D_h от $r+1$ -го по n, $r \leq k \leq n$. r и k выбираем таким образом, чтобы подсистему (2) или (3) можно было разместить в ОП машины и решать каким-либо известным методом.

Полученный итерационный процесс сходится со скоростью геометрической прогрессии, знаменатель которой равен q^2, где

$$q < \frac{r}{k} . \tag{4}$$

Отсюда следует, что скорость сходимости альтернирующего процесса будет тем больше, чем больше перекрываются подсистемы (2) и (3).

Дается описание вычислительной схемы процесса для случая любого числа M взаимоперекрывающихся подсистем и устанавливается, что скорость сходимости убывает при увеличении M. На каждом шаге альтернирующего итерационного процесса последовательно решаются краевые задачи для сеточных областей, которые содержат только $k \cdot m$ узлов (вместо $n \cdot m$ узлов без применения метода). Кроме того, промежуточные результаты запоминаются не для всех столбцов сетки, а только для $M+1$.-го столбцов (учитывая нулевой и $n+1$ -й), что дает значительную экономию ОП машины.

Приводятся также результаты Алексидзе [9] по исследованию времени решения задачи Дирихле альтернирующим методом через скоростные характеристики вычислительной машины.

Если в системах (2) и (3) положить $r = k$, то получим k - строчечный метод блочной итерации [5, 6], при $k = n$ исходная система (I) решается за один шаг итерационного процесса.

В § 2 рассматривается вычислительная схема альтернирующего метода для системы алгебраических уравнений n-го порядка:

$$Ax = F . \tag{5}$$

Исходную систему уравнений разбиваем на M взаимоперекрывающихся подсистем порядка $k \leq n$, причем каждая последующая подсистема получается сдвигом предыдущей на r уравнений вниз, $r \leq k$.

Будем подразумевать под записью

$$A_1 = A[1:n;\ 1:m], \quad x_s = x[i,j]$$

соответственно матрицу A_1, которая содержит строки матрицы A от первой по n и столбцы от первого по m-й и вектор X_s, составленный из компонент вектора X от i-й по j-ю.

На каждом шаге альтернирующего процесса необходимо решить M подсистем k-го порядка:

$$A_p X_p^{(N)} = F_p - L_{2p} X_{\beta p}^{(N)} - L_{1p} X_{\alpha p}^{(N-1)}, \tag{6}$$

$$p = 0, 1, \ldots, \frac{n-k}{r} = M-1, \ (N=1,2,3,\ldots),$$

где

$$A_p = A[pr+1:pr+k;\ pr+1:pr+k],$$

$$X_p = X[pr+1:pr+k], \quad F_p = F[pr+1:pr+k],$$

$$X_{\beta p} = X[1:pr], \quad X_{\alpha p} = X[pr+k+1:n],$$

$$L_{1p} = A[pr+1:pr+k;\ pr+k+1:n],$$

$$L_{2p} = A[pr+1:pr+k;\ 1:pr],$$

при этом

$$X_{\beta 0},\ L_{20},\ X_{\alpha, M-1},\ L_{1, M-1} \ —$$

суть соответственно нулевые вектора и матрицы.

При $r = k$ получим клеточный метод Гаусса-Зейделя. Если положить $M = 2$, то из (6) легко определить значения векторов X_α и X_β:

$$X_\beta^{(N)} = M \cdot X_\alpha^{(N-1)} + C_1,$$

$$M=-P\cdot L_1,\quad P=A_1^{-1}[1:z;\,1:k],\quad C_1=P\cdot F_1;$$

$$X_\alpha^{(N)}=R\cdot x_\beta^{(N)}+C_2,$$

$$R=-Q\cdot L_2,\quad Q=A_2^{-1}[k+1:n;\,z+1:n],\quad C_2=Q\cdot F_2$$

$$(N=1,2,3,\ldots),$$

или, исключив $X_\beta^{(N)}$, получим итерационный процесс

$$X_\alpha^{(N)}=R\cdot M\cdot X_\alpha^{(N-1)}+C, \tag{7}$$

$$C=RC_1+C_2,\quad N=1,2,3,\ldots,$$

из сходимости которого следует сходимость альтернирующего процесса.

Таким образом, для сходимости альтернирующего процесса необходимо и достаточно, чтобы собственные значения матрицы $R\cdot M$ были по модулю меньше единицы.

Установлены также некоторые легко проверяемые достаточные критерии сходимости альтернирующего процесса, а именно, процесс сходится, если коэффициенты матрицы A в системе (5) удовлетворяют одному из условий:

I. $$a_{ij}\le 0,\quad a_{ii}>\sum_{j=1,\,j\ne i}^{n}|a_{ij}|,\quad i=1,\ldots,n; \tag{8}$$

II. $$a>(n-1)\cdot c,\quad a=\min|a_{ii}|,\quad c=\max_{i\ne j}|a_{ij}| \tag{9}$$

$$(i,j=1,\ldots,n).$$

При доказательстве первого утверждения попутно установлены две леммы, вытекающие из теоремы Адамара; при доказательстве второго утверждения для оценки нормы обратной матрицы используется идея метода окаймления.

Кроме того, доказано, что если в системе

$$X = AX + F$$

$$\|A\| < 1,$$

то ее всегда можно так разбить на взаимоперекрывающиеся подсистемы, что альтернирующий процесс будет сходиться.

Из построения вычислительной схемы метода следует, что он является одной из модификаций методов групповой релаксации [I]. Отсюда вытекает сходимость процесса для систем линейных алгебраических уравнений с симметричной и положительно определенной матрицей.

Доказано, что альтернирующий процесс сходится со скоростью геометрической прогрессии.

В § 4 установлено, что скорость сходимости процесса будет тем больше, чем больше перекрываются подсистемы. Следовательно, клеточный метод Гаусса-Зейделя сходится медленнее, чем альтернирующий метод в случае взаимоперекрывающихся подсистем. Численный пример, рассмотренный в приложении, подтверждает вышесказанное.

В последнем параграфе первой главы исследуется целесообразность применения альтернирующего метода к решению систем алгебраических уравнений большого порядка с точки зрения эффективного использования быстродействующей памяти машины, количества арифметических операций и времени решения систем с заданной точностью.

Глава вторая посвящена описанию вычислительной схемы и исследованию условий сходимости альтернирующего метода применительно к численному решению систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений большого порядка.

В § 6 описывается вычислительная схема решения альтернирующим методом задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений порядка n

$$\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + F(t) \qquad \text{(I0)}$$

с начальным условием

$$x(t_0) = x_0 .$$

Будем предполагать, что коэффициенты $a_{ij}(t)$ матрицы $A(t)$ и функции $f_i(t)$ ($i,j=1,\dots,n$) непрерывны на некотором интервале $[t_0, T]$.

Задача интегрирования системы (10) сводится к интегрированию двух или любого конечного числа подсистем дифференциальных уравнений значительно меньшего порядка

$$\frac{dx_p^{(N)}(t)}{dt} = A_p(t)x_p^{(N)}(t) + L_{1p}(t)x_{\alpha p}^{(N-1)}(t) + L_{2p}(t)x_{\beta p}^{(N)}(t) + F_p(t),$$

$$x_p^{(N)}(t_0) = x_p(t_0), \qquad \text{(11)}$$

$$p = 0, 1, \dots, \frac{n-k}{2} = M-1 \quad (N = 1, 2, 3, \dots).$$

Решение этих подсистем в замкнутом виде возможно только в редких случаях, их решают обычно известными численными методами. Приводятся формулы вычислений по модифицированному методу Ейлера-Коши. Участок интегрирования $[t_0, T]$ разбиваем на m равных частей с шагом Δt. Пусть в процессе вычислений значения $X_\alpha^{(N-1)}(t_i)$ ($i = 0, 1, \dots, m$) уже найдены. Дальнейшие вычисления проводятся по формулам (при $M = 2$):

$$\tilde{X}_{1,i+1}^{(N)} = X_{1,i}^{(N)} + \Delta t[A_1(t_i)X_{1,i}^{(N)} + L_1(t_i)X_\alpha^{(N-1)}(t_i) + F_1(t_i)],$$

$$X_{1,i+1}^{(N)} = X_{1,i}^{(N)} + \frac{\Delta t}{2}[A_1(t_i)X_{1,i}^{(N)} + L_1(t_i)X_\alpha^{(N-1)}(t_i) + F_1(t_i) +$$

$$+ A_1(t_{i+1})\tilde{X}_{1,i+1}^{(N)} + L_1(t_{i+1})X_\alpha^{(N-1)}(t_{i+1}) + F_1(t_{i+1})],$$

$$i = 0, 1, \dots, m-1; \quad N = 1, 2, 3, \dots .$$

Затем, по вычисленным значениям $X_\beta^{(N)}(t_i)$ ($i = 1, 2, \dots, m$), находим численные значения для $X_{2,i}^{(N)}$ из системы (11) по формулам:

$$\tilde{X}_{2,i+1}^{(N)} = X_{2,i}^{(N)} + \Delta t[A_2(t_i)X_{2,i}^{(N)} + L_2(t_i)x_{\beta i}^{(N)} + F_2(t_i)],$$

$$X_{2,i+1}^{(N)}=X_{2,i}^{(N)}+\frac{\Delta t}{2}\left[A_2(t_i)X_{2,i}^{(N)}+L_2(t_i)x_{\beta i}^{(N)}+F_2(t_i)+\right.$$

$$\left.+A_2(t_{i+1})\tilde{X}_{2,i+1}^{(N)}+L_2(t_{i+1})x_{\beta,i+1}^{(N)}+F_2(t_{i+1})\right],$$

$$i=0,1,2,\ldots,m-1;\quad N=1,2,3,\ldots .$$

Альтернирующий процесс продолжаем до тех пор, пока два последовательные приближения в точках $t_i\ (i=1,\ldots,m)$ не будут совпадать с требуемой точностью.

Условия сходимости альтернирующего процесса для систем дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами рассмотрены в § 7.

Устанавливается интервал сходимости альтернирующего процесса:

ТЕОРЕМА 5. Если в системе $\frac{dx}{dt}=A(t)x$ $\sup\|A(t)\|=a<\infty$ для всех $t_0\leq t\leq T$, то альтернирующий метод сходится на интервале $(t_0, t_0+\tau)$, где

$$\tau=\min_p\left\{\frac{1}{a_p}\ln\left(1+\frac{a_p}{l_{1p}}\right);\ \frac{1}{a_p}\ln\left(1+\frac{a_p}{l_{2p}}\right)\right\},\quad p=1,\ldots,M,$$

$$a_p=\sup\|A_p(t)\|,\quad l_{ip}=\sup\|L_{ip}(t)\|,\quad i=1,2,\quad t\in[t_0,T].$$

Величина этого интервала существенно зависит от способа разбиения исходной системы на подсистемы. Исходную систему дифференциальных уравнений всегда можно разбить таким образом на подсистемы, что альтернирующий процесс будет сходиться на всем интервале $[t_0, T]$ непрерывности коэффициентов матрицы $A(t)$.

Затем в теоремах 6, 7 и 8 исследуется сходимость процесса в зависимости от свойств коэффициентов матрицы $A(t)$ в интервале их непрерывности при произвольном разбиении исходной системы уравнений на подсистемы.

Условия сходимости альтернирующего процесса для систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами исследуются в § 8.

ТЕОРЕМА 9. Если вещественные части всех корней характеристического уравнения в каждой из подсистем (II) отрицательные, то альтернирующий процесс сходится при любом $t \in (t_0, +\infty)$. Как следствие из этой теоремы, вытекает сходимость альтернирующего процесса для систем с отрицательно определенной матрицей A.

Доказано, что метод сходится на интервале $[t_0, T]$, если коэффициенты матрицы $A(t)$ удовлетворяют одному из условий:

I. $a_{ii} < 0$ ($R_e\, a_{ii} < 0$ в случае комплексной матрицы),

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}|;$$

2. $$(n-1)c < 1, \quad c = \max_{[t_0,T]} \left| \frac{a_{ij}}{a_{ii}} \left(\exp(a_{ii}(t-t_0)) - 1 \right) \right|;$$

3. $$\max_i \left| \frac{1}{a_{ii}} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \left(\exp(a_{ii}(t-t_0)) - 1 \right) \right| < 1.$$

Как частный случай, из теоремы 5 следует, что для систем дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами альтернирующий метод всегда сходится на интервале (t_0, $t_0 + \tau$), где

$$\tau = \min_p \left\{ \frac{1}{\|A_p\|} \ln \left(1 + \frac{\|A_p\|}{\|L_{ip}\|} \right) \right\} \quad (i = 1, 2).$$

Скорость сходимости альтернирующего процесса для систем дифференциальных уравнений, как и для алгебраических систем, будет тем больше, чем больше перекрываются подсистемы.

Третья глава настоящей диссертации носит прикладной характер. Она посвящена применению альтернирующего метода к расчету сложных электрических цепей.

§ 9 этой главы носит реферативный характер. Рассматривается постановка задач анализа цепей и приводится обзор существующих методов их расчета.

В § 10 дается описание анализа сложных электрических цепей альтернирующим методом. В данном случае метод является комбинацией методов расщепления цепи на подсхемы и итерационных методов расчета каждой из подсхем. При этом значительно сокращается число промежуточных результатов, которые необходимо запоминать в процессе счета, что дает экономию быстродействующей памяти ЭЦВМ.

Сходимость альтернирующего процесса для линейных электрических цепей исследуется в § II. Установлено, что для цепей, содержащих только однородные элементы, процесс всегда сходится.

Для RLC- цепей синусоидального тока процесс сходится, если характеристические числа матрицы цепи лежат в левой полуплоскости или на мнимой оси (обязательно простые). В случае положительной определенности матриц проводимостей, емкостей и индуктивностей это условие обычно всегда выполняется и нарушается иногда только для LC-цепей.

Последний, двенадцатый параграф, содержит описание методики реализации альтернирующего метода на ЭЦВМ и программу решения систем алгебраических уравнений данным методом на языке "АЛГОЛ-60".

В приложении приводится численный пример расчета альтернирующим методом неразветвленного трубопровода горячего промперегрева на совместное действие температурных удлинений, равномерно распределенной нагрузки и сосредоточенных сил (для Трипольской ГРЭС). При этом исследовалась зависимость скорости сходимости процесса от способа условного разбиения трубопровода на части, а также количество выполненных арифметических операций. Задача решалась на вычислительной машине "Минск-I".

Основные результаты диссертации изложены в работах автора [II-I5] и были доложены на Третьей Республиканской математической конференции молодых исследователей Украины (Киев, 1966), на научных конференциях кафедр Киевского государственного педагогического института имени А.М. Горького (1966, 1967, 1968), на научном семинаре по методам расчета цепей и полей на ЭЦВМ при Институте Кибернетики АН УССР (1966, 1968).

ЛИТЕРАТУРА

1. Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. М., ФМ, 1960.

2. Волович В.М. О решении систем линейных алгебраических уравнений клеточными методами. Сб.работ Вычислительного Центра МГУ. Вып. 3, 1965.

3. Тан Чжэнь. О клеточном методе ортогонализации решения систем совместных линейных алгебраических уравнений с большим числом неизвестных. Ж."Выч. мат. и мат. физики", 1961, т. I, № I.

4. Саульев В.К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. М., ФМ, 1960.

5. Шаманский В.Е. Методы численного решения краевых задач на ЭЦВМ. Ч. I, Изд-во АН УССР, Киев, 1963.

6. Молчанов И.Н. О методах численного решения краевых задач для дифференциальных уравнений второго порядка эллиптического типа, позволяющих экономить память ЭЦВМ. Автореферат диссертации. Киев, 1964.

7. Канторович Л.В., Крылов В.И. Приближенные методы высшего анализа. М.-Л., ФМ, 1952.

8. Бабушка Иво. Об алгоритме Шварца в теории дифференциальных уравнений математической физики. - Чехословацкий математический журнал, 1958, т. 8, № 3, стр. 328-343.

9. Алексидзе М.А. О целесообразности применения альтернирующего метода Шварца на ЭЦВМ. ДАН СССР, 1958, т.120, № 2.

10. Диденко В.И., Ляшенко И.Н. О численном решении краевых задач для эллиптических дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. УМЖ, 1964, т. 16, № 5.

11. Коваленко Г.Г. Застосування альтернуючого методу Шварца до розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. ДАН УРСР, 1967, сер. А, № 5, стор. 410-415.

12. Коваленко Г.Г. О сходимости альтернирующего метода Шварца при расчете электрических цепей. Республиканский межведомственный сборник "Анализ электрических цепей и

электромагнитных систем". Киев, "Наукова думка", 1967.

13. Коваленко Г.Г. Наближений метод розрахунку лінійних электричних схем. Матеріали третьої республіканської конференції молодих математиків України. Киев, 1968, т. I.

14. Коваленко Г.Г. О применении альтернирующего метода Шварца в анализе электрических цепей. Сб. "Методы расчета цепей и полей на ЭЦВМ". Киев, "Наукова думка", вып. I, 1968.

15. Коваленко Г.Г. Розв'язання систем лінійних диференціальних рівнянь альтернуючим методом. ДАН УРСР, сер. А, № 7, 1968.

Техн.редактор Л.Ф.Курышева.
Корректор Ж.В.Сперанская.

Сдано в набор 8/X 1968 г. Подписано к печати 8/X 1968 г.
БФ19812. Форм.бум.60x90 1/16. Печ.л. 1.
Учетно-изд.л. 0,53. Зак. 774.
Для внутриведомственной продажи (цена 5 коп.)

Типолитография КВИРТУ