МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. А. М. ГОРЬКОГО

На правах рукописи

БАЛЛА
Эден Шамуелович

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМИ АРГУМЕНТАМИ

Специальность № 01.01.02

(Дифференциальные и интегральные уравнения)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев — 1974

МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ УССР

КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
им. А. М. ГОРЬКОГО

На правах рукописи

БАЛЛА
Эден Шамуелович

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМИ АРГУМЕНТАМИ

Специальность № 01.01.02
(Дифференциальные и интегральные уравнения)

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Киев — 1974

Диссертационная работа выполнена в Ужгородском государственном университете.

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук, доцент **И. И. Маркуш.**

Официальные оппоненты:

Доктор физико-математических наук, профессор **И. А. Павлюк,**
Кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник Института математики АН УССР **Д. Г. Кореневский.**

Оппонирующая организация

Черновицкий государственный университет.

Автореферат разослан «. 2 . .» . . III . . . . . . 1974 г.

Защита диссертации состоится «. 10 . .» . . IV . . . . . . 1974 г. в . . . . час. на заседании Ученого Совета физико-математического факультета Киевского государственного педагогического института им. А. М. Горького (Б. Шевченко № 22/24, ауд. 431).

Отзывы просим присылать по адресу: г. Киев-30, Бульвар Шевченко, 22/24.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке института.

Ученый секретарь Совета

Исследование решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений в частных производных с отклоняющимся аргументом занимает в настоящее время одно из видных мест в теории дифференциальных уравнений. Это объясняется, в первую очередь, тем, что существует большое количество приложений таких уравнений к различным областям физики, техники и других наук. к теории автоматического регулирования и управления, теории автоколебательных систем, некоторым вопросам техники (например, к радио- и электротехнике), экономике, биофизике и т. д.

Изучение многих проблем вышеупомянутых отраслей науки приводит в основном к исследованию дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с отклоняющимся (чаще всего запаздывающим) аргументом во временной координате. Например, когда колебание рассматриваемого физического процесса зависит некоторым образом и от своей «предыстории».

Некоторые другие проблемы, например, изучение процесса сгорания топлива в ракетных двигателях, ряд вариационных задач, некоторые другие задачи ракетной техники приводят к уравнениям с отклоняющимся аргументом в пространственной переменной (к такому уравнению приводит, в частности, задача о тепловом изгибе мачты системы гравитационной стабилизации искусственного спутника Земли, которая изучена Д. Г. Кореневским).

Возникает поэтому необходимость изучения смешанных задач для уравнений в частных производных с отклоняющимися аргументами, когда в рассматриваемом уравнении есть запаздывание не только во временном аргументе t, но и в аргументе x (или аргументах x_i).

Построение решений таких смешанных задач тесно связано с решением обыкновенных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, а при решении последних во многих случаях используются результаты исследования таких самых уравнений без отклонения в аргументе. Поэтому сама теория дифференциальных уравнений с отклоняющимися аргументами не может пройти мимо результатов, полученных в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, и часто эти результаты переносятся и проверяются на уравнениях рассматриваемых нами типов.

Возникают, однако, и проблемы, которые характеризуют только теорию уравнений с возмущенными аргументами. В настоящей работе это проявляется в постановке новых задач и их решении, при доказательстве отдельных утверждений и т. д.

Теория обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом разработана на сегодняшний день достаточно хорошо. Существует большое количество монографий Н. Н. Боголюбова и Ю. А. Митропольского, Р. Беллмана, К. Л. Кука, А. Д. Мышкиса, Э. Пинни, Л. Э. Эльсгольца и др., обзорных и проблемных работ А. М. Зверкина, Г. А. Каменского, С. Б. Норкина, Л. Э. Эльсгольца, Н. П. Красовского, Ю. А. Митропольского, В. И. Фодчука, Д. Г. Кореневского, А. Д. Мышкиса, С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиля, Л. Д. Николенко и др., содержащих ряд важных результатов и проблем в данной области. Изучены, с одной стороны, вопросы качественного характера: существование и единственность решений данных уравнений, их устойчивость, оценки и т. д., с другой стороны, авторы получили примечательные результаты по построению самих решений таких уравнений.

Для исследования решений квазилинейных обыкновенных систем с запаздывающим аргументом существуют хорошо разработанные приближенные методы, которыми располагает теория колебаний систем без запаздывания: метод Ляпунова—Пуанкаре, нашедший свое развитие в работах А. Халаная, С. Н. Шиманова, Л. Э. Эльсгольца, Ю. А. Рябова и др., асимптотический метод Крылова—Боголюбова—Митропольского и метод усреднения, которые получили свое дальнейшее развитие и обоснование в работах В. П. Рубаника, О. А. Жаутыкова, В. И. Фодчука, А. Н. Филатова, А. Халаная и др.

Особенно интенсивно развивалась за последние годы теория дифференциальных уравнений в частных производных с запаздывающим аргументом (запаздывание во времени). Примечательны в этом направлении работы Л. Э. Эльсгольца, А. Д. Мышкиса, С. Ф. Фещенко, Н. И. Шкиля, В. И. Фодчука, И. М. Гуля, Д. Г. Кореневского, А. Ш. Гаджиева, А. И. Гусейнова, Я. Д. Мамедова, В. Р. Петухова, Г. П. Хомы, В. А. Домбровского, Н. А. Сотниченко, С. А. Василишина, М. И. Рабиновича, А. А. Розенблюма и других математиков.

В этих работах авторы придерживались в основном двух направлений: качественного и аналитического. В связи с последним даны основные методы построения решений различных уравнений в частных производных с запаздывающим аргументом.

Еще Л. Э. Эльсгольц с помощью метода шагов решил основную начальную задачу для уравнения первого порядка в частных производных с запаздыванием во времени.

Часто, однако, в приложениях для уравнений в частных производных приходится решать не основную начальную задачу, а различные смешанные задачи. Для многих случаев при этом применим обычный метод разделения переменных (метод Фурье), который существенно не отличается от схемы его применения к уравнениям без отклонения в аргументах.

Вопрос построения асимптотических решений смешанных задач для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами и с запаздывающими аргументами, в отличие от предшествующих авторов, мы ставим с точки зрения присутствия в рассматриваемом уравнении запаздывания не только во временном, но и в пространственном аргументе x. С этой точки зрения и на основании того факта, что вышеупомянутые уравнения в частных производных часто встречаются в приложениях (см., например, работы Д. Г. Кореневского), развитие теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом в этом направлении считаем оправданным и целесообразным.

Новыми результатами данной диссертационной работы, на наш взгляд, являются те, которые получены при решении общих смешанных задач для уравнений с запаздывающими аргументами с неоднородными медленно меняющимися краевыми условиями. В частности, доказательство ряда утверждений, связанных с общим видом рассматриваемых уравнений, изучение краевых задач типа Штурма—Лиувилля для дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений второго и высшего порядков с запаздывающим аргументом (некоторые вопросы асимптотики) и, наконец, строгое обоснование применяемого нами (при решении смешанных задач) асимптотического метода (в том числе и метода Фурье).

В настоящей диссертационной работе излагаются следующие результаты по исследованию смешанных задач для линейных и нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа с запаздывающими аргументами (как во времени, так и в пространственному аргументу).

Диссертационная работа состоит из трех глав.

В § 1 гл. I изучается асимптотика по малому параметру общей смешанной задачи вида

$$U_{tt}(t, x) = L_0U(t, x) + \bar{a}(\tau, x, \varepsilon)U(t, x) + \bar{a}_1(\tau, x, \varepsilon)U(t-\Delta(\tau), x-\delta) + \bar{b}(\tau, x, \varepsilon)U_x(t, x,) + b_1(\tau, x, \varepsilon)U(t-\Delta(\tau), x) + \varepsilon\sum_{j=1}^{N} f_j(\tau, x, \varepsilon)e^{i\theta_j(t, \varepsilon)}, \quad (1)$$

$$U(t, x, \varepsilon) = \varphi(t, x, \varepsilon); \; U_t(t, x, \varepsilon) = \Psi(t, x, \varepsilon) \text{ для } -\tau_0 \leqslant t \leqslant 0 \quad (2)$$

$$U_x(t, 0, \varepsilon) + h_1(\tau, \varepsilon)U(t, 0, \varepsilon) = \varepsilon\sum_{j=1}^{N}\mu_{1j}(t)e^{i\theta_j(t, \varepsilon)} \quad (3)$$

$$U_x(t, \pi, \varepsilon) + h_2(\tau, \varepsilon) U(t, \pi, \varepsilon) = \varepsilon \sum_{j=1}^{N} \mu_{2j}(t) e^{i\theta_j(t, \varepsilon)} \tag{3}$$

$$U(t, x, \varepsilon) \equiv 0 \quad \text{для} \quad -\delta < x < 0, \tag{4}$$

где $L_0 U = (p(x) U_x)_x - q(x) U$, $\tau = \varepsilon t$ — медленное время, $\varepsilon > 0$— малый параметр, δ — положительная постоянная, $0 \leqslant \Delta(\tau) \leqslant \leqslant \tau_0$, $-\delta \leqslant x \leqslant \pi$, $0 \leqslant \tau \leqslant L$, ($L$ — постоянная величина), $\frac{d\theta_j(t, \varepsilon)}{dt} = k_j(\tau) > 0$, $k_j(\tau,) h_1(\tau, \varepsilon)$, $h_2(\tau, \varepsilon)$ — заданные непрерывные медленно меняющиеся функции на $[0, L]$.

После применения метода Фурье смешанная задача (1—4) формально разбивается на две задачи: задачу Штурма—Лиувилля на собственные значения и собственные функции и задачу Коши для бесконечной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка с медленно меняющимися коэффициентами и запаздывающим аргументом

$$\ddot{Z}_n(t, \varepsilon) + \lambda_n Z_n(t, \varepsilon) = \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} G_{nk}(\tau, \varepsilon) Z_k(t, \varepsilon) + \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} Q_{nk}(\tau, \varepsilon) Z_k(t - \Delta(\tau), \varepsilon) +$$

$$+ \varepsilon \sum_{k=1}^{\infty} R_{nk}(\tau, \varepsilon) Z_k'(t, \varepsilon) + \varepsilon \sum_{j=1}^{N} F_{jn}(\tau, \varepsilon) e^{i\theta_j(t, \varepsilon)} \tag{5}$$

$$Z_n(t, \varepsilon) = \varphi_n(t, \varepsilon); \quad Z_n'(t, \varepsilon) = \Psi_n(t, \varepsilon) \quad \text{для} \quad -\tau_0 \leqslant t \leqslant 0. \tag{6}$$

Предположим, что выполняется условие А: функции $G_{nk}(\tau, \varepsilon)$, $Q_{nk}(\tau, \varepsilon)$, $R_{nk}(\tau, \varepsilon)$, $F_{jn}(\tau, \varepsilon)$ бесконечно дифференцируемы по τ, представимы в виде асимптотических рядов по степеням малого параметра ε:

$$G_{nk}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s G_{nk}^{(s)}(\tau); \quad Q_{nk}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s Q_{nk}^{(s)}(\tau);$$

$$R_{nk}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s R_{nk}^{(s)}(\tau); \quad F_{jn}(\tau, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s F_{jn}^{(s)}(\tau); \tag{7}$$

и что ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \left| \frac{d^p}{d\tau^p} (G_{nk}(\tau, \varepsilon)) \right|^2; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \left| \frac{d^p}{d\tau^p} (Q_{nk}(\tau, \varepsilon)) \right|^2;$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} \left| \frac{d^p}{d\tau^p} (R_{nk}(\tau, \varepsilon)) \right|^2; \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \left| \frac{d^p}{d\tau^p} (F_{jn}(\tau, \varepsilon)) \right|^2 \tag{8}$$

сходятся абсолютно и равномерно. Доказываем следующие теоремы:

Теорема 1. Пусть выполнены условия А и (8) и при некоторых значениях $\tau \in [0, L]$ и некотором λ_n (n — фиксировано) одна или несколько функций $k_l(\tau)$ ($l=1, 2, ..., r$; $1 \leqslant r \leqslant N$) равны одному из корней уравнения

$$-\mu^2+\lambda_n=0 \text{ («резонансный случай»)}, \tag{9}$$

тогда формальное решение системы (5) существует и по методу С. Ф. Фещенко может быть представлено в виде

$$Z_n(t, \varepsilon)=\sum_{l=1}^{r} \{[\delta_{n,l}+\Pi_n(\tau, \varepsilon)]\xi_l(t)+P_{nl}(\tau, \varepsilon)\}e^{i\theta_l(t, \varepsilon)}+$$

$$+\varepsilon\sum_{j=r+1}^{N} T_{jn}(\tau, \varepsilon)e^{i\theta_j(t, \varepsilon)}, \tag{10}$$

где $\delta_{n,l}$ — символ Кронекера, а функции $\xi_l(t)=\alpha_l(t)+\beta_l(t)$ ($l=1, 2, ..., r$) определяются из уравнений первого порядка.

$$\frac{d\xi_l(t)}{dt}\{D(\tau, \varepsilon)+i[\omega(\tau, \varepsilon)-k_l(\tau)]\}\xi_l(t)+S_l(\tau,\varepsilon), \tag{11}$$

причем неизвестные коэффициенты (10), (11) имеют вид

$$\Pi_n(\tau, \varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s \Pi_n^s(\tau);\ P_{nl}(\tau, \varepsilon)=\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s P_{nl}^{(s)}(\tau);$$

$$\omega(\tau, \varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s\omega_s(\tau);\ T_{jn}(\tau, \varepsilon)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s T_{jn}^{(s)}(\tau);$$

$$D(\tau, \varepsilon)=\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s D_s(\tau);\ S_l(\tau, \varepsilon)=\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s S_l^{(s)}(\tau); \tag{12}$$

Теорема 2. Если выполнены условия А и (8) и ни одна из функций $k_j(\tau)$ ($j=1, 2, ..., N$) ни при каком $\tau \in [0, L]$ не равны ни одному из корней уравнения (9) («нерезонансный» случай), то существует формальное решение задачи (5), (6), которое можно представить в виде:

$$Z_n(t, \varepsilon)=\delta_{n,1}\xi_n(t)+\varepsilon\sum_{=1}^{N}\tilde{T}_{jn}(\tau, \varepsilon)e^{i\theta_j(t,\varepsilon)},$$

где

$$\xi_n(t)=\alpha_n(t)+i\beta_n(t) \quad \text{и} \quad \frac{d\xi_n(t)}{dt}=[\tilde{D}(\tau, \varepsilon)+i\tilde{\omega}(\tau, \varepsilon)]\xi_n(t).$$

Доказательство этих теорем дает и алгоритм для построения самих решений. При этом применяются некоторые искусственные приемы при доказательстве равномерной и абсолютной сходимости соответствующих рядов.

В § 2 первой главе доказывается теорема существования и единственности решения поставленной смешанной задачи (1)—

(4) в пространстве Банаха методом последовательных приближений. Дается обоснование применяемого асимптотического метода: доказывается асимптотический характер построенного решения задачи Коши (5), (6) и, тем самым, решения задачи (1)—(4). Указываются те условия, которые нужно наложить на функции смешанной задачи (1)—(4), чтобы существовало для нее классическое решение $u(t, x, \varepsilon)$.

Аналогичные результаты, но для более простого уравнения, чем уравнение (1) и с запаздыванием только во времени получены в работах В. И. Фодчука и В. А. Домбровского.

В § 3 главы I. рассматривается смешанная задача для интегро-дифференциального уравнения вида

$$U_{tt}(t, x) = L_0U(t, x) + L_1U + L_2U + L_3U + \int_0^{\pi} K(\tau, x, \varepsilon) U(t, \eta)\, d\eta +$$

$$+ \varepsilon \sum_{j=1}^{N} f_j(\tau, x, \varepsilon) e^{i\theta_j(t, \varepsilon)} \tag{13}$$

с начальными условиями (2) и граничными условиями (3), где операторы L_iU $(i=1, 2, 3)$ имеют вид

$$L_1U = \left(a_1(\tau, x, \varepsilon)\frac{\partial}{\partial x} + a_2(\tau, x, \varepsilon)\frac{\partial}{\partial t} + a_3(\tau, x, \varepsilon)\right)U(t, x);$$

$$L_2U = \left(a_4(\tau, x, \varepsilon)\frac{\partial}{\partial x} + a_5(\tau, x, \varepsilon)\frac{\partial}{\partial x} + a_6 \tau, x, \varepsilon)\right)U(t - \Delta(\tau), x);$$

$$L_3U = a_7(\tau, x, \varepsilon) U(t, x - \delta(x)). \tag{14}$$

Кроме того, ядро $K(\tau, x, \eta, \varepsilon)$ имеет представление

$$K(\tau, x, \eta, \varepsilon) = K_0(x, \eta) + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s K_s(\tau, x), \tag{15}$$

где функция $K_0(x, \eta)$ — симметрична, интегрируема с квадратом на $[-\delta_0, \pi]$ $|0 \leqslant \delta(x) \leqslant \delta_0|$ и положительно определенная. Коэффициенты операторов имеют вид

$$a_i(\tau, x, \varepsilon) = \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s a_{is}(\tau, x), \ (i=1, 4, 5, 6); \ a_2(\tau, x, \varepsilon) = -b_0(\tau) +$$

$$+ \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s a_{2s}(\tau, x); \quad a_3(\tau, x, \varepsilon = -c_0(\tau) + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s a_{3s}(\tau, x);$$

$$a_7(\tau, x, \varepsilon) = d_0(x) + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s a_{7s}(\tau, x).$$

где $b_0(\tau)$, $c_0(\tau)$, $d_0(x)$ — непрерывно-дифференцируемые функции на отрезках $[0, L]$ и $[0, \pi]$ соответственно.

После применения обобщенного метода Фурье вид коэффициента $a_7(\tau, x, \varepsilon)$ обуславливает появление краевой задачи типа Штурма—Лиувилля для интегро-дифференциального уравнения с переменными коэффициентами и запаздывающим аргументом:

$$L_0 w(x) + \int_0^{\pi} K_0(x, \eta) w(\eta) d\eta + d_0(x) w(x - \delta(x)) = -\lambda w(x)$$

$$w'(0) = 0; \ w'(\pi) = 0 \qquad (16)$$

$$w(x) \equiv 0 \text{ для } \delta_0 < x < 0.$$

Для полученной задачи Коши доказываются аналогичные как в § 1 теоремы для «резонансного» и «нерезонансного» случаев. Строится также решение для однородного уравнения.

В § 4 гл. I доказывается теорема существования и единственности решения получающейся задачи Коши в пространстве Банаха. Даются соответствующие оценки решения и доказывается асимптотический характер найденных приближенных решений.

В § 5 рассматривается смешанная задача для линейного дифференциального уравнения вида (13) без интегрального оператора при начальных условиях (2) и граничных условиях, называемых нераспадающимися

$$\sum_{k=0}^{n-1} \alpha_{jk} \frac{\partial^k U}{\partial x^k}\Big|_{x=0} + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_{jk} \frac{\partial^k U}{\partial x^k}\Big|_{x=\pi} = 0 \qquad (17)$$

$$U(t, x, \varepsilon) = A(t, x, \varepsilon) \text{ для } -\delta_0 < x < 0,$$

где оператор L_0U имеет вид: $L_0U = \frac{\partial^n U(t,x)}{\partial x^n} (n > 2)$.

В диссертационной работе решения различных смешанных задач ищутся при помощи обобщенного метода Фурье, то есть в виде ряда по собственным функциям главных частей соответствующих уравнений. В связи с этим для каждого отдельного случая изучаются краевые задачи типа Штурма—Лиувилля с запаздывающим аргументом. Самая простая из них (поставленная и решенная в нашей работе) имеет вид:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dw(x)}{dx}\right] - q(x)w(x) + d_0(x)w(x - \delta(x)) = -\lambda w(x) \qquad (18)$$

$$w(x) = A_1(x) \quad \text{для} \quad -\delta_0 < x \leqslant 0; \quad w(\pi) = 0. \qquad (19)$$

Здесь рассмотрены также некоторые вопросы асимптотики собственных значений и собственных функций последней краевой задачи. В случае, когда оператор $L_0 w$ имеет вид $L_0 w = \frac{d^2 w}{dx^2}$, аналогичная задача изучена С. Б. Норкиным.

Краевая задача типа Штурма—Лиувилля для интегро-дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом (16) поставлена в § 3 первой главы. На основании теоремы Г. Вейля, в частности, можно сделать заключение, что собственные функции этой краевой задачи всегда существуют. Этот вывод сделан на том основании, что спектр краевой задачи (16) существует и имеет такую же самую структуру, как и спектр более простой задачи:

$$L_0 w(x) = -\lambda w(x); \quad w'(0)=0; \quad w'(\pi)=0;$$

(слагаемые $\int\limits_0^\pi K_0\ (x, \eta) w(\eta) d\eta$ и $d_0(x) w(x-\delta(x))$ являются вполне непрерывнами операторами).

При помощи двойной подстановки

$$Y(z) = [p(x)]^{\frac{1}{4}} w(x); \quad z = \frac{1}{\kappa} \int\limits_0^x [p(\xi)]^{-\frac{1}{2}} d\xi, \quad \text{где} \quad \kappa = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi [p(x)]^{-\frac{1}{2}} dx,$$

задача (16) приводится к более простой задаче относительно $Y(z)$, для которой при выполнении определенных условий выводим формулы, характеризующие асимптотические свойства собственных функций и собственных значений в первом и во втором приближениях. Это сделано в работе и для случая, когда

$$W(x) = A_1(x) \quad \text{для} \quad -\delta_0 < x < 0. \tag{20}$$

Для краевой задачи типа Штурма—Лиувилля для уравнения вида (18) высшего порядка с краевыми условиями (17) и (20) где $\alpha_{j\kappa}$, $\beta_{j\kappa}$ $(j=1, 2, ..., n)$ постоянные величины, удовлетворяющие определенным условиям, для больших значений параметра λ изучены некоторые вопросы асимптотики собственных функций и собственных значений. Доказана следующая лемма для системы интегральных уравнений типа Фредгольма с запаздывющим аргументом, как эквивалента для дифференциального уравнения высшего порядка с запаздывающим аргументом.

Лемма 1. Пусть дана система интегральных уравнений с запаздывающим аргументом

$$Z_\kappa(x) = f_\kappa(x) + \sum_{j=1}^{r} \int\limits_0^\pi K_{\kappa j}(x, \xi, \rho) Z_j\ (\xi - \delta(\xi)) d\xi, \tag{21}$$

($\kappa=1, 2, \ldots, n$), ρ —большой параметр, $\lambda=\rho^n$, и пусть выполняются следующие условия: 1. функции $f_\kappa(x)$ ($\kappa=1, 2, \ldots, n$) непрерывны на сегменте $[-\delta_0, \pi]$;

2. при каждом фиксированном ρ функции $K_{\kappa j}(x, \xi, \rho)$ непрерывны при $-\delta_0 \leqslant x \leqslant \xi$ и $\xi \leqslant x \leqslant \pi$;

3. существует константа P, для которой $|K_{\kappa j}(x, \xi, \rho| \leqslant \frac{P}{|\rho|}$ везде в $-\delta_0 \leqslant x$; $\xi \leqslant \pi$;

4. функции $d_0(x)$ и $A_{ij}(x)$ непрерывны на $[-\delta_0, \pi]$ и $[-\delta_0, 0]$ соответственно.

При этих предложениях для достаточно большого $|\rho|$ система (21) имеет единственные линейно независимые и ограниченные решения $Z_\kappa(x, \rho)$ ($\kappa=1, 2, \ldots, n$) и асимптотическую оценку

$$Z_\kappa(x, \rho) = f_\kappa(x) + O\left(\frac{1}{\rho}\right) \quad \text{при } \rho \to \infty.$$

Лемма доказывается методом последовательных подстановок с разбиением промежутка $[-\delta_0, \pi]$ на $[-\delta_0, 0]$ и $[0, \pi]$.

В этом параграфе описываются некоторые особенности при доказательстве теоремы существования и единственности решения задачи Коши для бесконечной системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. В случае, если с левой стороны уравнения типа (5) стоит выражение $\dot{Z}_n + \lambda_n Z_n$, а с правой — отсутствуют производные искомой функции $Z'_\kappa(t, \varepsilon)$ или $Z'_\kappa(t, -\Delta(\tau), \varepsilon)$, то при помощи замены

$$Z_n(t, \varepsilon) = \frac{1}{\lambda_n} \int_0^t \sin\sqrt{\lambda_n}(t-s) y_n(s, \varepsilon) ds + \alpha_n \cos\sqrt{\lambda_n} t + \frac{\beta_n}{\sqrt{\lambda_n}} \sin\sqrt{\lambda_n} t$$

такие системы сводятся к бесконечной системе интегральных уравнений типа Вольтерра вида

$$y_n(t, \varepsilon) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \int_0^t A_{n\kappa}(\tau, s, \varepsilon) y_\kappa(s, \varepsilon) ds +$$

$$+ \sum_{\kappa=1}^{\infty} \int_0^{t-\Delta(\tau)} B_{n\kappa}(\tau, s, \varepsilon) y_\kappa(s, \varepsilon) ds + f_n(\tau, \varepsilon)$$

$$\left(\sum_{\kappa=1}^{\infty} \alpha_\kappa < \infty, \sum_{\kappa=1}^{\infty} \beta_\kappa < \infty\right), \tag{22}$$

($A_{n\kappa}(\tau, s, \varepsilon$, $B_{n\kappa}(\tau, s, \varepsilon)$, $f_n(\tau, \varepsilon)$ — некоторые известные функции), для которой легко доказываются теоремы существования и единственности решений в пространстве Банаха методом последовательных приближений. Этому способствует тот факт, что в этом случае ядра систем интегральных уравнений типа (22) всегда пропорциональны малому параметру ε (разумеется, для нашего случая).

Если же в уравнениях типа (5) присутствуют производные первого порядка $Z'_k(t, \varepsilon)$, $Z'_k(t-\Delta(\tau), \varepsilon)$, то вышеприведенная замена не дает хороших результатов. А именно, при доказательстве теоремы существования и единственности решения соответствующих интегральных систем требование выполнения оценки типа $|A_{nk}(\tau, s, \varepsilon| < \varepsilon a_{nk}$ или очень жестко или, в некоторых случаях, просто некорректно. Это вызвано прежде всего тем, что после применения указанной подстановки в интегральной системе вида (27) в функциях $A_{nk}(\tau, s, \varepsilon)$, $B_{nk}(\tau, s, \varepsilon)$ и т. д. могут появиться множители $\sqrt{\lambda_n}$, $\sqrt{\lambda_k}$ ($k=1, 2, \ldots$) в числителе, что для больших n и k делает сомнительной оценки типа $|A_{nk}(\tau, s, \varepsilon| < \varepsilon a_{nk}$.

Поэтому для таких систем хорошие результаты дают подстановки

$$Z_n(t, \varepsilon) = \int_0^t \sin\sqrt{\lambda_n}(t-s)y_n(s, \varepsilon)ds \text{ и } Z_n(t, \varepsilon) =$$

$$= \int_0^t \sin\sqrt{\lambda_n}(t-s)e^{-(t-s)}y_n(s, \varepsilon)ds.$$

В последнем случае справедлива

Теорема 3. Пусть: 1. функции $b_0(\tau)$, $c_0(\tau)$ непрерывны на $[0, L]$;

2. для функций $G_{nk}(\tau, \varepsilon)$, $Q_{nk}(\tau, \varepsilon)$, $R_{nk}(\tau, \varepsilon)$, $S_{nk}(\tau, \varepsilon)$, $f_{in}(\tau\, \varepsilon)$ рассматриваемой системы выполняются условия типа (8);

3. функции $f_n(\tau, \varepsilon)$, $g_n(\tau, \varepsilon)$, $q_n(\tau, \varepsilon)$, $r_n(\tau, \varepsilon)$, $s_n(\tau, \varepsilon)$ принадлежат пространству $L, (0, L)$ — пространству Банаха, где последние четыре функции суть соответственно суммы абсолютно и равномерно сходящихся (на основании условий (8)) рядов:

$$\sum_{k=1}^{\infty} G_{nk}(\tau, \varepsilon); \ \sum_{k=1}^{\infty} Q_{nk}(\tau, \varepsilon); \ \sum_{k=1}^{\infty} R_{nk}(\tau, \varepsilon); \ \sum^{\infty} S_{nk}(\tau, \varepsilon);$$

4. выполняется неравенство

$$\varepsilon(\|g(\tau, \varepsilon)\| + \|q(\tau, \varepsilon)\|) + \max_{\tau}|b_0(\tau) - c_0(\tau) -$$

$$-1| < \sqrt{\lambda_n}(1 - \max_{\tau}|2 - b_0(\tau)|). \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

Тогда указанная система имеет единственное решение $Z_n(t, \varepsilon)$, принадлежащее пространству $L_1\ (0, \frac{L}{\varepsilon})$.

В § 6 рассмотрена конкретная смешанная задача для линейного уравнения вида (1) с дополнительными условиями типа (2) и (3).

Строится приближенное решение полученной задачи Коши для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом в «нерезонансном» случае.

Результаты примера подтверждают правильность теоретических выкладок в работе.

Во второй главе диссертации рассматриваются смешанные задачи для нелинейных дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с запаздывающими аргументами.

В § 1 решается задача для нелинейного уравнения вида уравнение (13) плюс нелинейная функция общего вида

$$\varepsilon f\,[t,\ x,\ U(t,\ x),\ U(t-\Delta(\tau),\ x),\ U_t(t,\ x),\ U_t(t-\Delta(\tau),\ x),\ \varepsilon]$$

с начальными условиями (2) и граничными условиями вида

$$U(t,\ x,\ \varepsilon) = A(t,\ x,\ \varepsilon) \quad \text{для} \ -\delta_0 \leqslant x \leqslant 0; \quad U(t,\ \pi,\ \varepsilon) = 0. \qquad (23)$$

С целью обоснования применения обобщенного метода Фурье к нелинейному уравнению доказывается

Лемма 2. Если функция $U(t,\ x,\ \varepsilon)$ разложена в ряд Фурье по собственным функциям $w_n(x)$ краевой задачи (18), (19), коэффициенты $Z_k(t,\ \varepsilon)$ которого удовлетворяют условиям:

1. все $Z_k(t, \varepsilon)$ $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ непрерывны на $\left[-\tau_0,\ \frac{L}{\varepsilon}\right]$;

2. $|Z_k(t,\ \varepsilon)| < \frac{b}{k^2}$ $(k=1, 2, \ldots)$ при $t \in \left[-\tau_0,\ \frac{L}{\varepsilon}\right]$, где b — положительная постоянная, то коэффициенты Фурье f_k для функции

$$f[\ldots] = \sum_{k=1}^{e} a_k(t,\ \varepsilon) U^k(t,\ x) + \sum_{k=1}^{m} b_k(t,\ \varepsilon) U^k(t-\Delta(\tau),\ x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} c_k(t,\ \varepsilon) U_t^k(t,\ x) + \sum_{k=1}^{p} d_k(t,\ \varepsilon) U_t^k(t-\Delta(\tau),\ x),$$

разложенной на отрезке $[0,\ \pi]$ по собственным функциям $w_n(x)$ краевой задачи (18), (19), представляют собой степенные ряды от счетного числа переменных $\{Z_k(t, \varepsilon)\}$, $\{Z_k(t-\Delta(\tau), \varepsilon)\}$, $\{Z'_k(t, \varepsilon)\}$, $\{Z'_k(t-\Delta(\tau),\ \varepsilon)\}$, $(k=1, 2, \ldots)$, сходящиеся при любых значениях $t \in \left[-\tau_0, \frac{L}{\varepsilon}\right]$ и являются непрерывными функциями t, ε в области $-\tau_0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$.

Полученная по методу Фурье задача Коши для бесконечной системы нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка решается методом усреднения.

Пусть эта система известным путем приведена к стандартному виду

$$\frac{dx_к(t, \varepsilon)}{dt} = \varepsilon\Phi_к(t, \{x_к(t, \varepsilon)\}, \{x_к(t-\Delta(\tau), \varepsilon)\}, \varepsilon) \quad (к=1,2,\ldots). \quad (24)$$

Для последней системы справедлива следующая (в § 2)

Теорема 4. Пусть в области $-\tau_0 \leqslant t \leqslant \frac{L}{\varepsilon}$, $|X_к(t, \varepsilon)| \leqslant R$ ($к=1, 2, \ldots$), $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$ (область H) выполнены следующие условия:

1. функции $\Phi_к$ непрерывны по совокупности переменных t, $\{\{X_к(t, \varepsilon)\}, \{X_к(t-\Delta(\tau), \varepsilon)\}$ в области H;

2. функции $\Phi_к$ удовлетворяют в H усиленному условию Коши—Липшица;

3. при любом $t \in [-\tau_0, \frac{L}{\varepsilon}]$ и $x_1(t, \varepsilon)=x_2(t, \varepsilon)=\ldots=0$; $x_1(t-\Delta(\tau), \varepsilon)=x_2(t-\Delta(\tau), \varepsilon)=\ldots=0$ имеют место неравенства

$$|\Phi_к(t, 0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0, \varepsilon)| \leqslant B(t, \varepsilon)$$

для всех $к=1, 2, \ldots$, где $B(t, \varepsilon)$ некоторая непрерывная функция на $[-\tau_0, \frac{L}{\varepsilon}]$.

4. в любой точке области H имеют место неравенства

$$|\Phi_к(t, x_1(t, \varepsilon), \ldots, x_1(t-\Delta(\tau), \varepsilon), \ldots, \varepsilon| \leqslant A(t, \varepsilon) \sup[|x_1(t, \varepsilon)|, \ldots, |x_1(t,-\Delta(\tau), \varepsilon), \ldots] + B(t, \varepsilon);$$

5. для любой последовательности функций $x_1(t, \varepsilon), x_2(t, \varepsilon), \ldots$, $x_1(t,-\Delta(\tau), \varepsilon)$, $x_2(t-\Delta(\tau), \varepsilon)$, ..., равностепенно непрерывных на отрезке $[-\tau_0, \frac{L}{\varepsilon}]$ при $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \tau_0$ и удовлетворяющих условиям $|x_к(t, \varepsilon)| \leqslant R$, $|x_к(t-\Delta(\tau), \varepsilon| \leqslant R$ $(к=1, 2, \ldots)$, функции $\Phi_к$ непрерывны на отрезке $[-\tau_0, \frac{L}{\varepsilon}]$.

При этих предложениях приближенные решения «укороченной» системы

$$\frac{dx_s(t, \varepsilon)}{dt} = \varepsilon\Phi_s(t, x_1(t, \varepsilon), \ldots,$$
$$x_n(t, \varepsilon), 0, \ldots, x_1(t-\Delta(\tau), \varepsilon), \ldots, x_n(t-\Delta(\tau), \varepsilon), \ldots, \varepsilon),$$
$$(s=1, 2, \ldots$$

построенные методом усреднения и будут приближенными решениями бесконечной точной системы уравнений (24) при достаточно большом n.

Соответствующая теорема для аналогичной системы без запаздывающего аргумента доказана О. А. Жаутыковым.

В § 3 гл. II рассмотрена смешанная задача для интегро-дифференциального уравнения 2n-го ($n>1$) порядка (уравнение вида (13) с нелинейной функцией $\varepsilon f[\ldots]$, когда $L_0U=\frac{\partial^n}{\partial x^n}\left[p(x)\frac{\partial^n U}{\partial x^n}\right]-q(x)U$) с начальными условиями (2) и краевыми условиями вида (17) с соответствующими требованиями осносительно коэффициентов данной задачи.

В этой связи исследуется на собственные значения и собственные функции (некоторые вопросы асимптотики) краевая задача для интегро-дифференциального уравнения 2n-го порядка с запаздывающим аргументом.

Такая задача поставлена и решается нами впервые.

В 4 параграфе второй главы излагается метод построения решения слабо возмущенной смешанной задачи для нелинейного гиперболического уравнения с малым запаздыванием аргумента t. Малое запаздывание в этом случае совпадает с малым параметром ε рассматриваемого уравнения.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений этот метод, когда от уравнений с малым запаздыванием переходят к уравнениям без запаздывания путем замены искомой функции ее разложением в ряд Тейлора по степеням запаздывания (при выполнении определенных требований), применялся А. Б. Васильевой и А. М. Родионовым.

Некоторые качественные вопросы относительно таких уравнений в частых производных рассматривались С. Ф. Фещенко.

В последней третьей главе диссертации доказывается теорема усреднения задачи Коши для нелинейных гиперболических систем первого порядка с запаздывающими аргументами вида

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}=\lambda_i(t,\ x)\frac{\partial U_i}{\partial x}+f_i\,[t,x,U_i,\ U_i(t-\Delta_i,x),\ U_i(t,x-\delta_i)],$$

где Δ_i, $\delta_i(i=1,\ldots,r)$ положительные постоянные и теорема усреднения смешанной задачи для систем дифференциальных уравнений в частных производных с малым параметром вида

$$\frac{\partial U_i}{\partial t}=\varepsilon\lambda_i(t,x)\frac{\partial U_i}{\partial x}+\varepsilon F_i\,[t,x,U_i,\ U_i(t,-\Delta_i,x),\ U_i(t,x-\delta_i),\varepsilon]$$

$$U_i(t,x,\varepsilon)=\varphi_i(t,x,\varepsilon)\quad \text{для } -\Delta_i\leqslant t\leqslant 0$$

$$U_i(t,\ 0,\varepsilon)=\Phi_i[t,U_i,\ U_i(t-\Delta_i,0),\varepsilon];$$

$$U_i(t,\pi,\varepsilon)=f_i\,[t,U_i,\ U_i(t-\Delta_i,\pi),\varepsilon]$$

$$U_i(t,x,\varepsilon)=A_i(t,x,\varepsilon)\quad \text{для } -\delta_i<x<0.$$

Результаты третьей главы являются некоторым обобщением результатов Г. П. Хома и В. А. Домбровского и др.

В основе диссертационной работы лежат статьи автора, опубликованные в различных журналах и изданиях [1—5].

Результаты диссертационной работы докладывались на Третьей межвузовской конференции по теории и приложениям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом (Черновцы, 1972); на научной конференции Ужгородского госуниверситета (Ужгород, 1973 г.) на физико-математическом факультете Киевского пединститута им. М. Горького (1973).

ОПУБЛИКОВАННЫЕ РАБОТЫ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ:

1. Балла Э. Ш., Бобочко В. Н., Кабаций Н. М., Маркуш И. И. **Об одном интегро-дифференциальном уравнении с малым параметром при производной,** 2-я экономико-кибернетическая конференция, Ужгород—Ив. Франковск, 1968.
2. Маркуш И. И., Балла Э. Ш., **Об асимптотическом представлении решения нелинейной смешанной задачи для общего одномерного и многомерного уравнения гиперболического типа с малым параметром,** Материалы научной конференции УжГУ, Сер. мат., К., 1969 (На укр. яз.).
3. Балла Э. Ш., И. И. Маркуш, **Об асимптотическом решении смешанной задачи для гиперболического уравнения с запаздывающими аргументами,** УМЖ, т. 23, вып., 4, 1971.
4. Балла Э. Ш., Кабаций Н. М,. Маркуш И. И., **Решение смешанной задачи для нелинейного гиперболического уравнения в частных производных с запаздывающими аргументами,** Материалы 3-й Всесоюзной межвузовской конференции по теории и приложениям дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом, Черновцы, 1972.
5. Балла Э. Ш., Маркуш И И., **Об одном методе решения мало возмущенной смешанной задачи для гиперболического уравнения с малым запаздыванием аргумента,** ДАН УССР, сер. А, № 6, 1973. (на укр. яз.).

Эден Шамуелович Балла

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ РЕШЕНИЙ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМИ АРГУМЕНТАМИ

(Автореферат)

ББ00432 от 13. II. 1974 г. Зак. № 496. Формат бумаги 60×90 1/16.
Печатных листов 1. Т. 250.

Закарпатская областная типография, г. Ужгород.