актуализировать и применить знания и умения из различных разделов математики, в частности: школьный курс математики; элементы линейной алгебры; в некоторых задачах – элементы аналитической геометрии; дифференциальное исчисление функции одной переменной; дифференциальное исчисление функции нескольких переменных. Все это делает задачи условной оптимизации удачным примеров естественного, гармоничного “вплетения” интегративных задач в математическую подготовку студентов.

Ключевые слова: *высшая математика, интегративная задача, условная оптимизация, метод Лагранжа.*

Klindukhova V., Viala Yu. The classical tasks of conditional optimization and their integrative character in the course of higher mathematics students of economic specialties.

The article is devoted to the problem of improving the level of mathematical training of students. One means of solving this problem are integrative tasks. The integrative solution of mathematical tasks is very important in the training of students of economical specialties. It is expedient to introduce such tasks in the learning process. It is important to engage students in integrative learning activities. This helps to improve the quality of mathematical culture of students. It also contributes to the formation of students ' professional integrative skills.

In the article the attention is paid to practical issues. We considered several groups of tasks that are feasible for students. The characteristics of these tasks. All tasks are done. The basis is the classical problem of conditional optimization. Attention to them is no accident. The task of conditional optimization is part of a course of higher mathematics. They objectively contain elements of integrity. For their solution it is necessary to apply knowledge and skills from various branches of mathematics. In particular: from a school course of mathematics; linear algebra; sometimes of analytical geometry; differential calculus of functions of one variable; differential calculus of functions of several variables. Therefore, the task of conditional optimization is a good example of a natural implementation of integrative tasks in the mathematical preparation of students.

Keywords: *higher mathematics, integrative task, conditional optimization, Lagrange's method.*

УДК 378.011.3-051:517.2

Кугай Н. В.

МЕТОДОЛОГІЧНІ ЗНАННЯ МАЙБУТНЬОГО ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ “ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ”

Стаття присвячена проблемі виокремлення методологічних знань майбутнього вчителя математики. У роботі розглянуто методологічні знання конкретно наукового рівня з диференціальних рівнянь, зокрема: предмет, метод, фундаментальні поняття та факти диференціальних рівнянь, історія розвитку. Наведено приклади використання загальнометодологічних методів під час вивчення навчальної дисципліни “Диференціальні рівняння”. З’ясовано зв’язок диференціальних рівнянь з навчальними дисциплінами математичного циклу.

Ключові слова*: диференціальні рівняння, методологічні знання, рівні методологічних знань, предмет диференціальних рівнянь, методи диференціальних рівнянь.*

На сьогодні формування сучасної особистості, яка здатна до саморозвитку, вміє самостійно приймати рішення в умовах, коли світ постійно змінюється, причому змінюється не за лінійними законами, коли не можна спиратися тільки на власний досвід, – одне із основних завдань сучасної освіти. А це, в свою чергу, вимагає підсиленої уваги до методологічних аспектів математики, зокрема, до формування методологічних знань з математики.

На сьогодні зусиллями вчених-філософів, психологів, педагогів (В. Бажановим, В. Давидовим, Л. Зоріною, Т. Куном, М. Полані, Г. Саранцевим, М. Холодною, І. Якиманською та ін.) вже достатньою мірою розроблені питання, пов’язані з з’ясуванням специфіки становлення, розвитку та функціонування методологічних знань як в науковому, так і в навчальному (математичному) пізнанні. Накопичено багатий досвід розв’язання проблем, пов’язаних з формуванням окремих видів методологічних знань під час вивчення різних дисциплін у школі та ВНЗ (Л. Зоріна, Н. Кочергіна, Є. Лященко, В. Мадер, А. Столяр, Н. Терешин, Є. Плотникова, Г. Голин, Н. Пастернак, Б. Спаський, І. Лернер, О. Бугайов, Б. Будний, С. Раков та ін.).

Методологічні знання складаються з декількох структурних рівнів. На сьогодні найпоширенішою є структурна модель методологічних знань, в якій виокремлено чотири рівні: філософський; загальнонауковий; конкретно науковий; рівень процедур і технік дослідження. Зупинимося детальніше на методологічних знаннях конкретно наукового рівня з диференціальних рівнянь.

Мета статті – з’ясувати, які методологічні знання майбутнього вчителя математики доцільно формувати на матеріалі навчальної дисципліни “Диференціальні рівняння”.

До методологічних знань конкретно наукового рівня будемо відносити знання про: *предмет навчальної дисципліни; конкретно наукові методи навчальної дисципліни; фундаментальні поняття; фундаментальні відношення між поняттями; фундаментальні теоретичні факти (означення, аксіоми, теореми); зв’язок з іншими навчальними дисциплінами; межі застосовності знань; історію розвитку.*

А. Самойленко зазначає, що сучасна теорія диференціальних рівнянь займає чільне місце серед інших математичних дисциплін. Підкреслює, що “гармонійне поєднання суто математичного й прикладного аспектів робить її однаково привабливою як для теоретиків, так і для тих, хто займається застосуванням математики в різноманітних галузях знань” [3, с. 3].

Предмет теорії диференціальних рівнянь як ***самостійної галузі математики*** – розробка методів інтегрування диференціальних рівнянь та дослідження різних властивостей їх розв’язків. ***Метод*** теорії диференціальних рівнянь – апарат математичного аналізу.

У рамках теорії диференціальних рівнянь виокремились самостійні наукові напрями: теорія інтегрування диференціальних рівнянь, аналітична, якісна, геометрична теорії диференціальних рівнянь.

Теорія інтегрування диференціальних рівнянь своїм предметом має класифікацію диференціальних рівнянь і розробку методів побудови їх точних розв’язків. Ця частина теорії диференціальних рівнянь є класичною, її розробка завершена в основному до початку XX століття.

Як правило, під час вивчення навчальної дисципліни “Диференціальні рівняння” розглядають елементи саме класичної теорії інтегрування диференціальних рівнянь.

Отже, центральним ***об’єктом*** вивчення навчальної дисципліни “Диференціальні рівняння” є звичайне (як скалярне, так і векторне) диференціальне рівняння [3, с. 3].

На матеріалі диференціальних рівнянь доцільно формувати методологічні знання філософського рівня, зокрема, такі філософські категорії:

1) загальне, конкретне (частинне), особливе. Саме такі терміни маємо під час розв’язування диференціальних рівнянь для позначення його розв’язків;

2) існування та єдиність (задача Коші).

Теорія диференціальних рівнянь відкриває значні можливості для майбутніх учителів математики в оволодінні такими важливими загальнометодологічними методами: *метод математичного моделювання, обчислювальний експеримент, метод аналогій, алгоритмічний метод*.

Наведемо приклади використання цих методів.

Метод аналогій. 1) Поняття і загальний вигляд звичайного диференціального рівняння *n*-го порядку, початкових умов і задачі Коші, загального і частинного розв'язків, теореми про існування та єдиність розв'язку задачі Коші доцільно сформулювати так, щоб майбутній учитель математики побачив аналогію з відповідними фактами для диференціальних рівнянь першого порядку. Для цього задачу Коші для диференціального рівняння *n*-го порядку варто записати через векторнозначні функції.

2) Теорія лінійних систем диференціальних рівнянь аналогічна до теорії лінійних диференціальних рівнянь *n*-го порядку.

Метод математичного моделювання. Навчальна дисципліна “Диференціальні рівняння” дає багатий матеріал для формування у майбутніх учителів математики вміння застосовувати метод математичного моделювання. Дійсно, перші диференціальні рівняння виникли ще в другій половині XVII ст. для розв'язування саме прикладних задач. А тому варто розпочинати вивчення цієї дисципліни з таких питань: 1) предмет вивчення; 2) задачі математичного моделювання реальних процесів, які ілюструють виникнення диференціальних рівнянь (аби показати природність об'єктів подальшого вивчення) [3, с. 9]. Диференціальні моделі відіграють чи не найважливішу роль у пізнанні дійсності засобами математики. Серед них є складні, але є і такі, які доступні для вивчення у старших класах загальноосвітньої школи. Майбутній учитель математики повинен володіти знаннями про математичні моделі, зокрема, диференціальні, уміннями їх будувати та досліджувати. Для майбутнього вчителя математики важливо знати і розуміти, що тільки для незначної кількості диференціальних рівнянь розв'язок можна отримати в аналітичному вигляді (хоча під час вивчення курсу такий висновок зробити важко, бо розглядаються саме такі рівняння, розв'язок яких знаходять в аналітичному вигляді). А тому студенти повинні мати уявлення про методи чисельного розв'язування диференціальних рівнянь, а потім ці уявлення переростуть у знання і вміння користуватися цими методами (під час вивчення методів обчислень).

Алгоритмічний метод реалізується під час розв'язування багатьох диференціальних рівнянь першого та вищих порядків. Дійсно, встановивши вид диференціального рівняння, зразу ж застосовуємо відповідний алгоритм розв'язання. Так, якщо диференціальне рівняння можна записати у вигляді $N_1(x)M_1(y)dx + N_2(x)M_2(y)dy = 0$, то розділяємо змінні (і цей процес також прописаний) і інтегруємо; якщо для правої частини рівняння $y' = f(x; y)$ виконується умова $f(tx; ty) = f(x; y), t \neq 0$, то вводимо заміну $y = x \cdot u(x)$ і за встановленим алгоритмом зводимо рівняння до рівняння з відокремленими змінними і знову ж таки за певним алгоритмом знаходимо його загальний розв'язок.

Крім того, ця навчальна дисципліна має широкий арсенал *методів, які відносяться до методів конкретно наукової методології*: метод відокремлення змінних, метод заміни змінної, метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа), метод підстановки (метод Й. Бернуллі) – розв'язування лінійних ДР 1-го порядку, метод ізоклін (метод дослідження ДР за допомогою схематично побудованих інтегральних кривих ДР), метод введення параметра, метод Ейлера, метод інтегруючого множника, метод розв'язування рівнянь у повних диференціалах, метод Коші, метод невизначених коефіцієнтів, метод Д'Аламбера, метод степеневих рядів, метод виключення (для систем – зведення нормальної системи рівнянь до одного диференціального рівняння, розв'язаного відносно старшої похідної), матричний метод інтегрування однорідних стаціонарних систем.

Виокремимо ***фундаментальні поняття*** диференціальних рівнянь: звичайне диференціальне рівняння (ДР), його порядок, розв'язок ДР: загальний, частинний, особливий, інтегральна крива, задача Коші, рівняння з відокремлюваними змінними, однорідне рівняння, лінійне ДР (однорідне і неоднорідне), рівняння у повних диференціалах, інтегруючий множник, рівняння Бернуллі, рівняння Рікатті, рівняння Лагранжа, рівняння Клеро, лінійне ДР n-ого порядку, визначник Вронського, фундаментальна система розв'язків ЛОДР, характеристичне рівняння, характеристичні числа, система звичайних ДР першого порядку, розв'язок і інтегральна крива системи, перший та загальний інтеграли системи, лінійна система ДР, характеристичне рівняння та характеристичні числа системи ДР, ДР з частинними похідними, його порядок та розв'язок, канонічний вигляд, інтегральна поверхня, система характеристик, рівняння гіперболічного, параболічного та еліптичного типів.

До ***фундаментальних фактів*** будемо відносити: теорема про існування та єдиність розв'язку задачі Коші, схеми застосування основних методів диференціальних рівнянь, правило знаходження особливих розв'язків, необхідна і достатня умови лінійної незалежності n функцій, теорема про структуру загального розв'язку лінійного однорідного ДР n-ого порядку, формула Остроградського – Ліувілля, залежність структури загального розв'язку лінійного однорідного ДР n-ого порядку зі сталими коефіцієнтами від характеристичних чисел, теорема про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного ДР n-ого порядку, формула Абеля, структура загального розв'язку лінійної однорідної системи ДР, залежність структури фундаментальної системи розв'язків лінійної однорідної системи ДР від характеристичних чисел, структура загального розв'язку лінійної неоднорідної системи ДР, схема зведення ДР з частинними похідними до системи звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі, класифікація та канонічна форма ДР з частинними похідними другого порядку, схема-орієнтир зведення ДР з частинними похідними другого порядку до канонічного вигляду, метод Лагранжа, метод Якобі, метод Фур'є.

Важливим фактором для формування методологічних знань є ознайомлення студентів з ***історією розвитку*** певної галузі математики, її основних понять та фактів. Детально історію виникнення і розвитку диференціальних рівнянь студенти вивчатимуть у курсі "Історія математики" (або "Історія і методологія математики"). На етапі вивчення диференціальних рівнянь можна запропонувати студентам ознайомитися з основними етапами розвитку цієї галузі за підручниками ([2], [3], [5]).

Теорія звичайних диференціальних рівнянь зародилася у XVII столітті. Основними джерелами виникнення поняття "диференціальне рівняння" були: 1) так звані "обернені задачі на дотичні" (задачі відшукання кривих за відомими властивостями їх дотичних); 2) кінематичний спосіб побудови різних кривих, який спирався на поняття миттєвої швидкості [3, с. 7-8]. Вже у XVIII столітті теорія звичайних диференціальних рівнянь розвинулася настільки, що її стали розглядати як самостійну наукову дисципліну. Велику роль у цьому зіграли праці І. Ньютона, Г. Лейбніца, Й. Бернуллі, Я. Бернуллі, Р. Декарта, Л. Ейлера, Я. Ріккаті, Ж. Д'Аламбера, Ж. Лагранжа.

Термін "диференціальне рівняння" вперше ввів Г. Лейбніц у 1676 році. У цей самий час І. Ньютон запропонував метод відшукання розв'язків диференціальних рівнянь у вигляді степеневих рядів, а Г. Лейбніц поставив задачу відшукання розв'язків у скінченному вигляді. Велика заслуга у формуванні і розвитку теорії диференціальних рівнянь Л. Ейлера. Саме він ввів поняття загального, частинного розв'язків та займався особливими розв'язками. Розвинув метод інтегруючого множника не тільки для рівнянь першого, а й вищих порядків. Л. Ейлеру належить метод розв'язування однорідного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами за допомогою характеристичного рівняння та з'ясування його загального розв’язку (1743 рік). У праці “Інтегральне числення” Л. Ейлер вперше виклав загальну теорію диференціальних рівнянь.

І в області диференціальних рівнянь з частинними похідними Л. Ейлер зробив значний внесок. Цьому вченому належить перша монографія, в якій зроблено першу спробу побудови теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних. Над цією проблемою, крім Л. Ейлера, працювали Ж. Д’Аламбер, Ж. Лагранж, П. Лаплас та інші. Сучаснику Л. Ейлера, Д. Бернуллі, належить загальний метод розв’язування задач про коливання пружних систем (у тому числі коливання струни). Розквіт теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними приходиться на початок XIX століття і пов’язаний з іменами С. Пуассона, Ж. Фур’є, О. Коші, М. Остроградського та інших.

Важливим питанням теорії диференціальних рівнянь є питання про існування розв’язків диференціальних рівнянь (чи їх систем). Перші результати дослідження цієї проблеми отримали О. Коші (звичайні диференціальні рівняння) та С. Ковалевська (диференціальні рівняння з частинними похідними) [5, с. 438].

Розбудова теорії диференціальних рівнянь триває вже понад три століття. На сьогодні – це багаторівнева розгалужена система знань, яка має широкі зв’язки з іншими математичними дисциплінами та іншими галузями науки. І ці зв’язки постійно розширюються. Наведемо приклади основних зв’язків.

Для вивчення дисципліни “Диференціальні рівняння” необхідні знання з:

1. Математичного аналізу. Неперервність функції однієї і багатьох змінних. Диференціальне числення функції однієї і багатьох змінних. Методи інтегрування. Степеневі ряди. Принцип стискуючих відображень.

2. Лінійної алгебри. Поняття лінійного рівняння і системи лінійних рівнянь, метод Гауса для розв’язування систем, визначники (наприклад, визначник Вронського). Лінійна комбінація векторів, лінійна залежність і лінійна незалежність векторів, відповідні теореми і наслідки з них. Лінійні оператори. Квадратичні форми.

3. Аналітичної геометрії. Векторна алгебра.

4. Диференціальної геометрії. Однопараметрична сім’я кривих.

5. Елементарної математики. Перетворення виразів, розклад на множники, розв’язування рівнянь. Похідні пропорції. Показникова функція та її властивості.

6. Алгебри і теорії чисел. Теорія многочленів, комплексні числа.

7. Математичної логіки та теорії алгоритмів. Поняття алгоритму.

Знання, отримані під час вивчення диференціальних рівнянь, необхідні для вивчення:

1. Методів математичної фізики. Рівняння в частинних похідних, рівняння гіперболічного, еліптичного, параболічного типів.

2. Варіаційного числення. Звичайне диференціальне рівняння (диференціальні рівняння екстремалей або рівняння Ейлера), рівняння з відокремлюваними змінними, система звичайних диференціальних рівнянь.

3. Методів обчислень. Поняття диференціального рівняння, задачі Коші.

4. Методики навчання математики. Поняття звичайного диференціального рівняння, його розв’язку. Гармонічні коливання.

Крім того, варто наголосити, що диференціальні рівняння широко застосовуються для розв’язання багатьох прикладних задач, які містять елементи руху, з різноманітних галузей науки. Основою такого застосування є метод математичного моделювання. Ідея застосування зазначеного методу для розв’язування прикладних задач є загальна ідея лінеаризації – заміна функцій на малих проміжках зміни аргумента лінійними функціями. У більшості випадків побудувати диференціальну модель явища чи процесу на основі такої ідеї вдається, хоча є винятки. Детальніше про застосування диференціальних рівнянь у різних галузях науки у наших подальших дослідженнях.

Важливим елементом методологічних знань майбутніх учителів математики є те, що одне і те саме диференціальне рівняння може бути математичною моделлю абсолютно різних реальних явищ і процесів з різних галузей знань. Так, наприклад, диференціальне рівняння $\frac{dy}{dt} = ky(t)$ описує процеси радіоактивного розпаду, хімічних реакцій, ним можна скористатися для розв’язування багатьох задач екології, задач про ефективність реклами, зростання інформаційних потоків тощо ([2], [4]). У банківській справі нарахування заборгованості за кредитом або доходів за вкладами також відбувається відповідно до цього закону, але у цих випадках час відраховується не неперервно, а через дискретні проміжки.

Диференціальні рівняння гармонічних коливань описують і коливання математичного маятника, і коливання в електричній мережі, і траєкторію руху тіла, кинутого під кутом до горизонту. Знання таких фактів дозволяє вивчати одні явища і процеси за допомогою інших, доступніших для дослідження.

Висновки. Як бачимо, масив фундаментальних понять та фактів диференціальних рівнянь достатньо широкий. Кожне із цих понять має свою історію розвитку. Ознайомлення майбутнього вчителя математики з методологічними знаннями з диференціальних рівнянь показує шляхи відкриття нових фактів, озброює методами отримання нових знань. А це сприяє розширенню досвіду пізнання студентів.

Перспективи подальших розвідок у даному напрямку полягають у з’ясуванні шляхів формування системи методологічних знань і вмінь з диференціальних рівнянь майбутнього вчителя математики.

Використана література:

1. *Бевз В. Г.* Історія математики / Валентина Бевз. – Х. : Вид. гр. “Основа”, 2006. – 176 с.
2. *Гой Т. П.* Диференціальні рівняння : навчальний посібник / Т. П. Гой, О. В. Махней. – Івано-Франківськ : Сімик, 2012. – 352 с.
3. *Самойленко А. М.* Диференціальні рівняння : підручник / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк. – 2-ге вид., перероб. і доп. – К. : Либідь, 2003. – 600 с.
4. *Самойленко А. М.* Диференціальні рівняння у задачах / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, М. О. Перестюк. – К. : Либідь, 2003. – 504 с.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Основы математического анализа : в 2 т. / Г. М. Фихтенгольц. – М., 1957. – Т. 2. – 465 с.

References:

1. *Bevz V. H.* Istoriia matematyky / Valentyna Bevz. – X. : Vyd. hr. “Osnova”, 2006. – 176 s.
2. *Hoi T. P.* Dyferentsialni rivniannia : navchalnyi posibnyk / T. P. Hoi, O. V. Makhnei. – Ivano-Frankivsk : Simyk, 2012. – 352 s.
3. *Samoilenko A. M.* Dyferentsialni rivniannia: Pidruchnyk / A. M. Samoilenko, M. O. Perestiuk, I. O. Parasiuk. – 2-he vyd., pererob. i dop. – K. : Lybid, 2003. – 600 s.
4. *Samoilenko A. M.* Dyferentsialni rivniannia u zadachakh / A. M. Samoilenko, S. A. Kryvosheia, M. O. Perestiuk. – K. : Lybid, 2003. – 504 s.
5. *Fykhtenholts H. M.* Osnovy matematycheskoho analyza : v 2 t. / H. M. Fykhtenholts. – M., 1957. – T. 2. – 465 s.

Кугай Н. В. Методологические знания будущего учителя математики по учебной дисциплине “Дифференциальные уравнения”.

Статья посвящена проблеме выделения методологических знаний будущего учителя математики. Отмечено, что методологические знания состоят из нескольких структурных уровней. На сегодня самой распространенной является структурная модель методологических знаний, в которой выделены четыре уровня: философский; общенаучный; конкретно научный; уровень процедур и техник исследования.

К методологическим знаниям конкретно научного уровня будем относить знания о: предмете учебной дисциплины; конкретно научных методах учебной дисциплины; фундаментальных понятиях; фундаментальных отношениях между понятиями; фундаментальных теоретических фактах (определения, аксиомы, теоремы), связях с другими учебными дисциплинами; пределах применимости знаний; истории развития.

В работе рассмотрены методологические знания конкретно научного уровня по дифференциальным уравнениям, в частности: предмет, метод, фундаментальные понятия и факты дифференциальных уравнений, история развития.

Приведены примеры использования общеметодологических методов при изучении учебной дисциплины “Дифференциальные уравнения”: метод математического моделирования, метод аналогий, вычислительный эксперимент, алгоритмический метод. Выяснена связь дифференциальных уравнений с учебными дисциплинами математического цикла.

***Ключевые слова**: дифференциальные уравнения, методологические знания, уровни методологических знаний, предмет дифференциальных уравнений, методы дифференциальных уравнений.*

Kuhay N. V. Methodological knowledge of future teacher of mathematics on educational discipline “Differential equalizations”.

The article is sacred to the problem of selection of methodological knowledge of future teacher of mathematics. It is marked that methodological knowledge consist of a few structural levels. For today most widespread is a structural model of methodological knowledge, four levels are distinguished in which: philosophical; scientific; concretely scientific; level of procedures and research techniques.

To methodological knowledge concretely of scientific level will take knowledge about: the article of educational discipline; concretely scientific methods of educational discipline; fundamental concepts; fundamental relations between concepts; fundamental theoretical facts (determinations, axioms, theorems), connections with other educational disciplines; limits of applicability of knowledge; histories of development.

Methodological knowledge concretely of scientific level are in-process considered on differential equalizations, in particular: object, method, fundamental concepts and facts of differential equalizations, history of development.

Examples of the use of общеметодологических methods are made at the study of educational discipline “Differential equalizations”: method of mathematical design, method of analogies, calculable experiment, algorithmic method. Connection of differential equalizations is found out with educational disciplines of mathematical cycle.

***Keywords:** differential equalizations, methodological knowledge, levels of methodological knowledge, article of differential equalizations, methods of differential equalizations.*