УДК 519.6:338

Кліндухова В. М., Вяла Ю. Е.

КЛАСИЧНІ ЗАДАЧІ УМОВНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ТА ЇХ ІНТЕГРАТИВНИЙ ХАРАКТЕР У КУРСІ ВИЩОЇ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТІВ ЕКОНОМІЧНИХ СПЕЦІАЛЬНОСТЕЙ

Стаття присвячена деяким питанням підвищення рівня математичної підготовки студентів. Зокрема, підкреслюється значимість математичних інтегративних задач при підготовці студентів економічних спеціальностей. Імплементація таких задач у навчальний процес, залучення студентів у відповідну інтегративну навчальну діяльність сприяє не лише підвищенню якості математичної культури студентів, а і формуванню в них професійних інтегративних навичок.

У статті, в основному, приділена увага практичним питанням. Запропоновано декілька груп задач. Описані особливості розв'язування цих задач. За основу взято класичні задачі умовної оптимізації. Увага до них не випадкова. Задачі умовної оптимізації є невід'ємною складовою курсу вищої математики і об'єктивно містять елементи інтегративності. Для їх розв'язування необхідно актуалізувати та застосувати знання і уміння із різних розділів математики. Усе це робить задачі умовної оптимізації вдалим прикладом природного, гармонійного "вплітання" інтегративних задач в математичну підготовку студентів.

Ключові слова: *вища математика, інтегративна задача, умовна оптимізація, метод Лагранжа.*

Інтегративний підхід є актуальним та важливим аспектом сучасної освіти. Він дає можливість розглядати зміст навчання окремої дисципліни саме у процесі взаємодії з іншими навчальними дисциплінами (або темами в межах однієї навчальної дисципліни). Інтегративна лінія у курсі математичних дисциплін має знаходити і поступово знаходить певну реалізацію під час розв'язування студентами навчальних математичних задач інтегративного змісту. Описове означення задач інтегративного змісту наводять у своїх роботах Кушнір В. А. та Ріжняк Р. Я. [2], [3], [4]. Зокрема, вони вказують, що це задачі творчого характеру, задачі з потужним математичним змістом та складною структурою взаємозв'язків між компонентами їх фабули. Інтегративні задачі мають потенціал для створення на їх базі нових задач та серій задач. Розв'язування таких задач потребує глибоких знань та винахідливості. Студентами використовуються не лише знання з певної теми, а й виникає необхідність проведення систематизації та узагальнення здобутих знань з різних розділів (а то й з інших навчальних дисциплін). Це, з однієї сторони, вимагає сформованості у суб'єктів навчання певного рівня математичної та інформаційної культури, а з іншої – сприяє їх подальшому розвитку. Практична реалізація процесу "вбудовування" задач інтегративного змісту у навчальну математичну діяльність студентів потребує певної деталізації. Потрібні "вдалі" задачі. По-перше, вони мають втілювати у собі саму ідею інтегративності. По-друге, їх розв'язування не має вимагати знань і умінь, котрі виходять за межі навчальних програм. Саме прикладам таких задач, а також їх розв'язанню присвячують свої роботи Кушнір В. А. та Ріжняк Р. Я. [2], [3], [4].

У контексті обговорення інтегративних задач особливої уваги, на наш погляд, заслуговують класичні задачі умовної оптимізації. Вони є невід'ємною складовою традиційного курсу вищої математики, а також деяких спеціальних математичних дисциплін, які вивчаються студентами економічних спеціальностей. Такі задачі є вдалим прикладом інтегративних задач. Подібні задачі можна зустріти майже у всіх підручниках з вищої математики, однак, на нашу думку, слід більше уваги приділяти певним особливостям їх розв'язування, а також яскравіше використовувати їх можливості, зокрема, і інтегративного характеру.

Мета даної статті: навести конкретні приклади класичних задач умовної оптимізації, пов'язаних із професійною спрямованістю студентів економічних спеціальностей. Зокрема, мова піде про: задачі мінімізації витрат підприємства (при фіксованих обсягах випуску продукції); задачі оптимального розподілу товарів та послуг; задачі цінової дискримінації [1].

У наведених нижче задачах інтегруються знання й уміння учнів із наступних розділів: шкільного курсу математики; елементів лінійної алгебри (матриці, визначники, квадратичні форми, розв'язування систем лінійних рівнянь), диференціальне числення функції однієї та багатьох змінних. Коротко нагадаємо основні твердження на яких ґрунтується розв'язування нижче наведених задач [1].

1. Задача мінімізації витрат підприємства (при фіксованих обсягах випуску продукції). Нехай: $x_1, x_2, ..., x_n$ – обсяги різних ресурсів, які підприємство використовує для випуску продукції (фактори виробництва); $p_1, p_2, .. p_n$ – ціни факторів виробництва (сталі величини); $q = q(x_1, x_2, ..., x_n) = q_0$, $(q_0 = const)$ – виробнича функція (функція, якою виражається обсяг продукції через обсяги ресурсів $x_1, x_2, ..., x_n$,). Загальні витрати підприємства задаються функцією витрат ***C***, яка, як правило, має вигляд: $C = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$.*Основна задача мінімізації витрат підприємства*:фірма намагається мінімізувати витрати шляхом раціонального розподілу ресурсів при фіксованих обсягах продукції:

$$C(x_1, x_2, ..., x_n) \to \min, \quad q(x_1, x_2, ..., x_n) = q_0$$

Задача 1 *(приклад задачі мінімізації витрат підприємства)*. Нехай виробничу функцію підприємства виражено функцією Кобба-Дугласа $q = 3x^{0,1}y^{0,9}$, де x – витрати капіталу, y – витрати людської праці. Знайти набір ресурсів (x^*, y^*), який забезпечує мінімальні витрати виробництва за фіксованого обсягу продукції $q_0 = 1000$, якщо задані відповідні ціни на ресурси (в умовних грошових одиницях) $p_x = 3$, $p_y = 4$. Обчислити ці витрати.

Розв'язання. Математична модель задачі матиме вигляд: $C = p_x x + p_y y \to \min$ при умові, що $q(x, y) = q_0$, тобто:

$C = 3x + 4y \to \min$, при умові, що $3x^{0,1}y^{0,9} = 1000$.

Розв'яжемо отриману задачу умовної оптимізації методом множників Лагранжа. Побудуємо функцію Лагранжа:

$$L = 3x + 4y + \lambda(3x^{0,1}y^{0,9} - 1000)$$

Знайдемо частинні похідні функції Лагранжа та її стаціонарні точки:

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \begin{cases} 3 + 0{,}3\lambda x^{-0,9} y^{0,9} = 0 \\ 4 + 2{,}7\lambda x^{0,1} y^{-0,1} = 0 \\ 3x^{0,1} y^{0,9} - 1000 = 0 \end{cases} \begin{cases} \lambda = \dfrac{-3}{0{,}3x^{-0,9} y^{0,9}} \\ 4 + 2{,}7 \cdot \dfrac{-3}{0{,}3x^{-0,9} y^{0,9}} \cdot x^{0,1} y^{-0,1} = 0 \\ 3x^{0,1} y^{0,9} - 1000 = 0 \end{cases} \begin{cases} \lambda = \dfrac{-10x^{0,9}}{y^{0,9}} \\ \dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{27} \\ 3\left(\dfrac{4}{27}y\right)^{0,1} y^{0,9} = 1000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = -10\left(\dfrac{4}{27} \cdot \dfrac{1000}{3^{0,7} \cdot 4^{0,1}}\right)^{0,9} \left(\dfrac{1000}{3^{0,7} \cdot 4^{0,1}}\right)^{-0,9} \\ x = \dfrac{4}{27} \cdot \dfrac{1000}{3^{0,7} \cdot 4^{0,1}} \\ y = \dfrac{1000 \cdot 27^{0,1}}{3 \cdot 4^{0,1}} = \dfrac{1000}{3^{0,7} \cdot 4^{0,1}} \end{cases} \begin{cases} \lambda = \dfrac{-10 \cdot 4^{0,9}}{3^{2,7}} \\ x = \dfrac{1000}{3^{3,7} \cdot 4^{-0,9}} \approx 58{,}26 \\ y = \dfrac{1000}{3^{0,7} \cdot 4^{0,1}} \approx 403{,}47 \end{cases}$$

$M\left(\dfrac{1000}{3^{3,7} \cdot 4^{-0,9}}; \dfrac{1000}{3^{0,7} \cdot 4^{0,1}}\right)$ при $\lambda = \dfrac{-10 \cdot 4^{0,9}}{3^{2,7}}$ – стаціонарна точка функції Лагранжа. З'ясуємо її характер, дослідивши $d^2L(M)$:

$$d^2L = L''_{xx}dx^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}dy^2$$

$$\begin{aligned} d^2L(M) &= \left(-0{,}27\lambda x^{-1,9} y^{0,9}\right)dx^2 + 2\left(0{,}27\lambda x^{0,9} y^{-0,1}\right)dxdy + \left(-0{,}27\lambda x^{0,1} y^{-1,1}\right)dy^2 = \\ &= 0{,}27\lambda\left(-x^{-1,9} y^{0,9} dx^2 + 2x^{0,9} y^{-0,1} dxdy - x^{0,1} y^{-1,1} dy^2\right) \end{aligned}$$

Висновків щодо знаку $d^2L(M)$ поки зробити не можемо. З'ясуємо його використавши умову зв'язку, якій за достатньою умовою умовного екстремуму функції n змінних задовольняють dx, dy ($d\varphi_i\left(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0\right) = 0$):

$$(3x^{0,1}y^{0,9} - 1000)'_x\big|_M dx + (3x^{0,1}y^{0,9} - 1000)'_y\big|_M dy = 0$$

$$0{,}3x^{-0,9}y^{0,9}dx + 2{,}7x^{0,1}y^{-0,1}dy = 0$$

$dx = -9\dfrac{x}{y}dy$, враховуючи, що $\dfrac{x}{y} = \dfrac{4}{27}$ отримуємо

$dx = -9 \cdot \dfrac{4}{27}dy = \dfrac{-4}{3}dy$, повертаємось до дослідження знаку $d^2L(M)$:

$$d^2L(M) = 0{,}27\lambda\left(-x^{-1,9}y^{0,9}\left(\frac{-4}{3}dy\right)^2 + 2x^{0,9}y^{-0,1}\left(\frac{-4}{3}dy\right)dy - x^{0,1}y^{-1,1}dy^2\right) =$$

$$= -0{,}27\lambda\left(\frac{16}{3}x^{-1,9}y^{0,9}dy^2 + \frac{8}{3}x^{0,9}y^{-0,1}dy^2 + x^{0,1}y^{-1,1}dy^2\right) > 0,$$

так як $\lambda = \dfrac{-10 \cdot 4^{0,9}}{3^{2,7}} < 0$, $-0{,}27\lambda > 0$, $x > 0$, $y > 0$.

Таким чином точка $M\left(\dfrac{1000}{3^{3,7} \cdot 4^{-0,9}}; \dfrac{1000}{3^{0,7} \cdot 4^{0,1}}\right)$ є точкою умовного мінімуму.

$$C_{ум.\min}\left(\frac{1000}{3^{3,7}\cdot 4^{-0,9}};\frac{1000}{3^{0,7}\cdot 4^{0,1}}\right)=C_{ум.\min}\left(\approx 58,26;\approx 403,47\right)=\frac{3\cdot 1000}{3^{3,7}\cdot 4^{-0,9}}+\frac{4\cdot 1000}{3^{0,7}\cdot 4^{0,1}}\approx 597,73(гр.од.)$$

Відповідь. Набір ресурсів $\left(x^{*}\approx 58,26; y^{*}\approx 403,47\right)$ при заданих умовах забезпечує мінімальні витрати підприємства, які складатимуть $\approx 597,73(умов.грош.один.)$.

2. <u>Задача оптимального розподілу товарів.</u> Нехай $x_1, x_2, ..., x_n$ – обсяги випуску різних товарів, які виробляє підприємство; $p_1, p_2, ... p_n$ – відповідно їх ціни (сталі величини); $C = C(x_1, x_2, ..., x_n)$ – функція витрат; $R = p_1x_1 + p_2x_2 + ... + p_nx_n$ – дохід підприємства за певний період часу; $P(x_1, x_2, ..., x_n)$ – функція прибутку. *Основна задача оптимального розподілу товарів:* фірма намагається максимізувати прибуток шляхом випуску раціонального кількості різних товарів при фіксованих цінах на них:

$$P(x_1, x_2, ..., x_n) = (p_1\cdot x_1 + p_2\cdot x_2 + ... + p_n\cdot x_n) - C(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max$$

Задача оптимального розподілу товарів часто містить *обмеження,* які накладаються на керовані змінні. Отриману таким чином задачу умовної оптимізації розв'язують класичними методами або спеціальними.

***Задача 2** (приклад задачі оптимального розподілу товарів).* Транспортне підприємство виконує три види транспортних послуг: *А, В і С*; x, y, z – обсяги виконаних транспортних послуг *А, В і С* відповідно; $p_x = 140(гр.од.)$, $p_y = 80(гр.од.)$, $p_z = 5(гр.од.)$ – їх ціна. Функція витрат підприємства має вигляд: $C = 2x^2 - 2xy + 3y^2 + z^2 - 42000$. Згідно ліцензійних вимог загальний обсяг наданих транспортних послуг має дорівнювати 300, причому через особливості транспортно-технологічного процесу обсяги виконання послуги *А* рівно удвічі мають перевищувати обсяги виконання послуги *В*. Знайти значення x, y, z при яких прибуток, отриманий підприємством за таких умов буде максимальним. Обчислити цей прибуток.

Розв'язування. Математична модель задачі матиме вигляд:

$P = (xp_x + yp_y + zp_z) - C \to \max$, при умовах що $x + y + z = 300$ та $x = 2y$,

$P = (140x + 80y + 5z) - (2x^2 - 2xy + 3y^2 + z^2 - 42000) \to \max$, при умовах що $x + y + z = 300$ та $x = 2y$.

Розв'яжемо отриману задачу умовної оптимізації методом множників Лагранжа. Побудуємо функцію Лагранжа:

$$L = -2x^2 - 3y^2 + 2xy + 140x + 80y + 42000 - z^2 + 5z + \lambda_1(x + y + z - 300) + \lambda_2(x - 2y)$$

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_z = 0 \\ L'_{\lambda_1} = 0 \\ L'_{\lambda_2} = 0 \end{cases} \begin{cases} -4x + 2y + 140 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -6y + 2x + 80 + \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ -2z + 5 + \lambda_1 = 0 \\ x + y + z - 300 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \begin{cases} x = \dfrac{-4290}{-32} \approx 134,1 \\ y = \dfrac{-2145}{-32} \approx 67,0 \\ z = \dfrac{-3165}{-32} \approx 98,9 \\ \lambda_1 = \dfrac{-6170}{-32} \approx 192,8 \\ \lambda_2 = \dfrac{-2220}{-32} \approx 69,4 \end{cases}$$

Отриману систему доцільно запропонувати студентам розв'язати методом Крамера.

Точка $M\left(\frac{4290}{32};\frac{2145}{32};\frac{3165}{32}\right)$ при $\lambda_1=\frac{6170}{32};\lambda_2=\frac{2220}{32}$ – стаціонарна точка функції Лагранжа з'ясуємо її характер, дослідивши $d^2L(M): d^2L=L''_{xx}dx^2+2L''_{xy}dxdy+L''_{yy}dy^2$; $d^2L(M)=-4dx^2+2\cdot 2dxdy-6dy^2-2dz^2$.

Висновків щодо знаку $d^2L(M)$ поки зробити не можемо. З'ясуємо його використавши умову зв'язку, якій за достатньою умовою умовного екстремуму функції n змінних задовольняють dx, dy, dz ($d\varphi_i\left(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0\right)=0$):

$$\begin{cases}(x+y+z-300)'_x\big|_M dx+(x+y+z-300)'_y\big|_M dy+(x+y+z-300)'_z\big|_M dz=0\\ (x-2y)'_x\big|_M dx+(x-2y)'_y\big|_M dy+(x-2y)'_z\big|_M dz=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}dx+dy+dz=0\\ dx-2dy=0\end{cases}\begin{cases}2dy+dy+dz=0\\ dx=2dy\end{cases}\begin{cases}dz=-3dy\\ dx=2dy\end{cases}$$

$$d^2L(M)=-16dy^2+8dy^2-6dy^2-18dy^2=-32dy^2<0$$

Таким чином точка $M\left(\frac{4290}{32};\frac{2145}{32};\frac{3165}{32}\right)$ – точка умовного максимуму.

$$u_{ум.макс.}=u\left(\frac{4290}{32};\frac{2145}{32};\frac{3165}{32}\right)\approx 25391(грош.од)$$

Відповідь. Транспортне підприємство отримає максимальній прибуток при наданні послуги *A* у обсязі 134 одиниць; послуги *B* – 67 одиниць; послуги *C* – 99 одиниць. Прибуток при цьому становитиме приблизно 25391 гр. од.

3. Задача цінової дискримінації. Нехай $x_1,x_2,...,x_n$ – обсяги товару одного виду, які пропонує підприємство на різних ринках із різним попитом;

$p_i(x_i)$ – їх ціни на кожному ринку (відповідні залежності часто описуються кривими попиту); $R=p_1x_1+p_2x_2+...+p_nx_n$ – дохід підприємства за певний період часу; $C=C(x_1,x_2,...,x_n)$ – функція витрат; $P(x_1,x_2,...,x_n)$ – функція прибутку. *Основна задача цінової дискримінації*:фірма намагається максимізувати прибуток шляхом представленості раціональної кількості товару одного виду на різних ринках та відповідних цінах товару на кожному з них:

$$P(x_1,x_2,.,x_n)=(p_1\cdot x_1+p_2\cdot x_2+..+p_n\cdot x_n)-C(x_1,x_2..,x_n)\to\max$$

Задача цінової дискримінації часто містить *обмеження*, які накладаються на керовані змінні. Отриману таким чином задачу умовної оптимізації розв'язують класичними методами або спеціальними.

***Задача 3** (приклад задачі цінової дискримінації)*. Фірма виконує транспортну послугу на ринках А і В у обсягах *x* та *y* відповідно. Криві попиту для кожного ринку мають вигляд: $p_A=60-x+y$; $p_B=10+2x-y$, де p_A,p_B – ціна транспортної послуги на ринках А і В відповідно. Функція загальних витрат має вигляд: $C=20x+2xy+20y$. Крім цього, фірма зв'язана обмеженням на загальний обсяг пропонованих послуг, зокрема квота складає 50 одиниць. Знайти максимальний прибуток, що може бути досягнутий за цих умов, а також відповідні рекомендовані ціни послуг.

Розв'язання. Побудуємо математичну модель задачі:

$P = (xp_A + yp_B) - C \to \max$, при умові що $x + y = 50$.

$P = x(60 - x + y) + y(10 + 2x - y) - (20x + 2xy + 20y) = -x^2 - y^2 + 40x + xy - 10y$

Таким чином задача умовної оптимізації набуває вигляду:

$P = -x^2 - y^2 + 40x + xy - 10y \to \max$, при умові що $x + y = 50$.

Розв’яжемо отриману задачу умовної оптимізації методом множників Лагранжа. Побудуємо функцію Лагранжа:

$L = -x^2 - y^2 + 40x + xy - 10y + \lambda(x + y - 50)$

$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ x + y = 50 \end{cases} \begin{cases} -2x + 40 + y + \lambda = 0 \\ -2y + x - 10 + \lambda = 0 \\ x + y = 50 \end{cases} \begin{cases} x = \dfrac{100}{3} \\ y = \dfrac{50}{3} \\ \lambda = 10 \end{cases} M\left(\dfrac{100}{3}; \dfrac{50}{3}\right)$ при $\lambda = 10$ - стаціонарна точка функції Лагранжа з’ясуємо її характер, дослідивши $d^2L(M)$:

$d^2L(x_0; y_0) = L''_{xx}(dx)^2 + 2L''_{xy}dxdy + L''_{yy}(dy)^2$; $d^2L(M) = -2(dx)^2 + 2dxdy - 2(dy)^2$.

Висновків щодо знаку $d^2L(M)$ поки зробити не можемо. З’ясуємо його використавши умову зв’язку, якій за достатньою умовою умовного екстремуму функції n змінних задовольняють dx, dy ($d\varphi_i(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) = 0$): $(x + y - 50)'_{x\,M}\,dx + (x + y - 50)'_{y\,M}\,dy = 0$

$$dx + dy = 0$$

$$dx = -dy$$

$$d^2L\left(\frac{100}{3}; \frac{50}{3}\right) = -2(-dy)^2 - 2dydy - 2(dy)^2 = -6dy^2 < 0$$

$M\left(\dfrac{100}{3}; \dfrac{50}{3}\right)$ – точка умовного максимуму.

$$P\left(\frac{100}{3}; \frac{50}{3}\right) = 40 \cdot \frac{100}{3} - \left(\frac{100}{3}\right)^2 - \frac{100}{3} \cdot \frac{50}{3} - 10 \cdot \frac{50}{3} - \left(\frac{50}{3}\right)^2 = \frac{1000}{3} \approx 333{,}3(\textit{грош.один.})$$

$$p_A = 60 - x + y = 60 - \frac{100}{3} + \frac{50}{3} \approx 43{,}3(\textit{грош.один.});$$

$$p_B = 10 + 2x - y = 10 + 2 \cdot \frac{100}{3} - \frac{50}{3} = 60(\textit{грош.один.})$$

Відповідь. Максимальний прибуток підприємство отримає надавши приблизно 33 послуги на ринку А та 17 послуг на ринку В. При цьому прибуток складе приблизно 333,3 грошові одиниці, а ціни мають бути 43,3 грошових одиниць (на ринку А) та 60 грошових одиниць (на ринку В).

Задачі 2 та 3 доцільно запропонувати студентам розв’язати не лише методом множників Лагранжа, а і прямим метод. Це дозволить інтегрувати відомості зі шкільного курсу математики (знаходження екстремумів функцій однієї змінної). Під час розв’язування усіх трьох вищенаведених задач дослідження d^2L на знакосталість супроводжувалось певними “труднощами”. Кожного разу доводилося застосовувати умову зв’язку $d\varphi_i(x_1^0, x_2^0, ..., x_n^0) = 0$. Таким випадкам недостатньо уваги приділяється у навчальних посібниках, саме тому ми і звернули на них увагу в межах даної статті.

У якості висновків зауважимо,що під час розв'язування інтегративних задач відбувається найбільш повне розгортання навчальної проблеми (задачі). Розв'язування задач інтегративного змісту формує інтегративні знання як знання більш високого рівня порівняно с простою сукупністю однопредметних знань, розвиває пошуково-дослідницькі, творчі здібності, формує творчий потенціал, математичну й інформаційну культуру суб'єктів учіння [2, 3, 4].

Сьогодення спонукає викладачів сконцентрувати свою увагу не лише на теоретичній, а і на продуктивно-практичній підготовці студентів. Тому наразі досить важливого значення набуває ідея формування у студентів умінь орієнтуватися в наявних інтегративних зв'язках між окремими розділами, темами, предметами. Сформовані таким чином навички інтегративної діяльності стануть необхідними передумовами подальшої успішної професійної діяльності.

Використана література:

1. *Грисенко М. В.* Математика для економістів. Методи й моделі, приклади й задачі : навч. посібник / М. В. Грисенко. – К. : Либідь, 2007. – 720 с.
2. *Кушнір В. А.* Задачі з математики інтегративного змісту // Інформаційні технології в освіті. – 2014. – № 21. – С. 7-24.
3. *Кушнір В. А.* Формування в учнів складних умінь використовувати моделювання у процесі розв'язування математичних задач інтегративного змісту / В. А. Кушнір, Р. Я. Ріжняк // Математика в школі. – 2009. – № 5. – С. 13-17.
4. *Кушнір В. А.* Розв'язування математичних задач інтегративного змісту засобами комп'ютерного моделювання / В. А. Кушнір, Р. Я. Ріжняк // Математика в школі. – 2009. – № 10. – С. 34-39.

References:

1. *Hrysenko M. V.* Matematyka dlya ekonomistiv. Metody y modeli, pryklady y zadachi : Navch. posibnyk / M. V. Hrysenko. – K. : Lybid', 2007. – 720 s.
2. *Kushnir V. A.* Zadachi z matematyky intehratyvnoho zmistu / V. A. Kushnir // Informatsiyni tekhnolohiyi v osviti. – 2014. – № 21. – S. 7-24.
3. *Kushnir V. A.* Formuvannya v uchniv skladnykh umin' vykorystovuvaty modelyuvannya u protsesi rozv'yazuvannya matematychnykh zadach intehratyvnoho zmistu / V. A. Kushnir, R. Ya. Rizhnyak // Matematyka v shkoli. – 2009. – № 5. – S. 13-17.
4. *Kushnir V. A.* Rozv'yazuvannya matematychnykh zadach intehratyvnoho zmistu zasobamy komp'yuternoho modelyuvannya / V. A. Kushnir, R. Ya. Rizhnyak // Matematyka v shkoli. – 2009. – № 10. – S. 34-39.

Клиндухова В. Н., Вялая Ю. Э. Классические задачи условной оптимизации и их интегративный характер в курсе высшей математики студентов экономических специальностей.

Статья посвящена некоторым вопросам повышения уровня математической подготовки студентов посредством решения ими задач интегративного характера. В частности, подчеркивается значимость математических интегративных задач при подготовке студентов экономических специальностей. Имплементация таких задач в учебный процесс, вовлечение студентов в соответствующую интегративную учебную деятельность способствуют не только повышению качества математической культуры студентов, а и формированию у них профессиональных интегративных навыков.

В статье, в основном, уделено внимание практическим вопросам. Предложено нескольких групп задач, посильных для студентов, описаны особенности решения этих задач. Все задачи представлены с решениями. За основу взяты классические задачи условной оптимизации. Внимание к ним не случайно. Задачи условной оптимизации являются неотъемлемой частью курса высшей математики и объективно содержат элементы интегративности. Для их решения необходимо *актуализировать и применить знания и умения из различных разделов математики, в частности: школьный курс математики; элементы линейной алгебры; в некоторых задачах – элементы аналитической геометрии; дифференциальное исчисление функции одной переменной; дифференциальное исчисление функции нескольких переменных. Все это делает задачи условной оптимизации удачным примеров естественного, гармоничного "вплетения" интегративных задач в математическую подготовку студентов.*

Ключевые слова: *высшая математика, интегративная задача, условная оптимизация, метод Лагранжа.*

Klindukhova V., Viala Yu. The classical tasks of conditional optimization and their integrative character in the course of higher mathematics students of economic specialties.

The article is devoted to the problem of improving the level of mathematical training of students. One means of solving this problem are integrative tasks. The integrative solution of mathematical tasks is very important in the training of students of economical specialties. It is expedient to introduce such tasks in the learning process. It is important to engage students in integrative learning activities. This helps to improve the quality of mathematical culture of students. It also contributes to the formation of students ' professional integrative skills.

In the article the attention is paid to practical issues. We considered several groups of tasks that are feasible for students. The characteristics of these tasks. All tasks are done. The basis is the classical problem of conditional optimization. Attention to them is no accident. The task of conditional optimization is part of a course of higher mathematics. They objectively contain elements of integrity. For their solution it is necessary to apply knowledge and skills from various branches of mathematics. In particular: from a school course of mathematics; linear algebra; sometimes of analytical geometry; differential calculus of functions of one variable; differential calculus of functions of several variables. Therefore, the task of conditional optimization is a good example of a natural implementation of integrative tasks in the mathematical preparation of students.

Keywords: *higher mathematics, integrative task, conditional optimization, Lagrange's method.*

УДК 378.011.3-051:517.2

Кугай Н. В.

МЕТОДОЛОГІЧНІ ЗНАННЯ МАЙБУТНЬОГО ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ З НАВЧАЛЬНОЇ ДИСЦИПЛІНИ "ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ"

Стаття присвячена проблемі виокремлення методологічних знань майбутнього вчителя математики. У роботі розглянуто методологічні знання конкретно наукового рівня з диференціальних рівнянь, зокрема: предмет, метод, фундаментальні поняття та факти диференціальних рівнянь, історія розвитку. Наведено приклади використання загальнометодологічних методів під час вивчення навчальної дисципліни "Диференціальні рівняння". З'ясовано зв'язок диференціальних рівнянь з навчальними дисциплінами математичного циклу.

Ключові слова*: диференціальні рівняння, методологічні знання, рівні методологічних знань, предмет диференціальних рівнянь, методи диференціальних рівнянь.*

На сьогодні формування сучасної особистості, яка здатна до саморозвитку, вміє самостійно приймати рішення в умовах, коли світ постійно змінюється, причому змінюється не за лінійними законами, коли не можна спиратися тільки на власний досвід, – одне із