Використана література:

1. Афонин А.С. Основы мотивации труда: Оргнизационно-экономические аспекты: Учебное пособие. – К.: МЗУУП. – 1994. – 304 с.
2. Бондарь В.И. Повышение эффективности подготовки директора школы к управлению процессом обучения: Дис. ... д-ра пед. наук: 13.00.01. – К., 1986. – 343 с.
3. Замфир Кэтэлин. Удовлетворенность трудом. Мнение социолога. – М.: Политиздат. – 1983. – 142 с.
4. Ильин Е.П. Мотивация и мотивы – СПб: Издательство «Питер», 2000. – 512 с.: ил. – (Серия «Мастера психологии»)
5. Мескон М.Х., Альберт М., Хедоури Ф. Основы менеджмента: Пер. с англ. – М.: Дело, 1999. – 800 с.
6. Управління закладами середньої освіти: психологічні аспекти: Навчально-методичний посібник / За ред. Л.М.Карамушки. – Київ – Кіровоград, 1977. – 150 с.

Аннотация

В статье рассмотрены теоретические основы мотивационного процесса трудовой деятельности человека, а также описана прикладная методика и результаты исследования состояния мотивации педагогов внешкольного учебного учреждения.

Коваленко Г.П., Коломієць С.В.
Сумський національний аграрний університет

РЕЖИМ ПЕРІОДИЧНОЇ ГЕНЕРАЦІЇ ВИПРОМІНЮВАННЯ В НАПІВКЛАСИЧНІЙ МОДЕЛІ ОДНОМОДОВОГО ЛАЗЕРА НА ТВЕРДОМУ ТІЛІ

ВСТУП Проблема теоретичного дослідження можливостей виникнення нелінійних динамічних режимів в лазерах з модуляцією параметрів, розробка нових методів керування лазерними параметрами, дослідження фізичних процесів самовпливу в лазерах залишається актуальною задачею. Саме лазери, для яких уже існують теоретичні моделі у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь є найбільш придатними об’єктами для вивчення фундаментальних закономірностей і можливих застосувань нелінійної динаміки в квантовій оптиці.

Проблемам нестійкості в лазерно-оптичних системах приділяється значна увага [1,2,3,4]. Теоретичне вивчення процесів, що формують регулярну та хаотичну динаміку в лазерних системах, базується на аналізі напівкласичних рівнянь, в яких електромагнітне поле розглядається як класичний об’єкт, а активне середовище – як квантовий.

Для дослідження динаміки напівкласичних лазерних моделей використовують методи теорії нелінійних коливань. Аналіз динаміки напівкласичних моделей одномодових лазерів пов’язаний з певними труднощами, до яких належать відсутність загальних методів інтегрування відповідних нелінійних систем диференціальних рівнянь, наявність в лазерних моделях кількох параметрів, які в процесі роботи лазера можуть повільно змінюватись, що істотно впливає на його динаміку, помітне ускладнення напівкласичної моделі в порівнянні з класичною внаслідок врахування нелінійності взаємодії поля з речовиною резонатора та введення нелінійного елементу в резонатор, як ефективного засобу впливу на динаміку лазера. Аналогічні труднощі виникають і при вивченні динаміки лазерів в околі так званих біфуркаційних значень деяких параметрів.

Важливість та актуальність проблеми дослідження явищ біфуркації при аналізі лазерних моделей неодноразово підкреслюється в монографіях [1,2], де наведені експериментальні дані, що ілюструють наявність граничних циклів в динаміці лазера при різних значеннях структурних параметрів. В цих роботах наведено результати теоретичного дослідження лазерів як нелінійних автоколивальних систем, вивчаються процеси, що приводять до формування хаотичних та регулярних пульсацій. Подальша конкретизація проблеми пов’язана з вивченням біфуркації Хопфа, яка виникає при певних значеннях структурних параметрів лазера.

Пропонована робота присвячена теоретичному вивченню можливостей виникнення регулярних пульсацій в моделі одномодового лазера, дослідженню впливу змінювання параметрів твердотільного лазера, що характеризують його структуру або входять до модулятора добротності як параметри керування, на динаміку напівкласичної моделі лазера на твердому тілі.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ТА ЇЇ РОЗВ’ЯЗОК. Розглядається система диференціальних рівнянь, що описує динаміку лазерної моделі напівкласичного типу [1]:

$$\begin{cases} \dot{x} = Gx\left(\dfrac{y}{c + yk} - 1 - \varphi(x)\right) \\ \dot{y} = A - y - \dfrac{xy}{c + yk}, \quad c = 1 + k\dfrac{\delta^2}{1 + k} \end{cases} \qquad (1)$$

де x - інтенсивність поля випромінювання фотонів, y – різниця заселеностей рівнів атомів (інверсія), k - відношення констант релаксації поля і поляризації атомної системи, A – параметр накачки, $\delta = (\omega_0 - \omega_c)\gamma_a^{-1}$, γ_a – швидкість релаксації поляризації атомної системи, ω_c - центр спектральної лінії, ω_0 - власна частота резонатора, $\varphi(x)$ - модулятор добротності резонатора, що залежить від інтенсивності потоку фотонів, G - великий параметр в теорії лазерів класу В. Всі величини – фазові координати, параметри і час – безрозмірні.

Система (1) одержана з більш складної шляхом адіабатного виключення трьох швидкісних фазових координат, тому вона справджується лише при виконанні нерівностей: $\gamma_a \ll \gamma_i$, $\gamma_a \ll \gamma_r$, де γ_i - швидкість релаксації інверсії, γ_r - швидкість згасання поля в резонаторі.

Метою роботи є з’ясування умов виникнення біфуркації Хопфа в системі (1), дослідження стійкості граничних циклів, вивчення впливу параметра k на інтервали стійкості та побудова наближеного розв’язку динамічної системи.

Стаціонарний розв’язок системи (1) знаходиться з рівнянь:

$$x_c k \Phi^2(x_c) - c\left(kA - \Phi(x_c)\Psi(x_c)\right) - A = 0$$

$$y_c = \frac{c\,\Phi(x_c)}{\Psi(x_c)}; \quad \Phi(x_c) = 1 - \varphi(x_c), \quad \Psi(x_c) = 1 - k\varphi(x_c) \qquad (2)$$

що містять параметри A, k, c, а також параметри керування a_{S1}, a_{S2}, $s = 1,2,3$, які входять в функцію $\varphi(x_c)$.

Важливим елементом біфуркаційного аналізу моделі є дослідження власних значень матриці Якобі правих частин системи (1), обчисленої у стаціонарному розв’язку, які мають вигляд

$$2\lambda_{1,2} = SpurM \pm \left[(SpurM)^2 - 4\det M\right]^{1/2},$$

де

$$SpurM = -\left(Gx_c \frac{\partial\Phi(x_c)}{\partial x} + \frac{1}{c}\right), \quad \det M = \frac{Gx_c}{c}\left[\frac{\partial\Phi(x_c)}{\partial x} + \Phi(x_c)\Psi^2(x_c)\right], \qquad (3)$$

$$\Theta = c\, x_c \Phi^2(x_c)$$

Для аналізу динаміки моделі використовується алгоритм біфуркації народження циклу [5], який потребує переходу до канонічної форми Пуанкаре, та дозволяє окрім стаціонарного режиму роботи лазера вивчати періодичні коливання малої амплітуди навколо стаціонарних розв’язків. Істотною обставиною є локальний характер біфуркаційного аналізу, який передбачає, що відхилення фазових координат від стаціонарних розв’язків є малими величинами. Звідки випливає, що в розкладі функцій f_k правих частин системи (1) в ряд Маклорена достатньо зберегти початкові члени включно з кубічними по фазових координатах x, y. Застосування згаданого алгоритму враховує дві додаткові умови: стаціонарний розв’язок вважається достатньо віддаленим від нуля, а саме $x_c > 0{,}1$, а наявність в моделях твердотільних лазерів великого параметра G, що має порядок $O(10^5)$, дозволяє істотно спростити розрахунки.

Згідно з теоремою Хопфа [5], в системі (1) виникають періодичні коливання, коли власні значення матриці Якобі стають суто уявними при деякому значені одного з параметрів системи, що приводить до виконання умов:

$$
\begin{aligned}
&SpurM = -Gx_c \frac{\partial \Phi(x_c)}{\partial x} - \frac{\gamma}{c} = 0 \\
&\det M = \frac{Gx_c}{c}\left(\gamma \frac{\partial \Phi(x_c)}{\partial x} + \Phi(x_c) + \Phi^2(x_c)\right) = 0
\end{aligned}
\qquad (4)
$$

Наявність великого параметра G в моделях лазерів на твердому тілі дозволяє звести рівняння (4) до вигляду $\frac{\partial \Phi(x_c)}{\partial x} = 0$, звідки можна знайти так зване біфуркаційне значення одного з параметрів a_{S1}, a_{S2}, де $s = 1,2,3$. З урахування порядку параметра G випливає, що додатність $\det M$ буде досягнута, якщо $\Phi(x_c) > 0$, що накладає додаткову вимогу на знак параметрів керування.

При виконанні вимог (4), власні значення матриці Якобі стають суто уявними і набирають вигляду

$$
\lambda_{1,2} = \pm i\left(G\frac{x_c^2}{c}\Phi(x_c) - \left(\frac{\gamma}{c}\right)^2\right)^{1/2} \approx \pm i\left(G\frac{x_c^2 \Phi}{c}\right)^{1/2} = \pm i\omega_0,
$$

чим одночасно знайдено нульове наближення до невідомої частоти модуляції Ω.

Застосований в роботі метод дозволяє не тільки з'ясувати умови виникнення періодичних коливань в динамічній системі, але й дослідити їх стійкість через визначення знаку показника Флоке. Далі виконуються основні кроки згаданого алгоритму.

Знаходиться власний вектор матриці Якобі M, яка обчислюється при біфуркаційному значенні одного з параметрів керування, що відповідає власному значенню $i\omega_0$. З його дійсної і уявної частин будується матриця перетворення P

$$
P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{\gamma}{N} & -\frac{\omega_0 c}{N} \end{pmatrix},
$$

за допомогою якої вводяться нові змінні z_1, z_2:

$$
\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix} + P\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix},
$$

$$
x = x_c + z_1,\ y = y_c - QN^{-1},
$$

де

$$N \square Gx_c \square^2,\ Q \square \square z_1 \quad \square_0 c z_2 .$$

Після зазначеного перетворення система (1) записується у вигляді

$$\begin{pmatrix} \dot z_1 \\ \dot z_2 \end{pmatrix} \square P^{-1} \begin{pmatrix} f_1(z_1,z_2) \\ f_2(z_1,z_2) \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix},$$

де P^{-1} – матриця, обернена до матриці P.

Для виконання алгоритму біфуркації народження циклу достатньо в розвиненні функції f_k залишити доданки другого і третього степеня по сукупності змінних z_1, z_2. При цьому вважається, що останні відхиляються від стаціонарного розв'язку не більше ніж на 1. При виконанні перетворень зручно використати ту обставину, що кожна з функцій f_k містить множник $(1 \; q)^{-1}, q \square kQ(\square NC)^{-1}$. Оскільки G має порядок 10^5, k близьке до 0,1, c не перевищує 2, тоді $q \square\square 1$. Отже, достатньо обмежитись першими чотирма доданками ряду геометричної прогресії: $1 \; q \quad q^2 \quad q^3$. Виконання зазначених операцій дозволяє отримати вигляд урізаних правих частин:

$$\overline{F_1} \square \; A_1 z_1^2 \quad B_1 z_1 z_2 \quad C_1 z_2^2 \quad E_1 z_1^3 \quad L_1 z_1^2 z_2 \quad D_1 z_1 z_2^2,$$

$$\overline{F_2} \square A_2 z_1^2 \quad B_1 z_1 z_2 \quad C_2 z_2^2 \quad E_2 z_1^3 \quad L_2 z_1^2 z_2 \quad D_2 z_1 z_2^2,$$

де

$$\begin{aligned} &A_1 \square G\square_2 \quad \square K\square(1 \; cx_c)^{-1},\ B_1 \square(1 \quad 2\square K)\square_0 x_c^{-1},\ C_1 \square\square_0^2 Kcx_c^{-1},\\ &E_1 \square G\square_3 \quad K\square^2 x_c^2 c^{-1},\ L_1 \square 2\square\square_0 Kx_c^{-2},\ D_1 \square K\square_0 cx_c^{-2},\\ &A_2 \square\square G\square_2 x_c \quad (1 \quad K\square)\square_0 cx_c^{-1},\ B_2 \square(1 \quad cx_c)x_c^{-1},\ C_2 \square K\square_0 cx_c^{-1},\\ &E_2 \square\square\left(G\square_3 \quad K\square x_c^2 c\square_0\right)^{-1}\square\square_0 c^{-1},\ L_2 \square 2K\square x_c^{-2},\ D_2 \square K\square_0 cx_c^{-2}, \end{aligned} \qquad (5)$$

$K \square \dfrac{k}{Gc\square} \square O(10^{-6})$, $\square_2, \square_3$ – коефіцієнти ряду Маклорена функції $x_c \quad z_1 \square x_c \quad z_1$ при степенях z_1^2, z_1^3.

З частинних похідних другого і третього порядку функцій $\overline{F_i}$, обрахованих в нулі за спеціальними формулами, наведеними в [5], формуються комплекси g_{ij}:

$$g_{11} = \frac{1}{2}\left(A_1 + C_1 + i\left(A_2 + C_2\right)\right),$$

$$\begin{Bmatrix} g_{02} \\ g_{20} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\left(A_1 - C_1 \pm B_2 + i\left(A_2 - C_2 \mp B_1\right)\right),$$

$$g_{21} = \frac{1}{4}\left(3E_1 + D_1 + L_2 + i\left(3E_2 + D_2 - L_1\right)\right),$$

з яких утворюється величина

$$\Phi = \frac{i}{2\omega_0}\left(g_{20}g_{11} - 2\left|g_{11}\right|^2 - \frac{1}{3}\left|g_{02}\right|^2\right) + \frac{g_{21}}{2}. \qquad (6)$$

Її дійсна $\mathrm{Re}\,\Phi$ і уявна $\mathrm{Im}\,\Phi$ частини використовуються для знаходження елементів розв'язку: малого параметра ε, періоду модуляції T, показника Флоке β, які обчислюються при біфуркаційному значенні одного з параметрів :

$$\varepsilon^2 = -\frac{(\tilde a - a_0)\,\mu'_0}{\mathrm{Re}\,\Phi_0} + O\left((\tilde a - a_0)^2\right), \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}\left(1 + \tau_2\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)\right), \quad \beta = \beta_1\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4),$$

$$\tau_2 = -\omega_0^{-1}\left(\mathrm{Im}\,\Phi_0 - \frac{\mathrm{Re}\,\Phi_0\,\omega'_0}{\mu'_0}\right), \quad \beta_1 = 2\,\mathrm{Re}\,\Phi_0.$$

Згідно з теоремою Хопфа [5], умовою стійкості періодичних коливань є від'ємність показника Флоке, що приводить до необхідності виконання нерівності

$$\mathrm{Re}\,\Phi_0 = -\frac{1}{8\omega_0}\left(2A_1A_2 - A_1B_1 + 2C_1C_2 + C_1B_1 - A_2B_2 + B_2C_2\right) + \frac{1}{8}\left(3E_1 + D_1 + L_2\right) < 0.$$

З вище наведених значень коефіцієнтів випливає, що лише три доданки одержаної суми, а саме $2A_1A_2, A_1B_1, 3E_1$ містять множник G, порядок інших змінюється від $O\left(\sqrt{G}\right)$ до $O\left(G^{-1}\right)$. Якщо прийняти до уваги, що

$$\omega_0^2 = Gc^{-1}\gamma^2\varphi(x_c), \quad A_1A_2 = -\frac{G^2\delta_2^2}{\omega_0 c}, \quad A_1B_1 = \frac{G\delta_2\omega_0}{x_c}, \quad E_1 = G\delta_3,$$

тоді вираз для визначення знаку показника Флоке можна подати у вигляді

$$\mathrm{Re}\,\Phi_0 = G\left(8x_c\gamma^2\varphi(x_c)\right)^{-1}\left(2\delta_2^2 - \gamma^2\varphi(x_c)\delta_2 - 3\delta_3 x_c\right). \qquad (7)$$

Як показує аналіз виразу (7), для забезпечення стійкості періодичного розв'язку потрібно вимагати виконання нерівності

$$KR = 2\delta_{20}^2 - \gamma_0^2\varphi_0(x_c)\delta_{20} - 3\delta_{30}x_c < 0, \qquad (8)$$

всі елементи якої обчислюються при біфуркаційному значенні одного з параметрів.

Критерій стійкості (8) містить параметри k, c два чи більше параметрів керування динамікою лазера, що входять в функцію $\varphi_0(x_c)$, і значення стаціонарного розв'язку x_c. Два параметри з перелічених вилучаються за допомогою рівнянь (2) і (4). Останнє також містить кілька параметрів, кожен з яких можна прийняти за біфуркаційний і виразити його через інші параметри рівняння (4).

При традиційному підході з рівняння (2) знаходиться значення стаціонарного розв'язку x_c. Однак, як правило, рівняння (2) не допускає аналітичного розв'язку щодо невідомої x_c, його доводиться розв'язувати лише чисельно, що не надає можливості шляхом знаходження коефіцієнтів чутливості стежити за тим, як інші параметри впливають на динаміку лазера. Інший, альтернативний, підхід полягає в тому, що з самого початку x_c розглядається як додатковий параметр, а з рівнянь (2) знаходиться інший параметр. Так, розв'язання першого з рівнянь (2) відносно параметру c, що входить до рівняння лінійно, приводить до результату

$$c \square \frac{\square \tilde{A} \quad x_c \square x_c}{\square x_c}, \quad A \square x_c \square x_c \quad , \qquad (9)$$

підстановка якого в критерій (8) надає останньому остаточного значення, що буде використовуватись при аналізі конкретних залежностей $\square x_c$:

$$KR_1 \square 2A \square_{20}^2 \quad \square_0^2 \, x_c \;\; 2\square_{20}^2 kx_c \quad \square_0 \, \tilde{\square}_{20} \quad 3\square_{30} x_c \square 0 \qquad (10)$$

АНАЛІЗ МОДЕЛЕЙ МОДУЛЯТОРА ДОБРОТНОСТІ РЕЗОНАТОРА

Одержання практично важливих результатів не можливо без конкретизації функціональної залежності $\square a,b,x$. Тому нижче розглядаються конкретні залежності, першою з яких є квадратична залежність модулятора добротності від інтенсивності потоку фотонів:

$$\square_1 \square a_{11}x^2 \quad a_{12}x, \quad \square_1 \square 1 \quad \square_1 .$$

Коефіцієнти $\square_2$ і $\square_3$ знаходяться безпосередньо як коефіцієнти многочлена $x_c \;\; z_1 \; 1 \;\; a_{11} \; x_c \;\; z_1^{\;2} \;\; a_{12} \; x_c \;\; z_1$ при степенях z_1 і мають вигляд $\square_2 \square 3x_c a_{11} \tilde{} \;\; a_{12}$, $\square_3 \square a_{11}$. З рівняння $SpurM \square 2a_{11}x_c \tilde{} \;\; a_{12} \square 0$ знаходиться біфуркаційне значення параметра a_{11}: $a_{11}^0 \square \frac{a_{12}}{2x_c}$. Оскільки для додатних a_{12} стійкого циклу не існує, то знак перед a_{12} змінено на протилежний, а величина a_{12} вважається додатною. Елементи критерію (10) при біфуркаційному значенні параметра a_{11}^0 набирають вигляду

$$\square_{20} \square \frac{1}{2} a_{12}, \square_{30} \square \frac{a_{12}}{2x_c}, \square_{10} \square \tilde{1} \quad \frac{1}{2} a_{12} x_c \square 0 .$$

Остання нерівність випливає з вимоги $\square_0^2 \square 0$, що накладає обмеження на значення іншого параметра керування: $a_{12} \square \frac{2}{x_c}$.

Підстановка знайдених значень в критерій (10) дозволяє отримати нерівність:

$$A a_{12}^2 + \square_{10}^2 \left(a_{12}^2 k x_c - 2 a_{12} \square_{10} \right) \square 0, \qquad (11)$$

звідки, з урахуванням обмеження (9), будується інтервал стійкості для параметра накачки A:

$$x_c \square_{10} \square A \square \square_{10}^2 \left(\frac{2\square_{10}}{a_{12}} - k x_c \right). \qquad (12)$$

Необхідна умова існування одержаного інтервалу полягає у виконанні нерівності

$$\square_{10} \left(\frac{2\square_{10}}{a_{12}} - k x_c \right) \square x_c,$$

звідки знаходиться інтервал для параметра керування a_{12}: $0 \square a_{12} \square \frac{1}{x_c}$, який уточнює попередній: $0 \square a_{12} \square \frac{2}{x_c}$.

Виконання аналогічних операцій у випадку, коли у якості біфуркаційного приймається параметр a_{12}, дозволяє отримати інтервал стійкості для параметра накачки A:

$$x_c \square_{10} \square A \square \square_{10}^2 \left(\frac{\square_{10}}{a_{11} x_c} - k x_c \right) \qquad (13)$$

та нерівність, яка обмежує значення для параметра керування a_{11}: $0 \square a_{11} \square \left(2 x_c^2\right)^{-1}$.

Проведення аналогічних операцій для випадку кубічної залежності модулятора добротності від інтенсивності потоку фотонів $\square_2 \square a_{21} x^3 + a_{22} x$, $\square_2 \square 1 - \square_2$, також дозволило з'ясувати умови стійкості періодичної генерації та побудувати інтервали стійкості для параметра накачки A.

Але в цих двох випадках області стійкості в системі координат (x_c, a_{ik}), де $i, k \square 1,2$, виявились достатньо вузькими, тому доцільно розглянути інші моделі. Наступна модель з двома параметрами керування точно відповідає універсальній деформації збірки і має вигляд [6]:

$$\square_3 \square x^4 + a_{31} x^2 + a_{32} x.$$

Для цього випадку маємо

$$\square_2 \square 10x_c^3 \;\; 3a_{31}x_c \;\; a_{32}, \square_3 \square 10x_c^2 \;\; a_{31}, \square_3 \square 1 \;\; \square_3 .$$

З рівняння $SpurM \square 4x_c^3 \;\; 2a_{31}x_c \;\; a_{32} \square 0$ знаходиться біфуркаційне значення параметра a_{31}: $a_{31}^0 \square \; a_{32} \;\; 4x_c^3 \; 2x_c^{-1}$, тоді елементи критерію стійкості набирають вигляду

$$\square_{20} \square 4x_c^3 \;\; \frac{1}{2}a_{32}, \square_{30} \square 8x_c^2 \;\; \frac{a_{32}}{2x_c}, \square_{30} \square 1 \;\; x_c^4 \;\; \frac{a_{32}x_c}{2} \square 0 .$$

З зазначеної нерівності випливає обмеження $a_{32} \square 2\, x_c^4 \;\; 1\, x_c^{-1}$. Підстановка одержаних значень елементів до залежності (10) дозволяє знайти інтервал стійкості для параметра накачки A

$$x_c \square_{30} \square A \square \square_{30}^2 \square_{30} \square 10x_c^3 \;\; \frac{1}{2}a_{32} \square \square_{20}^2 \;\; kx_c , \qquad (14)$$

звідки випливає умова його існування

$$\square_{30} \square 10x_c^3 \;\; \frac{1}{2}a_{32} \square \square \square_{20}^2 x_c .$$

Остання нерівність зводиться до квадратної нерівності відносно невідомої $\square_{20}$:

$$2 \square_{20}^2 x_c \;\; \square_{20}\, 1 \;\; 3x_c^4 \;\; 6x_c^3\, 1 \;\; 3x_c^4 \square 0 ,$$

яка, в свою чергу, виконується, якщо $\square_{20}$ належить інтервалу R_1, R_2, де $R_{1,2} \square 4x_c^{-1}\, 1 \;\; 3x_c^4 \square \sqrt{\square}, \square \square 12x_c^4 \;\; 1^2 \;\; 9x_c^4\, x_c^4 \;\; 2$.

Звідси можна знайти інтервал стійкості для параметра керування a_{32}:

$$4\, x_c^4 \;\; 1\, x_c^{-1} \square a_{32} \square 2\, 4x_c^3 \;\; R_1 .$$

У випадку біфуркаційного параметра a_{32} отримано інтервал стійкості для параметра накачки A

$$x_c \square_{30} \square A \square \square_{30}^2 \square_{30}\, 12x_c^3 \;\; a_{31}x_c \square_{20}^2 \;\; kx_c , \qquad (15)$$

який існує при виконанні нерівності $\square_{30}\, 12x_c^3 \;\; a_{31}x_c \square \square_{20}^2 x_c$, а також інтервал стійкості для параметра керування a_{31}: $\frac{R_1 \;\; 6x_c^3}{x_c} \square a_{31} \square x_c^{-2}\, 1 \;\; 3x_c^2$.

Для побудови періодичного розв’язку динамічної системи використовуються формули з [5], що приводить до результату:

$$\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \square \square \begin{pmatrix} \cos 2\square \\ \sin 2\square \end{pmatrix} \frac{\square^2}{12\square_0} \begin{pmatrix} \sin 4\square \\ \cos 4\square \end{pmatrix} A_1 \;\; C_1 \;\; B_2 . \begin{pmatrix} \cos 4\square \\ \sin 4\square \end{pmatrix} A_2 \;\; C_2 \;\; B_1$$

$$3 \begin{pmatrix} \cos 4\square \\ \sin 4\square \end{pmatrix} A_2 \;\; C_2 \;\; B_1 . \;\; 3\, C_1 \;\; A_1 .. \;\; O \square^3 . \qquad (16)$$

де $\tau = \frac{\omega t}{T}$.

Якщо обмежитись лінійним наближенням по параметру ε, то розв’язок (16) матиме вигляд

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_c\\ y_c\end{pmatrix}+\varepsilon P\begin{pmatrix}\cos 2\tau\\ \sin 2\tau\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_c\\ y_c\end{pmatrix}+\varepsilon\begin{pmatrix}\cos 2\tau\\ -\frac{1}{Gx_c-\gamma}\left(\gamma\cos 2\tau+\omega_0 c\sin 2\tau\right)\end{pmatrix},$$

або

$$x = x_c + \varepsilon\cos 2\tau$$

$$y = y_c - \frac{\varepsilon N}{Gx_c-\gamma}\cos\left(2\tau-\varphi_0\right),$$

$$N=\sqrt{\gamma^2+\omega_0^2c^2},\quad \varphi_0(c)=arctg\,\frac{\omega_0 c}{\gamma}=arctg\left(\frac{\sqrt{Gcx_c-\gamma}}{(cx_c-\gamma)^2}\right)$$

Слід зазначити, що якщо в останній формулі покласти $c=1$, $\gamma=1$, то одержується початкова фаза для класичної моделі Статца-Демарса.

ВИСНОВКИ. Аналіз динаміки напівкласичної моделі показує, що одна з її відмінностей від класичної полягає в тому, що нульове наближення ω_0 невідомої частоти модуляції містить функцію $\varphi(x_c)$, яка мусить бути лише додатною, що обмежує область зміни параметрів керування, в якій може існувати періодичний режим динаміки лазера. Зазначимо, що у випадку моделей 1,2 область для параметра керування визначається додатними півосями координат і кривими типу гіперболи $y=\frac{d}{x^k}$, де $k=1,2,3$. Подібні області стійкості нерідко зустрічаються в техніці, зокрема, в першій задачі Б.В. Булгакова в теорії стійкості нелінійних керованих систем [7].

Друга відмінність напівкласичної моделі від класичної – залежність частоти модуляції ω_0 від нових параметрів k і c. Аналізуючи вплив параметра k на динаміку лазерної моделі, приходимо до висновку, що в першій і другій моделі зростання параметра k приводить до збільшення довжини інтервалу стійкості. В цьому можна переконатись, знайшовши похідну по k від правого кінця інтервалів (12), (13). Наприклад, $\frac{d}{dk}\left(\frac{2\omega_{10}}{a_{12}}-kx_c\right)=\frac{2(1-a_{12}x_c)}{a_{12}}$. Оскільки $a_{12}x_c<1$, то похідна додатна. Аналогічний результат одержується і для інших інтервалів.

З порівняння розглянутих моделей випливає, що третя модель має очевидну перевагу перед двома першими, як щодо розміру області стійкості, так і щодо можливостей ефективного керування динамікою лазера.

В цілому слід відмітити, що при дослідженні властивостей динамічної системи важливу роль відіграють точки біфуркації – значення параметрів, при яких змінюється характер траєкторій через зміну типу або числа рівноважних станів. Зокрема, біфуркація народження граничного циклу визначає умови виникнення автоколивань. Застосований в роботі алгоритм біфуркації народження циклу дозволяє з'ясувати умови виникнення періодичної генерації в лазерній моделі, дослідити стійкість періодичних коливань, знайти період, амплітуду і фазу модуляції, надає можливість побудувати наближений розв'язок динамічної системи. Аналіз отриманого розв'язку, в свою чергу, дозволяє вивчити вплив параметрів лазера на основні характеристики його динаміки. Отже, використаний метод має широкі перспективи подальшого застосування до аналізу інших лазерних моделей подібного типу.

Використана література:

1. Ханин Я.И. Основы динамики лазеров. – М.: Наука, Физматлит, 1999. – 364 с.

2. Самсон А.М., Котомцева Л.А., Лойко Н.А. Автоколебания в лазерах. – Мн.: Навука і тэхніка, 1990. – 280 с.

3. Фолин К.Г., Гайнер А.В. Динамика свободной генерации твердотельных лазеров. – Новосибирск.: Наука, 1979. – 262с.

4. Туровец С.И. Нелинейная динамика лазеров с модуляцией параметров. – Автореф. ... канд. дис. – Мн., 1992. – 17 с.

5. Хэссард В., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла. – М.: Мир, 1985. – 280 с.

6. Касти Дж. Большие системы. – М.: Мир, 1982. – 216 с.

7. Летов А.М. Устойчивость нелинейных регулируемых систем. – М.: Наука, Физматлит, 1962. – 480 с.

Аннотация

В статье описывается режим периодической генерации излучения в полуклассической модели одномодового лазера на твердом теле. Произведен анализ полуклассической модели, показаны отличия от классической модели. В целому сделан вывод о том, что при исследовании свойств динамической системы важную роль сыграют точки бифуркации – значения параметров, при которых изменяется характер траекторий через изменение типа или числа равновесных состояний