словникових статей у нових умовах.

Таким чином, запропоновані завдання сприяють зростанню активності мовленнєвої діяльності молодших школярів, підвищенню рівня самостійності учнів, розвитку творчої уяви. Кожен учень має змогу проявити свої здібності, а вольові зусилля та емоційний стан закріплюють позитивне ставлення учнів до рідної мови, формують у них розуміння важливості словників як довідників і найперших порадників.

Література

1. Коломієць М.П. Словник української мови в малюнках. – К.: Освіта, 1995. – 497 с.

2. Паламарчук В.Ф. Як виховати інтелектуала? – К.: Знання, 1999. – 187 с.

3. Прищепа К.С., Лук`яненко Г.В. Тематичний словник школяра. – К.: Гала, 1998. – 513 с.

Бевз В.Г.
Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

ВЕКТОРИ В РОБОТАХ В.П. ЄРМАКОВА

В історії науки питанню творення, розвитку і застосування векторного числення присвячено багато робіт різних авторів. Ця проблема висвітлювалася під різними кутами зору стосовно джерел векторного числення (геометричне, механічне, алгебраїчне) і в постійній дискусії щодо їх взаємного впливу та пріоритетів. В 1893 році Д.У. Гіббс писав, що векторний аналіз не є творінням однієї людини і що векторне числення чітко виділяється і в явному вигляді використовує ті поняття, які зустрічаються між рядками праць великих геометрів, механіків і астрономів минулого. Історико-енциклопедичні та математичні довідники стверджують, що творення апарату векторного числення і подальший його розвиток здійснювалися за участі Аргана, Весселя, Беллавітіса, Гамільтона, Грассмана, Тета, Максвела, Гібса, Хевісайда та ін.

Досить інтенсивно формуванням теорії векторного числення займалися в середині XIX століття вітчизняні вчені І.І.Сомов (механічний напрям), П.Е.Ромер (алгебраїчний напрям), В.П.Єрмаков (геометричний напрям).

Одним з перших вітчизняних математиків, хто розробив і включив до навчальних курсів теорію векторів, був професор Київського університету св. Володимира В. П. Єрмаков.

Василь Петрович Єрмаков народився 11 березня 1845 року у селі Терюха, біля Гомеля. Середню освіту отримав спочатку в Гомельській, а пізніше Чернігівській гімназіях. В 1864-1868 роках навчався на фізико-математичному факультеті Київського університету. Його вчителями були професори М.Е.Ващенко-Захарченко, І.І.Рахманінов і П.Е.Ромер – вчені, які стежили за останніми досягненнями науки, новими напрямами в математиці і часто включали такі питання в свої курси. З теорією кватерніонів В.П.Єрмаков вперше ознайомився на лекціях П.Е.Ромера.

П.Е.Ромер майже півтора роки був у відрядженні за кордоном, де знайомився з новою математичною літературою і постановкою університетської освіти. Повернувшись до Києва, він, спираючись на алгебру кватерніонів Гамільтона, закладає основи векторної алгебри. Існує думка, що саме П.Е.Ромер вперше у вітчизняній літературі почав користуватися терміном "вектор". В 1867 році Ромер захистив докторську дисертацію "Основные начала метода кватернионов", яку в 1868 році надруковано у вигляді монографії.

Лекції та роботи П.Е.Ромера про метод кватерніонів зацікавили випускника фізико-математичного факультету В.П. Єрмакова і він застосовує цей метод у своїй кандидатській дисертації "Статика, викладена з допомогою методу кватерніонів" (1868 році).

В подальшій науковій діяльності Єрмаков займався різними проблемами математики, механіки, методики математики і загальної культури. Його ім'я стало широко відомим після III з'їзду природодослідників і лікарів, який відбувся в 1871 році в Києві, де Єрмаков виступив з доповіддю про нову ознаку збіжності рядів. В історію вітчизняної математики і культури ім'я В.П.Єрмакова увійшло ще і як засновника і першого редактора найкращого у вітчизняній дореволюційній популярно-математичній періодиці "Журналу елементарної математики".

Журнал В.П.Єрмакова почав виходити в кінці 1884 року. Його метою була розробка і популяризація елементарної математики, а розрахований він був на вчителів і учнів середніх навчальних закладів і на любителів математики. Журнал обсягом в один друкований аркуш виходив раз на два тижні. Під час канікул журнал не виходив і тому річний комплект складався з 18 номерів.

Цікавою і оригінальною формою роботи журналу з читачами були "теми для співпрацівників", які систематично друкувалися на його сторінках. Теми пропонувалися для самостійних наукових занять. Найбільш вдалі розробки запропонованих тем публікувалися в журналі, а їх автори отримували премії у вигляді математичної літератури. Автором більшості таких "тем для співпрацівників" був В. П. Єрмаков. Він вважав, що журнал повинен стати справжньою школою математичного розвитку своїх читачів і тому намагався підбирати для "тем" проблеми актуальні але і в той же час доступні для читачів. Наприклад, у 1886 році Єрмаковим пропонувалися такі три послідовні теми:

Теорія гармонічних чотирикутників;

Теорія векторів на площині;

Про загальний геометричний спосіб розв'язування квадратних рівнянь.

Зупинимось детальніше на двох останніх, подавши їх у тому вигляді, як вони були надруковані в журналі, в перекладі українською.

"Тема для співпрацівників.

Ось ще тема, яка заслуговує найбільшої уваги; вона може називатися так: "Теорія векторів на площині". Цей предмет відомий також під назвою метода еквіполенції.

Вектором називається пряма лінія, в якій приймається до уваги не тільки величина, але і напрям".

Далі автор вводить поняття суми і відношення векторів, одиничного вектора e і вектора i, перпендикулярного до одиничного. Показує зв'язок між вектором і складеним числом АС$=m+ni$, наголошуючи що краще не вживати термін уявне число. Після цього ставиться завдання ввести дії віднімання, множення і ділення векторів, подати вираження вектора через кут і довжину, розглянути середнє пропорційне векторів, добування кореня з вектора і з складеного числа; показати, що над векторами можна виконувати такі самі алгебраїчні дії, як і над числами і що вони мають аналогічні властивості. Після фактично постановки завдання, автор зауважує "За своєю педагогічною і науковою важливістю тема вимагає особливо ретельного оздоблення.

Далі ми побачимо, що теорія векторів може бути застосована до розв'язування геометричних питань. Читачам, які цікавляться цим питанням, рекомендуємо "Exposition de la methode des equipollences par Giusto Bellavitis, traduit de l'italien par C. A. Laisant; Paris: 1874". В цьому творі для векторів введено особливий знак, але на нашу думку цей знак не потрібен і просимо не вводити його у запропоновану тему” [5, С.209].

Перед тим як оголосити наступну тему для читачів, Єрмаков зауважує: "Теорія гармонічних чотирикутників і теорія векторів знаходяться у тісному зв'язку між собою, а також із спільним геометричним розв'язанням квадратних рівнянь, коефіцієнти яких виражаються складеними або, в окремих випадках, звичайними числами.

Тема: "Про загальний геометричний спосіб розв'язування квадратних рівнянь".

Далі В.П.Єрмаков вказує на те, що будь-яке квадратне рівняння можна подати у вигляді $x^2 - px + q^2 = 0$, і тоді його розв'язування зводиться до побудови гармонічного чотирикутника, якщо задані крайні точки однієї діагоналі і середина іншої.

Він відсилає читачів до двох попередніх "тем" і наголошує, що їх висвітлення має відбуватися у заданій послідовності, і дасть можливість раціонального розв'язання третьої проблеми. "Якщо прийняти до уваги властивості гармонічного чотирикутника, то легко помітити, що вектори q і $-q$ – відповідають кінцям однієї діагоналі, а вектор $\frac{p}{2}$ – середина другої діагоналі гармонічного чотирикутника; корені рівняння – це вектори, які відповідають другій діагоналі" [5, 235].

Ми так детально висвітлили спосіб подання в "Журналі елементарної математики" його редактором "тем для співробітників", щоб підкреслити два моменти:

Тема: "Теорія векторів на площині" була розроблена і детально викладена самим постановником проблеми.

В.П.Єрмаков бачив у векторах не просто нове числення, а цінний і могутній апарат для розв'язування задач.

Проаналізуємо з погляду сучасного стану векторного числення роботу В.П.Єрмакова "Теорія векторів на площині. Застосування до дослідження конічних перерізів", видану в 1887 році в Києві. На її титульній сторінці після назви записано: "Склав екстраординарний професор Імператорського університету св. Володимира, член-кореспондент Імператорської Академії Наук В.П.Єрмаков".

Робота складається з 103 параграфів, згрупованих у 10 розділів.

Розділ I. Дії над векторами (додавання і віднімання векторів; переставний, сполучний і розподільний закони додавання; відношення векторів; множення векторів; положення вектора; правило множення векторів; сполучний і розподільний закони множення; ділення векторів.).

Розділ II. Походження складених чисел і дії над ними (відношення двох векторів, як складене число; подання складених чисел на площині; рівність складених чисел; інша форма складеного числа; модуль і аргумент складеного числа; модуль суми і різниці; множення складених чисел; ділення складених чисел; піднесення до степені).

Розділ III. Середній пропорційний вектор і знаходження кореня з векторів і з складених чисел (середній пропорційний вектор; кубічний корінь з вектора; квадратний корінь зі складеного числа; знаходження кореня зі складених чисел).

Розділ IV. Дігнус і його властивості(попередні означення і умови; означення дігнуса і його геометричне значення; вираження модуля через дігнус; властивості дігнуса; модуль суми і різниці).

Розділ V. Основні формули і задачі (площа; умова того, щоб три точки лежали на одній прямій; умова паралельності; умова перпендикулярності;

бісектори кутів; відстань від точки до прямої; точка, яка ділить відстань між двома даними точками у даному відношенні; точка перетину двох прямих; умова того, що три прямі перетинаються в одній точці; основа перпендикуляра з точки на пряму лінію; рівняння прямої).

Розділ VI. Коло (рівняння кола; дотична до кола; перетин прямої з колом; полюс; визначення точок дотику дотичних до кола, проведених з зовнішньої точки; дві нові форми рівняння кола; узагальнене рівняння кола; коло, яке проходить через три дані точки).

Розділ VII. Лінії другого порядку (узагальнення; означення центра; три види кривих; еліпс; гіпербола; парабола).

Розділ VIII. Еліпс(перетворення рівняння еліпса, властивості спряжених осей; головна вісь; середини паралельних хорд; фокуси; побудова головних осей; дотична до еліпса; сума відстаней від фокусів; закрита форма рівняння еліпса; друга форма рівняння дотичної; полюс; визначення точок дотику дотичних, проведених до еліпса із зовнішньої точки; директриса; полюс точки на директрисі; відстань точки від фокуса; перпендикуляр з точки еліпса на директрису).

Розділ IX. Гіпербола (перетворення рівняння гіперболи; властивості спряжених осей; головна вісь; форма гіперболи; побудова головних осей; середини паралельних хорд; дотична; фокуси; рівняння дотичної; різниця відстаней від фокусів; відстань від точки гіперболи до фокуса; закрита форма рівняння гіперболи; друга форма рівняння дотичної; полюс; директриса; перпендикуляр на директрису; асимптоти; відрізки січної між гіперболою і асимптотами рівні).

Розділ X. Парабола (закрита форма рівняння параболи; значення коефіцієнтів; перетворення рівняння параболи; рівняння дотичної; головна вісь; форма параболи; середина паралельних хорд; відстань від точки параболи до фокуса; рівняння дотичної; визначення вершини і фокуса; полюс; директриса; полюс точки на директрисі; перпендикуляр на директрису).

В передмові автор зауважує, що теорію векторів на площині можна отримати як окремий випадок загальнішого методу – кватерніонів, але існує кілька причин, через які потрібно надати превагу самостійному, не пов'язаному з кватерніонами викладу.

"Перш за все, через важливе значення в плоскій геометрії, метод векторів на площині потребує по-можливості простого і зрозумілого, а тому і самостійного викладу. Відомо, що діям над кватерніонами притаманні особливі закони; між тим дії над векторами на площині задовольняють тим самим законам, як і дії над звичайними числами. Більш того, вектори на площині знаходяться у тісному зв'язку з так званими складеними числами, інакше відомих під назвою уявних виразів. Складені числа відіграють вельми важливу роль в теорії функцій, тому необхідно дати зрозуміліше поняття про походження складених чисел і вказати їх геометричне значення. З цієї причини три перші розділи включені мною в число лекцій Елементарної Математики, які читаються студентам першого семестру.

Метод векторів не потребує ніяких координат. Всі формули містять ті самі букви, які є на малюнках. Ми оперуємо над точками і над буквами. Тому кожна формула набуває зрозуміле геометричне значення" [4, С.III].

Зупинимось детальніше на окремих розділах роботи. Основним завданням першого розділу є введення поняття вектора як "відрізка напрямленої прямої", встановлення дій над векторами та доведення факту, що дії над векторами підлягають таким самим законам як і дії над числами.

Додавання і віднімання векторів автор вводить так, як це прийнято і тепер, а їх властивості доводить геометрично з допомогою малюнків.

Щоб ввести множення векторів, автор вдається до попередніх міркувань, а саме:

- спочатку вводить відношення двох векторів і детально розглядає відношення співнаправлених, протилежно направлених, рівних за довжиною та взаємно перпендикулярних векторів.

"Якщо довжини двох векторів OA і OB рівні, то відношення $\frac{OB}{OA}$ виражає простий поворот на кут між ними, тобто на кут BOA.

Поворот на прямий кут позначається через i.

Подвійний поворот на прямий кут (позначається через ii або i^2) змінює напрям вектора на протилежний, тобто множить його на –1; отже i^2 = -1.

Якщо вектори OA і OB взаємно перпендикулярні, то $\frac{OB}{OA} = mi$, де i, як було сказано, є поворот на прямий кут, і m є деяке додатне чи від’ємне число, яке дорівнює відношенню довжин векторів".

- вводить одиничний вектор;

- встановлює умови, за якими визначається положення будь-якого

- вектора, якщо відомо положення одиничного вектора.

Після цього детально розглядається як добуток двох векторів замінюється одним вектором і формулюється правило множення векторів.

"Коротко правило множення векторів можна виразити так: при множенні векторів потрібно їх довжини перемножити і кути нахилу додати".

Відношення двох векторів В.П.Єрмаков використовує і для встановлення співвідношень між векторами і складеними числами. Отримавши з допомогою геометричних міркувань формулу для відношення векторів OB і OA, а саме

$\frac{OB}{OA} = m + ni$, автор робить такий висновок: "Відношення двох однорідних величин завжди є деяке абстрактне число. В даному випадку число $m + ni$ не схоже на ті числа, які ми зазвичай зустрічаємо в арифметиці. Число $m + ni$ ми будемо називати складеним числом. Якщо прийняти вектор OA за одиницю, то $OB = m + ni$. Отже вектор виражається складеним числом (іменованим). Навпаки, складене число завжди може бути виражене вектором."

Заслуговує на увагу думка В.П.Єрмакова з приводу місця складених чисел в алгебрі. "Складені числа можна ввести в алгебру, для чого не буде вимагатись ні нових дій, ні виключень і доповнень в дотеперішніх діях. Складене число можна виражати однією буквою. Це буде вищий ступінь символізації в звичайній алгебрі. Складені числа зустрічаються і в нижчій алгебрі; вони зустрічаються вперше при розв’язуванні квадратного рівняння, яке має уявні корені. В нижчій алгебрі складені числа відомі під назвою уявних чисел або уявних виразів. Ця назва походить з тієї причини, що в нижчій алгебрі квадратне рівняння, яке має уявні корені, означає повну неможливість задовольнити умови даного питання. Тепер же ми бачимо, що складене число має реальний смисл, саме воно виражає вектор на площині; з цієї причини немає необхідності називати складене число уявним, тобто неіснуючим".

В роботі "Теорія векторів на площині" В.П.Єрмаков не вводить поняття скалярного, векторного та мішаного добутку. Виникає запитання, а як же тоді йому вдається реалізувати теорію векторів для дослідження конічних перерізів. Відповідь на це запитання можна знайти в четвертому розділі " Дігнус і його властивості". Цей розділ – місточок між власне векторами і їх геометричним застосуваннями. Автор для зручності вводить нові позначення. "Будемо відкладати всі вектори від деякої постійної точки O , яку назвемо початком векторів. Кожен вектор позначатимемо однією буквою, поставленою в кінці вектора. Таким чином замість OA, OB, OC, … говоритимемо просто A, B, C, … Ті самі букви будуть означати і точки на площині. Вектор , що має початок у точці A і закінчується в точці B, дотепер позначався $AB=AO+OB = OB–OA$; у нових позначеннях цей вектор буде $B–A$. Тому ми застосовуватимемо наступні вирази: вектор A, точка A, пряма AB, вектор $B–A$".

Далі автор пропонує для будь-яких векторів $A=m+ni$ і $B = m'+n'i$ розглянути вираз $(A, B) = mn'–m'n$ і дослідити його геометричне значення. Цей вираз він називає дігнусом (*dignus* – гідний, вартий, достойний) і підкреслює, що останній відіграє важливу роль в геометричних застосуваннях.

Для дослідження геометричного змісту дігнуса вектори A і B виражаються через модулі й аргументи: $A = a\ (cos\alpha + i\ sin\alpha)$, $B = b\ (cos\beta + i\ sin\beta)$. За означенням дігнуса

$(A, B) = ab\ cos\alpha\, sin\beta\ - ab\ sin\alpha\, cos\beta$ або $(A, B) = ab\ sin(\beta - \alpha)$.

Отже, "дігнус (*A*, *B*) виражає додатню чи від'ємну площу паралелограма, побудованого на векторах *A* і *B*".

В термінах сучасної векторної алгебри площа паралелограма, побудованого на векторах *a* і *b* дорівнює модулю векторного добутку векторів *a* і *b*. Отже, модуль дігнуса двох векторів (за термінологією В.П.Єрмакова) це модуль векторного добутку цих векторів (у сучасному розумінні).

Саме означення дігнуса та його властивості, які доводяться в четвертому розділі, покладені в основу застосувань векторів до розв'язування геометричних задач та дослідження конічних перерізів. Так з допомогою дігнуса (фактично векторного, а не скалярного добутку) автор виводить різні рівняння прямої. Ці рівняння отримуються на основі властивості: векторний добуток (дігнус) двох колінеарних векторів дорівнює нулю.

"Будемо через *R* позначати змінний вектор, а разом з тим і змінну точку. Якщо точка *R* завжди знаходиться на прямій *AB*, то $(R - A, B - A) = 0$. Це рівняння можна назвати рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки *A* і *B*. Рівняння прямої, що проходить через точку *A* паралельно вектору *C*, буде $(R - A, C) = 0$".

З допомогою іншої властивості дігнуса В.П. Єрмаков виводить рівняння кола в формі $(R - C, Ri - Ci) = r^2$. Тут $R - C$ вектор, проведений з центра кола в довільну його точку, $Ri - Ci$ вектор перпендикулярний першому.

Більша частина роботи В.П.Єрмакова "Теорія векторів на площині" присвячена основам аналітичної геометрії на площині. Таким чином ще 115 років тому знайшла реалізацію перша спроба викладу аналітичної геометрії на векторній основі.

Література

1. Александрова Н.В. Математические термины. – М., 1978.

2. Добровольский В.А. Василий Петрович Ермаков 1845-1922. – М., 1981.

3. Добровольский В.А., Крамар Ф.Д. О механическом и геометрическом направлениях в формировании векторного исчисления // Вопросы истории естествознания и техники. – 1969. – Вып.3 (28). – С.25-29.

4. Ермаков В.П. Теория векторов на плоскости. – К., 1887.

5. Журнал элементарной математики. – К., 1886. – Т.2. – № 9.