УДК 371.32:51(045)

Лещинський О., Тихонова В., Бохонова Т., Томащук О., Гроза В.
Національний авіаційний університет

ПРОПЕДЕВТИКАСПРИЙНЯТТЯ ПОНЯТЬ “ІНВАРІАНТ” ТА “НАПІВІНВАРІАНТ” ПРИ НАДАННІ МАТЕМАТИЧНОЇ ОСВІТИ МОЛОДШИМ СПЕЦІАЛІСТАМ КОМП’ЮТЕРНО-ОРІЄНТОВНИХ СПЕЕЦІАЛЬНОСТЕЙ (ВНЗ І-ІІ РІВНІВ АКРЕДИТАЦІЇ)

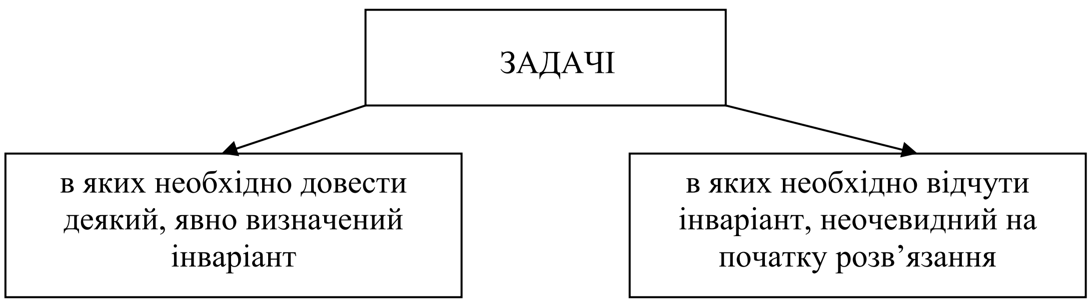
Розглянута система пропедевтичних вправ початкового сприйняття понять “інваріант” та “напівінваріант”. Пропонується застосування цієї системи в процесі викладання дисципліни “Математика” молодшим спеціалістам комп’ютерно-орієнтовних спеціальностей, на відміну від існуючої на сьогодні думки, що цей матеріал доцільно використовувати в процесі підготовки школярів до участі в математичних олімпіадах.

Ключові слова: *інваріант, напівінваріант.*

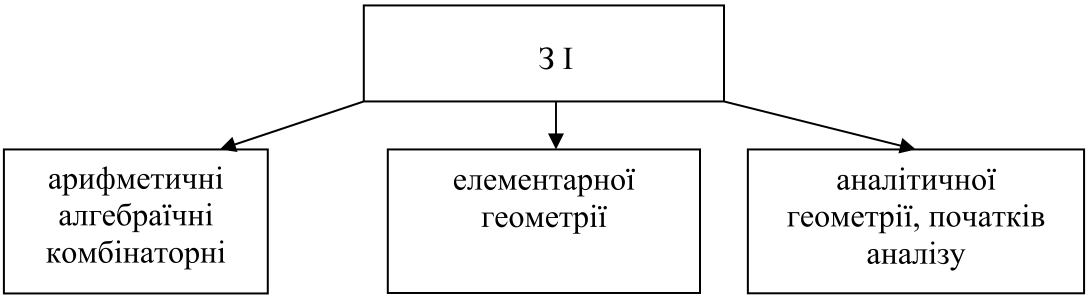
При наданні математичної освіти студентам, що навчаються на рівні молодшого спеціаліста комп’ютерно-орієнтовних спеціальностей, доцільно звернути увагу на окремий клас задач, що передбачають послідовну зміну стану заданої системи, множини об’єктів, і необхідно визначити певну характеристику їх кінцевого стану. При цьому повністю прослідкувати за всіма переходами або дуже складно, або просто неможливо. Тоді можна зробити спробу знайти і обчислити деяку величину, яка характеризує стан системи (або множини) і залишається незмінною при всіх її переходах. Таку величину називають інваріантом даної системи. Ідея розв’язку задач такого класу ґрунтується на доведеному факті, що значення інваріанта на початковому і кінцевому станах співпадають. Часто поняття інваріанта набуває більш широкого змісту [1]. Інваріантом системи називають не тільки її кількісну, але і якісну характеристику, що має властивість зберігатись при вказаних перетвореннях системи. До якісних характеристик в елементарних задачах можна віднести:

– парність;
– чередування (в більш загальному сенсі періодичність);
– різні ознаки подільності (властивості залишків від ділення);
– наявність або відсутність монотонності;
– властивості подібних фігур;
– відповідність властивостям однієї з прогресій;
– відповідність заданим властивостям деякої множини тощо.

Задачі елементарної математики, в яких можливе використання інваріантів (ЗІ), можна умовно згрупувати у дві сукупності:

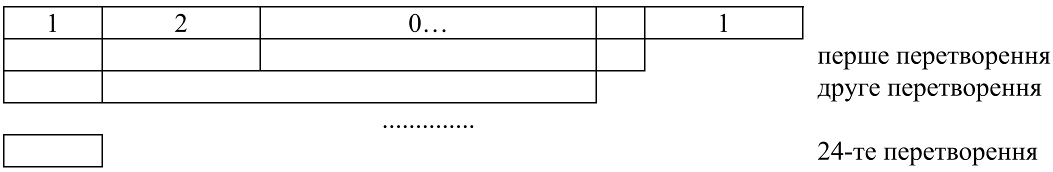


Окремо має сенс прокласифікувати задачі (ЗІ) наступним чином:



Задача 1. Є запис числа, що складається з десяти одиниць і п’ятнадцяти нулів. Його перетворення полягає у тому, що замість двох довільних цифр записується одиниця, якщо цифри однакові, і нуль, якщо різні. Який отримується результат після двадцяти чотирьох таких перетворень.

1) Перше питання в процесі розв’язання може стосуватись кількості цифр, що залишаться після 24-го перетворення.



Очевидно, що після 24-го перетворення в числі залишиться одна цифра.

2) Шукаючи відповідь на запитання, якою буде цифра, що залишилася, можна міркувати наступним чином: замінимо кожен нуль на “-1”. Тоді перетворення отриманого числа полягає в заміні двох його довільних цифр їх добутком. Величиною, яка <u>не змінюється</u> в процесі вказаних перетворень отриманого числа, є добуток всіх його цифр. До першого перетворення P_c= -1. Тоді після 24-го перетворення залишиться -1 в отриманому числі і нуль в даному.

Задача 2. В державі N страхуванням фізичних та юридичних осіб починали займатись 15 компаній. За законом цієї держави відкрити нову страхову компанію можна тільки шляхом поділу вже існуючої на чотири нових. На запит міністра в кінці року про кількість таких компаній начальник департаменту подав цифру 2015 і миттєво був звільнений за подання невірної інформації. Яке підґрунтя могло бути для висновків міністра?

<u>Розв’язок.</u> За діючим законом кількість страхових компаній збільшується на 3, і в будь-який момент часу це число складає K = 15 + 3k і ділиться на 3 без остачі (це є інваріант). Число 2015 на 3 не ділиться.

Задача 3. Члени арифметичної прогресії є натуральними числами. Суми цифр її членів утворюють нову послідовність $\left\{\sum a_n\right\}$. Чи буде ця послідовність зростаючою?

<u>Розв’язок.</u> Перший член a_i і різниця d арифметичної прогресії є обмеженими, тому існує k, таке що $a_1 < 10^k$, $d < 10^k$. Тоді для будь-якого $n \geq k$ виконується. Інваріантом в цій задачі буде якраз сума цифр цих членів прогресії:

$$\sum(a_i) + \sum d = const.$$

<u>Приклад.</u> $a_1 < 10^2, k = 2, d < 10^2.$ Нехай $a_1 = 21, \quad d = 2.$

$$a_{10^3+1} = a_1 + d \cdot 10^3 = 21 + 2000 = 2021, \quad a_{10^4+1} = a_1 + d \cdot 10^4 = 21 + 20000 = 20021.$$

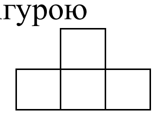
21	23	25	27	29	31	33	35	37	39	41	43	45
3	5	7	9	11	4	6	8	10	12	5	7	9
47	49	51	53	55	57	59	61	63	65	67	69	71
11	13	6	8	10	12	14	7	9	11	13	15	8
73	75	77	79	81	83	85	87	89	91	93	95	97
10	12	14	16	9	11	13	15	17	10	12	14	16
99	101	103	105	107	109							
18	2	4	6	8	10							

Даний приклад прогресії з одного боку ілюструє підпослідовність $\{a_l = a_{10^n+1}\}$, а з іншого боку, уточнює умову задачі, яку можна тлумачити наступним чином: чи існує арифметична прогресія з натуральними членами, для якої послідовність сум цифр її членів є зростаючою? Відповідь: ні.

Задача 4. В послідовності з $3n+2$ елементів сума послідовних трьох чисел дорівнює S. Перший елемент дорівнює a, останній b. Знайти інші $3n$ елементів.

Розв'язок. В цій задачі інваріант заданий умовою – сума трьох сусідніх чисел: $x_k + x_{k+1} + x_{k+2} = x_{k+1} + x_{k+2} + x_{k+3}$ для всіх $k = 1, 2, \ldots, 3n$. Тоді, очевидно, $x_k = x_{k+3}$, тобто другий інваріант – періодичне повторення перших трьох чисел x_1, x_2, x_3. З вказаних міркувань випливає $x_{3k+1} = x_1 = a$, $x_{3k+2} = x_{3n+1} = S$, $x_{3k} = S - (a+b)$, $(k = 0, 1, \ldots, n, n \in \mathrm{N})$.

Задача 5. Таблиця $m \times m$ клітин заповнена числами таким чином, що в кожних чотирьох клітинах, які можна накрити фігурою



сума чисел дорівнює $4k$. Знайти всі числа, що заповнюють таблицю (пропедевтика теорії клітинних автоматів).

Розв'язок. Інваріант – сума чисел, що покриваються вказаною фігурою. Зафарбуємо таблицю двома різними кольорами в шаховому порядку. Очевидно, що числа в клітинах одного кольору рівні – другий інваріант. Нехай в клітинах першого кольору записано число x, а другого – y. Тоді маємо $3x + y = x + 3y = 4k$, а, отже, $x = y = k$. Таким чином, всі клітини містять число k.

Задача 6. В чотирьох вершинах куба записані числа $k, 9k, 9k, 8k, \quad k = 2n+1, \quad n \in \mathrm{Z}$, а в інших – нулі. За один крок дозволяється додавати до чисел, що знаходяться на кінцях одного ребра, одне і те ж ціле число. Чи можна за декілька кроків отримати нулі в усіх вершинах куба?

Розв'язок. Інваріантом в даній задачі є непарність суми всіх чисел у вершинах куба. Додавання однакових цілих чисел до довільних двох, що є в наявності, не змінює парність загальної суми всіх чисел. На початку ця сума дорівнювала $k + 9k + 9k + 8k = 27k$ і була непарною, а нуль число парне. Тому відповідь: не можна.

Задача 7. Множина функцій породжується многочленами $f(x)$ та $g(x)$ і складається з самих многочленів, їх добутку, доданого до них, суму та різницю двох з них. Чи містить ця множина x, якщо

а) $f(x) = x^2 + x$; $\quad g(x) = x^2 + 2$;

б) $f(x) = x^2 + x$; $\quad g(x) = x^2 - 2$?

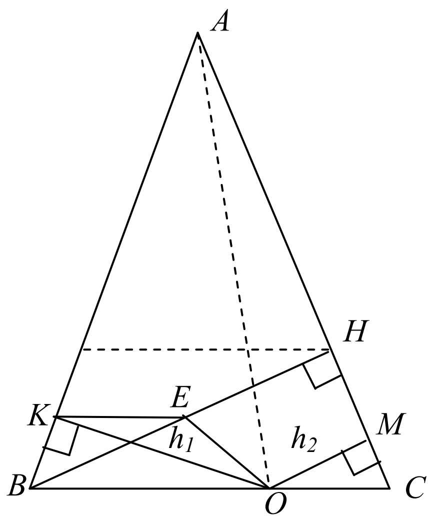
Розв'язок. а) $f(-1) = 0$; $g(-1) = 3$. Всі многочлени цієї множини, на відміну від $\varphi(x) = x$, в точці -1 діляться на 3 (ця властивість є інваріантом). Тому в цьому випадку вказана множина не містить многочлена $\varphi(x) = x$.

б) $x = (f - g)^2 - (f - g) - f$ – це інваріант.

Задача 8. Квадратне поле розбито на 100 однакових квадратних ділянок, з яких дев'ять заросли бур'яном. За рік бур'ян може розповсюдитись лише на ті ділянки, для яких не менше двох сусідніх вже заросли бур'яном (ділянки вважаються сусідніми, якщо вони мають спільну сторону). Чи може поле повністю зарости бур'яном?

Розв'язок. Очевидно, що довжина межі ділянки, яка заросла бур'яном, не може зростати (інваріант – не зростання межі). Спочатку ця довжина не перевищувала 36 (умовно вважаємо, що сторона кожної ділянки дорівнює 1). Таким чином, довжина границі області, яка поросла бур'яном, не може досягти 40 – периметра поля. Відповідь: не може.

Задача 9. З точки *O* на основі *BC* рівнобедреного трикутника *ABC* проведені перпендикуляри *OK* (на сторону *AB*) і *OM* (на сторону *AC*). Довести, що периметр чотирикутника *AMOK* не залежить від вибору точки *O*.



Розв'язок задачі може складатись з двох кроків.

1 крок. Визначення інваріанту: для будь-якої точки основи рівнобедреного трикутника сума її відстаней до бічних сторін постійна і рівна висоті трикутника, проведеній до бічної сторони.

Доведення.

Нехай O – довільна точка основи рівнобедреного трикутника ABC з основою BC. Нехай $h_1 = OK$, $h_2 = OM$ - відстані від неї до бічних сторін.

$$S_{\Delta AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot h_1, \quad S_{\Delta ACO} = \frac{1}{2} AB \cdot h_2, \quad (AC = AB),$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot (h_1 + h_2) = S_{\Delta ABO} + S_{\Delta ACO},$$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BH$, отже $BH = h_1 + h_2 = const$ для фіксованого трикутника *ABC*.

2 крок. Проведемо $OE \| AC$, $KE \| BC$ (доведення існування такої точки *E* з одного боку – ознака математичної культури студента, а з іншого боку не являє собою складної процедури).Чотирикутник *OEHM* є прямокутником, *HM*=*EO*, *EH*=*OM*. *BKEO* – рівнобедрена трапеція і *BE*=*KO, EO*=*KB*. Тому шуканий периметр дорівнює

$$AK + AM + OM + OK = AK + KB + AH + NE + BE = AB + AH + BH = P_{\Delta ABH},$$

який не залежить від вибору точки *O*, що і треба було довести.

Задача 10. Дотична до кривої $y = x^2 - 2ax$ перетинає пряму $y = -a^2$ при $x = a + b$. Знайти абсцису точки дотику.

Розв'язок. Інваріантна властивість параболи $y = kx^2$: абсциса точки перетину дотичної з віссю OX дорівнює половині абсциси точки дотику.

Доведення.

Дотична у точці (x_0, y_0) визначається рівнянням:

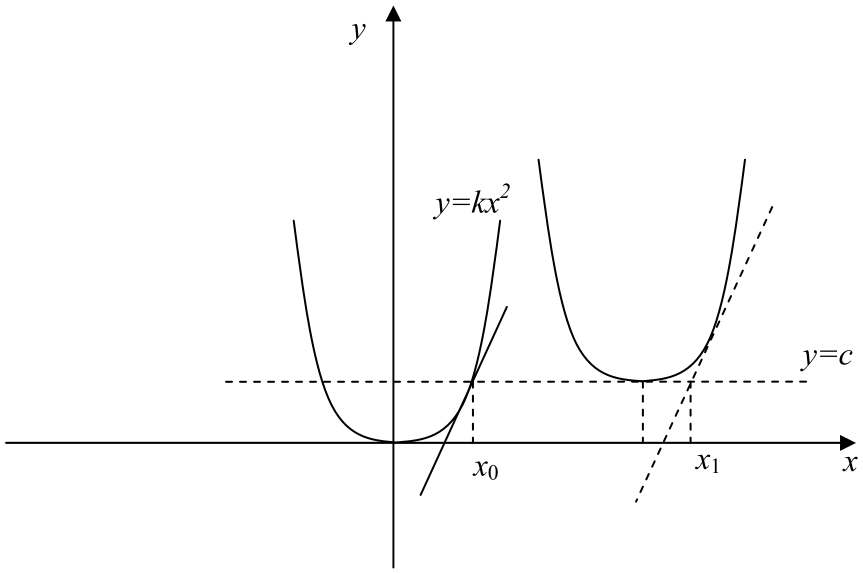
$y - y_0 = y'(x - x_0)$, $y - y_0 = 2kx_0(x - x_0)$, $y_0 = kx_0^2$, $y = 2kx_0x - kx_0^2$ - рівняння дотичної.

Нехай дотична перетинає вісь абсцис у точці x_1. Тоді $y_1 = 0$, $2kx_0x_1 = kx_0^2$, звідки $x_1 = \frac{1}{2}x_0$.

Довільна парабола з віссю, паралельною осі ординат, отримується з параболи $y = kx^2$ зсувом на вектор $(a; c)$, де $(a; c)$ – координати вершини параболи. Для довільної параболи інваріант наступний:

Нехай x_0 – абсциса точки дотику, x_1 – абсциса точки перетину дотичної з прямою $y = c$. Тоді $2(x_1 - a) = x_0 - a$. З умови задачі випливає, що $x_1 - a = b$. Тому

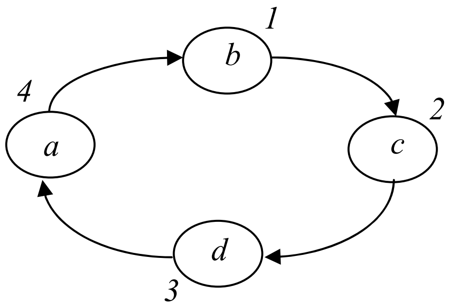
$x_0 - a = 2b$, $x_0 = a + 2b$.



Автори статті окреслюють окремий клас задач, в яких необхідно довести скінченність певного процесу, дії, іншими словами, існування точної верхньої або нижньої грані для деякої величини – підібраної функції, що може приймати лише скінченну кількість значень і при кожному виконанні дії має властивість строгої монотонності. Таку функцію називають напівінваріантом.

Задача 11. Розглядається послідовність перетворень множини чисел $\{a, b, c, d\}$ на множину $\{a - b, b - c, c - d, d - a\}$. Довести, що якщо в початковій четвірці не всі числа однакові, то після скінченного числа перетворень утвориться четвірка, принаймні одне число якої буде більше наперед заданого скінченного числа k.

Розв'язок.



Нехай $\{a_n, b_n, c_n, d_n\}$ – числа, що утворилися після здійснення n разів вказаного перетворення. Тоді для $n \geq 1$, $a_n + b_n + c_n + d_n = 0$.

$$a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 = 2\left(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2\right) - 2(a_n + c_n)\cdot(b_n + d_n) \geq$$
$$\geq 2\left(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2\right) - (a_n + b_n + c_n + d_n)^2 = 2\left(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2\right).$$

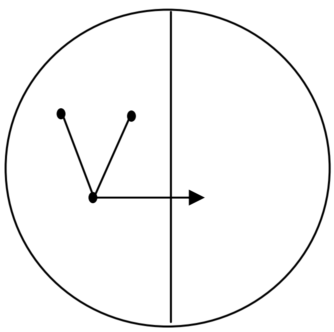
Таким чином, $a_{n+1}^2 + b_{n+1}^2 + c_{n+1}^2 + d_{n+1}^2 \geq 2\left(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2\right)$. З того, що $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 \geq 0$, після певної кількості перетворень буде отримуватись як завгодно велике число в четвірці, а, значить, число більше k.

Зауваження. Взагалі кажучи, сума квадратів чотирьох чисел не є напівінваріантом, оскільки може приймати нескінченну кількість значень. Але, по-перше, ця сума з кожним кроком зростає, по-друге, скінченна кількість необхідних її значень забезпечується скінченністю заданого числа k.

Задача 12. В комітеті, що приймає певне колективне рішення, у кожного його члена не більше трьох інших членів, з якими він не підтримує жодних стосунків. Довести, що комітет можна поділити на дві групи таким чином, щоб у кожного члена групи було не більше одного іншого члена, з яким він не підтримує жодних стосунків.

Розв'язок. 1) Розіб'ємо комітет на дві групи довільним чином. Якщо є член, шо має в своїй групі не менше двох інших членів, з якими він не підтримує жодних стосунків, переведемо його в іншу групу.

2) Позначимо умовно членів комітету точками на площині і з'єднаємо відрізками всі пари точок, які інтерпретують членів без жодних стосунків в одній групі.



При зазначеному переведенні з групи в групу не менше двох відрізків зникають і не більше одного з'являється. Кількість відрізків (напівінваріант) зменшується і є скінченною. Знайдений напівінваріант доводить необхідне твердження.

Задача 13. В нескінченній матриці $\begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$ кілька елементів дорівнюють нулю. В моменти часу $t = 1, 2, 3, \ldots$ здійснюється одночасне перетворення всіх елементів матриці за наступним правилом: кожний елемент a_{ik} дорівнює значенню, якому дорівнює більшість з трьох сусідніх елементів $a_{ik}, a_{i,k+1}, a_{i-1,k}$. Довести, що через деякий час в матриці не залишиться нульових елементів.

Розв'язок. Переставимо рядки і стовпчики матриці таким чином, щоб всі нульові елементи зосередились в скінченній матриці $m \times n$. Нехай елемент в лівому нижньому куті буде $a_{k_1 t_1}$. Для кожного нульового елемента обчислимо суму індексів $k_i + t_i \; (i = 1, \ldots, m; \quad j = 1, \ldots, n)$. Напівінваріантом буде $\max\limits_{i,j}(k_i + t_i)$.

Використана література:

1. *Конет І. М.* Обласні олімпіади з математики / І. М. Конет, В. М. Федченко, Ю. В. Теплінський ; за ред. І. М. Конета. – Кам'янець-Подільський: Абетка, 2010. – 388 с.
2. *Федак І. В.* Готуємося до олімпіади з математики: Пісібник для загальноосвітніх навчальних закладів / І. В. Федак. – Чернівці, 2003. – 360 с.
3. *Фоминых Ю. Ф.* Инварианты / Ю. Ф. Фоминых // Математика в школе : научно-теоретический и методический журнал. – 1998. – № 5. – С. 78-83.

References:

1. *Konet I. M.* Oblasni olimpiadi z matematiki / I. M. Konet, V. M. Fedchenko, Yu. V. Teplinskiy ; za red. I. M. Koneta. – Kam'yanets-Podilskiy : Abetka, 2010. – 388 s.
2. *Fedak I. V.* Gotuemosya do olimpiadi z matematiki: Pisibnik dlya zagalnoosvitnih navchalnih zakladiv. / I. V. Fedak. – Chernivtsi, 2003. – 360 s.
3. *Fominyh Yu. F.* Invarianty / Yu. F. Fominyh // Matematika v shkole : nauchno-teoreticheskiy i metodicheskiy zhurnal. – 1998. – № 5. – S. 78-83.

Лещинский О., Тихонова В., Бохонова Т., Томащук А., Гроза В. Пропедевтика восприятия понятий "инвариант" и "полуинвариант" при предоставлении математического образования младшим специалистам компьютерно-ориентированных специальностей (ВУЗов I-II уровней аккредитации).

Рассмотрена система пропедевтических упражнений начального восприятия понятий "инвариант" и "полуинвариант". Предлагаеться применение этой системы в процессе преподавания дисциплины "Математика" младшим специалистам компьютерно-ориентированных специальностей, в отличие от существующего сегодня мнения, что этот материал целесообразно использовать в процессе подготовки школьников к участию в математических олимпиадах.

***Ключевые слова**: инвариант, полуинвариант.*

Leshchynskii O., Tikhonova V., Bokhonova T., Tomashchuk O., Groza V. Propaedeutics of perception of concepts "invariant" and "semi-invariant" within mathematical education for students of computer-oriented specialties (of I-II level accreditation higher educational establishments).

A system of propaedeutic exercises of preliminary perception of concepts "invariant" and "semi-invariant" has been considered. This system is proposed for application within studying the discipline "Mathematics" for students of computer-oriented specialties, as against the opinion that this material is advisable for applying in preparing pupils to mathematical Olympiads.

***Keywords**: invariant, semi-invariant,*