Міністерство освіти і науки України

Національний педагогічний університет
імені М. П. Драгоманова

Наталія КУГАЙ

МЕТОДОЛОГІЧНІ ЗНАННЯ МАЙБУТНЬОГО ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

Монографія

Харків – 2017

УДК 378.937:51
ББК 74.580.26:74.262р+22.1р
К 88

Рекомендовано до друку Вченою радою Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова (протокол № 6 від 26 січня 2017 року)

Рецензенти:

Бігун Я. Й. - доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри прикладної математики та інформаційних технологій Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Матяш О. І. - доктор педагогічних наук, завідувач кафедри алгебри і методики начання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського.

Михалін Г. О. - доктор педагогічних наук, доцент, Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова.

Кугай Н. В.
К 88 Методологічні знання майбутнього вчителя математики: монографія / Н. В. Кугай. – Харків: ФОП Панов А. М., 2017. – 336 с.

ISBN 978-617-7474-53-0

У монографії виокремлено методологічні знання майбутнього вчителя математики у змісті дисциплін математичного циклу.

Для науково-педагогічних працівників, викладачів математики, учителів, студентів, магістрантів, аспірантів.

УДК 378.937:51
ISBN 978-617-7474-53-0 **ББК 74.580.26:74.262р+22.1р**

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Сучасний стан розвитку суспільства характеризується підвищенням значущості математичного знання в професійній діяльності людства, стрімким зростанням відомостей. У таких умовах стало неможливим вирішувати проблеми, що виникають в конструюванні і організації освітньо-виховного процесу, звичними способами. Тому на перший план виходить ідея використання внутрішніх, прихованих резервів традиційного змісту математичних курсів. Реалізацію цієї ідеї останнім часом все частіше пов'язують з включенням у зміст освіти *методологічних знань*, знань про шляхи та методи опанування новітніх наукових здобутків людства.

Про суспільне визнання значущості методологічної складової змісту математичної освіти свідчать положення низки нормативних документів про модернізацію системи освіти і державних освітніх стандартів. Так, у Національній стратегії розвитку освіти України у XXI столітті [175] зазначається, що система освіти має забезпечувати формування у дітей і молоді цілісної наукової картини світу, сучасного світогляду, творчих здібностей і здатності до самостійного наукового пізнання, самоосвіти і самореалізації особистості. У цьому ж документі зазначено, що до завдань освітньої галузі «Математика» відносяться:

- розкриття ролі та можливостей математичних знань у пізнанні та описанні реальних процесів і явищ дійсності, забезпечення усвідомлення математики як універсальної мови природничих наук та органічної складової загальної людської культури;

- розвиток умінь опрацьовувати математичні тексти, критично оцінювати здобуті дані та їх джерела, виокремлювати головне, аналізувати, робити висновки;
- формування здатності оцінювати правильність і раціональність розв’язання математичних задач, розпізнавати логічно некоректні міркування, приймати рішення в умовах неповних, надлишкових, детермінованих та ймовірнісних даних;
- забезпечення оволодіння учнями уміннями моделювати за допомогою рівнянь реальні ситуації, пояснювати здобуті результати;
- формування уявлення про аксіоматичну побудову математичних теорій.

Для реалізації цих завдань необхідно реформувати систему навчання майбутнього вчителя математики. Зрозуміло, що необхідною умовою реалізації зазначених завдань є, перш за все, володіння майбутнім учителем названими знаннями і уміннями. Сучасна школа потребує фахівців, що володіють методологічними знаннями.

Методологічні знання в курсі математики вищої школи не є зовнішніми по відношенню до предметних, навпаки, вони внутрішньо притаманні сучасним математичним дисциплінам. Математика як наука має великий потенціал для формування методологічних знань різних рівнів: філософських принципів, законів і категорій, загальнонаукових принципів, загальнонаукових та конкретно наукових методів пізнання, узагальнених знань про структуру, головні закономірності використання і розвитку математики.

Формування методологічних знань не може відбуватися відособлено від математичних (предметних) знань. Але на відміну від предметних, методологічні знання мають більшу узагальненість і широту перенесення. Діяльність, у тому числі і навчальна, організована із залученням методологічних знань, дозволяє людині швидше і якісніше опановувати новими для неї галузями теорії і практики. Це відбувається за рахунок того, що предметні знання набуваються не заучуванням їх у готовому вигляді, а шляхом самостійного «відкриття» за допомогою методологічних знань.

Формування методологічних знань педагога не передбачено навчальними програмами дисциплін циклів навчального плану підготовки майбутніх учителів математики, в той же час від рівня сформованості методологічних знань залежить якість підготовки педагога в цілому та ефективність проектування педагогом навчально-пізнавального процесу вивчення математики в школі. А тому на одне з центральних місць фахової підготовки майбутніх учителів математики висувається проблема формування у них методологічних знань під час вивчення предметів математичного циклу.

Це свідчить про актуальність постановки і можливості вирішення – як в теоретичному, так і практичному плані – *проблеми* виокремлення і формування методологічних знань майбутнього вчителя математики під час навчання дисциплін математичного циклу.

РОЗДІЛ 1. МЕТОДОЛОГІЯ ЯК НАУКА

1.1. Ретроспективний аналіз поняття «методологія»

Поняття методології багатоаспектне, складне, різні вчені на різних етапах розвитку суспільства вкладали в це поняття різний зміст. Зародилася методологія у глибоку давнину і за час свого історичного розвитку зазнала істотних змін у трактуванні своєї сутності.

IV – I ст. до н. е. вважається початком зародження методології. Основна проблема науки цього історичного етапу – розробка приписів здійснення пізнавальної діяльності, яка би забезпечила істинність отримуваного наукового знання. У цей час виокремлюється дві протилежні точки зору на сутність методології: 1) методологія – це знаряддя істинного пізнання, яке існує апріорно («органон» Арістотеля); 2) методологія – це знання, які не належать ні суб'єкту, ні об'єкту пізнання, ці знання кожного разу треба отримувати заново.

Наступний етап – XVст. – виникнення методології як науки. Основна проблема науки – пошук істинного методу пізнання. Родоначальником методології вважають англійського філософа Ф. Бекона [27], який розробив систему наукових методів та обґрунтував емпіричний підхід до пізнання (індуктивну логіку). На цьому етапі методологія розглядалася як знання про істинний метод, який існує апріорно, але не піддається безпосередньому спостереженню. Зміст методології складали логічні правила міркувань.

XVI – XVШ ст. – етап становлення предмету методології. Проблема пізнання розглядалася як проблема відношення суб’єкта і об’єкта. Р. Декарт [64] підняв питання про неможливість зведення мислення до відображення дійсності. Завдяки І. Канту ([89], [90]), який розмежував конструктивні і регулятивні методи пізнання, методологія набула особливого статусу. На цьому етапі методологія розглядалася як знання про способи мислення. До змісту методології входили тільки знання про форми існування знань та методи їх отримання.

Формування філософських основ наукової методології відносять до XVШ – XIX століть. Цей період характеризується проблемою побудови універсальної теорії діяльності (І. Фіхте [268], Г. Гегель ([43], [44], [45])). Методологія розглядалася: як знання, яке є результатом пізнання самого себе, тобто як «абсолютне знання»; як метод, який дозволяє контролювати роботу думки у процесі пізнання. Г. Гегель називав методологію раціоналізованою діяльністю.

На початку XX століття швидкими темпами відбувалося освоєння все складніших і складніших об’єктів дійсності, що призвело до зменшення ролі наочності у пізнанні і підвищення рівня абстрактності методів дослідження. Крім того, наукова діяльність набувала масовості, а це вимагало регламентації цієї діяльності. Ці причини призвели, крім іншого, до стрімкого розвитку методологічних знань і збільшення їх ролі у загальному масиві наукових знань.

На сьогодні розглядають методологію різних наук, зокрема, математики і методики її навчання (Г. Саранцев [220], Є. Плотникова [259], В. Мадер [155] та інші), фізики і методики її навчання (Г. Голин [56], Н. Пастернак [199], Б. Спаський [229] та інші), а також методологію діяльностей: ігрової, навчальної, трудової, професійної (О. Новиков і Д. Новиков [181], Д. Чернілевський [171] та інші).

Поняття методології багатоаспектне, складне, різні вчені на різних етапах розвитку суспільства вкладали в це поняття різний зміст, тому на сьогодні це поняття має кілька тлумачень. Розглянемо основні з них (табл. 1.1.1).

Таблиця 1.1.1

Різні тлумачення поняття «методологія»

№	Зміст	Автор, рік
1.	Це філософське вчення про систему методів наукового пізнання і перетворення реальної дійсності, а також вчення про застосування принципів, категорій, законів діалектики і науки до процесу пізнання і практики з метою здобуття нових знань.	О. Баскаков, М. Туленков [5], 2004 р.
2.	Вчення про правила мислення під час створення теорії науки.	Д. Чернілевський, [171], 2008 р.
3.	Вчення про структуру, логічну організацію, методи та засоби діяльності	[15], 1968-1979 рр.
4.	Система принципів і способів організації та побудови теоретичної і практичної діяльності, а також вчення про цю систему.	[240], 1983 р.
5.	Тип раціонально-рефлексивної свідомості, спрямований на вивчення, удосконалення і конструювання методів.	А. Конверський, [107], 2008 р.
6.	Це вчення про організацію діяльності.	О. Новиков, [181], 2007 р.

З аналізу наведених тлумачень випливає, що:

1. Практично всі дослідники пов’язують методологію з *діяльністю*.

2. З пунктів 1 і 2 маємо, що окремі вчені розуміють методологію завузько і, як правило, пов’язують її тільки з *науковою* (дослідницькою) діяльністю.

3. Аналізуючи пункти 3 і 4, можна зробити висновок, що поняття «методологія» має два основних смислових значення: 1) це система способів і прийомів, що застосовуються у певній сфері людської діяльності (науці, політиці, мистецтві тощо); 2) це вчення про цю систему.

4. Останнє тлумачення методології узагальнює попередні і показує, що методологію можна розглядати дуже широко – як вчення про організацію будь-якої творчої людської діяльності: і наукової, і будь-якої практичної професійної діяльності, і художньої, й ігрової.

1.2. Структура, види, рівні і основи методології

1.2.1. Структура діяльності і методології

Оскільки методологію розглядають як вчення про організацію діяльності, то для опису структури методології необхідно з’ясувати структуру діяльності.

Поняття «діяльність» використовується і вивчається багатьма науками: філософією, психологією, політологією, соціологією тощо. Враховуючи, що однією з основ методології є *філософсько-психологічна* теорія діяльності (див. с. 38), розглянемо категорію «діяльність» з філософського та психологічного поглядів.

Філософія вивчає діяльність як загальний спосіб існування людини і, відповідно, людина визначається як діюча істота. Класики німецької філософії (І. Кант [91], Й. Фіхте [268]) розглядали діяльність як принцип філософського пояснення людського способу буття. У різні часи філософи вивчали різні сторони людської діяльності: Г. Гегель [45] бачив у ній основу предметного світу культури; Е. Кассірер [92] обґрунтовував за допомогою діяльності вчення про символічно-знакові структури, Е. Гуссерль [63] – про життєвий світ, М. Вебер [29] і Т. Парсонс [198] – джерело формування соціальної дії. І хоч кожен з філософів досліджував різні сторони людської діяльності, всі сходяться на тому, що діяльність – засіб, умова, рушійна сила і джерело формування соціальності, це специфічно людська форма активного ставлення до світу, спосіб буття людини ([192], [262]). Залежно від предмета діяльності, останню поділяють на матеріальну і духовну. У діяльності людина розкриває своє особливе місце в світі і стверджує себе в ньому як істота суспільна.

Психологія вивчає діяльність як найважливіший компонент психіки. Психологічну теорію діяльності розробляли вітчизняні та зарубіжні психологи. Дослідники вважають, що ґрунт для формування психологічної теорії діяльності підготував Л. Виготський ([37], [38]). Йому ж належить ідея про вирішальну роль діяльності в психічному розвитку дитини.

Теорія діяльності, яку створив О. Леонтьєв, ґрунтується на положенні про те, що діяльність утілюється у своєму продукті. Відбувається начебто «опредметнювання» тих уявлень, які її спонукають і регулюють. Вчений підкреслював, що діяльність входить в предмет психологічної науки і «розглядається як процес, що несе в собі ті внутрішні рушійні протиріччя, роздвоєння і трансформації, які породжують психіку, що є необхідним моментом власного руху діяльності, її розвитку» [149, с. 99].

С. Рубінштейн зауважував, що психологія повинна вивчати психіку тільки через розкриття її істотних об'єктивних зв'язків і опосередкувань, у тому числі через дослідження діяльності [215]. Йому та його учням належить заслуга розробки методологічного принципу єдності свідомості й діяльності: психіка людини не тільки проявляється, а й формується в діяльності.

На думку сучасного психолога В. Зінченка [83] діяльність і свідомість не можна ототожнювати, свідомість вільна і не залежить від діяльності, хоч нею породжується.

Таким чином, у процесі діяльності людина виступає суб’єктом, який цілеспрямовано діє на об’єкт, задовольняючи таким чином свої потреби. Людська діяльність має свідомий, осмислений, цілеспрямований характер. За своєю сутністю діяльність соціальна [262].

Діяльність – це специфічний вид активності людини, спрямований на пізнання і творче перетворення навколишнього світу, включаючи самого себе й умови свого існування. Діяльність людини може розглядатися в загальному значенні цього слова як динамічна система взаємодії людини із зовнішнім середовищем, а також у вузькому, конкретному – як специфічна професійна, наукова, навчальна або інша форма активності людини, у якій вона досягає свідомо поставлених цілей, що формуються внаслідок виникнення певних потреб.

Діяльність поділяють на репродуктивну і продуктивну. У результаті репродуктивної діяльності не створюються нові продукти, вона є копією з діяльності іншої людини або зі своєї власної, засвоєної раніше. Така діяльність відбувається на основі вже засвоєних технологій, а отже, організації така діяльність не потребує.

Продуктивна діяльність напрямлена на отримання об’єктивно або суб’єктивно нового продукту. У випадку такої діяльності і виникає необхідність її організації, тобто, необхідність застосування методології. Організувати діяльність – означає упорядкувати її в цілісну систему з чітко визначеними характеристиками та складовими [181].

Аналіз літератури показує, що існують різні підходи до встановлення основних складових (характеристик) діяльності. Так, вчені, виходячи з психологічної теорії діяльності, виокремлюютьу її структурі такі компоненти:

1) потреби, мотиви, завдання, дії та операції (О. Леонтьєв);

2) за С. Рубінштейном, структура діяльності суб'єкта становить складне співвідношення її різнопланових компонентів (рух – дія – операція – вчинок) у їхньому взаємозв'язку з метою, мотивами та умовами діяльності;

3) мотив, мету, предмет, структуру і засоби. У структурі виокремлюють об’єкт та предмет ([153], [174]).

О. Новиков і Д. Новиков у роботі [181] виокремлюють: зовнішні характеристики діяльності, логічну та часову структури діяльності.

Діяльність людини є процесом, який здійснюється протягом певного часу за фазами, стадіями та етапами. Завершеність циклу діяльності (проекту) визначається трьома фазами:

- фаза проектування, результатом якої є побудована модель створюваної системи і план її реалізації;
- технологічна фаза, результатом якої є реалізація системи;
- рефлексивна фаза, результатом якої є оцінка реалізованої системи та визначення необхідності або її подальшої корекції, або «запуску» нового проекту.

О. Новиков і Д. Новиков [181] до логічної структури діяльності відносять:

- суб'єкт (у процесі діяльності людина виступає як суб'єкт діяльності);
- об'єкт (процеси або (та) явища, або (та) матеріальні об'єкти, на які спрямована діяльність);
- предмет (те, з чим людина безпосередньо має справу до початку своєї діяльності і яке підлягає трансформації в продукт діяльності);
- форми діяльності (зовнішнє вираження узгодженої діяльності, що здійснюється у встановленому порядку і певному режимі);
- засоби діяльності (інструменти, якими людина користується, виконуючи ті або інші дії й операції);
- методи діяльності (технологія одержання бажаного продукту);
- результат або продукт діяльності (те, що є результатом трансформації предмета в процесі діяльності).

Зовнішніми характеристиками по відношенню до логічної структури діяльності виступають:

- особливості діяльності (своєрідність, специфіка того чи іншого виду діяльності);
- принципи діяльності (керівна ідея, основне правило, основна вимога до діяльності, яка випливає із встановлених наукою закономірностей);
- умови діяльності (характеристика оточення суб'єкта в процесі діяльності, соціальні умови, просторові та часові чинники тощо);
- норми діяльності (регулятивні правила, які вказують межі застосування).

Наповнення змістом наведених характеристик і компонентів діяльності на прикладі навчальної діяльності студентів розкрито нами у роботі «Структура методології навчальної діяльності студентів» [134].

Враховуючи, що методологія вивчає організацію людської продуктивної діяльності, тобто розглядає упорядкування діяльності у певну систему, яка має чіткі характеристики, логічну та часову структуру, автори роботи [181] подають структуру методології переліком таких елементів:

1. Характеристики діяльності: особливості, принципи, умови, норми діяльності.
2. Логічна структура діяльності: суб'єкт, об'єкт, предмет, форми, засоби, методи, результат діяльності.
3. Часова структура діяльності: фази, стадії, етапи діяльності.

Розглянуті підходи не повністю враховують всі компоненти (характеристики) діяльності. Так, наприклад, у структурі діяльності з психологічної точки не враховано часову структуру. У той же час О. Новиков і Д. Новиков не враховують позицію психологів. А тому і пропонована вище структура методології не є повною. На нашу думку, доцільно розглянуті підходи об'єднати. Пропонуємо таку *структуру методології*:

1. Мотиваційно-цільова складова діяльності: мотив, мета, завдання.
2. Зовнішня складова діяльності: особливості, принципи, умови, норми діяльності.
3. Логічна складова діяльності: предмет, суб'єкт, об'єкт, форми, засоби, методи, результат діяльності.
4. Часова складова діяльності: фази, стадії, етапи.

Включення до структури методології мотиваційно-цільової складової діяльності є необхідним, оскільки ця складова стимулює творчий прояв особистості в діяльності, припускає наявність інтересу до здійснюваної діяльності. Ця складова відображає орієнтацію на досягнення високих результатів у діяльності.

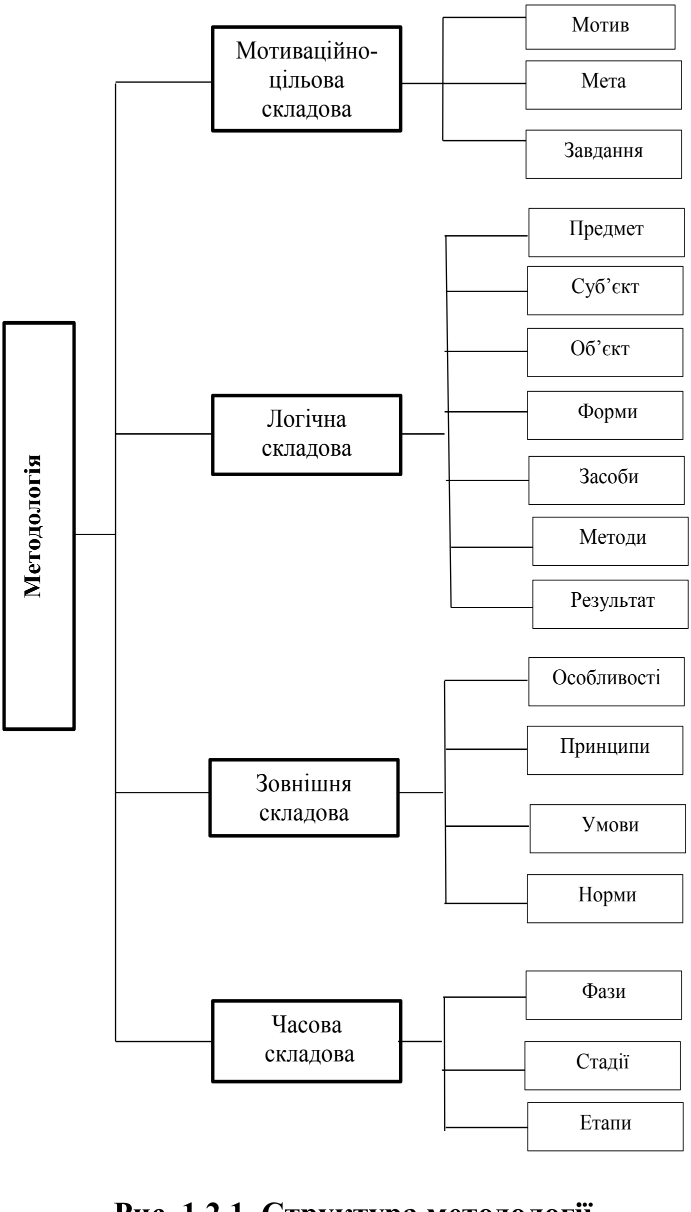


Рис. 1.2.1. Структура методології

1.2.2. Типи основних форм організації діяльності

Діяльність людини може здійснюватися спонтанно, шляхом спроб і помилок, а може бути *організованою*. Як зазначалося раніше, методологія і є вченням про *організацію* діяльності.

У різні історичні періоди розвитку цивілізації мали місце різні типи основних форм організації діяльності, які в сучасній літературі отримали назву організаційної культури. В. Нікітін [179] наводить такі історичні типи організаційної культури:

- традиційний (характерний для ранніх етапів розвитку людства, суспільство яких складалося з комунальних груп, принципом виділення яких було розрізнення «свій – чужий». Такі групи утримувалися міфом і ритуалом). Така форма організації не зникла в наступні епохи, а досі становить фундамент суспільного устрою;
- корпоративно-ремісничий (виник у середині I тисячоліття н.е. і характеризувався наявністю центрів організації суспільства. Спочатку це була церква, потім – міста та університети);
- професійний (початок – епоха Ренесансу. Змістився інтерес від тих, хто вміє і може передати рецепт певного вчення, до тих, хто вміє створювати теоретичне знання, і передача цього вміння стала основною лінією спочатку в університетському, а потім і в інших формах освіти. У професійному типі організаційної культури базовою діяльністю є наука, оскільки в ній формується і єдина картина світу, і загальні теорії, і по відношенню до цієї

картини виділяються окремі теорії і відповідні предметні галузі професійної діяльності);

- проектно-технологічний (прийшов на зміну професійному типу організаційної культури в середині XX століття. У новому проектно-технологічному типі організаційної культури ключовими стають поняття: проект, технології та рефлексія).

Останнім часом проектна діяльність все частіше застосовується в навчальній діяльності, оскільки її сутність – від теорії до практики, поєднання академічних знань з прагматичними та дотримання відповідного балансу на кожному етапі навчання. Впровадження методу проектів дозволяє подолати споглядальний догматичний підхід до знання, сприяє набуттю умінь та навичок використання знань як інструмента розв'язання життєвих проблем.

Доцільно і необхідно застосовувати метод проектів і у навчальній діяльності. Наприклад, у процесі вивчення курсу «Аналітична геометрія» студентам можна запропонувати навчальний проект «Геометричні перетворення на площині», мета якого узагальнити знання шкільного курсу геометрії; під час вивчення проективної геометрії – «Проективна геометрія форм першого ступеня», мета цього проекту – розвиток теоретичного мислення студентів, розширення їх кругозору, розгляд понять проективної геометрії у різних підходах до викладання цього курсу. Міжпредметні навчальні проекти варто пропонувати студентам у процесі вивчення наукових основ шкільного курсу математики (наприклад, проект «Елементи математичної логіки у шкільному курсі математики»; для виконання цього проекту необхідні знання з навчальних дисциплін «Математична логіка та теорія алгоритмів», «Елементарна математика», «Методика навчання математики»).

Заслуговує на увагу робота С. Шевцової [255], у якій проектна діяльність розглядається як основа становлення методологічної культури вчителя.

На сьогодні всі типи організаційної культури існують паралельно, але переважає проектно-технологічний тип, який полягає в тому, що продуктивна діяльність людини (або організації) розбивається на окремі завершені цикли, які називаються проектами. Навчальна ж діяльність орієнтується на всі відомі історичні типи організаційної культури.

1.2.3. Види і рівні методології

Розглядаючи методологію як вчення про організацію творчої людської діяльності і враховуючи класифікацію діяльності за цільовим направленням, науковці ([5], [112], [143], [181] тощо) виокремлюють такі види методології:

- методологія ігрової діяльності;
- методологія навчальної діяльності;
- методологія трудової, професійної діяльності (включає методологію практичної діяльності як у сфері матеріального, так і у сфері духовного виробництва, а також методологію науки (наукової діяльності)).

У науковій літературі зустрічається поділ методології на теоретичну і практичну. Теоретична методологія, відповідно, є вчення про принципи (правила) пізнання. Як результат своєї діяльності дає нам парадигму – статут пізнання. Саме теоретична методологія формується розділом філософського знання – гносеологією. Практична методологія – це вчення про методи (способи, засоби і прийоми) пізнання, які спираються на принципи пізнання, на парадигму. Практична методологія орієнтована на вирішення практичних проблем і цілеспрямоване перетворення світу. Теоретична прагне до моделі ідеального знання, практична ж – це програма (алгоритм), набір прийомів і способів того, як досягти бажаної практичної мети і не схибити проти істини, або того, що вважається істинним знанням. Теоретична методологія відповідає на питання «як пізнавати», практична – на питання «за допомогою чого пізнавати».

Методологію також поділяють на змістовну і формальну. Змістовна методологія включає вивчення законів, теорій, структури наукового знання, критеріїв науковості й системи використовуваних методів дослідження. Формальна методологія пов'язана з аналізом методів дослідження з точки зору логічної структури і формалізованих підходів до побудови теоретичного знання, його істинності і аргументованості.

Для повної характеристики методології виокремлюють *чотири рівні* [265]:

- філософський,
- загальнонауковий,
- конкретно науковий,
- технологічний.

Розглянемо наповнення цих рівнів для методології наукової діяльності (науки), а конкретно для методології математики.

Філософський (найвищий) рівень методології дає загальне уявлення про будову світу, розвиток природи, соціального суспільства, індивіда. Фундаментальні принципи філософської методології базуються на узагальнюючих, філософських положеннях, що відображають найсуттєвіші властивості об'єктивної дійсності і свідомості з урахуванням досвіду, набутого в процесі пізнавальної діяльності людини. До філософського рівня методології відносять діалектичний метод, для якого характерні:

1) Принципи діалектики: принцип розвитку, принцип універсального зв'язку речей матеріального світу, принцип детермінізму, принцип конкретно-історичного підходу, принцип всебічного дослідження, принцип єдності теорії і практики, принцип ізоморфізму тощо.

2) Закони діалектики: закон взаємного переходу кількісних і якісних змін, закон єдності і боротьби протилежностей, закон заперечення заперечення.

3) Категорії діалектики: одиничне, особливе і загальне, сутність і явище, причина і наслідок, необхідність і випадковість, історичне і логічне, зміст і форма тощо.

Категорії, принципи та закони діалектики як відображення реального світу в свідомості людини мають об'єктивний характер, виражають загальні закономірності буття і розвитку природи та суспільства. Разом з тим вони за своєю формою мають суб'єктивний характер, оскільки їх носієм є суб'єкт пізнання – людина.

На рівні філософської методології математики обґрунтовуються закони розвитку математики як науки. Філософський рівень є рівнем узагальнення та систематизації методологічних позицій окремих учених та груп науковців.

До *філософського рівня методології математики* відносяться питання про: предмет математики; співвідношення математики і реального світу; структуру та істинність математичного знання; проблеми обґрунтування математики; місце математики в системі наук тощо.

Перші два питання – про предмет математики і чи вивчає математика реальний світ – пов’язані між собою. У роботах В. Бевз ([6], [7], [8]), Н. Бурбакі [24], Б. Гнеденка [53], Є. Вечтомова [30], Г Вілейтнера [31], М. Шкіля [257] та інших детально проаналізовано питання предмета математики в історичному аспекті. У період зародження математики її поняття і відношення брались із зовнішнього світу. На той момент можна було вважати, що математика – це наука про просторові форми і кількісні відношення дійсного світу. Але з розвитком математики більшість математичних понять не відображають яких-небудь предметів чи відношень матеріального світу, вони створені уявою і розумом математиків (точка, пряма, число тощо). Подальший розвиток математики привів до нового погляду на її предмет: математика – це наука про математичні структури (Н. Бурбакі, Б. Гнеденко, А. Колмогоров, М. Бургін та інші). Сучасний етап розвитку математики характеризується її проникненням практично в усі сфери науки. Це знову призвело до зближення математики з навколишнім світом. Зрозуміло, що такі тенденції знайшли своє відображення у предметі математики. На сьогодні предметом математики є математичні моделі та їх застосування до розв'язування задач (В. Арнольд, Л. Кудрявцев, М. Постников та інші).

У методології математики вирізняють два протилежних філософських погляди на питання: чи вивчає математика реальний світ? Проблема викликана тим, що математичні об'єкти не існують в об'єктивній реальності. Вони є результатом роботи людського мислення і в чистому вигляді існують тільки у свідомості людини. Така специфічність об'єктів математики дала привід для ідеалістичного тлумачення цієї науки. Ідеалістичний погляд: ні, не вивчає, оскільки математичні поняття абстрактні, створені математиками і не мають ніякого відношення до реального світу.

У той же час з точки зору діалектичного матеріалізму задача будь-якої науки, у тому числі і математики, пізнавати, тобто відображати ті чи інші об'єкти дійсності, їх взаємозв'язки і взаємовідношення. Математичні об'єкти, незважаючи на їх специфічність, також є відображенням певної сторони дійсності – кількісних відношень матеріальних об'єктів і процесів. Математичні об'єкти з'являються в результаті абстрагування та ідеалізації. Але для розв'язання прикладних задач теоріям чистої математики необхідно надати реальний зміст (виключити абстракції), тобто вказати на *конкретні властивості, відношення, предмети та явища.* Об'єкти, з якими працює прикладна математика, емпіричні. А тому матеріалістичний погляд: математика вивчає саме реальний світ, її поняття відображають предмети і явища навколишнього світу. Тому відповідь на поставлене питання неоднозначна, діалектична: математика одночасно вивчає і не вивчає реальний світ. «Математика не існує у безповітряному просторі, математичні поняття, аксіоми, теореми і теорії мають своїм витоком реальність і своєю метою – дослідження реальності за допомогою математичного моделювання» [211, с. 15].

Математичне знання характеризується якісним різноманіттям. Так, математику поділяють на:

1) класичну і конструктивну;

2) чисту (теоретичну) і прикладну.

Для конструктивної математики характерна абстракція потенційної здійсненності – абстрагування від обмежених можливостей людини продовжувати будь-який процес як завгодно довго. Для класичної математики характерна абстракція актуальної здійсненності, яка є повним абстрагуванням не тільки від умов і обмежень реального процесу побудови, але і від потенційної здійсненності цієї побудови (тобто від наявності способу цієї побудови). На основі абстракції актуальної здійсненності вводиться поняття актуально нескінченної множини – множини всіх множин, що містить підмножину, еквівалентну самій множині. На понятті актуальної нескінченності побудовані теорія множин, математичний аналіз, топологія, теорія ймовірностей тощо.

Розподіл математики на теоретичну і прикладну є умовним. Теоретична математика безпосередньо вивчає системи абстрактних математичних об'єктів і форми, виокремлені в чистому вигляді. Напрям дослідження тут –

від конкретного до абстрактного. Та частина математики, яка займається розв'язанням задач, які виникають за межами самої математики, називається прикладною. Предметом прикладної математики є побудова, вивчення і оцінка математичних моделей. Напрям дослідження у прикладній математиці – від абстрактного до конкретного. Обидва напрями математики взаємопов'язані і у своєму розвитку доповнюють один одного.

Чимало наукових понять зобов'язані своєю появою практиці. Такими є, наприклад, поняття числа, функції, похідної. Але є чимало прикладів, коли в теоретичній математиці математична модель процесу була отримана раніше, ніж він був вивчений як фізична реальність. Приклад неперервної ніде недиференційовної функції навів К. Вейєрштрас ще у 1872 році. А на початку XX століття Н. Вінер показав, що броунівський рух можна визначити як рух з неперервною траєкторією, яка ніде не має дотичної з ймовірністю, яка дорівнює одиниці. Таку саму справу маємо і з неевклідовою геометрією і некомутативною алгеброю.

Важливою проблемою для філософського рівня методології математики є проблема істинності математичного знання. Цю проблему варто проаналізувати з кількох точок зору:

1) *Шляхи встановлення істинності математичних знань.* Сьогоднішній рівень строгості математики передбачає, що всі твердження обґрунтовуються тільки шляхом доведення або приймаються за істинні (аксіоми), жодне з тверджень не може бути заперечене або підтверджене за допомогою досліду чи експерименту.

С. Раков відмічає, що принципова відмінність математики від решти природничих наук – критерій істинності: «… для математики критерієм істинності є виводимість, послідовне використання дедуктивного методу доведення тверджень» [211, с. 15].

Але так було не завжди. Істинність математичних знань підтверджувалася і широким застосуванням цих знань на практиці. Як приклад, числення нескінченно малих у XVII – XVIII ст.

Ще один аспект встановлення істинності математичних знань, який викликає суперечки серед математиків: чи можна для встановлення істинності математичних знань застосовувати комп'ютер, наприклад, чи вважати розв'язаною задачу: «З'ясувати, чи можна будь-яку розташовану на сфері карту розфарбувати чотирма фарбами так, щоб будь-які дві області, що мають спільну ділянку межі, були розфарбовані в різні кольори» (як відомо, задача сформульована у середині XIX ст., «доведена» за допомогою комп'ютера у 1976 р. Найбільш трудомістка частина відповідних обґрунтувань була пророблена комп'ютером. Його було використано для перевірки 1432 частинних випадків).

2) *Умови, в яких математичне знання розглядається.* Одне і теж твердження може бути істинним або хибним залежно від умов. Наприклад: а) «Рівняння $\cos x = 2$ не має коренів». На множині дійсних чисел це твердження є істинним. На множині комплексних чисел – хибним (ще простіший приклад – твердження про кількість коренів квадратного рівняння з від'ємним дискримінантом); б)

«Сума кутів трикутника дорівнює 180^0». В евклідовій геометрії це так, в неевклідовій – ні (в геометрії Лобачевського менше, а в геометрії Рімана більше 180^0).

Під обґрунтуванням теорії розуміється перевірка на істинність її фундаментальних положень. З вище сказаного випливає, що обґрунтування математики можна представити тільки як *доведення* несуперечності її понять, аксіом, коректності систем виведення.

Науковці ([228], [33], [197] та інші) розрізняють ряд концепцій обґрунтування математики: логіцизм, інтуїціонізм, формалізм, конструктивізм. Розглянемо основні положення кожної програми.

Логіцизм. Основоположники цієї програми: Г. Кантор, Г. Фреге, Б. Рассел, А. Вайтхед, Л. Вітгейнштейн. Основні програмні положення: 1) подати всі математичні поняття як логічні; 2) вивести всі теореми математики з логічних аксіом; 3) довести таким чином аналітичний характер усієї математики. Головна ідея: редукція, зведення математики до логіки. Логіцизм відстоює аксіоматичний метод побудови математичної теорії і визнає поняття актуальної нескінченності.

Інтуїціонізм. Програма виникла у полеміці з логіцистами на початку XX століття. Її основоположники - Я. Брауер, Г. Вейль, А. Гейтинг. Головна ідея: для обґрунтування математики не потрібна ні логіка, ні мова. Математичне мислення як таке первинне по відношенню до них. Початкова інтуїція – ось дійсний засіб побудови точної науки. І ця інтуїція – діяльність, пов’язана з глибинним відчуттям і переживанням часу [228]. Основні програмні положення: 1) подати всі математичні поняття через генетичні означення; 2) положення математики мають не виводитися, а породжуватися. Інтуїціонізм відстоює генетичний метод побудови теорії і визнає поняття потенційної нескінченності.

Конструктивізм. Основою для формування цього напряму стала програма інтуїціоністів. Основоположники: А. Черч, А. Тьюрінг, Е. Пост, А. Марков, М. Шанін. Конструктивісти не приймають посилання на інтуїцію як критерій істинності математичних висловлювань; розробляють поняття алгоритму як розв'язної процедури, що включає в себе послідовність строго заданих дій.

Формалізм. Основоположники: Д. Гільберт, П. Бернайс, В. Аккерман. Основна ідея – представити всю змістовну класичну математику у вигляді формальної системи і довести її несуперечливість. Основні положення програми: 1) всі висловлювання математики перетворити на формули; математику перетворити на сукупність формул; 2) довести несуперечливість систем, отриманих в результаті формалізації змістовної математики; 3) доведення має бути конструктивним, а використовувані методи доведення – фінітними.

Жодна з перерахованих методологічних концепцій не справилася з задачею обґрунтування математики:

1) Виникнення парадоксів теорії множин показало, що чисто логічних засобів для обґрунтування математики недостатньо. Крім того, зведення математики до логіки ставить проблему обґрунтування логіки.

2) Найбільше критики зі сторони математиків отримала відмова інтуїціоністів від закону виключення третього (Д. Гільберт вважав це відмовою від математики

як науки взагалі); ідея зведення математичного мислення до рівня операціоналізму; розв'язання проблеми істинності математичного знання.

3) Д. Гільберт довів абсолютну несуперечливість формальних систем, але це не означало доведення несуперечливості самої математики.

У 1931 році австрійський математик К. Гедель встановив принципову неможливість повної формалізації математики і довів дві важливі теореми про неповноту аксіоматичних теорій. У першій теоремі (про неповноту формалізованої теорії) вчений показав, що якщо достатньо розвинена дедуктивна теорія (типу арифметики) несуперечлива, то вона обов'язково неповна, причому усунути неповноту приєднанням до системи аксіом нових аксіом неможливо. Згідно з другою теоремою несуперечливість теорії не може бути доведена засобами лише цієї теорії: доведення несуперечливості вимагає засобів, які лежать поза межами самої теорії.

Результати К. Геделя показали, що обґрунтування математики в межах лише самої математики *принципово неможливе.*

Математика займає особливе місце в системі наук, її не можна віднести ні до природничих, ні до суспільних, ні до технічних наук. У той же час математика вивчає форми і кількісні відношення, абстрагуючись від їх змісту, які однаково властиві природі, суспільству, людському мисленню. Завдяки математичному формалізму математика стала мовою науки.

Г. Галілей [40] писав, що філософія написана у величній книзі, яка постійно відкрита нашому погляду, але зрозуміти її може лише той, хто спочатку навчився осягати її мову і тлумачити знаки, якими вона написана. Написана ж вона на мові математики. Філософ І. Кант [91] стверджував, що кожна наука містить стільки істини, скільки в ній є математики.

У класифікації наук математика займає окреме місце в основі піраміди (рис. 1.2.2.).

Рис. 1.2.2. Структура наукового знання за В. Лєдньовим

У певному сенсі теоретичним підґрунтям математики можна вважати філософію і логіку. Математику і філософію можна віднести до однієї групи – до наук про загальні закономірності реального світу, мислення і пізнання.

Математика не тільки мова науки, а й відіграє роль методології для природознавства, для наук соціального, гуманітарного циклу. Ще Р. Декарт зауважив, що математика разом з тим, що вона мова науки, є також способом мислення, інструментом доведення. Таким чином, математика виконує функцію загальнонаукового методу.

Оскільки у математиці відомості можна подати у вигляді кількісних характеристик, то завдяки цьому з'являються і особливі, відмінні від природознавства прийоми дослідження – математичний експеримент, математична гіпотеза, математичне моделювання. Їх специфіка полягає в тому, що замість дослідження реальних об'єктів проходить дослідження математичних моделей (рівнянь, нерівностей тощо).

Другий рівень – *загальнонаукова методологія* – це теоретичні концепції, прийнятні до всіх або до більшості наукових дисциплін. Загальнонаукові методи пізнання, що знайшли широке застосування у математиці як науці та у практиці навчання математики науковці ([107], [112], [143], [171], [190]) розділяють на три рівні:

1. Методи емпіричного дослідження (спостереження, експеримент, порівняння, опис, вимірювання).

2. Методи теоретичного пізнання (формалізація, аксіоматичний метод, гіпотетико-дедуктивний метод і сходження від абстрактного до конкретного).

3. Загальнологічні методи і прийоми дослідження (аналіз, синтез, абстрагування, ідеалізація, узагальнення, індукція, дедукція, аналогія, моделювання, системний підхід, статистичні методи).

Найбільше значення для внутрішньої структуризації математичного знання мають абстракції, пов'язані з нескінченністю. З допущенням нескінченності в тій чи іншій формі пов'язані практично всі математичні теорії. Існують різні види абстракцій: абстракції ототожнення, ізолююча абстракція, абстракція актуальної нескінченності, абстракція потенційної здійсненності. Метод абстракції притаманний всім теоретичним наукам, але у математиці він досягає найвищого рівня, оскільки вона використовує багатоступінчате абстрагування, створюючи абстракції від абстракцій (скінченні еквівалентні множини реальних об'єктів → натуральне число → раціональне число → дійсне число→ комплексне число).

Всі математичні абстракції від решти абстракцій відрізняє ідеалізація. Метод ідеалізації характерний тим, що він наділяє створюване мисленням абстрактне поняття рисами, яких нема в реальному світі. Ідеалізація в математиці відбувається до крайніх, граничних рівнів (нехтуючи розмірами – отримуємо точку; розширюючи до нескінченності – з відрізка отримуємо пряму).

Особливу увагу слід приділити розгляду таких методів пізнання як індукція та дедукція. Методи індукції та дедукції знаходяться в діалектичній єдності так само, як аналіз і синтез. У загальному вигляді метод індукції не є методом пізнання в математиці, частіше він використовується в природничих чи гуманітарних науках. У математиці ж послуговуються методом повної індукції та методом математичної індукції. Дедуктивний метод протилежний до методу індукції.

Один із різновидностей цього методу – аксіоматичний метод, найабстрактніший і найуживаніший метод вивчення математичних систем. Аксіоматизація дає можливість систематизувати теорію, найточніше виявити її логічну структуру. Н. Бурбакі у роботі «Нариси з історії математики» так охарактеризував роль аксіоматичного методу: «Аксіоматичний метод вчить нас ... знаходити спільні ідеї, що ховаються за деталями, властивими кожній з розглянутих теорій, витягувати ці ідеї і піддавати їх дослідженню» [24]. У той же час треба підкреслити, що аксіоматичний метод має обмежене застосування, оскільки вимагає високого рівня розвитку змістовної теорії (детальніше про аксіоматичний метод у параграфі 2.3).

У свою чергу сама математика в цілому є загальнонауковим методом пізнання. Можна вказати особливості математики, які мають загальнонауковий характер: доказовість математичного знання; випереджувальний розвиток математики по відношенню до інших наук, що дає можливість знаходження в її змісті таких структур, які можуть бути реалізовані у розвитку інших наук; яскраве вираження в математиці духу пошуку істини; реалізація в її змісті таких логічних принципів і законів, які не стали надбанням інших наук; рефлективний характер математики, яка дає не просто приклади, але і зразки реалізації принципу рефлексивності в науковому пізнанні (наприклад, метаматематика Д. Гільберта) [259].

Третій рівень – *конкретно наукова методологія* – розглядає сукупність теоретичних положень, закономірностей, методичних підходів, що застосовуються в тій чи іншій спеціальній науковій галузі. Методологія конкретної науки (або її напряму) включає в себе як проблеми, специфічні для наукового пізнання в цій галузі, так і питання, висунуті на вищих рівнях методології (загальнонауковому і філософському). Конкретно науковий рівень полягає у розробці понять, прийомів, принципів, методів вирішення конкретних завдань науки, які втілюються в рішеннях, алгоритмах обчислень, експериментах. Визначається математичний зміст термінів, зв'язки конкретної галузі з іншими, історія розвитку.

Математика має широкий арсенал конкретно наукових методів. У принципі, кожен розділ математики має свої методи. Наприклад, основний метод аналітичної геометрії – метод координат, математичного аналізу – граничний перехід (інші конкретно наукові методи наведені у розділах 2 і 3).

Четвертий рівень – *технологічна методологія* – дозволяє використовувати найефективніші методи, способи і засоби дослідження. Цей рівень методології – це набір процедур, що забезпечують вибір засобів і способів, необхідних для усвідомлення дослідником різноманіття підходів до одних і тих самих проблем. Це сприяє подоланню догматичного мислення, дозволяє поглянути на світ з різних сторін.

Технологічна методологія дозволяє логічно вибудувати процедуру педагогічного експерименту, провести збір історичного матеріалу (якщо це доцільно), зробити обробку експериментального матеріалу адекватними математичними методами, представити науковий матеріал (у вигляді статті, дисертації, монографії, підручника, навчального посібника), сформувати основні категорії і поняття науки.

1.2.4. Основи методології

Людська діяльність характеризується п’ятьма інваріантами (інваріантними сторонами): ціннісно-орієнтовна діяльність, пізнавальна діяльність, перетворювальна діяльність, естетична й комунікативна діяльність (спілкування). Оскільки діяльність є предметом вивчення методології, то науковці ([88], [181] та інші) виокремлюють такі основи методології:

1. *Філософсько-психологічна* теорія діяльності.
2. *Системний аналіз* (системотехніка).
3. *Наукознавство, теорія науки*.
4. *Етика діяльності.*
5. *Естетика діяльності.*

Філософсько-психологічна теорія діяльності розглянута у підпункті 1.2.1. Зупинимося на розкритті решти основ методології.

Системний аналіз (системотехніка). У науковій літературі нема єдиного підходу до трактування цього поняття. Так, Ф. Перегудов і Ф. Тарасенко [200, с.360], О. Новиков і Д. Новиков [181] визначають, що «системний аналіз – це вчення про систему методів дослідження або проектування складних систем, пошуку, планування та реалізації змін, призначених для ліквідації проблем». Системний аналіз розглядає діяльність як складну систему, спрямовану на підготовку, обґрунтування та реалізацію вирішення складних проблем: політичного, соціального, економічного, технічного та іншого характеру. Системний аналіз – це прикладна діалектика.

Д. Чернілевський [171, с. 35] розглядає системний аналіз як «… сукупність методичних засобів, що використовуються для підготовки і обґрунтування рішень зі складних питань економічного, наукового, соціального, політичного, технічного і військового характеру».

В. Куклін [140] вважає, що системний аналіз – це сукупність методологічних засобів, що використовуються для підготовки та обґрунтування рішень щодо складних проблем політичного, соціального, економічного, наукового, технічного характеру.

У роботі О. Кустовської [143, с. 12] системний аналіз розглядається як «… методологія дослідження таких властивостей і відношень в об’єктах, які складно спостерігати і важко розуміти, за допомогою представлення цих об’єктів у вигляді систем, і вивчення їх властивостей і зв’язків як відношень між цілями та засобами їх реалізації». Автор зауважує, що існує два підходи до трактування суті системного аналізу:

1) наголос робиться на формальних (найчастіше математичних) засобах опису системи: блок-схеми, мережеві графіки, математичні рівняння тощо. Іншими словами, будується модель системи, яка вивчається.

2) спирається на логіку системного аналізу: системний аналіз розглядають як методологію пізнання й упорядкування (структуризація проблеми, яку слід вирішувати, з використанням формальних методів і комп’ютерної техніки або без них).

У контексті нашого дослідження ми схиляємося до другого підходу і розглядаємо системний аналіз як сукупність методів і засобів розробки, прийняття й обґрунтування рішень у процесі дослідження, утворення та управління системою. За такого підходу системний аналіз служить для поглиблення і розширення розуміння сутності системи, її структури, організації, цілей і завдань функціонування, закономірностей розвитку, визначення оптимальних шляхів і методів управління системою.

Разом з терміном «системний аналіз» у науковій літературі розглядається термін «системний підхід». На сьогодні серед науковців не існує єдиної думки щодо співвідношення між цими поняттями. Розглянемо кілька прикладів.

1. «Системний підхід – це напрямок методології, в основі якого лежить розгляд об’єктів як систем; орієнтує дослідника на розкриття цілісності об’єкта, на виявлення різноманітних типів зв’язку в ньому і зведення їх в єдину теоретичну картину». Системний аналіз опирається на системний підхід [171, с. 34].

2. Системний аналіз – це найбільш послідовна реалізація системного підходу до розв’язання політичних, соціально-економічних, технічних та інших проблем в різних сферах людської діяльності [59].

3. Відомі різновиди системного підходу до дослідження найскладніших проблем науки. Одним з них вважається системний аналіз – аналіз проблем з позиції системного підходу, що допомагає пов’язати між собою усі відомі факти і взаємозв’язки, що складають суть проблеми, яка аналізується, і створити узагальнену модель,

що відображає цю проблему з максимально можливим ступенем повноти ([101], [202]).

4. З практичної сторони системний аналіз – це методологія і практика такого втручання в проблемні ситуації, яка їх покращує; з методологічної – системний аналіз є прикладною діалектикою [200, с. 348]; системний аналіз – це одна із прикладних наук, яка застосовна до систем будь-якої природи [200, с. 340]. Системний підхід варто розглядати або як одну із ранніх форм системного аналізу, або як початкову фазу сучасного системного аналізу, етап первинного якісного аналізу проблеми і постановки задач [200, с. 360].

Отже, одні автори розглядають системний аналіз як різновид системного підходу, інші – як одну із прикладних наук, а системний підхід – як форму системного аналізу.

Враховуючи, що системний аналіз разом з філософією, психологією, етикою та естетикою є однією з основ методології, у нашому дослідженні будемо вважати, що системний аналіз – це прикладна наука, одна із п’яти основ методології, системний підхід – один із методів загальнонаукової методології.

- *Наукознавство, теорія науки.*

Кожна людина (чи теоретик, чи практик) для організації продуктивної (інноваційної) діяльності має знати, що саме для досягнення мети діяльності може дати сучасна наука, особливо це стосується навчальної та наукової роботи.

Наукознавство – це наука, яка вивчає закономірності розвитку науки, структуру і динаміку наукового знання та наукової діяльності, взаємодію науки з іншими соціальними інститутами та сферами матеріального та духовного життя суспільства [112]. Вона включає в себе цілий ряд дисциплін: гносеологію, логіку науки, семіотику, соціологію науки, психологію наукової творчості тощо. Назвемо основні питання, які відносяться до наукознавства і мають вирішальний вплив на організацію діяльності, тобто є основою методології. Науковці ([146], [147], [174], [181], [205]) до таких питань відносять:

1. Загальні поняття про науку (що таке наука, три основні аспекти про науку: наука як соціальний інститут, наука як результат, наука як процес).

2. Загальні закономірності розвитку науки (обумовленість розвитку науки потребами суспільно-історичної практики, відносна самостійність розвитку науки, наступність, чергування в розвитку науки періодів еволюційного і революційного розвитку, взаємодія і взаємозв'язок усіх галузей науки, свобода критики, безперешкодне обговорення питань науки, відкрите і вільне вираження різних думок).

3. Структура наукового знання.

4. Критерії науковості знань (істинність, інтерсуб'єктивність і системність).

5. Класифікації наукових знань (існують різні основи класифікації знань, наприклад, знання емпіричні і теоретичні, знання фундаментальні, прикладні і розробки тощо).

6. Форми організації наукових знань (факт, положення (аксіоми, леми, твердження, теореми), поняття, категорія,

принцип, закон, теорія, метатеорія, ідея, доктрина, парадигма, проблема (або задача), гіпотеза).

7. Загальні поняття про семіотику (науку, яка вивчає закони побудови і функціонування знакових систем. Для організації діяльності людині треба передавати певні відомості іншим людям, для чого створюються численні знакові системи. Особливо це стосується навчання майбутнього вчителя математики, оскільки практично кожне математичне поняття чи відношення має своє специфічне позначення, символ).

- *Етика діяльності.*

Оскільки будь-яка людська діяльність здійснюється в суспільстві, природно, вона повинна завжди ґрунтуватися на моралі і, відповідно, організовуватися відповідно до моральних норм. Моральна культура є суттєвою стороною будь-якої діяльності кожної людини, народу, класу, соціальної групи, колективу; вона відображає функціонування історично-конкретної системи моральних цінностей [181]. Для нашого дослідження доцільно виокремити корпоративну етику та професійну етику. Корпоративна етика – це зведення писаних і неписаних норм взаємин між співробітниками в рамках одного конкретного підприємства, фірми, організації, установи, або сформовані як традиції, або закріплені в нормативних документах. Професійна етика – для окремих професій існують крім загальнолюдських, загальнонаціональних етичних норм ще й додаткові професійні етичні норми: педагогічна етика, наукова етика тощо. Як правило, норми професійної етики не сформульовані у вигляді будь-яких затверджених кодексів, офіційних вимог тощо. Так, наприклад, норми наукової діяльності вони існують і можуть розглядатися в двох аспектах – як внутрішні (в співтоваристві вчених) етичні норми і як зовнішні – як соціальна відповідальність учених за свої дії та їх наслідки.

Через високий статус науки в житті сучасного суспільства соціальні цінності найтіснішим чином переплітаються з такими внутрішньонауковими цінностями як аргументоване обґрунтування і доведення, об’єктивність і системність знань, оцінка результатів наукової діяльності та етичні імперативи наукового співтовариства.

Проблема співвідношення науки і моралі з’явилася багато століть тому і в залежності від різних підходів до розуміння місця науки і моральності в житті суспільства набувала різних форм: одні вчені проголошували етичну «нейтральність» науки, у тому числі і математики, вважаючи, що наука сама собі етика, інші не заперечували зв'язок науки з етикою. Якщо розглядати науку як систему знань, то в цьому сенсі вона, дійсно, нейтральна в етичному плані: наукове знання як таке не може бути ні моральним, ні аморальним, воно ні «добре» й ні «зле». Але якщо розглядати науку як людську діяльність і як певну систему організацій та відносин у суспільстві, то в цьому сенсі вона схильна до впливу на неї моральних факторів, що приймаються суб’єктами наукової творчості та суспільства в цілому [264].

- *Естетика діяльності.*

Естетична діяльність (естетичні компоненти діяльності) притаманні в тій чи іншій мірі кожній людині в будь-якому виді діяльності. Її специфіка та функції, якщо позначити їх в узагальненому вигляді, полягають в тому, що вона є сферою вільного самовираження суб’єкта в його ставленні до світу. Естетична діяльність, її компоненти важливі у будь-якій людській діяльності: практичній чи духовній.

В історії науки математиці завжди відводилося особливе місце: починаючи з Античності з нею пов’язувався ідеал наукової істини, поняття математики служили основою для розвитку інших наук і закладалися як принципи мистецтва. Протягом історичного розвитку математичне знання трактувалося як чиста діяльність мислення, як строге і неупереджене виведення наслідків з аксіом тощо. Математика як один із феноменів культури схильна до дії естетичних факторів.

Про математику і природничо-наукові знання, про навколишній світ і красу в явному вигляді говорили і писали творці нових відкриттів, нових гіпотез, нових теорій: Н. Абель, Е. Галуа, Р. Декарт, В. Лейбніц, І. Кант, М. Ломоносов, Ч. Дарвін, М. Фарадей, Д. Максвелл, А. Майкельсон, А. Ейнштейн, П. Дірак, А. Пуанкаре, В. Паулі, Г. Харді, Г. Вейль, Р. Фейнман, В. Гейзенберг, І. Пригожин, Х. Юкава та багато інших. При цьому красу розуміли як гармонію, простоту, симетрію, узгодженість, порядок, інтуїтивну очевидність, ясність, легкість сприйняття, істину тощо. Багатьом вченим здавалося інтуїтивно очевидним, що уявлення про красу можуть виступати в якості вихідного початку, першоджерела для створення гіпотез, аксіом, наукових відкриттів [180].

Науковці ([30], [33] та інші) виокремлюють такі естетичні складові математики:

1) Логіка і мова математики. Математика на сьогодні є загальновизнаною мовою науки. Крім того, степінь математизації певної галузі знань є показником її науковості. Дедукція є загальнонауковим методом обґрунтування істини. Точні науки користуються аксіоматичним методом побудови своїх теорій. Математична логіка стала теоретичною основою комп'ютерної техніки.

2) Друга естетична складова математики пов’язана з її предметом (за Енгельсом, тобто з просторовими формами і кількісними відношеннями навколишнього світу). У цьому сенсі краса математики проявляється, насамперед, у гармонії чисел і витонченості геометричних фігур: піфагорійське вчення про натуральне число як першооснову всього сущого; зв’язок золотого перетину з числами Фібоначчі. Високий рівень абстракцій і узагальнень привносить свої елементи краси в математику. Класичні досягнення математики так само вічні, як і великі твори мистецтва.

Людина у кожній сфері своєї діяльності намагається досягти ідеалу – еталону краси та досконалості. Математика ж є наукою, у якій метод ідеалізації відіграє надзвичайно важливу роль.

1.3. Зміст методологічних знань майбутнього вчителя математики

1.3.1. Теоретичні аспекти знань та їх класифікація

У науково-методичній літературі існують різні підходи до тлумачення поняття «знання». Для порівняння наведемо кілька означень.

Так, у психології знання розглядають як «… теоретично узагальнений суспільно-історичний досвід, результат оволодіння людиною дійсності, її пізнання» ([61, с. 48], [194]).

Філософи трактують знання як відображення в свідомості людини реального світу, його закономірностей (наприклад, [193]).

У роботах, пов’язаних з економікою, маємо: «Знання складаються з істин і уявлень, точок зору і концепцій, суджень і пропозицій, методологій і ноу-хау» [275]; «… знання – продукт використання інформації. Знання не віддільні від соціального чи іншого контексту. Застосування і поширення знань істотно залежить не тільки від технології, але і від соціальних інститутів» [247].

У педагогіці розглядають: «знання – найбільш «поверхневий» рівень засвоєння і запам'ятовування певної суми фактів, образів, правил, числових даних тощо» [36]; знання – категорія, що відображає істотні моменти зв'язку між пізнавальною діяльністю і практичними діями людини [191]; знання – особлива форма духовного засвоєння результатів пізнання, процесу відображення дійсності, яка характеризується усвідомленням їх істинності [60, с. 137].

Варто відмітити, що науковці під час з'ясування природи знання наголошують на важливому аспекті – зв'язок знання з людиною, її пізнавальною, інтелектуальною діяльністю.

Т. Стюарт [274] визначив знання як «суспільне благо», яке не зменшується в міру його використання. Здобуття будь-ким певного обсягу знань не зменшує, а часто навіть збільшує можливості інших користуватися ним.

Знання можуть використовуватися одночасно різними суб'єктами в різних точках планети. Однак знання можуть залежати від часу або обставин (умов) їх використання.

Як бачимо, одні науковці тлумачать знання лише як результат суб'єктивного засвоєння світу або суспільного пізнання, в інших цей термін містить у собі і сам результат, і шлях його досягнення. Оскільки для формування системи знань важливий *процес*, *шлях* засвоєння знань, то у контексті нашого дослідження ми поділяємо думку І. Лернера і розглядатимемо знання невідривно від процесу пізнання, від діяльності засвоєння, яка має свої етапи і рівні засвоєння знань [150].

На сьогодні не існує загальноприйнятої схеми класифікації знань, але можна виокремити ряд ознак, за якими це можна зробити. Класифікацію знань за В. Єфімовим [72, с. 18] наведено у таблиці 1.3.1.

Таблиця 1.3.1

Класифікація знань

Ознака класифікації	Зміст ознаки
За змістом	1) know - why (знаю, чому) 2) know - what (знаю, що) 3) know - how (знаю, як) 4) know - who (знаю, хто)
За характером	1) знання про ціль 2) систематичні знання 3) практичні 4) автоматичні
За належністю	1) особистісні 2) колективні
За формою прояву	1) явне (кодифіковане) 2)неявне (некодифіковане, приховане)
За способом формування	1) рефлексивне 2) інтуїтивне

У педагогіці розрізняють такі види знань:

1) І. Лернер виокремлює: терміни і поняття, факти, закони, теорії, методологічні знання, оцінювальні знання [150, с. 9].

2) Г. Михалін пропонує: знання про предмети і явища оточуючої дійсності, методологічні знання, оцінювальні знання [172, с. 30].

Зупинимося детальніше на характеристиці методологічних знань. Як для понять «знання» і «методологія», так і для поняття «методологічні знання» нема загальноприйнятого означення.

І. Лернер вказує, що методологічні знання включають «знання про методи, процеси і історію пізнання, про конкретні методи науки, про різні способи діяльності» [150, с. 10].

За Л. Зоріною методологічні знання – це «знання про природу, способи фіксації і побудови знань», «знання про знання і методи пізнання» [85, с. 14].

Г. Михалін розглядає методологічні знання як знання про шляхи, процес і історію пізнання, про різні методи наук та способи діяльності, що перетворюють дійсність [172, с. 30].

В. Сластьонін розглядає методологічні знання як інструмент теоретичної та практико-перетворюючої діяльності педагога, що дозволяє йому самостійно орієнтуватися в складних динамічних процесах перебудови виховання, що дає «ключ до прийняття професійно обґрунтованих, нестандартних і новаторських рішень» [226, с. 82].

У педагогічній літературі нема єдиного підходу до виокремлення змісту методологічних знань. Так, Л. Зоріна виокремила такий комплекс методологічних знань, який стосується природничо-наукових дисциплін: знання про теорію як систему знань (витоках її виникнення, структурі, природі її основних положень-постулатів, емпіричний базис теорії, шляхи її перевірки, меж застосовності); ідеальний об'єкт (його функції, означення, умови перегляду ідеальних об'єктів); формалізовані поняття (їх функції в науці); шляхи отримання законів; група загальнонаукових понять (означення, закон, правило, принцип, гіпотеза, постулат, модель, науковий факт, експеримент, теорія, концепція, методи науки); теорія як метод пізнання [84, с. 40].

В. Кирилов [95] виокремлює такі компоненти: знання про соціально-філософські проблеми сучасної освіти; знання про склад знання, його формально-логічну структуру, тенденціях розвитку, засоби й методи отримання і вираження знання, загально гностичні принципи і закономірності наукового та навчального пізнання; знання про діалектичне і систематичне мислення; знання про структуру діяльності взагалі і про структуру навчально-пізнавальної діяльності зокрема; знання про внутрішні і зовнішні відношення дисциплін психолого-педагогічного циклу і про функціональний вихід дидактики до загальнонаукових і спеціальних дисциплін через теорію і методику навчання.

П. Кабанов [86] відносить до методологічних знань: знання історії педагогіки та сучасних педагогічних теорій, основних принципів, які використовуються як методологічні установки в педагогіці (педагогічний рівень); знання загальнонаукових принципів: редукціонізму, еволюціонізму, раціоналізму (загальнонауковий рівень); знання альтернативних педагогічних теорій, що базуються на протилежних методологічних принципах, детермінованих різними світоглядними установками (філософський рівень).

Як зазначалося у пункті 1.2, науковці виокремлюють чотири рівні методології. За аналогією методологічні знання також складаються з декількох структурних рівнів. На сьогодні найпоширенішою є структурна модель методологічних знань, в якій виокремлено чотири рівні:

- філософський;

- загальнонауковий;
- конкретно науковий;
- технологічний.

Розкриємо зміст кожного з названих рівнів методологічних знань для майбутнього вчителя математики.

1.3.2. Методологічні знання філософського рівня

Перший рівень методологічних знань представляє собою філософські знання, отримані за допомогою методів філософії. Це філософські закони, категорії, принципи, філософські ідеї, світоглядні та методологічні переконання вчених.

Основні філософські категорії: логіка і інтуїція, загальність і конкретність, скінченність і нескінченність, дискретність і неперервність, необхідність і випадковість, зміст і форма, істина, сутність, явище, загальне і одиничне, логічне і історичне, знання, наука, протиріччя, причина і наслідок, можливе, дійсність, якість і кількість, буття, свідомість, практика тощо.

Основні філософські концепції: ідея гуманізму, екзистенціалізм, прагматизм, матеріалізм, ідеалізм, вчення про детермінізм тощо. До цих знань варто віднести знання з історії математики, знання про математичний метод пізнання дійсності (математичні поняття, аксіоми, теореми і теорії мають своїм витоком реальність і своєю метою – дослідження реальності за допомогою математичного моделювання), знання про принципову відмінність математичних дисциплін від природничих – критерій істинності: виводимість, послідовне використання дедуктивного методу доведення тверджень [211].

Закони, принципи і категорії філософії знаходять своє відображення у математиці. Так, закон заперечення заперечення відображається у математиці у явному вигляді у теорії множин, математичній логіці: $\overline{\overline{A}} = A$. Ілюстрацією закону взаємного переходу кількісних і якісних змін служить зародження, виникнення і розвиток числення нескінченно малих.

Велике значення для наукового пізнання має принцип причинності як аспект принципу детермінізму. Цей принцип знаходить своє відображення і під час навчання математики, зокрема:

1) під час встановлення необхідних і достатніх умов належності того чи іншого математичного об'єкта до певного класу об'єктів (необхідні, достатні умови інтегровності та диференційовності функції дійсної чи комплексної змінної тощо);

2) конструктивна частина цього принципу (твердження про можливість передбачення характеристик певної системи (фізичної, біологічної тощо) у будь-який момент часу реалізується у диференціальних рівняннях, які можна розглядати як рівняння руху).

До основних категорій детермінізму відносяться «необхідність» і «випадковість» – парні категорії, які перебувають у відношенні протиріччя. Необхідність є визначальною характеристикою такого причинно-наслідкового зв’язку, який регулярно обумовлений, тобто є законом. Випадковість – це форма прояву необхідності. Завжди має місце множина випадковостей, серед них проявляється одна необхідність [2]. Формування знань про ці категорії відбувається під час вивчення навчальної дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика».

Принцип детермінізму проявляється і через функціональний зв'язок. У найпростішому випадку функціональний зв'язок між окремими властивостями чи характеристиками предмета виражається через функцію, а остання вивчається і досліджується практично у всіх розділах математики.

Уже в школі учням приходиться оперувати поняттям нескінченності. Зауважимо, що це одне із фундаментальних понять математики, чи не найбільша абстракція в математиці. На нашу думку, для роз’яснення цього поняття потрібно приділити значно більше уваги і часу. Як приклад, для роз’яснення поняття нескінченності можна розглянути такий спосіб: встановити взаємно однозначну відповідність між множиною дійсних чисел і множиною точок координатної прямої, розглянути (звичайно, теоретично) *процес* необмеженого віддалення точок координатної прямої від її початку вправо і вліво. Для символічного позначення цього процесу і використовуються символи $+\infty$ і $-\infty$.

Під час побудови числової прямої вводиться поняття невласного дійсного числа $+\infty$ (характеристична властивість: $\forall x \in R \;\; x < +\infty$) та невласного дійсного числа $-\infty$ (характеристична властивість: $\forall x \in R \;\; x > -\infty$). Отже,

$+\infty$ та $-\infty$ – теж числа, тільки невласні. За необхідності для таких чисел можна визначити арифметичні операції (але з певними обмеженнями). Зокрема, будемо вважати, що:

$$\forall a \in R \quad a+(\pm\infty)=\pm\infty,\ a-(\pm\infty)=\mp\infty;$$

$$\forall a>0\ \ a\cdot(\pm\infty)=\pm\infty.$$

Але на відміну від операцій над числами $\infty-\infty$ не завжди 0, а $\frac{\infty}{\infty}$ не завжди 1, тобто результат названих арифметичних операцій визначається *неоднозначно*.

З поняттям нескінченності, зокрема з нескінченними множинами, пов’язано чимало задач: Яких чисел «більше» – натуральних чи парних? Натуральних чи цілих?

Ще два важливих поняття, які потребують детальнішого, ніж є у теперішній практиці викладання, пояснення, – дискретність і неперервність.

Не менш важливим є поняття існування та єдиності, які досить часто зустрічаються в математиці. Практично після кожного введеного математичного поняття формулюються і доводяться теореми про існування та єдиність певної характеристики математичного об'єкта, пов'язаної з введеним математичним поняттям. Крім того, відповідні питання виникають і під час розв’язування, наприклад, різного виду рівнянь:

1. Скільки розв’язків має лінійне рівняння?
2. Чи існує розв’язок рівняння $5^x=-5$ на: а) множині дійсних чисел; б) множині комплексних чисел? Якщо так, то чи єдиний він?

Не менш важливими у математиці є такі філософські категорії: загальне, конкретне (частинне), особливе. Саме з такими термінами пов'язані назви різних розв'язків диференціальних рівнянь.

1.3.3. Методологічні знання загальнонаукового рівня

До другого рівня методологічних знань відносяться знання про теоретичні концепції, прийнятні до всіх або до більшості наукових дисциплін. Це знання про загальнонаукові принципи (об’єктивності, системності, логічної структурованості тощо) і методи пізнання (аксіоматичний метод, абстрагування, ідеалізація, порівняння, аналогія, узагальнення, індукція та дедукція, моделювання, гіпотеза, мисленевий експеримент, спостереження, моніторинг, опитування тощо). На нашу думку, доцільно віднести до цього рівня також знання про будову теорії, про групу загальнонаукових понять, про символи у математиці.

Зупинимося детальніше на методі математичного моделювання, оскільки цей метод має у математиці надзвичайно важливе значення.

Як було відмічено раніше, математику як науку можна умовно розподілити на теоретичну та прикладну. Завершення більшості досліджень в області чистої математики проводиться дедуктивним методом. Тому дедуктивний висновок є принципом теоретичної математики. Принципом прикладної математики є метод моделювання. Саме цей метод є засобом відображення реальної дійсності у поняттях математики, засобом перекладу задач з мови інших наук на мову математики.

Застосування математичних моделей в різних науках є реалізацією методологічної сутності математичних знань і самої математики, сприяє встановленню міжпредметних зв’язків [122]. «Модельність» математичних структур закладена в самій природі математичних знань. Ще в античні часи відомі математики і філософи говорили про принцип відповідності світу реального світу математичному (Піфагор, Фалес, Аристотель, Демокрит, Евклід та інші).

Сучасний світ потребує освічених людей з високим рівнем математичної компетентності. Під поняттям «математична компетентність» розуміють «…спроможність особистості бачити та застосовувати математику в реальному житті, розуміти зміст і *метод математичного моделювання*, будувати *математичну модель*, досліджувати її методами математики, інтерпретувати отримані результати, оцінювати похибку обчислень. Математика не існує у безповітряному просторі, математичні поняття, аксіоми, теорії і теореми мають своїм витоком реальність і своєю метою дослідження реальності за допомогою *математичного моделювання*». [211, с.15].

Як правило, у процесі математичного моделювання, тобто вивчення явища за допомогою математичної моделі, виокремлюють 4 етапи: 1) формулювання законів, що зв'язують основні об'єкти моделі. Цей етап завершується записом у математичних термінах сформульованих якостей, уявлень про зв'язки між об'єктами моделі; 2) дослідження математичних задач, до яких призвели математичні моделі. Основне завдання – розв’язання прямої задачі, тобто отримання в результаті аналізу моделі вихідних даних (теоретичних наслідків) для подальшого їх зіставлення з результатами спостережень досліджуваних явищ; 3) з'ясування того, чи задовольняє прийнята гіпотетична модель критерію практики; 4) подальший аналіз моделі в зв'язку з накопиченням даних про явища, які досліджуються, і модернізація моделі [240].

Метою моделювання є здобуття, обробка, представлення і використання даних про об'єкти, які взаємодіють між собою і зовнішнім середовищем; а модель тут виступає як засіб пізнання властивостей і закономірностей поведінки об’єкту.

Серед основних властивостей моделей (різні означення моделі та їх класифікація розглянуті у статті [118]) виокремлюють такі: цілеспрямованість; скінченність; спрощеність; повнота; адекватність [93].

Цілеспрямованість моделі полягає в тому, що вона завжди будується з певною метою. Ця мета має вплив на те, які властивості об’єктивного явища вважаються істотними, а які – ні. Модель є ніби проекцією об’єктивної реальності під певним кутом зору. Наприклад, моделі вищого навчального закладу як інформаційної, фінансової, енергетичної та соціальної системи будуть зовсім різними. Інколи, залежно від мети, можна отримати ряд проекцій об’єктивної реальності, що вступають у протиріччя. Це характерно, як правило, для складних систем, в яких кожна проекція виокремлює суттєве для певної мети з безлічі несуттєвого. Задача моделювання полягає в тому, що для заданого об'єкта потрібно дібрати такий опис, який у повній мірі відображав би оригінал з точки зору заданої мети моделювання.

Скінченність моделі означає те, що модель відтворює лише скінченну кількість властивостей та відношень оригіналу, і через це модель завжди є більш простою, ніж оригінал.

Повнота моделі полягає в тому, що вона має відображати всі істотні з точки зору мети моделювання властивості оригіналу.

Необхідною умовою для переходу від дослідження об’єкта до дослідження моделі і подальшого перенесення результатів на об’єкт дослідження – вимога адекватності моделі і об’єкта. Адекватність – це відтворення моделлю з необхідною повнотою всіх властивостей об’єкта, важливих для цілей даного дослідження Це, мабуть, найголовніша властивість моделі, яка визначає можливість її використання. Оскільки будь-яка модель простіша за оригінал, ніколи не можна говорити про абсолютну адекватність, за якої модель за всіма характеристиками відповідає оригіналу.

У сучасній науці моделювання розглядають як один із методів пізнання реального світу. У той же час прослідковується зв’язок методу моделювання з іншими загальнонауковими методами методології: методом подібності та методом аналогії.

Як відомо, математика як предмет і як наука дає чи не найбільший вклад у розвиток абстрактного мислення людини, а математична модель виступає містком між теоретичною, абстрактною мовою науки та реальним явищем навколишнього світу.

До найпростіших і водночас найпоширеніших математичних моделей можна віднести рівняння, нерівності, функції, графи тощо. У математиці розглядається та детально вивчається досить широкий клас функцій: лінійні, степеневі, показникові, логарифмічні, тригонометричні тощо. Крім того, деякі відомі нам закони, постулати, рівняння (закон Гука, Ньютона, Архімеда) можна, а подекуди необхідно, розглядати як функції своїх відповідних аргументів, а, отже, як математичні моделі. Наприклад, відомо, що закон руху тіла, що вільно падає під дією сили тяжіння, має вигляд: $S(t) = S_0 + v_0 t + \frac{gt^2}{2}$. Для того, щоб з останнього співвідношення знайти закон зміни швидкості, потрібно знайти похідну, а щоб прискорення – другу похідну, тобто провести ті перетворення, які в математиці виконують над функціями. Таким чином, закон руху тіла в такому випадку природно розглядати як функцію від часу, або деяку математичну модель, яка описує явище природи – «вільне падіння тіл під дією земного тяжіння».

Звісно, більшість моделей, які використовують, вже давно відомі, – були кимось відкриті до нас. Деякі з них отримали назву законів, постулатів, рівнянь (наприклад, закони Ньютона). Не має жодних сумнівів, що всі вони виникали не одразу – їх появі передували довгі роки досліджень, більшість із запропонованих моделей були відкинуті як такі, що не дістали експериментального чи теоретичного підтвердження. Очевидно, що за всю історію розвитку математики помилкових, «хибних» моделей було набагато більше, ніж правильних, перевірених часом, які стали класичними і які ми тепер вивчаємо, починаючи зі школи. Все це підкреслює важливість вивчення не тільки самих моделей, а й процесу моделювання як основи пізнання навколишнього світу. Навчитися моделювати означає навчитися мислити творчо, креативно; без сумніву таке вміння є головним здобутком сучасної людини.

Людині у своїй діяльності часто доводиться мати справу з моделюванням, а особливо з математичним: складання рівнянь, систем рівнянь, нерівностей, запису функцій тощо. Слід відмітити, що математичне моделювання тісно пов’язане із задачами, які носять прикладний характер [18], а, як відомо, саме такі задачі викликають найбільший пізнавальний, дослідницький інтерес. Не дивно, що такого типу задачі є одними з найскладніших (викликають найбільшу трудність), адже вимагають від дослідника творчого, нестандартного, а подекуди абстрактного мислення. Як добре відомо, найважча частина в розв’язанні такої задачі – це процес створення або запису математичної моделі. На жаль, на цьому важливому моменті не завжди акцентується увага.

Застосування математичних моделей в різних науках – це реалізація методологічної сутності математичних знань і самої математики. Найзагальнішою в методологічному плані є проблема пояснення принципової можливості використання математики та математичних моделей в різних галузях знань. Обговорюючи цю проблему, відомий математик, академік Б. Гнеденко пише про «болісні питання, які ставили перед собою багато поколінь математиків і філософів: яким чином наука, яка, здавалося б, не має прямих зв'язків з фізикою, біологією, економікою, застосовується з успіхом у всіх цих областях знань?» [53].

Але метод математичного моделювання не тільки дозволяє застосовувати математику для розв'язання задач інших областей знань, а й широко застосовується у чистій математиці. Цей метод застосовується, наприклад, для доведення несуперечливості геометрії Лобачевського (розглядаються моделі Е. Бельтрамі, Ф. Клейна, А. Пуанкаре), несуперечливості двовимірної геометрії Рімана (модель в евклідовому просторі – сфера), для доведення незалежності аксіоми від інших аксіом системи тощо.

До методологічних знань загальнонаукового рівня відносяться знання про системний підхід. Згідно з системним підходом до дослідження систем, зокрема систем у освіті, можна виокремити три основні завдання аналізу [252]:

- *по-перше*, це вивчення та опис підсистем складної системи, виявлення характерних зв'язків між елементами системи;
- *по-друге*, виявлення проблем управління, оскільки розвиток систем освіти є цілеспрямованим;
- *по-третє*, моделювання систем (зокрема, математичне моделювання).

У науковій літературі є багато тлумачень поняття «система», що відносяться як до загальних, так і до конкретних систем різних видів.

У перших визначеннях у тій чи іншій формі зазначалось, що система – це елементи та зв'язки між ними. Так, наприклад, основоположник теорії систем Людвіг фон Берталанфі [13] визначав систему як комплекс взаємодіючих елементів, що перебувають у певних відношеннях між собою та зовнішнім середовищем.

Пізніше для визначення цього терміну почали використовувати поняття цілі або мети. Так, у філософському словнику [241] система визначається як «сукупність елементів, що знаходяться у відношеннях та зв'язках між собою певним чином та утворюють деяку єдність цілей». Останнім часом при визначенні системи поряд із елементами, зв'язками, їх властивостями та ціллю почали включати спостерігача ([101], [202]).

Система повинна задовольняти двом основним вимогам: поведінка кожного елемента системи впливає на поведінку системи в цілому; істотні властивості системи губляться, коли вона розчленовується. Поведінка елементів системи та їх вплив на ціле взаємозалежні; істотні властивості елементів системи при їхньому відділенні від системи також губляться. Гегель писав про те, що рука, відокремлена від організму, перестає бути рукою, тому що вона не жива.

Таким чином, дослідження складних систем вимагає не тільки аналітичного підходу (спрямованого на поділ цілого на частини та дослідження кожної з них окремо), а й цілісного підходу, що означає дослідження системи в єдності усіх її частин. Цей підхід полягає у синтезі, тобто у поєднанні частин, виявленні системних властивостей, які притаманні всій системі. Наприклад, робота факультету як одного з підрозділів системи освіти, не дасть позитивного результату, якщо не налагоджена взаємодія з його іншими підрозділами – кафедрами, а робота кафедри як елемента системи не може бути повністю дослідженою без урахування її зв'язків з іншими підрозділами.

Отже, процес пізнання складних систем полягає у діалектичній єдності застосування процедур аналізу та синтезу, у філософських законах діалектики: єдності і боротьби суперечностей, переходу кількісних змін у якісні, заперечення заперечення.

Системний підхід базується на описах тих або інших підсистем, елементів, явищ, процесів даної системи. При цьому знання про складові системи або про саму систему часто досить відносні, а будь-який опис відображає тільки деякі основні характерні сторони. Таке представлення про опис дуже близьке до поняття «моделі», «модельного опису», що відображає саме ті особливості явища, що цікавлять дослідника. Точність, якість цього опису визначаються насамперед відповідністю моделі вимогам, що пред'являються до дослідження, відповідністю одержуваних за допомогою моделі результатів. Під описом системи будемо розуміти деяку сукупність даних про досліджуваний об'єкт (систему та її елементи), яка характеризує визначену групу властивостей системи і представлена в заздалегідь обговореному вигляді [202].

Розглянемо структуру системи навчання майбутніх учителів математики (навчальна діяльність) як деяку систему (складну систему). Загальний опис цієї системи подано в ОКХ, ОПП підготовки бакалавра та в Національній рамці кваліфікацій. Ми основну увагу звернемо на виокремлення різних підсистем та їх опис. Для цього скористаємося різними підходами щодо опису даної системи, виокремлюючи у ній ті чи інші складові елементи-підсистеми в залежності від призначення, мети та характеру майбутнього дослідження.

Основна проблема під час описування систем полягає у тому, що доводиться знаходити компроміс між простотою описування та необхідністю врахування численних факторів і характеристик складної системи. Як правило, цю проблему вирішують через ієрархічне описування системи, тобто система описується не однією моделлю, а кількома чи сімейством моделей, кожна з яких описує поведінку системи з погляду різних рівнів абстрагування. Для кожного рівня ієрархії існує ряд характерних особливостей, законів і принципів, за допомогою яких описується поведінка системи. Для того щоб таке ієрархічне описування було ефективним, необхідна якомога більша кількість незалежних моделей для різних рівнів системи, хоча кожна модель має певні зв'язки з іншими.

Виокремимо та опишемо 8 моделей (підходів), кожна з яких є наближеним описом запропонованої системи, виявляючи у ній ті чи інші характерні елементи, підсистеми та зв'язки між ними.

Отже, розглянемо наступні моделі системи навчання майбутнього вчителя математики:

1. За освітньо-кваліфікаційним рівнем досліджувана система складається з двох підсистем: бакалаврат, магістратура.

2. За роками навчання: 1 курс, 2 курс, 3 курс , 4 курс, 5 курс, (6 курс). Варто зауважити, що виокремлені тут підсистеми є елементами підсистем із пункту 1).

3. За формами навчальної діяльності: аудиторна, самостійна. Аудиторна форма діяльності в свою чергу ділиться на: лекції, практичні заняття, лабораторні, семінари. Ця система динамічна, розподіл годин між аудиторною та самостійною формами навчальної діяльності регламентується ВНЗ. Крім того, останнім часом спостерігається тенденція до збільшення кількості годин самостійної роботи студентів.

4. За циклами підготовки: цикл гуманітарної та соціально-економічної підготовки; цикл математичної, природничо-наукової підготовки; цикл професійної та практичної підготовки.

5. За спрямуванням дисциплін: дисципліни математичного спрямування, дисципліни нематематичного спрямування.

6. Нормативні та вибіркові навчальні дисципліни. Останні в свою чергу поділяються: за вибором студента, за вибором навчального закладу. Варто зауважити, що така система динамічна. Так, наприклад, навчальні дисципліни «Числові системи», «Проективна геометрія та методи зображень» до 2009 року відносилися до варіативних дисциплін, а з 2009 року включені до підсистеми нормативних (ОПП підготовки бакалаврів, Київ, 2009 р.). Крім того, співвідношення між годинами, відведеними на нормативну та варіативну частини підготовки студентів-майбутніх учителів математики, не є сталим. Так, за ОПП підготовки бакалаврів 2002 року маємо 5589 годин на

нормативну та 1593 годин на варіативну частини, а за ОПП підготовки бакалаврів 2009 року нормативна частина становить 5724 год., а варіативна – 2916 год.

7. За сукупністю навчальних предметів – підсистем даної системи. Кожна така підсистема (предмет або дисципліна) в свою чергу поділяється на розділи (змістові модулі), на теми – елементи підсистем.

8. Досить часто під час дослідження великих систем з метою виокремлення її основних підсистем доводиться йти шляхом спрощення даної системи. Так, наприклад, розглядаючи систему навчання майбутнього вчителя математики як підсистему навчальних предметів, доводиться мати справу з великою кількістю підсистем-предметів (відомо, що за весь термін підготовки майбутнього вчителя математики студент повинен освоїти понад 20 предметів математичного спрямування). Враховуючи той факт, що багатьом предметам притаманний логічно-послідовний за своїм змістом зв'язок, а деякі між собою суттєво відрізняються, в даному випадку вбачається за доцільне розподілити предмети математичного циклу, що вивчаються протягом 1-4 курсів (підготовка бакалавра) на чотири основні підсистеми: *математичний аналіз, вища алгебра, вища геометрія та дисципліни методичного спрямування*.

До підсистеми «Математичний аналіз» пропонується віднести такі елементи (предмети): математичний аналіз, комплексний аналіз, диференціальні рівняння, теорія ймовірностей та математична статистика, методи обчислень.

До підсистеми «Вища алгебра»: алгебра і теорія чисел, лінійна алгебра, математична логіка і теорія алгоритмів, дискретна математика.

Елементами підсистеми «Вища геометрія» є: основи геометрії, аналітична геометрія, диференціальна геометрія і топологія, проективна геометрія та методи зображень.

Підсистема «Дисципліни методичного спрямування» складаються з елементів: методика навчання математики, елементарна математика, числові системи.

Однією з важливих особливостей існування системи є її взаємозв'язок із зовнішнім середовищем та суттєва залежність від останнього, що проявляється у необхідності одержання передумов для свого функціонування. Очевидно, що встановити чіткі границі між системою та зовнішнім середовищем повністю не вбачається можливим. У даному випадку по відношенню до досліджуваної системи зовнішнім середовищем можна вважати, наприклад, факультет, на якому навчаються майбутні вчителі математики, відповідний університет, система вищої педагогічної освіти тощо. Також до зовнішнього середовища в даному випадку можна віднести такі дві системи: 1) весь цикл або процес підготовки майбутнього абітурієнта; 2) цикл професійно-трудової діяльності випускника ВНЗ – вчителя математики. Ці дві системи з точки зору системного підходу розглядаються як «вхід» та «вихід» по відношенню до системи підготовки майбутнього вчителя математики.

1.3.4. Методологічні знання конкретно наукового рівня

Знання конкретно наукового рівня – це фундаментальні наукові поняття, фундаментальні відношення між поняттями, фундаментальні теорії, методи, закони та закономірності розвитку певної галузі математичної науки. Вивчення математики майбутніми вчителями відбувається шляхом вивчення окремих навчальних дисциплін, які відповідають розподілу математики як науки на окремі галузі: алгебра, геометрія, математичний аналіз, теорія ймовірностей, математична статистика, топологія тощо. У кожному розділі (галузі) математики можна виокремити притаманні йому знання конкретно наукового рівня. Будемо відносити до них:

- предмет дослідження навчальної дисципліни;
- конкретно наукові методи дослідження;
- фундаментальні поняття;
- фундаментальні відношення;
- фундаментальні теоретичні факти (аксіоми, теореми);
- зв'язок з іншими дисциплінами математичного циклу;
- межі застосовності знань;
- історія розвитку.

Фундаментальні поняття, факти, відношення ми розглядаємо як елементи знань про структуру теорії. *Формулювання* означень понять, теорем та їх *доведень* – це математичні знання. *Виокремлення* ж фундаментальних понять, фактів, встановлення зв'язків між ними – це методологічні знання.

Фундаментальні відношення у тій чи іншій навчальній дисципліні математичного циклу ми будемо розглядати, як правило, з двох точок зору: 1) як відношення (математичний термін), задане на множині елементів; 2) як зв'язок між поняттями та фактами певної теорії (родове, видове).

Зміст кожного з наведених елементів конкретно наукових методологічних знань буде розкрито у розділах 2 і 3.

Важливим елементом методологічних знань майбутнього учителя математики є знання про історичний розвиток понять і методів певної галузі математики. Ознайомлення з історією математики дозволяє глибше усвідомити гносеологічний процес пізнання в математиці, методи наукового пізнання. Історія математики сприяє формуванню уявлення про способи здобуття людством знань про навколишній світ, про розвиток методів цього пізнання.

1.3.5. Методологічні знання технологічного рівня

Рівень методики і техніки конкретного дослідження пов'язаний з дослідницькою практикою. До цього рівня відносяться знання про: прийоми та способи дослідження, які вибудовуються у певну послідовність дій – процедуру; методику дослідження (власне реалізація методу: прив'язка одного або комбінація кількох методів та процедур до дослідження, вибір та розробка методичного інструментарію, стратегії); техніку та інструментарії (реалізація методу на основі простих операцій, прийомів, послідовних дій).

На цьому рівні методологічні знання є найбільш спеціалізовані і мають забезпечити достовірність і вірогідність вихідних даних, які підлягають теоретичному осмисленню та інтерпретації на рівні конкретно наукових теорій.Для майбутніх учителів математики дослідницька практика має такі форми: науково-дослідна робота з математики, методики математики, педагогіки та педагогічна практика.

До методологічних знань технологічного рівня доцільно, на нашу думку, віднести і знання про використання комп'ютерних засобів математики, а саме знання про:

1) наявність таких засобів (їх назви, можливість доступу);
2) простоту використання;
3) можливості комп'ютерного засобу;
4) безпосереднє використання самого засобу;
5) необхідність і доцільність використання комп'ютерного засобу.

Формування і розвиток перерахованих методологічних знань має відбуватися під час вивчення практично всіх дисциплін математичного циклу.

На сьогодні розроблено значну кількість комп'ютерних засобів, які орієнтовані на користувачів різної підготовки: Derive, GRAN1, GRAN-2D, GRAN-3D, DG, Maple, Mathematika, MathLab, Maxima, Numeri, Reduce, Statgraphta інші.

Серед різноманітних комп'ютерних програм, які можна використовувати під час навчання математики як студентів, так і учнів, варто назвати комплект програм GRAN (GRAN1, GRAN-2D, GRAN-3D) і Maxima.

Названі програми розповсюджуються через Інтернет безкоштовно, прості у використанні, оснащені зручним інтерфейсом.

Детально можливості і безпосереднє використання програми GRAN1 описано, наприклад, в роботах [73], [75]. Назвемо основні можливості цього комп'ютерного засобу: графічний аналіз елементарних функцій дійсної змінної, наближене розв'язування рівнянь графічним способом, чисельне інтегрування та диференціювання з геометричною інтерпретацією (зауважимо, що отримати *символьне* подання первісної тут не можна), статистичний аналіз експериментальних даних, визначення узгодженості із спостереженими даними гіпотез про розподіл ймовірностей ([73], [75]).

Безпосереднє використання програмного засобу GRAN1 під час вивчення навчальних дисциплін «Математичний аналіз» (інтегральне числення функції однієї дійсної змінної), «Теорія ймовірностей і математична статистика», «Елементарна математика» наведено відповідно у роботах [75], [77], [73] та [74]. Крім того, цей програмний засіб може бути використаний на заняттях з навчальних дисциплін «Диференціальна геометрія і топологія» (за його допомогою можна будувати і досліджувати криві, задані неявно або параметрично); «Методи обчислень» (під час вивчення цього курсу значенння похідної функції в точці, визначений інтеграл обчислюють чисельними методами) та інших. Одна із можливостей застосування GRAN1 – для проведення самоаналізу виконаної самостійної роботи.

Приклад 1.3.1. У посібнику [7, с. 189] пропонується обчислити за формулою середніх прямокутників інтеграл $\int_0^{1.6} e^{-x^2}dx$ з точністю до 10^{-4}. Аналогічний приклад можна запропонувати студентам для самостійної роботи. Самоаналіз можна здійснити за допомогою програми GRAN1 (рис. 1.3.1).

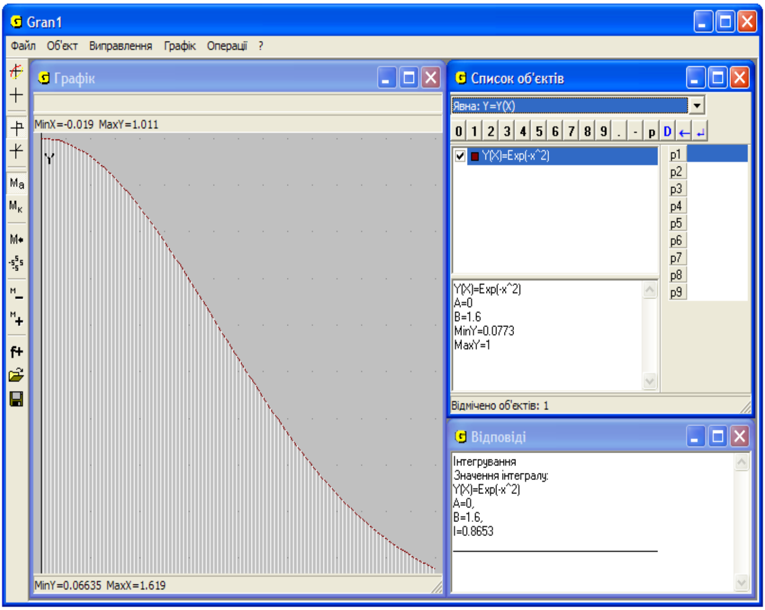


Рис. 1.3.1. Обчислення інтеграла

Програма GRAN-2D призначена для графічного аналізу систем геометричних об’єктів на площині, а GRAN-3D для графічного аналізу просторових (тривимірних) об’єктів. Обидві програми є представниками розряду програм динамічної геометрії, їх можна віднести як до програм-розв'язувачів, так і до моделюючих програм. Пропоновані програми, враховуючи їх можливості, можуть бути застосовані під час вивчення таких навчальних дисциплін: «Аналітична геометрія», «Проективна геометрія та методи зображень», «Елементарна математика», «Методика навчання математики».

Як зауважують автори навчального посібника «Математичний аналіз з елементами інформаційних технологій» [75], програма Maxima є потужним сучасним засобом комп'ютерної математики. За можливостями використання і характеристиками вона близька до потужних професійних систем комп'ютерної математики Mathematica і Maple.

Можливості програми Maxima: виконувати операції з раціональними числами у вигляді звичайних та десяткових дробів, спрощувати раціональні, показникові, логарифмічні і тригонометричні вирази, обчислювати границі, диференціювати, знаходити первісні і визначені інтеграли, працювати з комплексними числами та функціями комплексної змінної та багато іншого. Значною перевагою є те, що за допомогою цієї програми можна знаходити розв'язки різноманітних задач з багатьох галузей математики і *чисельно*, і в *символьному* поданні [75].

Майбутній учитель математики повинен знати, що застосування комп'ютерних програм під час навчання математики «має передусім сприяти досягненню педагогічних цілей за рахунок використання технологічного підходу до опанування … математичних методів дослідження розмаїтих процесів і явищ, створення і вивчення їх … моделей» [33, с. 47].

Так, наприклад, вивчаючи у змістовому модулі «Диференціальне числення функцій багатьох змінних» дослідження функції двох змінних $z = f(x;y)$ на екстремум, доцільно застосувати програмний засіб GRAN1 для розв'язування системи $\begin{cases} f'_x(x;y) = 0, \\ f'_y(x;y) = 0 \end{cases}$. Наведемо приклад (фрагмент дослідження функції на екстремум – знаходження стаціонарних точок).

Приклад 1.3.2. Знайти стаціонарні точки функції $z = 3x^2y + y^3 - 18x - 30y$.

Знайдемо частинні похідні першого порядку і прирівняємо їх до нуля. Маємо систему: $\begin{cases} 6xy - 18 = 0, \\ 3x^2 + 3y^2 - 30 = 0 \end{cases}$, яка після спрощення має вигляд $\begin{cases} xy - 3 = 0, \\ x^2 + y^2 - 10 = 0 \end{cases}$. Для розв'язання системи застосуємо GRAN1. Вибираємо тип залежності – неявний, будуємо графіки вказаних залежностей, встановивши курсор в точки перетину графіків залежностей знаходимо стаціонарні точки $M_1(1;3), M_2(3;1), M_3(-1;-3), M_4(-3;-1)$ (рис. 1.3.2).

Зрозуміло, що систему $\begin{cases} xy - 3 = 0, \\ x^2 + y^2 - 10 = 0 \end{cases}$ студенти можуть (і зобов'язані) розв'язати без комп'ютерної програми. Але, на нашу думку, саме на таких прикладах, де можна перевірити результат за допомогою іншого методу, і варто продемонструвати можливості комп'ютерного засобу.

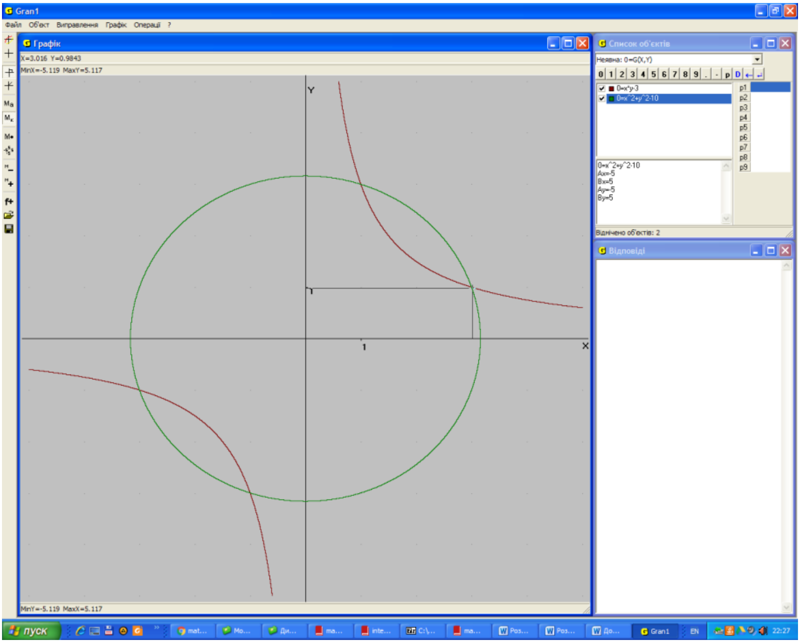


Рис. 1.3.2. Графіки залежностей

Доцільним буде застосування програмного засобу GRAN1 і під час розв'язування задач на обчислення площ фігур, зокрема, якщо лінія, якою обмежена фігура, задана неявно або в полярній системі координат. Найчастіше програма стає в нагоді для побудови самої лінії. Розглянемо приклад.

Приклад 1.3.3. Обчислити площу фігури, яка обмежена лінією $\rho = 2\sin 3\varphi$.

Найбільше труднощів у студентів виникає під час побудови фігури, площу якої потрібно знайти. Скористаємося GRAN1 (рис. 1.3.3). Фігура складається з трьох завитків. Для кривої, яка знаходиться в першому квадранті, кут змінюється від $\varphi = 0$ до $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Тому площа P фігури, обмежена цим завитком, дорівнює $P = \dfrac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} 4\sin^2 3\varphi \mathrm{d}\varphi = \dfrac{\pi}{3}$. Тоді шукана площа буде π.

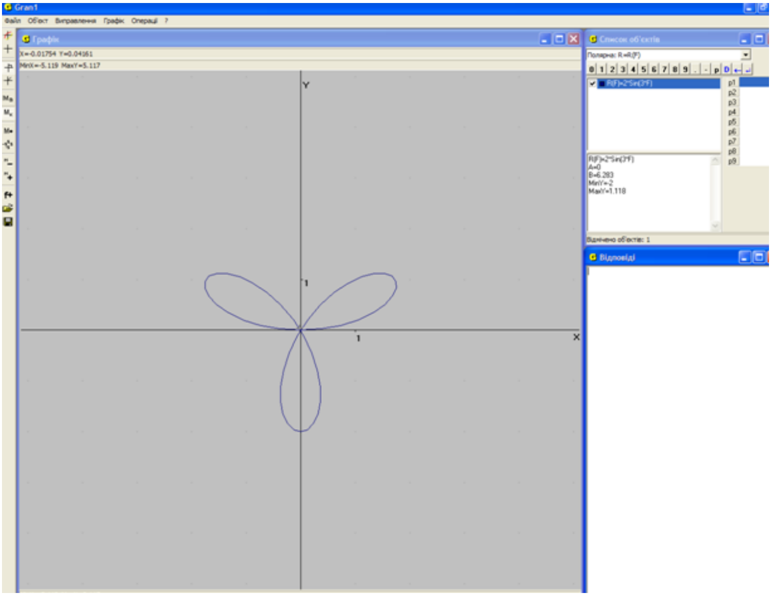


Рис. 1.3.3. Лінія $\rho = 2\sin 3\varphi$

З аналізу можливостей програми GRAN-2D майбутній учитель математики повинен зробити висновок про доцільність використання цієї програми під час вивчення навчальної дисципліни «Методи обчислень». Наведемо приклад.

Приклад 1.3.4. [78, с. 110]. Для функції, значення якої в чотирьох точках задано таблицею

x	0	1	2	4
$f(x)$	1	3	2	4

побудувати інтерполяційний многочлен Лагранжа.

Для розв'язання задачі за допомогою GRAN-2D треба виконати такі дії: зайти в меню Об'єкт → Створення → Інтерполяційний поліном. Далі ввести координати заданих точок, вибрати тип полінома (Лагранжа або Мінімальних квадратів) і натиснути Ok (рис. 1.3.4).

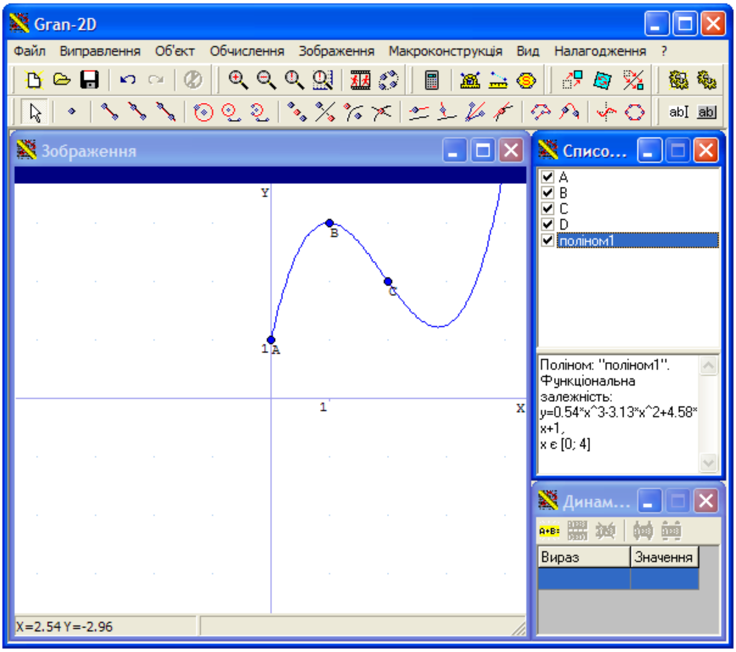


Рис. 1.3.4. Інтерполяційний многочлен Лагранжа

Таким чином, методологічні знання є основою для організації сучасних перспективних методів активного (діяльнісного) навчання. Без розуміння студентами самого народження процесу виникнення знання, воно не може бути правильно і глибоко засвоєно. Ще Арістотель наголошував: «Тільки тоді можна зрозуміти сутність речей, коли знаєш їх походження і розвиток» (цитата за [33], с. 13). Отже, методологічні знання – це необхідна основа і засіб діяльнісного навчання.

РОЗДІЛ 2. МЕТОДОЛОГІЧНІ ЗНАННЯ МАЙБУТНЬОГО ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ З ДИСЦИПЛІН МАТЕМАТИЧНОГО СПРЯМУВАННЯ

2.1. Методологічні знання з математичного аналізу

2.1.1. Математичний аналіз

Математичний аналіз відноситься до циклу професійної та практичної підготовки ОПП підготовки бакалавра напряму 6.040201 Математика* (Київ, 2009р.). За традиційною програмою передбачено вивчення системи таких змістових модулів:

- Вступ до аналізу.
- Диференціальне числення функцій однієї змінної.
- Інтегральне числення функцій однієї змінної.
- Числові та функціональні ряди.
- Диференціальне числення функцій багатьох змінних.
- Інтегральне числення функцій багатьох змінних.
- Елементи функціонального аналізу.
- Міра та інтеграл Лебега.

Детальне наповнення кожного змістового модуля наведено у ОПП підготовки бакалавра напряму 6.040201 Математика* (Київ, 2002р.). Існують й інші програми вивчення математичного аналізу, які відрізняються від традиційної змістовим наповненням.

Так, Г. Михалін [173] пропонує свою програму вивчення математичного аналізу, характерними особливостями якої є:

- ретельне вивчення у першому семестрі фактів, пов'язаних з поняттями функції, кількості елементів або потужності множини, з теорією дійсних та комплексних чисел, з означенням і елементарним доведенням властивостей основних елементарних функцій, серед яких особлива увага приділяється експоненті дійсного і комплексного числа, ***з теорією числових рядів***;
- охоплення випадків дійсної і комплексної змінної скрізь, де це можливо і доцільно.

На вивчення математичного аналізу відведено за ОПП підготовки бакалавра напряму 6.040201 Математика* (Київ, 2009 р.) 18 кредитів ECTS – найбільше з усіх математичних дисциплін. Тому математичний аналіз відіграє значну роль у формуванні методологічних знань майбутнього вчителя математики.

Розкриємо зміст методологічних знань конкретно наукового рівня з математичного аналізу (перелік елементів методологічних знань цього рівня вказано в підпункті 1.3.4).

Різні галузі математики, а, отже, і відповідні математичні навчальні дисципліни, маючи спільний об'єкт дослідження, відрізняються набором теоретичних понять, а тому і предметом дослідження.

Предметом вивчення математичного аналізу є функція (одна з найпоширеніших математичних моделей). Математичний аналіз ґрунтується на тісному зв'язку алгебраїчних та геометричних методів, але має свій специфічний ***метод*** – метод границь (метод граничного переходу). Він є основним методом розв'язання задач математичного аналізу [257, с. 8].

Математичний аналіз має широкий арсенал *конкретно наукових методів* як пов'язаних з методом границь, так і таких, які відносяться до методів елементарної математики. Яскравим прикладом цього є вивчення майбутніми вчителями схеми повного дослідження функції та побудови її графіка. Ті пункти схеми, що стосуються дослідження функції на монотонність, екстремум та вгнутість, можна здійснити за допомогою методів як елементарної математики, так і методами диференціального числення.

Наведемо приклади найважливіших методів, які використовуються в курсі математичного аналізу: метод невизначених коефіцієнтів, методи обчислення границь (за означенням, за арифметичними властивостями границь, за допомогою важливих границь, за правилами Лопіталя), методи обчислення похідної (за означенням, за правилами диференціювання, логарифмічна похідна, похідна неявно заданої функції, похідна параметрично заданої функції), методи інтегрування (безпосереднє, заміна змінної, частинами, наближені методи інтегрування), методи наближеного обчислення коренів рівняння (графічний метод, метод половинного поділу, метод хорд, метод дотичних) тощо.

Важливо для майбутнього вчителя математики не тільки знати ці та інші методи (це відноситься більше до теоретичних знань), але й знати та розуміти, коли ці методи можна застосувати. Так, наприклад, метод обчислення границі за означенням виражає суть поняття границі, але є технічно складним у застосуванні, у той час як правила Лопіталя є достатньо простими навіть для функцій, які задані складними аналітичними виразами. Крім того, майбутній учитель математики повинен розуміти, що правила Лопіталя не доцільно (не можна) застосовувати у шкільному курсі математики (дл цього нема відповідної теоретичної основи).

Крім названих методів, у курсі математичного аналізу використовуються методи, які відносяться *до методологічних знань загальнонаукового рівня*: метод математичної індукції, метод повної індукції, метод аналогій, метод математичного моделювання, метод узагальнень тощо. Приклади використання цих методів наведено нижче.

Серед *методологічних знань філософського рівня*, які формуються під час вивчення навчальної дисципліни «Математичний аналіз», доцільно назвати такі філософські категорії:

1) існування і єдиність (суми, різниці, добутку частки двох дійсних чисел, границі функції у точці, границі інтегральних сум, первісної неперервної функції тощо);

2) скінченність і нескінченність (множини скінченні і нескінченні, границя скінченна і нескінченна);

3) дискретність і неперервність (дискретні та неперервні множини на числовій прямій, дискретні та неперервні розподіли ймовірностей (мір));

4) логічне та історичне (логічна схема вивчення математичного аналізу: дійсні числа $\to$ теорія границь $\to$ диференціальне та інтегральне числення. Історична схема розвитку: диференціальне та інтегральне числення $\to$ теорія границь $\to$ дійсні числа).

Оскільки масив фундаментальних понять та фундаментальних відношень математичного аналізу досить широкий, то, на нашу думку, доцільно виокремлювати фундаментальні поняття, відношення та факти у кожному розділі (змістовому модулі) цієї дисципліни. Але такі поняття як функція та границя пронизують весь математичний аналіз. Це й зрозуміло, бо функція є предметом вивчення даної галузі математики, а поняття границі лежить в основі означення похідної функції, визначеного інтеграла, кратних інтегралів, криволінійних та поверхневих інтегралів. Формуючи у майбутніх учителів математики поняття того чи іншого інтеграла, варто наголошувати, що інтеграл (за винятком невизначеного інтеграла) – це границя інтегральних сум, а от самі вони залежать від функції та області інтегрування.

Розглянемо змістові модулі навчальної дисципліни «Математичний аналіз» (за традиційною програмою) та виокремимо фундаментальні (найважливіші) поняття, фундаментальні теоретичні факти та фундаментальні відношення.

Вступ до аналізу. Ми підтримуємо думку Г. Михаліна, що у розглядуваному змістовому модулі треба ретельно розглянути факти, пов'язані з функцією, тому до *фундаментальних (найважливіших) понять* цього модуля відносимо: множина, елемент множини, дійсне число, сума, різниця, добуток і частка дійсних чисел, модуль дійсного числа (норма), комплексне число, відповідність, потужність множини, функція, область визначення, область значень, обмеженість, монотонність, знакосталість, нулі функції, періодичність, вгнутість (опуклість), парність (непарність), найбільше (найменше) значення, основна елементарна функція, експонента, логарифм і степінь числа та відповідні функції, синус, косинус, тангенс і котангенс числа та відповідні функції, арксинус, арккосинус, арктангенс і арккотангенс числа та відповідні функції, елементарна функція, дробово-раціональна функція, алгебраїчна функція, трансцендентна функція, числова послідовність, границя числової послідовності, границя функції, неперервність функції.

Фундаментальні відношення: з поняттями множина та елемент множини пов'язане одне із найважливіших понять цього змістового модуля (та й всього математичного аналізу) – поняття функції. Оскільки у математичному аналізі розглядають числові функції дійсної змінної (дійсних змінних), то не менш важливим є поняття дійсного числа.

Фундаментальні факти: властивості операцій над множинами, властивості еквівалентних множин, властивості зчисленних і незчисленних множин, теорема про існування точних граней множини; властивості модуля дійсного числа, принцип математичної індукції та аксіома Архімеда, аксіома Кантора, властивості степеня, теореми про десяткове зображення числа (натурального, цілого, дійсного і комплексного, раціонального та ірраціонального); властивості десяткових чисел (дійсних і комплексних), основні властивості елементарних функцій, основні властивості границі числової послідовності, критерій Коші існування границі числової послідовності, теорема про границю монотонної обмеженої числової послідовності, існування границі числової послідовності

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, основні властивості границі функції, важливі границі, властивості неперервних функцій, властивості функцій, неперервних на відрізку.

Диференціальне числення функцій однієї змінної. *Фундаментальні поняття:* похідна, диференційовна функція, диференціал, n-а похідна, n разів диференційовна функція, n-ий диференціал, формула Тейлора та її залишковий член, критичні точки, точки екстремуму, екстремум.

Фундаментальні відношення: поняття похідної першого порядку є найголовнішим у змістовому модулі «Диференціальне числення функції однієї змінної». Всі решта понять так чи інакше пов'язані з похідною. Так, поняття диференційовної функції ґрунтується на понятті похідної, а поняття диференціала - на понятті диференційовної функції. Поняття похідної n-ого порядку є родовим (має ширший обсяг), але означається індуктивно через похідну першого порядку (поняття видове). Поняття «критичні точки» означається через похідну першого порядку. Поняття «точки екстремуму», «екстремум функції» хоча й не означаються через похідну першого порядку, але дослідження функції на екстремум безпосередньо з цим поняттям пов'язане.

Варто підкреслити, що у математичному аналізі розглядаються два підходи до вивчення функції: 1) у першому змістовому модулі функції вивчаються методами елементарної математики; 2) під час вивчення даного модуля використовуються, крім методів елементарної математики, методи диференціального числення. Для майбутніх учителів математики важливо вміти порівнювати різні підходи, оцінювати їх доцільність і межі застосовності.

Фундаментальні факти: теореми про похідні основних елементарних функцій, теореми про похідну оберненої функції, теореми про похідну суми, різниці, добутку, частки диференційовних функцій, теорема про похідну складеної функції, теореми про середнє, правила Лопіталя, необхідні та достатні умови монотонності функції, необхідні та достатні умови існування екстремуму функції, необхідні та достатні умови вгнутості, необхідні та достатні умови існування точок перегину.

Інтегральне числення функцій однієї змінної. *Фундаментальні поняття:* первісна, невизначений інтеграл, Т-розбиття, інтегральна сума, сума Дарбу, визначений інтеграл, інтегровна функція, невласний інтеграл.

Фундаментальні відношення: поняття первісної лежить в основі означення поняття невизначеного інтегралу і пов'язує невизначений інтеграл з визначеним (формула Ньютона-Лейбніца). Основою для введення визначеного інтегралу та інтегровної функції є поняття інтегральних сум та їх границі. Необхідно підкреслити зв'язок між операціями інтегрування та диференціювання.

Фундаментальні факти: властивості невизначеного інтегралу, основні методи інтегрування, правило інтегрування дробово-раціональної функції, окремі способи інтегрування ірраціональних та тригонометричних функцій, властивості визначеного інтегралу, критерій інтегровності, формула Ньютона-Лейбніца, основна теорема інтегрального числення, ознаки збіжності невласних інтегралів.

Числові та функціональні ряди. *Фундаментальні поняття:* числовий ряд, послідовність частинних сум, сума ряду, абсолютна збіжність, умовна збіжність, функціональна послідовність, рівномірна збіжність, функціональний ряд, область збіжності, степеневий ряд, радіус, інтервал та область збіжності, ряд Тейлора, функції експонента, синус, косинус, тангенс та котангенс комплексної змінної, ряд Фур’є.

Фундаментальні відношення: необхідно підкреслити безпосередній зв'язок числових послідовностей з числовими рядами. Знаходження області збіжності (абсолютної, рівномірної) функціональних рядів приводить до дослідження на збіжність числових рядів. Тому необхідно зауважити, що теорія числових рядів є базою для побудови теорії функціональних рядів.

Фундаментальні факти: властивості числових рядів, необхідна умова збіжності ряду, достатні ознаки збіжності числового знакододатного ряду, ознака Лейбніца, властивості функціональних рядів, ознака Вейєштрасса, теорема Абеля, ряд Маклорена для елементарних функцій, властивості експоненти, синуса, косинуса, тангенса та котангенса комплексної змінної, формули Ейлера, достатня умова подання функції через ряд Фур’є.

Наступні два змістові модулі є яскравим прикладом узагальнення раніше побудованої теорії на об’єкти складнішої природи.

Диференціальне числення функцій багатьох змінних. *Фундаментальні поняття:* n-вимірний евклідів простір, функція багатьох змінних, границя функції багатьох змінних, неперервність функції багатьох змінних, частинна похідна, диференційовність функції, частинний диференціал, повний диференціал, формула Тейлора, екстремум, умовний екстремум, похідна за напрямом, градієнт.

Фундаментальні відношення: варто зауважити, що у процесі вивчення змістового модуля «Диференціальне числення функції багатьох змінних» ефективно працює метод аналогій, який відноситься до методів загальнонаукової методології. Зокрема, як і під час вивчення похідної функції однієї змінної, важливим є поняття частинної похідної функції. Але метод аналогій треба використовувати помірковано: якщо для функції однієї змінної «мати похідну» і «бути диференційовною» – синоніми, то для функції багатьох змінних існування частинних похідних є тільки необхідною умовою диференційовності функції. Те ж саме стосується понять границі та неперервності функції: за ідеєю означення границі та означення неперервності функції багатьох змінних аналогічні з відповідними означеннями для функції однієї змінної, але умова $x \to x_0$ навіть для функції двох змінних має «жорсткіший» характер, ніж для функції однієї змінної. Але спільна ідея означень дозволяє перенести теоретичні факти про границю, неперервність та похідну функції однієї змінної на функції багатьох змінних. Важливо також підкреслити, що похідна за напрямом є узагальненням поняття частинної похідної.

Фундаментальні факти: теорема про рівність мішаних частинних похідних, необхідні та достатня умови диференційовності, теореми про похідну складеної функції, теореми про існування та диференційовність неявної функції однієї та двох змінних, необхідна умова існування екстремуму, достатня умова існування екстремуму.

Інтегральне числення функцій багатьох змінних.

Фундаментальні поняття: міра Жордана, квадровна множина, кубовна множина, повторні інтеграли, подвійний інтеграл, потрійний інтеграл, n-кратний інтеграл, криволінійний інтеграл по довжині дуги, криволінійний інтеграл по координаті, поверхневий інтеграл 1-ого роду, поверхневий інтеграл 2-ого роду.

Фундаментальні відношення: і в цьому змістовому модулі метод аналогій відіграє значну роль. Так, подвійний інтеграл означається як границя інтегральних сум, а тому можна перенести властивості визначеного інтеграла на подвійний інтеграл. Важливо підкреслити, що означення визначеного інтеграла та подвійного ідейно аналогічні: знаходимо границю інтегральних сум за умови, що *найбільший із діаметрів* частин, на які розбиваємо область інтегрування, прямує до нуля. Інтегральні суми побудовані аналогічно: сума добутків значень функції у відповідній точці на міру частини області. Тільки для визначеного інтеграла міра – це довжина, для подвійного – площа, для потрійного – об’єм. Також доцільно співставити межі інтегрування: у визначеному інтегралі – це кінці відрізка (межі області інтегрування), у подвійного інтеграла – це лінії, які обмежують область інтегрування, для потрійного – поверхні. Для майбутніх учителів математики важливо розуміти, що поняття криволінійного інтеграла є узагальненням поняття визначеного інтеграла, а поверхневі інтеграли є узагальненням подвійних інтегралів.

Фундаментальні факти: теорема про обчислення подвійного інтеграла, теорема про заміну змінних у подвійному інтегралі, подвійний інтеграл у полярній системі координат, теорема про обчислення потрійного інтеграла, теорема про заміну змінних у потрійному інтегралі, потрійний інтеграл у циліндричних координатах, потрійний інтеграл у сферичних координатах, формули обчислення криволінійних інтегралів, формула Гріна, умови незалежності криволінійного інтеграла від форми шляху інтегрування, формули для обчислення поверхневих інтегралів, формула Остроградського, формула Стокса.

Теоретичний матеріал двох останніх змістових модулів явно у шкільному курсі математики використовується мало, але відіграє значну роль у формуванні професійної компетентності і наукового світогляду майбутніх учителів математики. На нашу думку, матеріал цих змістових модулів варто подати майбутнім учителям математики оглядово, зосередивши їх увагу не на глибокому вивченні теоретичних фактів (оскільки матеріал досить складний), а на методі аналогій як на методі одержання нових тверджень. Детально матеріал цих змістових модулів можна вивчати на спецкурсі з математичного аналізу (наприклад, на 4-му курсі).

Елементи функціонального аналізу. *Фундаментальні поняття:* відстань (метрика), метричний простір, послідовність елементів метричного простору, границя послідовності елементів метричного простору, внутрішня, зовнішня, межова, ізольована, гранична точка множини, відкрита, замкнена, досконала множина, фундаментальна послідовність, повний метричний простір, лінійний простір, нормований простір, евклідовий та гільбертовий простори, нерухома точка відображення, відображення стиску, оператор, функціонал.

Фундаментальні відношення: одне з найголовніших понять цього змістового модуля – відстань (метрика). Практично всі решта понять пов'язані з метрикою. Важливо підкреслити, що оператори та функціонали – це лише різні види функцій (залежно від множини значень цих функцій).

Фундаментальні факти: властивості границі послідовності, умови збіжності у просторах R^n, $C([a;b])$, властивості відкритих і замкнених множин, повнота просторів R^n, $C([a;b])$, теорема Банаха.

Міра та інтеграл Лебега. Ми підтримуємо думку Г. Михаліна [173], що уявлення про класичні означення міри та інтеграла Лебега доцільно дати майбутньому вчителю математики лише для випадку простору R^1.

Фундаментальні поняття: міра Лебега, вимірна за Лебегом функція, інтеграл Лебега.

Фундаментальні відношення: поняття міри є найважливішим поняттям не тільки цього змістового модуля, а й всієї математики. Важливо підкреслити, що поняття міри Лебега та інтеграла Лебега є узагальненням відповідно міри Жордана та інтеграла Рімана.

Фундаментальні факти: властивості міри Лебега, зв'язок міри Лебега та Жордана, властивості інтеграла Лебега, зв'язок інтеграла Лебега з інтегралом Рімана.

Навчальна дисципліна «Математичний аналіз» має надзвичайно широкі *зв'язки з іншими дисциплінами* математичного спрямування. Детально ці зв'язки будуть розкриті у наступних пунктах під час дослідження інших дисциплін. Тут тільки підкреслимо, що функція (предмет вивчення математичного аналізу) розглядається і використовується практично у всіх математичних дисциплінах. Наведемо приклади:

1) «Лінійна алгебра», «Алгебра і теорія чисел» – значне місце відводиться для розгляду алгебраїчних операцій, а їх, як відомо, можна розглядати як функцію.

2) «Комплексний аналіз» – вивчається функція комплексної змінної за аналогією з математичним аналізом.

3) «Диференціальна геометрія і топологія» – розглядається вектор-функція.

4) «Теорія ймовірностей та математична статистика» – функція розподілу, випадкова функція.

5) «Елементарна математика», «Методика начання математики» – основні елементарні та елементарні функції.

Звернемо увагу на те, що до змісту курсу математичного аналізу входять теми, які безпосередньо стосуються шкільного курсу математики. Саме під час вивчення цієї навчальної дисципліни формуються теоретичні основи вивчення тем, пов'язаних з розвитком поняття числа, степеня, функцією та її властивостями, границею та неперервністю функції, похідною, інтегралом та їх застосуваннями.

Масив фундаментальних понять та фактів математичного аналізу достатньо широкий. Кожне із цих понять має свою історію розвитку. Ознайомлення майбутнього вчителя математики з розвитком основних понять та фактів, з історією розвитку певних розділів математичного аналізу показує шляхи відкриття нових фактів, озброює методами отримання нових знань.

Детально історію виникнення і розвитку математичного аналізу студенти вивчатимуть у курсі «Історія математики» (або «Історія і методологія математики»), а під час вивчення цієї дисципліни необхідно ознайомити студентів з *основними* етапами становлення цієї галузі математики (табл. 2.1.1).

Таблиця 2.1.1

Основні етапи розвитку математичного аналізу

Ідеї	Століття, роки	Школи, вчені
Передісторія математичного аналізу (з античних часів до кінця XVII ст.)		
Метод вичерпування. Метод Архімеда	IV ст. до н. е. III ст. до н. е.	Евдокс Архімед
Спрощення, узагальнення і розширення області застосування методу Архімеда	1604 р. 1615 р.	Л. Валеріо І. Кеплер
Метод неподільних	1635, 1647 р.	Б. Кавальєрі

Продовження таблиці 2.1.1

Подальший розвиток вчення про метод неподільних та методи розв'язування задач на рухи та інші процеси	XVII ст.	П. Ферма, Б. Паскаль, Дж. Валліс, Р. Декарт, І. Барроу
Створення аналізу нескінченно малих (кінець XVII ст.)		
Першоджерело створення аналізу – механіка. Теорія флюксій (похідних), первісне поняття – швидкість. Інтегрування диференціального рівняння 1-го порядку (поняття невизначеного інтеграла – первісне). Метод перших і останніх відношень – початкова форма теорії границь	60 – 70 рр. XVII ст.	І. Ньютон
Першоджерело створення аналізу – геометрія. Для диференціального числення первісне поняття – дотична, використання не похідної, а диференціала. Для інтегрального числення первісне поняття – визначений інтеграл. Введення зручної символіки: $\int$ - сума, d - різниця.	Кінець XVII ст.	Г. Лейбніц
Перший підручник з аналізу «Аналіз нескінченно малих для позначення кривих ліній»	1696 р.	Г. Лопіталь

Продовження таблиці 2.1.1

Вдосконалення і теоретичне обґрунтування аналізу (XVIII - XIX ст.)		
Розширення методів математичного аналізу. Розширення меж застосування вчення.	XVIII ст.	Л. Ейлер, Ж. Лагранж, Ж. Даламбер, Л. Карно
Теоретичне обґрунтування аналізу на основі теорії границь	XIX ст.	О. Коші, Б. Больцано, К. Вейєрштрасс, Р. Дедекінд, Г. Кантор, М. Остроградський

Як зазначалося раніше, поняття функції та поняття границі (граничного методу) пронизують весь математичний аналіз. Тому доцільно ознайомити студентів під час вивчення цієї навчальної дисципліни з історією розвитку цих понять. Детально про це можна прочитати у роботах В. Бевз [7], Г. Вілейтнера [31], Н. Вірченко [33], Г. Фіхтенгольца ([242], [243]). Коротко наведемо основні дати.

Поняття функції. Вважається, що поняття функціональної залежності бере свій початок з перших таблиць обернених значень чисел, їх квадратів і кубів, сум квадратів і кубів, складених математиками Стародавнього Вавилону, з вивчення залежностей між відрізками в крузі, з тригонометричних таблиць в Стародавній Греції.

Введення Р. Декартом поняття змінної величини привело до першого означення функції. У 1673 р. Г. Лейбніц ввів термін «функція», цей термін було вжито у зв’язку з геометричними образами. Вільне від геометрії означення функції дав Й. Бернуллі у 1718 р.

І. Ньютон поняття функції пов’язував з механічними уявленнями і застосовував термін «ордината». Уточнив поняття функції у 1748 р. Л. Ейлер.

Над уточненням і узагальненням поняття функції працювали у XIX ст. такі відомі математики: С. Лакруа, Б. Больцано, П. Діріхле, М. Лобачевський. Головний наголос у розроблених означеннях функції робився на *відповідності*. З другої половини XIX ст. (після створення теорії множин) в означення функції, крім ідеї відповідності, включено і ідею *множин*.

На початку XX ст. виникла необхідність розширення поняття функції. Над цією проблемою працювали П. Дірак, М. Гюнтер, Л. Шварц (ввів поняття узагальненої функції), С. Соболєв, І. Гельфанд, Г. Шилов та інші.

Поняття границі. Чи не вперше неявно застосував граничний перехід Евдокс Кнідський (IV ст. до н. е.) у своєму методі вичерпування. Одним із засновників методу граничного переходу можна вважати італійського математика Луку Валеріо (1552 - 1618). Саме він одним з перших спростив строгі, але громіздкі міркування Архімеда для обчислення площ та об'ємів.

Розробляв теорію границь і І. Ньютон (називав її «методом перших та останніх відношень»). Йому ж належить термін «границя» і позначення «$\lim$» (1687 р.).

Ж. Даламбер у 1765 р. дав фактично перше означення границі послідовності.

У 1821 – 1828 рр. О. Коші узагальнив отримані багатьма поколіннями математиків результати і розробив теорію границь як основу строгої побудови математичного аналізу.

У другій половині XIX ст. запроваджено так званий апарат « $\varepsilon-\delta$ ». Сучасне означення границі у термінах «$\varepsilon-\delta$» дав К. Вейєрштрас у 1880 р.

2.1.2.Комплексний аналіз

Навчальна дисципліна «Комплексний аналіз» (або «Теорія функцій комплексної змінної») відноситься до циклу математичної, природничо-наукової підготовки ОПП підготовки бакалавра за напрямом підготовки 6.040201 Математика* (Київ, 2009 рік). На вивчення курсу відведено 4,5 кредиту ECTS. Як правило, навчальна дисципліна «Комплексний аналіз» вивчається у 5-му семестрі.

За ОПП підготовки бакалавра за напрямом підготовки 6.040201 Математика* (Київ, 2002 рік) передбачено вивчення системи таких змістових модулів (тут наведено і наповнення кожного змістового модуля):

- Функції комплексної змінної.
- Похідна та інтеграл функції комплексної змінної.
- Аналітичне продовження.

За традиційною програмою вивчення елементарних функцій комплексної змінної віднесено до другого змістового модуля. Оскільки вивчення цього матеріалу відіграє значну роль у формуванні методологічних знань майбутнього вчителя математики, то доцільно перенести вивчення цієї теми у перший змістовий модуль (на цьому наголошував і Г. Михалін [173, с. 134]). Ми підтримуємо програму вивчення комплексного аналізу, запропоновану Г. Михаліним (зауважимо, що вона відрізняється від традиційної ранішим введенням і вивченням основних елементарних функцій комплексної змінної):

- Поле комплексних чисел.
- Границя послідовності комплексних чисел (тут вивчаються основні елементарні та елементарні функції комплексної змінної).
- Границя і неперервність функцій комплексної змінної.
- Ряди з комплексними членами.
- Диференціальне числення функцій комплексної змінної.
- Інтегральне числення функцій комплексної змінної.
- Ізольовані особливі точки аналітичної функції.
- Аналітичне продовження.

Навіть поверхневий аналіз змістових модулів математичного аналізу (див. підпункт 2.1.1) та комплексного аналізу вказує на тісний зв'язок цих двох навчальних дисциплін (як і їх назва). Більшість означень, теорем, властивостей комплексного аналізу формулюються і доводяться *аналогічно* до відповідних положень математичного аналізу. Але не всі. А інколи навіть однакові формулювання мають різний смисл. Крім того, студентам варто наголосити на тому, що математичний аналіз вивчає *однозначні* функції. А в комплексному аналізі, як зауважив Б. Шабат, «… вдається з'ясувати природу многозначності і побудувати бездоганну теорію многозначних функцій» [251, с. 8].

Отже, ***предметом*** вивчення комплексного аналізу є функція комплексної змінної, а основним ***методом*** – метод граничного переходу. Б. Шабат підкреслив істинну комплексність комплексного аналізу: «У ньому поєднуються аналітичні і геометричні, цілком класичні і самі нові методи» [251, с. 8]. Дійсно, в комплексному аналізі використовується метод координат (геометричне тлумачення комплексного числа як точки координатної площини), методи векторної алгебри (геометричне тлумачення комплексного числа як вектора), алгебраїчні методи (знаходження порядку нуля аналітичної функції) та інші.

Наведемо ще приклади методів, які використовуються в курсі комплексного аналізу: метод математичної індукції, метод невизначених коефіцієнтів, методи обчислення інтеграла (зведення до криволінійних інтегралів, зведення жо визначеного інтеграла від комплексної функції, за допомогою формули Ньютона – Лейбніца, використання лишків), методи обчислення лишків тощо.

Під час вивчення навчальної дисципліни «Комплексний аналіз» ефективно працює метод аналогій, який відноситься до *методів загальнонаукової методології*.

Наведемо приклади:

1) трактуючи комплексне число як вектор, рівність комплексних чисел, їх суму та різницю можна означити аналогічно до того, як це зроблено для векторів у курсі аналітичної геометрії;

2) добуток двох комплексних чисел можна означати як добуток двох двочленів виду $a + x\,b$, де роль x відіграє i (уявна одиниця, $i = \sqrt{-1}$);

3) ідентичність введення понять похідної функції комплексної змінної дозволяє перенести теоретичні факти про похідну функції дійсної змінної на функцію комплексної змінної.

Як і у математичному аналізі, у комплексному аналізі не можна обійтися без принципу математичної індукції, тільки за допомогою цього принципу можна означити суму та добуток довільної скінченної кількості комплексних чисел, поняття степеня з натуральним показником. Лише під час вивчення комплексних чисел відбувається узагальнення поняття степеня з довільним показником та поняття кореня n-го степеня, що дозволяє сформувати повне уявлення про ці поняття та їх зв'язок з відповідними поняттями шкільного курсу математики. Важливим для розвитку системи методологічних знань майбутнього вчителя математики є дослідження можливості здійснення операцій над комплексними числами та з'ясування питання про їх однозначність (*категорії філософської методології* – існування та єдиність).

До *найважливіших* (фундаментальних) *понять* комплексного аналізу віднесемо: комплексне число, дійсна та уявна частини комплексного числа, уявна одиниця, модуль (норма) комплексного числа, аргумент комплексного числа, тригонометрична форма запису комплексного числа, корінь n-ого степеня з комплексного числа, границя послідовності комплексних чисел, функція комплексної змінної, дійсна та уявна частини функції комплексної змінної, однозначна функція, многозначна функція, експонента, логарифм і степінь комплексного числа та відповідні функції, синус, косинус, тангенс і котангенс комплексного числа та відповідні функції, арксинус, арккосинус, арктангенс і арккотангенс комплексного числа та відповідні функції, границя функції, неперервність функції, числовий ряд, сума ряду, абсолютна збіжність, умовна збіжність, функціональна послідовність, рівномірна збіжність, функціональний ряд, область збіжності, степеневий ряд, ряд Лорана, круг і кільце збіжності, похідна функції в точці, похідні основних елементарних функцій, диференційовність функції комплексної змінної, n-а похідна і n разів диференційовна функція комплексної змінної, конформне відображення, ріманова поверхня, інтеграл функції комплексної змінної, аналітична функція, гармонічна функція, первісна функції комплексної змінної, ізольована особлива точка аналітичної функції, лишок, полюс, аналітичне продовження.

Фундаментальні теоретичні факти: основні властивості границь послідовності комплексних чисел, властивості експоненти, логарифма і степеня комплексного числа та відповідних функцій, синуса, косинуса, тангенса і котангенса комплексного числа та відповідних функцій, формули Ейлера, арксинуса, арккосинуса, арктангенса і арккотангенса комплексного числа та відповідних функцій, основні властивості збіжних рядів, ознака Вейєрштрасса рівномірної збіжності функціонального ряду, властивості рівномірно збіжних рядів, теорема Коші – Адамара, критерій диференційовності, умови Коші – Рімана, основні властивості диференційовних функцій, теорема Лорана, єдиність розвинення функції у степеневий ряд і в ряд Лорана, основні властивості інтеграла функції комплексної змінної, умови існування, формули для обчислення, інтегральна теорема Коші, інтегральна формула Коші, умови існування первісної функції комплексної змінної, формула Ньютона – Лейбніца, зв'язок гармонічних функцій з аналітичними, класифікація ізольованих особливих точок, основна теорема про лишки, проблема існування аналітичного продовження.

Фундаментальні відношення. Поняття комплексного числа тісно пов'язане з поняттям дійсного числа, важливою властивістю множини комплексних чисел є її замкненість відносно алгебраїчних операцій. Важливо наголосити, що поле комплексних чисел є єдиним можливим розширенням поля дійсних чисел зі зберіганням алгебраїчних властивостей.

Чи не найважливішим для майбутнього вчителя математики у курсі комплексного аналізу є вивчення функцій комплексної змінної, зокрема, їх властивостей. По-перше, варто розглянути питання про графік функції, розпочавши з функції однієї дійсної змінної: графік функції однієї змінної – множина точок простору R^2 (для основних елементарних функції графіки можна побудувати і «прочитати» властивості функції з графіка), графік функції двох дійсних змінних – це множина точок простору R^3 (теж можна хоча би уявити), то вже для функції комплексної змінної графіком є множина точок простору R^4. А це означає, що всі властивості можна визначити тільки аналітично. Крім того, класичний математичний аналіз вивчає однозначні функції; комплексний аналіз розглядає функції комплексної змінної як однозначні, так і многозначні (скінченнозначні та нескінченнозначні). Доцільно провести порівняльний аналіз властивостей відповідних функцій дійсної та комплексної змінної, звернувши значну увагу на відмінність властивостей, зокрема: експонента є періодичною функцією, косинус і синус – необмежені, показникова функція може набувати від'ємні значення тощо.

Як і для функції дійсної змінної, введення поняття оберненої функції до функції комплексної змінної $w = f(z)$ пов'язане з розв'язанням рівняння $z = f(w)$, де z – відоме, а w – невідоме. Майбутній учитель математики повинен знати, що рівняння $\sin z = a$, $\cos z = a$ мають розв'язки для будь-яких a (а не тільки для $a \in [-1;1]$), рівняння $a^z = b$ має розв'язки для будь-якого $b \neq 0$ (а не тільки, коли $b > 0$). І ці знання пов'язані з *філософськими категоріями* існування, єдиність.

Поняття похідної першого порядку є найголовнішим у змістовому модулі «Диференціальне числення функції однієї змінної». Всі решта понять так чи інакше пов'язані з похідною. Так, поняття диференційовної функції ґрунтується на понятті похідної, а поняття диференціала – на понятті диференційовної функції. Поняття похідної n-ого порядку є родовим (має ширший обсяг), але означається індуктивно через похідну першого порядку (поняття видове). Ідентичність введення похідної функції комплексної змінної дозволяє перенести теоретичні факти про похідну функції дійсної змінної на функцію комплексної змінної. У той же час доцільно звернути увагу на зв'язок диференційовності функції комплексної змінної $w = f(z)$ з диференційовністю її дійсної та уявних частин $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z)$ та $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z)$, які є функціями двох дійсних змінних x та y (критерій диференційовності функції комплексної змінної та умови Коші – Рімана).

Варто підкреслити більшу обмеженість умови комплексної диференційовності: якщо приклад функції дійсної змінної, яка є неперервною на множині, але не є диференційовною в жодній точці цієї множини, не так легко придумати (функція Вейєрштраса), то приклади функцій комплексної змінної з такою властивістю навести досить легко: $f(z) = 3x + 4iy$, $g(z) = x + 4iy$ тощо. Дійсно, ці функції є неперервними на C (неперервними є дійсна та уявна частини цих функцій), але не мають похідної у жодній точці множини C, оскільки не виконуються умови Коші–Рімана, наприклад для $f(z)$ $\frac{\partial u}{\partial x} = 3, \frac{\partial v}{\partial y} = 4, 3 \neq 4.$

Як зазначалося раніше, у комплексному аналізі є достатня кількість переконливих прикладів, які ілюструють важливість методу аналогій і в той же час підкреслюють принцип їх обережного використання. Функція дійсної змінної може бути диференційовною в околі даної точки і не бути двічі диференційовною в цьому околі, а функція комплексної змінної є нескінченно диференційовною в околі точки за умови диференційовності у цьому околі.

Вивчення питань аналітичного продовження функції сприяє формуванню методологічних знань майбутнього вчителя математики, оскільки у цьому змістовому модулі розглядається проблема *існування та єдиності* аналітичного продовження. Крім того, з поняттям аналітичного продовження тісно пов'язана проблема продовження основних елементарних функцій з дійсної області визначення у комплексну. Важливими для студентів є знання про рівносильність різних методів означення основних елементарних функцій.

Розглянемо *основні зв'язки* комплексного аналізу з іншими математичними навчальними дисциплінами. Насамперед зазначимо, що вивчення багатьох питань комплексного аналізу може відбуватися паралельно з вивчення відповідних питань з математичного аналізу (таку програму пропонує Г. Михалін [173]); за традиційного ж підходу для вивчення комплексного аналізу студентам необхідні міцні предметні та методологічні знання з математичного аналізу. На основі детального аналізу ОПП підготовки бакалавра за напрямом підготовки 6.040201 Математика* (Київ, 2002 рік) та ОПП підготовки магістра за напрямом підготовки 8.04020101 Математика* нами встановлено основні зв'язки комплексного аналізу з навчальними дисциплінами математичного циклу (таблиця 2.1.2).

Таблиця 2.1.2

Основні зв'язки комплексного аналізу з навчальними дисциплінами математичного циклу

Навчальна дисципліна	*Знання, необхідні для вивчення комплексного аналізу*
Аналітична геометрія	Координатна площина, додавання і віднімання векторів.
Лінійна алгебра	Поле комплексних чисел; тригонометрична форма комплексного числа; добування кореня з комплексного числа. Алгебраїчні операції над многочленами.
Алгебра і теорія чисел	Нулі многочлена; кратність кореня многочлена. Алгебраїчна замкненість поля комплексних чисел.
Диференціальна геометрія та топологія	Метричні простори, нормовані простори, неперервне відображення.
	Застосування знань з комплексного аналізу
Операційне числення	Функція-оригінал (функція комплексної змінної), перетворення Лапласа, лишки, способи їх обчислення.
Методи математичної фізики	Рівняння еліптичного типу (розв'язки характеристичного рівняння – комплексно спряжені функції).
Числові системи	Поняття комплексного числа, дії над комплексними числами.
Методика навчання математики. Елементарна математика	Поняття комплексного числа, дії над комплексними числами.

Крім того, варто наголосити, що комплексний аналіз широко застосовується для розв’язання багатьох прикладних задач:

1) конформне відображення – в гідроаеродинаміці і картографії. Так, функція $z = \ln tg(\frac{\pi}{4} + \frac{u}{2}) - it$ задає конформне відображення сфери (без полюсів) на площину (проекція Меркатора в картографії);

2) інтеграл типу Коші $F(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)\,\mathrm{d}\xi}{\xi - z}$ – в крайових задач гідродинаміки і теорії пружності;

3) хвильова функція, або псі-функція ψ комплексно значна функція, що використовується для опису стану квантово-механічної системи – в квантовій механіці;

4) виробничі функції комплексної змінної – в економіці. Наприклад, *z* = *G* + *iC* = *a*(*K* + *iL*), де *C* – витрати виробництва, *G* – валовий прибуток від виробництва, *К* – витрати капітальних ресурсів, *L* – витрати трудових ресурсів;

5) функція Жуковського $\omega = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ має численні застосування в аеродинаміці;

6) використовується комплексне подання в теорії коливань, замість термінів «модуль» і «аргумент» використовуються «амплітуда» і «фаза» тощо.

7) функції комплексної змінної застосовуються до зображення фракталів, які є результатом інтегрування аналітичних функцій, найвідомішим з яких є множина Мандельброта.

Важливим для формування наукового світогляду і професійної культури майбутнього вчителя математики є знання і розуміння того, що методи нової галузі математики дозволяють простіше і красивіше розв'язати відомі задачі. Як приклад, варто розглянути застосування теорії лишків до обчислення невласних інтегралів. Для більшої очевидності доцільно обчислити невласний інтеграл двома способами: традиційно (як у курсі математичного аналізу) та засобами комплексного аналізу. Наведемо приклад.

*Приклад***.** Обчислити інтеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^4}$.

1-ий спосіб (засобами математичного аналізу). Для знаходження первісної треба 4 рази застосувати рекурентну формулу $I_n=\frac{x}{2a^2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}+\frac{1}{a^2}\frac{2n-3}{2n-2}I_{n-1}$, де $I_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$.

Запишемо: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)-\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)$, де $F(x)$ − первісна підінтегральної функції.

Для знаходження первісної скористаємося послідовно рекурентною формулою:

$$I_1=\int\frac{dx}{x^2+1}=\operatorname{arctg}x,\quad I_2=\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x,$$

$$I_3=\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3}{4}\left(\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x\right),$$

$$I_4=\frac{x}{6(x^2+1)^3}+\frac{5}{6}\left(\frac{x}{4(x^2+1)^2}+\frac{3}{8}\frac{x}{2(x^2+1)}+\frac{3}{8}\operatorname{arctg}x\right)$$

Тоді $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^4}=\lim\limits_{x\to+\infty}I_4-\lim\limits_{x\to-\infty}I_4=\frac{15}{48}\frac{\pi}{2}-\frac{15}{48}\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{5\pi}{16}$.

2-ий спосіб (засобами комплексного аналізу). Підінтегральна функція $f(x)=\dfrac{1}{(x^2+1)^4}$ має у верхній півплощині єдиний полюс четвертого порядку $z=i$. Тому $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{dx}{(x^2+1)^4}=2\pi i \operatorname*{Res}\limits_{z=i}\dfrac{1}{(x^2+1)^4}$.

Обчислимо лишок:

$$\operatorname*{Res}\limits_{z\to i} f(z)=\frac{1}{3!}\lim_{z\to i}\left(\frac{1}{(z+i)^4(z-i)^4}\cdot(z-i)^4\right)^{'''}=\frac{1}{6}\lim_{z\to i}\left((z+i)^{-4}\right)^{'''}=$$

$$=-\frac{1}{6}\frac{120}{(2i)^7}=\frac{5}{32i}.\text{ Тоді }\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^4}=2\pi i\frac{5}{32i}=\frac{5\pi}{16}.$$

Важливим елементом методологічних знань є знання про *виникнення і розвиток певної галузі математики та її основних понять і ідей.* На це звертали увагу багато видатних математиків, методистів та істориків математики. Так, Г. Лейбніц стверджував: «Хто хоче обмежитись сучасним, без знання минулого, той ніколи сучасного не зрозуміє» (цитата за [33, с. 17]). Детально історію виникнення і розвитку теорії функцій комплексної змінної студенти вивчатимуть у курсі «Історія математики» (або «Історія і методологія математики»), а під час вивчення комплексного аналізу можна запропонувати студентам ознайомитися з основними етапами розвитку цієї галузі за підручниками ([7], [31], [243], [251]).

Початкові ідеї комплексного аналізу виникли у другій половині XVIII століття і зв'язані вони в основному з роботами Леонарда Ейлера. Саме у роботах Л. Ейлера детально вивчені елементарні функції комплексної змінної та започатковано застосування цих функції до розв'язання прикладних задач (зокрема, картографії). Основи теорії функцій комплексної змінної були закладені в середині XIX ст. роботами Д'Аламбера, О. Коші, К. Вейєрштраса (розробили диференціальне та інтегральне числення, теорію рядів) і Б. Рімана (обґрунтував геометричні питання теорії функцій комплексної змінної). Варто відмітити, що комплексні числа, як до речі й ірраціональні, довгий час не знаходили широкого визнання серед математиків.

Основні етапи розвитку комплексного аналізу наведені у таблиці 2.1.3.

Таблиця 2.1.3

Основні етапи розвитку комплексного аналізу

Ідеї	Століття, роки	Вчені
Поява комплексних чисел в алгебрі (у зв'язку з добуванням квадратного кореня з від'ємних чисел та розв'язанням кубічних рівнянь)	XVI—XVII століття	Д. Кардано, Р. Бомбеллі
Поява комплексних чисел в аналізі (у зв'язку з інтегруванням раціональних дробів)	Поч. XVIII ст	І. Бернуллі, Г. Лейбніц
Введення позначень ($\sqrt{-1}=i$, i – уявна одиниця, $a+bi$; $a, b\in R$)	1746 рік	Запропонував Р. Декарт, ввів Л. Ейлер
Розгляд комплексного числа як аргументу функції. Розгляд функцій комплексної змінної	1746 рік	Ж. Д'Аламбер, Л. Ейлер
Геометрична інтерпретація комплексних чисел. Доведення основної теореми алгебри	1799 рік	К. Гаусс
Застосування комплексних чисел в картографії. Поняття конформного відображення. Вперше застосовано термін конформне відображення	1777 рік 1789 рік	Л. Ейлер, К. Гаусс, Ж. Лагранж, Г. Шуберт

Продовження таблиці 2.1.3

Обчислення визначених інтегралів за допомогою комплексної змінної	Кінець XVIII століття – початок XIX століття	Л. Ейлер, Ж. Лагранж, С. Пуассон, О. Коші
Вперше з'явилася назва «комплексні числа». Початок застосування комплексних чисел у геометрії	Початок XIX століття	К. Гаусс
Створення теорії лишків	1826-1829 рр.	О. Коші
Розв'язання питання про збіжність рядів, властивості збіжних рядів	Середина XIX століття	Н. Абель, О. Коші
Ряд Лорана	Поч. 40-х р. XIX ст. 1843 рік	К. Вейєрштрасс П. Лоран
Обґрунтування основ теорії функції комплексної змінної. Принцип аналітичного продовження	1854 рік 1857 рік	Б. Ріман Б. Ріман
Перший навчальний посібник з теорії аналітичних функцій. Перший курс лекцій з теорії аналітичних функцій.	1856 рік Середина XIX століття	Ш. Брио і Ж. Бруке К. Вейєрштрасс

2.1.3. Диференціальні рівняння

А. Самойленко зазначає, що сучасна теорія диференціальних рівнянь займає чільне місце серед інших математичних дисциплін. Підкреслює, що «гармонійне поєднання суто математичного й прикладного аспектів робить її однаково привабливою як для теоретиків, так і для тих, хто займається застосуванням математики в різноманітних галузях знань» [217, с. 3].

Предмет теорії диференціальних рівнянь як самостійної галузі математики – розробка методів інтегрування диференціальних рівнянь та дослідження різних властивостей їх розв'язків. ***Метод*** теорії диференціальних рівнянь – методи математичного аналізу.

У рамках теорії диференціальних рівнянь виокремились самостійні наукові напрями: теорія інтегрування диференціальних рівнянь, аналітична, якісна та геометрична теорії диференціальних рівнянь.

Теорія інтегрування диференціальних рівнянь своїм ***предметом*** має класифікацію диференціальних рівнянь і розробку методів побудови їх точних розв'язків. Ця частина теорії диференціальних рівнянь є класичною, її розробка завершена в основному до початку XX століття.

Як правило, під час вивчення навчальної дисципліни «Диференціальні рівняння» розглядають елементи саме класичної теорії інтегрування диференціальних рівнянь.

Отже, центральним ***об'єктом*** вивчення навчальної дисципліни «Диференціальні рівняння» є звичайне (як скалярне, так і векторне) диференціальне рівняння [217, с. 3].

На матеріалі диференціальних рівнянь доцільно формувати *методологічні знання філософського рівня*, зокрема, такі філософські категорії:

1) загальне, конкретне (частинне), особливе. Саме такі терміни маємо під час розв'язування диференціальних рівнянь для позначення його розв'язків;

2) існування та єдиність (задача Коші);

3) зміст і форма (одне і те саме диференціальне рівняння $\frac{dy}{dt} = ky(t)$ описує різноманітні процеси).

Теорія диференціальних рівнянь відкриває значні можливості для майбутніх учителів математики в оволодінні такими важливими *загальнометодологічними методами: метод математичного моделювання, метод подібності, метод формалізації, метод ідеалізації, обчислювальний експеримент, метод аналогій, алгоритмічний метод*.

Наведемо приклади використання методу аналогій під час вивчення диференціальних рівнянь:

1) Поняття і загальний вигляд звичайного диференціального рівняння n-го порядку, початкових умов і задачі Коші, загального і частинного розв'язків, теореми про існування та єдиність розв'язку задачі Коші доцільно сформулювати так, щоб майбутній учитель математики побачив аналогію з відповідними фактами для диференціальних рівнянь першого порядку. Для цього задачу Коші для диференціального рівняння n-го порядку варто записати через векторнозначні функції.

2) Теорія лінійних систем диференціальних рівнянь аналогічна до теорії лінійних диференціальних рівнянь n-го порядку.

Навчальна дисципліна «Диференціальні рівняння» дає багатий матеріал для формування у майбутніх учителів математики вміння застосовувати метод математичного моделювання. Дійсно, перші диференціальні рівняння виникли ще в другій половині XVII ст.. для розв'язування саме прикладних задач. А тому варто розпочинати вивчення цієї дисципліни з таких питань: 1) предмет вивчення; 2) задачі математичного моделювання реальних процесів, які ілюструють виникнення диференціальних рівнянь (аби показати природність об'єктів подальшого вивчення) [3, с. 9]. Диференціальні моделі відіграють чи не найважливішу роль у пізнанні дійсності засобами математики. Серед них є складні, але є і такі, які доступні для вивчення у старших класах загальноосвітньої школи. Майбутній учитель математики повинен володіти знаннями про математичні моделі, зокрема, диференціальні, уміннями їх будувати та досліджувати.

Для майбутнього вчителя математики важливо знати і розуміти, що тільки для незначної кількості диференціальних рівнянь розв'язок можна отримати в аналітичному вигляді (хоча під час вивчення курсу такий висновок зробити важко, бо розглядаються саме такі рівняння, розв'язок яких знаходять в аналітичному вигляді). А тому студенти повинні мати уявлення про методи чисельного розв'язування диференціальних рівнянь, а потім ці уявлення переростуть у знання і вміння користуватися цими методами (під час вивчення методів обчислень).

Алгоритмічний метод реалізується під час розв'язування багатьох диференціальних рівнянь першого та вищих порядків. Дійсно, встановивши вид диференціального рівняння, зразу ж застосовуємо відповідний алгоритм розв'язання. Так, якщо диференціальне рівняння можна записати у вигляді $N_1(x)M_1(y)dx + N_2(x)M_2(y)dy = 0,$ то відокремлюємо змінні (і цей процес також прописаний) і інтегруємо; якщо для правої частини рівняння $y' = f(x; y)$ виконується умова $f(tx; ty) = f(x; y), t \neq 0,$ то вводимо заміну

$y = x \cdot u(x)$ і за встановленим алгоритмом зводимо рівняння до рівняння з відокремленими змінними і знову ж таки за певним алгоритмом знаходимо його загальний розв'язок.

Крім того, ця навчальна дисципліна має широкий арсенал *методів, які відносяться до методів конкретно наукової методології*: метод відокремлення змінних, метод заміни змінної, метод варіації довільної сталої (метод Лагранжа), метод підстановки (метод Й. Бернуллі) – розв'язування лінійних ДР 1-го порядку, метод ізоклін (метод дослідження ДР за допомогою схематично побудованих інтегральних кривих ДР), метод введення параметра, метод Ейлера, метод інтегруючого множника, метод розв'язування рівнянь у повних диференціалах, метод Коші, метод невизначених коефіцієнтів, метод Д'Аламбера, метод степеневих рядів, метод виключення (для систем – зведення нормальної системи рівнянь до одного диференціального рівняння, розв'язаного відносно старшої похідної), матричний метод інтегрування однорідних стаціонарних систем.

Виокремимо *фундаментальні поняття* диференціальних рівнянь: звичайне диференціальне рівняння (ДР), його порядок, розв'язок ДР: загальний, частинний, особливий, інтегральна крива, задача Коші, рівняння з відокремлюваними змінними, однорідне рівняння, лінійне ДР (однорідне і неоднорідне), рівняння у повних диференціалах, інтегруючий множник, рівняння Бернуллі, рівняння Рікатті, рівняння Лагранжа, рівняння Клеро, лінійне ДР n-ого порядку, визначник Вронського, фундаментальна система розв'язків ЛОДР, характеристичне рівняння, характеристичні числа, система звичайних ДР першого порядку, розв'язок і інтегральна крива системи, перший та загальний інтеграли системи, лінійна система ДР, характеристичне рівняння та характеристичні числа системи ДР, ДР з частинними похідними, його порядок та розв'язок, канонічний вигляд, інтегральна поверхня, система характеристик, рівняння гіперболічного, параболічного та еліптичного типів.

До *фундаментальних фактів* будемо відносити: теорему про існування та єдиність розв'язку задачі Коші, схеми застосування основних методів диференціальних рівнянь, правило знаходження особливих розв'язків, необхідна і достатня умови лінійної незалежності n функцій, теорему про структуру загального розв'язку лінійного однорідного ДР n-ого порядку, формулу Остроградського – Ліувілля, залежність структури загального розв'язку лінійного однорідного ДР n-ого порядку зі сталими коефіцієнтами від характеристичних чисел, теорему про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного ДР n-ого порядку, формулу Абеля, структуру загального розв'язку лінійної однорідної системи ДР, залежність структури фундаментальної системи розв'язків лінійної однорідної системи ДР від характеристичних чисел, структуру загального розв'язку лінійної неоднорідної системи ДР, схему зведення ДР з частинними похідними до системи звичайних диференціальних рівнянь у симетричній формі, класифікацію та канонічну форма ДР з частинними похідними другого порядку, схему-орієнтир зведення ДР з частинними похідними другого порядку до канонічного вигляду, метод Лагранжа, метод Якобі, метод Фур'є.

Фундаментальні відношення. Відношення між фундаментальними (основними) поняттями модуля «Диференціальні рівняння першого порядку» подамо у вигляді структурно-логічної схеми (рис. 2.1.1), де суцільна стрілка напрямлена від загальнішого поняття (родового) до менш загального (видового), а пунктирною стрілкою вказано напрямок, до якого те чи інше поняття (рівняння) може бути зведене.

Важливим фактором для формування методологічних знань є ознайомлення студентів з історією розвитку певної галузі математики, її основних понять та фактів. Детально історію виникнення і розвитку диференціальних рівнянь студенти вивчатимуть у курсі «Історія математики» (або «Історія і методологія математики»). На етапі вивчення диференціальних рівнянь можна запропонувати студентам ознайомитися з основними етапами розвитку цієї галузі за підручниками ([7], [31], [217], [242]).

Теорія звичайних диференціальних рівнянь зародилася у XVII столітті. Основними джерелами виникнення поняття «диференціальне рівняння» були: 1) так звані «обернені задачі на дотичні» (задачі відшукання кривих за відомими властивостями їх дотичних); 2) кінематичний спосіб побудови різних кривих, який спирався на поняття миттєвої швидкості [183, с. 7-8]. Вже у XVIII столітті теорія звичайних диференціальних рівнянь розвинулася настільки, що її стали розглядати як самостійну наукову дисципліну. Велику роль у цьому

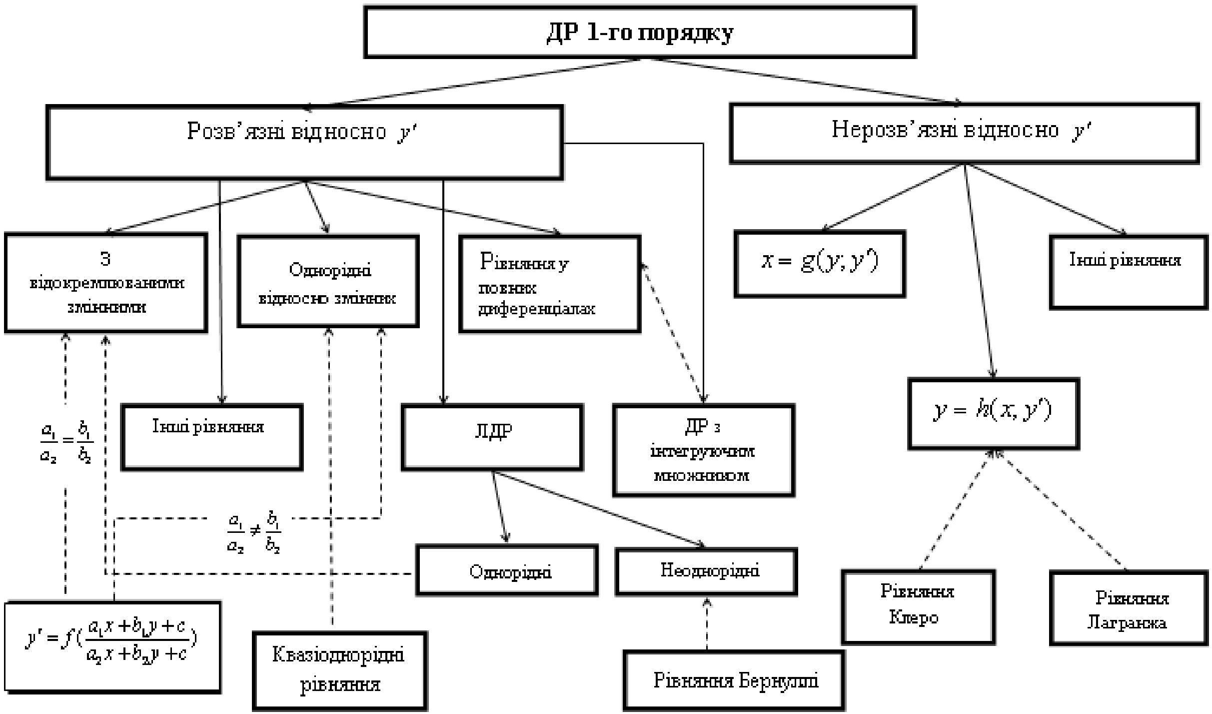


Рис. 2.1.1.Структурно-логічна схема

зіграли праці І. Ньютона, Г. Лейбніца, Й. Бернуллі, Я. Бернуллі, Р. Декарта, Л. Ейлера, Я. Ріккаті, Ж. Д'Аламбера, Ж. Лагранжа.

Термін «диференціальне рівняння» вперше ввів Г. Лейбніц у 1676 році. У цей самий час І. Ньютон запропонував метод відшукання розв'язків диференціальних рівнянь у вигляді степеневих рядів, а Г. Лейбніц поставив задачу відшукання розв'язків у скінченному вигляді. Велика заслуга у формуванні і розвитку теорії диференціальних рівнянь Л. Ейлера. Саме він ввів поняття загального, частинного розв'язків та займався особливими розв'язками. Розвинув метод інтегруючого множника не тільки для рівнянь першого, а й вищих порядків. Л. Ейлеру належить метод розв'язування однорідного диференціального рівняння з постійними коефіцієнтами за допомогою характеристичного рівняння та з'ясування його загального розв'язку (1743 рік). У праці «Інтегральне числення» Л. Ейлер вперше виклав загальну теорію диференціальних рівнянь.

І в області диференціальних рівнянь з частинними похідними Л. Ейлер зробив значний внесок. Цьому вченому належить перша монографія, в якій зроблено першу спробу побудови теорії диференціальних рівнянь в частинних похідних. Над цією проблемою, крім Л. Ейлера, працювали Ж. Д'Аламбер, Ж. Лагранж, П. Лаплас та інші.

Сучаснику Л. Ейлера, Д. Бернуллі, належить загальний метод розв'язування задач про коливання пружних систем (у тому числі коливання струни). Розквіт теорії диференціальних рівнянь з частинними похідними приходиться на початок XIX століття і пов'язаний з іменами С. Пуассона, Ж. Фур'є, О. Коші, М. Остроградського та інших.

Важливим питанням теорії диференціальних рівнянь є питання про існування розв'язків диференціальних рівнянь (чи їх систем). Перші результати дослідження цієї проблеми отримали О. Коші (звичайні диференціальні рівняння) та С. Ковалевська (диференціальні рівняння з частинними похідними) [243, с. 438].

Розбудова теорії диференціальних рівнянь триває вже понад три століття. На сьогодні – це багаторівнева розгалужена система знань, яка має широкі зв'язки з іншими математичними дисциплінами та іншими галузями науки. І ці зв'язки постійно розширюються. Наведемо приклади основних зв'язків.

Для вивчення дисципліни «Диференціальні рівняння» необхідні знання з:

1) *Математичного аналізу.* Неперервність функції однієї і багатьох змінних. Диференціальне числення функції однієї і багатьох змінних. Методи інтегрування. Степеневі ряди. Принцип стискуючих відображень.

2) *Лінійної алгебри.* Поняття лінійного рівняння і системи лінійних рівнянь, метод Гауса для розв'язування систем, визначники (наприклад, визначник Вронського). Лінійна комбінація векторів, лінійна залежність і лінійна незалежність векторів, відповідні теореми і наслідки з них. Лінійні оператори. Квадратичні форми.

3) *Аналітичної геометрії.* Векторна алгебра. Теорія кривих другого порядку.

4) *Диференціальної геометрії.* Однопараметрична сім'я кривих.

5) *Елементарної математики.* Перетворення виразів, розклад на множники, розв'язування рівнянь. Похідні пропорції. Показникова функція та її властивості.

6) *Алгебри і теорії чисел.* Теорія многочленів, комплексні числа.

7) *Математичної логіки та теорії алгоритмів.* Поняття алгоритму.

Знання, отримані під час вивчення диференціальних рівнянь, необхідні для вивчення:

1)*Методів математичної фізики.* Рівняння в частинних похідних, рівняння гіперболічного, еліптичного, параболічного типів.

2)*Варіаційного числення.* Звичайне диференціальне рівняння (диференціальні рівняння екстремалей або рівняння Ейлера), рівняння з відокремлюваними змінними, система звичайних диференціальних рівнянь.

3)*Методів обчислень.* Поняття диференціального рівняння, задачі Коші.

4)*Методики навчання математики.* Поняття звичайного диференціального рівняння, його розв'язку. Гармонічні коливання.

Крім того, варто наголосити, що диференціальні рівняння широко застосовуються для розв'язання багатьох прикладних задач, які містять елементи руху, з різноманітних галузей науки. Основою такого застосування є метод математичного моделювання. Ідея застосування зазначеного методу для розв'язування прикладних задач є загальна ідея лінеаризації – заміна функцій на малих проміжках зміни аргумента лінійними функціями. У більшості випадків побудувати диференціальну модель явища чи процесу на основі такої ідеї вдається, хоча є винятки.

Наведемо приклади застосування диференціальних рівнянь у різних галузях:

1) Особливо широко застосовуються диференціальні рівняння у фізиці (нагадаємо, що одним із джерел виникнення диференціальних рівнянь були задачі механіки, в яких розглядалися координати тіл, їхні швидкості та прискорення як функції від часу): другий закон Ньютона можна записати у формі диференціального рівняння $m\frac{d^2x}{dt^2}=F(x,t)$, де m – маса тіла, x – його координата, $F(x,t)$ - сила, що діє на тіло з координатою x у момент часу t; радіоактивний розпад $\frac{dN}{dt}=-\lambda N$, де λ - стала розпаду; закон охолодження тіла $\frac{dT}{dt}=-k(T-T_0)$, де T – температура тіла в момент часу t, T_0 – початкова температура тіла; найпростіші рівняння руху частинок в електромагнітних полях $\frac{d}{dt}(m\vec{V})=Ze(\vec{E}+[\vec{V},\vec{B}])$, де Z – зарядове число, e – заряд частинки, $\vec{E}$ – вектор напруженості прискорюючого поля, $\vec{B}$ – вектор магнітної індукції, $\vec{V}$ – вектор швидкості частинки.

2) Астрономія. Система звичайних диференціальних рівнянь $\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = -\dfrac{\gamma Mx}{(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}} \\ \dfrac{d^2y}{dt^2} = -\dfrac{\gamma My}{(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}} \end{cases}$ описує рух планети з масою m навколо Сонця маси M, γ – константа тяжіння.

3) Біологія. Модель Лотки – Вольтери – модель взаємодії двох видів типу «хижак – жертва»:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy + dxy \end{cases}$$

де $x(t)$ - кількість жертв, $y(t)$ - кількість хижаків, a, b, c, d – додатні константи, які відображають взаємодію між видами; процес розмноження чи вимирання популяцій: $\dfrac{dx}{dt} = kx$, де $x(t)$ – кількісний стан популяції в момент часу t, k – коефіцієнт; логістичне рівняння $\dfrac{dx}{dt} = kx - lx^2$ також описує процес розмноження чи вимирання популяцій, якщо коефіцієнт смертності є лінійною функцією.

4) Економіка. Диференціальне рівняння виду $\dfrac{dx}{dt} = f(x) - (\mu + \nu)x - c(t)$ є найпростішою математичною моделлю економічної динаміки. Тут $x(t)$ – обсяг основних фондів, які припадають на одного працівника в момент

часу t , μ,ν - відповідно норма амортизації капіталу та темп росту чисельності робочої сили, $c(t)$ – залежність від часу обсягу споживання в розрахунку на одного працівника, $f(x)$ - виробнича функція.

5) Хімія. Кінетика хімічних реакцій першого порядку $\frac{dx}{dt}=k(a-x)$, де a – початкова концентрація речовини, k – константа швидкості реакції першого порядку; кінетика хімічних реакцій другого порядку $\frac{dx}{dt}=k(a-x)(b-x)$, де a та b – початкові концентрації речовин, k – константа швидкості реакції другого порядку.

Важливим елементом методологічних знань майбутніх учителів математики є те, що одне і те саме диференціальне рівняння може бути математичною моделлю абсолютно різних реальних явищ і процесів з різних галузей знань. Так, наприклад, диференціальне рівняння $\frac{dy}{dt}=ky(t)$ описує процеси радіоактивного розпаду, хімічних реакцій, ним можна скористатися для розв'язування багатьох задач екології, задач про ефективність реклами, зростання інформаційних потоків тощо ([55], [216]). У банківській справі нарахування заборгованості за кредитом або доходів за вкладами також відбувається відповідно до цього закону, але у цих випадках час відраховується не неперервно, а через дискретні проміжки.

Диференціальні рівняння гармонічних коливань описують і коливання математичного маятника, і коливання в електричній мережі, і траєкторію руху тіла, кинутого під кутом до горизонту. Знання таких фактів дозволяє вивчати одні явища і процеси за допомогою інших, доступніших для дослідження.

Для майбутнього вчителя математики диференціальні рівняння ще варто розглянути з тієї точки зору, що це завершальний етап розвитку лінії рівнянь у школі.

2.2. Методологічні знання з вищої алгебри

Як правило, вища алгебра у педагогічних ВНЗ представлена двома навчальними дисциплінами:

1. Лінійна алгебра.
2. Алгебра і теорія чисел.

Розглянемо методологічні знання майбутнього вчителя математики з названих дисциплін.

Майбутній учитель математики повинен знати і розуміти, що основним предметом вивчення «шкільної» алгебри (елементарної) є рівняння, у той же час на сьогодні вища алгебра має дещо інший предмет вивчення. О. Курош [141], розглядаючи вищу алгебру як природне узагальнення елементарної, виокремлює у курсі вищої алгебри два великих розділи:

1) Лінійна алгебра. Основна задача – вивчення довільних систем лінійних рівнянь. Розв’язування систем, у яких кількість рівнянь і кількість невідомих однакові, призвело до розвитку теорії визначників. Якщо ж кількість рівнянь і невідомих різні, то теорії визначників недостатньо, тому виникла і отримала свій розвиток теорія

матриць. Вивчення систем лінійних рівнянь призвело до необхідності введення і вивчення скінченновимірних лінійних просторів.

2) Теорія многочленів. Цей розділ присвячений вивченню одного рівняння від однієї змінної, але довільного степеня. Вивчення теорії многочленів призвело до вивчення теорії чисел (питання про існування коренів зводилося до коефіцієнтів многочленів). Пошуки умов, за яких рівняння є розв'язним у радикалах, привели до нової точки зору на алгебру. Не викликає сумнівів той факт, що на сьогодні основною задачею вищої алгебри не є вивчення рівнянь. «Істинним об'єктом алгебраїчного дослідження є алгебраїчні операції, аналогічні додаванню або множенню чисел, але виконувані, можливо, не над числами» [141, с. 9].

2.2.1. Лінійна алгебра

За ОПП підготовки бакалавра напряму 6.040201 Математика* (Київ, 2002р.) вивчення навчальної дисципліни «Лінійна алгебра» складається з таких зміствох модулів:

- Системи лінійних рівнянь.
- Числові поля. Поле комплексних чисел.
- Дослідження систем лінійних рівнянь.
- Лінійні простори.
- Унітарні і евклідові простори.
- Лінійні оператори.
- Структура лінійного відображення.

- Лінійні оператори на евклідовому та унітарному просторах.
- Квадратичні форми.

Предметом вивчення лінійної алгебри є, в основному, лінійні скінченновимірні простори та лінійні відображення (або лінійні оператори) в цих просторах. ***Основними методами*** дослідження є матричний та векторний методи. Крім названих методів, курс лінійної алгебри має у своєму арсеналі чимало конкретно наукових методів. Наприклад, під час вивчення розділу «Системи лінійних рівнянь» розглядаються метод Гауса, метод Жордана-Гауса, метод Крамера, метод оберненої матриці (матричний метод). Для зведення квадратичних форм до канонічного виду використовуються метод Лагранжа, метод Якобі, метод ортогонального перетворення. Знайшов своє явне відображення під час вивчення цього курсу аксіоматичний метод (відноситься до *методів загальнонаукової методології*).

Лінійна алгебра, абстрагуючись від сутності об'єктів, на перше місце висуває операції (відношення), задані на об'єктах, і властивості цих операцій. Так, розглядаючи лінійний простір X, ми абстрагуємося від природи об'єктів множини X (це можуть бути числа, n-вимірні вектори, матриці, функції тощо), головне – це алгебраїчні операції над об’єктами цієї множини та їх властивості, описані в аксіомах лінійного простору.

З аналізу змісту навчальної дисципліни «Лінійна алгебра» випливає, що у лінійній алгебрі вивчаються об'єкти трьох родів: матриці, простори і алгебраїчні форми. Теорії цих об'єктів тісно пов'язані між собою, незважаючи на зовнішні відмінності. Практично кожна задача лінійної алгебри може бути сформульована «мовою» кожної з трьох названих теорій.

Як показують дослідження, для проведення обчислень найзручніше сформулювати (або перевести) певну задачу лінійної алгебри у матричній формі. З іншого боку, для багатьох задач, які виникають у геометрії та механіці, ефективною математичною моделлю є алгебраїчна форма. Проте найвиразніше розуміння внутрішніх зв'язків між різними задачами лінійної алгебри досягається лише під час розгляду відповідних лінійних просторів.

О. Кострикін вбачає зміст лінійної алгебри у «… розробці математичної мови для вираження однієї з найзагальніших природничих ідей – ідеї лінійності. …майже всякий природній процес майже всюди в малому лінійний» [111, с. 5]. Тому можна вважати лінійну алгебру мовою сучасної математики (і не тільки математики).

Як було зазначено вище, основним предметом вивчення лінійної алгебри є лінійні простори, а останні будуються над такими алгебраїчними структурами як поля і кільця, тому логічно було б розпочинати вивчення цієї навчальної дисципліни з вивчення відповідних алгебраїчних структур.

Але цей матеріал є достатньо абстрактним і важким для розуміння і засвоєння першокурсниками. Тому доцільно розпочинати курс лінійної алгебри з вивчення систем лінійних рівнянь (матеріал цього змістового модуля є менш абстрактним, та й системи лінійних рівнянь вивчаються у шкільному курсі математики). Крім того, історично першою задачею лінійної алгебри вважають розв’язання лінійного рівняння $ax = b$. Хоча ця задача і не викликає труднощів, але її розв'язання та властивості відповідної лінійної функції $y = ax + b$ можна вважати класичними зразками ідей і методів всієї лінійної алгебри.

Не варто забувати, і про це треба кожного разу підкреслювати студентам, що такі елементарні на сьогоднішній погляд досягнення математики як число, додавання, множення, розв'язування того ж самого лінійного рівняння були у свій час великими відкриттями. І на питання студентів (а вони останнім часом звучать все частіше), для чого вивчати досить абстрактні питання математики, у тому числі і лінійної алгебри, варто навести слова П. Дірака: «Сучасна фізика вимагає все більше абстрактної математики і розвитку її основ. Так, неевклідова геометрія і некомутативна алгебра, які вважалися певний час плодом уяви чи захопленням логічними міркуваннями, тепер визнані необхідними для опису загальної картини фізичного світу» (цитата за [110, с. 13]).

До *фундаментальних понять* лінійної алгебри віднесемо такі: система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР), розв'язок СЛАР, сумісна та несумісна, визначена та невизначена, еквівалентна СЛАР, перестановка парна і непарна, визначник, порядок визначника, матриця, її розмірність, сума, різниця, добуток матриць, добуток матриці на число, транспонована, обернена, одинична, трикутна матриця, алгебраїчне доповнення, мінор, ранг матриці, невироджена матриця, розширена матриця; відношення на множині, алгебраїчна операція, алгебраїчна структура, група, кільце, поле, комплексне число, поле комплексних чисел, арифметичний *n*-вимірний простір, лінійна залежність векторів, базис і ранг системи векторів, координати вектора, лінійний (векторний) простір, лінійна залежність векторів, базис і ранг системи векторів, розмірність лінійного простору, координати вектора, ізоморфізм, гомоморфізм, підпростір лінійного простору, скалярний добуток, евклідів простір, унітарний простір, ортогональний базис, лінійний оператор, його область значень і ядро, матриця, власні значення і власні вектори лінійного оператора, спряжений, самоспряжений, унітарний лінійний оператор, спектр оператора, квадратична форма.

До *фундаментальних фактів* віднесемо: властивості визначників, властивості алгебраїчних операцій над матрицями, критерій оборотності матриці, сутність методу Гауса, формули Крамера, теорему Кронекера – Капеллі, теорему про структуру загального розв'язку однорідної та неоднорідної СЛАР, властивості відношення, властивості алгебраїчних операцій: комутативність, асоціативність, дистрибутивність, аксіоми групи, кільця, поля, критерій лінійної залежності векторів, аксіоми лінійного простору, аксіоми скалярного добутку, нерівність Коші – Буняковського, властивості власних векторів лінійного оператора, теорему про еквівалентність квадратичної форми діагональній формі, метод Лагранжа, метод Якобі, метод ортогонального перетворення, закон інерції для квадратичних форм.

Зупинимося на основних *зв'язках* лінійної алгебри з іншими *навчальними дисциплінами*, оскільки міжпредметні зв'язки є частиною методологічних знань конкретно наукового рівня і реалізація міжпредметних зв'язків сприяє формуванню методологічних знань. А з іншої сторони, загальнонаукові методологічні знання є основою міжпредметних зв'язків (детальніше про це у [122]).

Варто зазначити, що курс лінійної алгебри тісно пов'язаний майже з усіма математичними курсами. Для розуміння курсу лінійної алгебри необхідні знання шкільного курсу математики.

Глибокі зв'язки пов'язують курс лінійної алгебри з курсом аналітичної геометрії. О. Кострикін назвав ці дисципліни «сестрами-близнюками» [110, с. 8]. Вчений підкреслив, що з курсу аналітичної геометрії на площині і в тривимірному просторі відомо багато прикладів геометричної інтерпретації алгебраїчних співвідношень для двох і трьох змінних. Істотним, на його думку, є те, що термінологія та ідеї лінійної алгебри, що спираються на геометричну інтуїцію, відносяться до довільного n-вимірного простору. Важливо, на нашу думку, підкреслити, що теорія квадратичних форм є засобом для дослідження ліній і поверхонь другого порядку. У свою чергу, розв'язки систем лінійних рівнянь отримують наочне тлумачення саме у курсі аналітичної геометрії.

Застосовуються квадратичні форми і в диференціальних рівняннях під час зведення ДРЧП 2-го порядку від трьох незалежних змінних. У цьому ж курсі для розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь застосовується метод Гауса; для встановлення лінійної незалежності функцій використовується визначник Вронського; метод Лагранжа (метод варіації довільної змінної) дозволяє звести розв'язування неоднорідного диференціального рівняння до СЛАР і до подальшого інтегрування.

Знайшла своє відображення ідея лінійності і в математичному аналізі. Диференційовна функція, гладке поле, диференційовне відображення в малому лінійні, і їх локальне вивчення вимагає застосування методів лінійної алгебри. Так, одне з фундаментальних понять математичного аналізу – диференціал – означається як *лінійна* частина повного приросту функції. Крім того, необхідною складовою інтегрування раціональних функцій є розв’язування систем лінійних рівнянь. Під час вивчення кратних інтегралів використовується поняття визначника – якобіана переходу.

Вивчення алгебраїчних структур (груп, кілець, полів тощо), розпочате у лінійній алгебрі, продовжується у курсі «Алгебра і теорія чисел».

Функціональний аналіз виник на основі застосування методів математичного аналізу і лінійної алгебри до нескінченновимірних лінійних просторів. Ця дисципліна ґрунтується на методах лінійної алгебри і їх подальших узагальненнях на нескінченновимірні простори.

Широко застосовується лінійна алгебра і в багатьох інших дисциплінах. Зокрема:

1) у *лінійному програмуванні* (ця галузь математики присвячена теорії і методам розв'язування екстремальних задач на множинах n-вимірного векторного простору, які задаються системами лінійних рівнянь і нерівностей);

2) *економіці* (випуск продукції – множення матриць; потоки певного товару від постачальника до споживача у торгівельних мережах – системи ЛАР);

3) *криптографії* (афінні шифри базуються на лінійній алгебрі над скінченними полями та кільцями);

4) в *квантовій механіці* (рівняння Ліндблада – рівняння для матриці густини, широко використовується поняття оператора – наприклад, у цьому ж рівнянні застосовується оператор Гамільтона) тощо.

Важливим фактором для формування методологічних знань є ознайомлення студентів з *історією розвитку* певної галузі математики, її основних понять та фактів. Детально історію виникнення і розвитку лінійної алгебри студенти вивчатимуть у курсі «Історія математики» (або «Історія і методологія математики»). Можна також запропонувати студентам прочитати цей матеріал самостійно, наприклад, за ([7], [31], [152]).

Але під час вивчення лінійної алгебри необхідно ознайомити студентів з основними етапами становлення цієї галузі математики:

4000 до н. е. – вавилоняни складали задачі, які розв’язувалися за допомогою системи 2 на 2.

200 до н. е. – китайці розв’язували системи 3 на 3, використовуючи лише їхні числові коефіцієнти (зародження ідеї матриці і методу Гауса).

Східна цивілізація середніх віків – алгебраїчні рівняння 1-го та 2-го степеня. Виникнення терміну «алгебра».

Епоха Відродження – розв’язування алгебраїчних рівнянь 3-го і 4-го степеня. Створення сучасної алгебраїчної символіки.

XVII – XVIII ст. – розвиток алгебри многочленів. Початок теорії визначників.

XIX – XXI ст. – доведення основної теореми про існування коренів рівняння з числовими коефіцієнтами. Пошук методів наближеного розв’язування рівнянь. Розв’язання проблеми про нерозв’язність рівнянь степеня $n \geq 5$ в радикалах. Створення теорії Галуа. Інтенсивний розвиток методів лінійної алгебри, відкриття кватерніонів, теорії гіперкомплексних систем. Формулювання у явному вигляді аксіом лінійного простору. Перехід алгебри на аксіоматичний і абстрактний шлях розвитку.

2.2.2. Алгебра і теорія чисел

З аналізу літератури слідує, що предмет вивчення алгебри змінювався і розвивався разом з розвитком самої математичної галузі. Н. Бурбакі розглядали сучасну алгебру як розділ математики, в якому вивчаються алгебраїчні структури. Об’єктом вивчення сучасної алгебри є множини з аксіоматично заданими на них алгебраїчними операціями. При цьому природа множин – носіїв алгебри – не має значення. А тому на сьогодні ***предметом*** вивчення ***вищої алгебри*** є алгебраїчні операції.

За словами К. Гаусса, математика – цариця наук, а теорія чисел – цариця математики. Теорія чисел належить до найдревніших математичних наук. Глибокі результати у цій галузі були одержані ще піфагорійською школою (580 – 500 рр. до н. е.), головною тезою якої була: «Суть речей – числа, сила чисел проявляється в усіх діяннях і думках людства, в усіх ремеслах і музиці».

Історично теорія чисел виникла як безпосередній розвиток арифметики. На сьогодні до змісту теорії чисел включені питання, які виходять далеко за межі вивчення натуральних чисел. ***Предметом вивчення теорії чисел*** є числові системи з їх зв'язками і законами, і в першу чергу, система натуральних чисел, яка є основою для побудови решти числових систем. Теорія чисел *не вивчає* логічне обґрунтування побудови числових систем (від множини натуральних чисел до множини комплексних чисел), головне завдання теорії чисел – вивчення множини натуральних (цілих) чисел з точки зору *подільності* цих чисел.

Вивчення теорії чисел є професійно значущим для майбутнього вчителя математики. Елементарна теорія чисел поєднує в собі індуктивні та дедуктивні міркування, багато завдань формулюються настільки конкретно і просто, що зазвичай допускають «експериментальну» числову перевірку; багато досить глибоких проблем допускають наочну інтерпретацію. А це є важливим для навчання математики.

Крім того, чимало питань елементарної теорії чисел входять до шкільного курсу математики: змістова лінія «Числа та вирази» пронизує весь курс математики – від 1-го до 11-го класу.

З аналізу ОПП підготовки бакалавра напряму 6.040201 Математика* (Київ, 2002р.) слідує, що питанням теорії чисел під час вивчення навчальної дисципліни «Алгебра і теорія чисел» приділена незначна увага. Наведемо перелік змістових модулів за вказаною ОПП:

- Групи.
- Кільця (поля).
- Теорія конгруенцій.
- Кільце многочленів від однієї змінної.
- Многочлени від багатьох змінних.
- Многочлени від однієї змінної на числовими полями.
- Алгебраїчні розширення полів.

Ми підтримуємо думку Я. Требенка [236] про необхідність виокремлення елементів теорії чисел в окремий змістовий модуль, оскільки ця галузь алгебри має істотний вплив на формування методологічних знань майбутнього вчителя математики.

У сучасній теорії чисел виокремлюють такі напрями:

1) Елементарна теорія чисел: теорія подільності, теорія порівнянь, теорія форм, невизначені (діофантові) рівняння.

2) Алгебраїчна теорія чисел: класи алгебраїчних чисел.

3) Геометрична теорія чисел.

4) Діофантові наближення: питання наближення дійсних чисел раціональними дробами, теорія трансцендентних чисел.

5) Аналітична теорія чисел: питання теорії чисел, для вивчення яких потрібно застосувати методи математичного аналізу.

6) Ймовірнісна теорія чисел: питання теорії чисел, для вивчення яких потрібно застосувати методи теорії ймовірностей.

7) Топологічна теорія чисел: теорія поліадичних чисел.

А відповідно до напрямів маємо і основні *методи теорії чисел*:

- Елементарні – ґрунтуються на знаннях з елементарної математики. Класичним методом теорії чисел є метод порівнянь. До вказаних методів відносять методи знаходження простих чисел, методи знаходження НСД і НСК чисел, методи теорії конгруенцій, методи ланцюгових дробів та інші.
- Аналітичні – це методи математичного аналізу для дослідження теоретико-числових функцій. Важливо відмітити, що факт зв'язку між *дискретними об'єктами* (цілими числами) і властивостями *функцій* зіграв надзвичайно важливу роль у подальшому розвитку теорії чисел.
- Геометричні – ґрунтуються на так званих «просторових решітках» або системі точок, які мають у заданій системі координат своїми координатами цілі числа. Варто студентам проілюструвати цей метод на прикладі великої теореми Ферма: розв'язати в цілих числах рівняння $x^n + y^n = z^n$. Поділивши обидві частини рівняння на z^n і замінивши $\frac{x}{z} = u, \frac{y}{z} = v$, отримаємо рівняння $u^n + v^n = 1$. Це рівняння задає на площині з координатами $(u; v)$ деяку криву. Розв'язки заданого рівняння в цілих числах відповідають розв'язкам отриманого рівняння в

раціональних числах. Про кожен такий розв'язок можна говорити як про точку з раціональними координатами на цій площині. Тепер можна спробувати застосувати геометричні методи до кривої для знаходження на ній множини точок з раціональними координатами.

- У теорії чисел як окремій галузі математики широко застосовуються ймовірнісні (розробники цих методів – угорський математик П. Ердеш (1913-1996) і литовський математик Й. Кубілюс (1921-2011)), топологічні (вперше запропонував Х. Прюфер (1879-1934)) та інші методи.

Серед методів вищої алгебри, які відносяться до змісту *конкретно наукового рівня* методологічних знань, варто назвати методи розв'язування лінійних конгруенцій (метод спроб, метод рівносильних перетворень), метод Горнера, метод Феррарі, метод Штурма.

Знайшли застосування і методи *загальнонаукового рівня* методологічних знань. Серед них:

1) метод аналогій: властивості конгруенцій алогічні властивостям лінійних рівнянь; множина многочленів з введеними операціями додавання, віднімання, множення, ділення з остачею аналогічна множині цілих чисел; поняття правильного, неправильного раціонального дробу, виокремлення цілої частини аналогічно до відповідних питань звичайних дробів;

2) метод математичної індукції: для доведення теореми про кількість розв'язків конгруенції за простим модулем, для введення НСД і НСК трьох і більше чисел;

3) алгоритмічний метод: алгоритм ділення з остачею (для цілих чисел і для многочленів), алгоритм перетворення звичайного дробу у десятковий і навпаки;

4) аксіоматичний метод: на основі цього методу побудована теорія груп, кілець, многочленів.

На матеріалі навчальної дисципліни «Алгебра і теорія чисел» доцільно формувати у майбутніх учителів методологічні знання *філософського рівня*, зокрема, такі філософські поняття:

1) існування, єдиність: основна теорема алгебри (стверджується існування кореня), Велика теорема Ферма, існування та єдиність НСД і НСК кількох натуральних чисел, існування і єдиність факторизації натурального числа; єдиність розкладу правильного раціонального дробу на суму елементарних, неєдиність канонічного виду для квадратичної форми. Варто відмітити, що весь курс вищої математики, у тому числі і вищої алгебри, багатий на теореми існування;

2) скінченність та нескінченність: нескінченність множини простих чисел, скінченною чи нескінченною є множина чисел-близнюків;

3) неперервність та дискретність: дискретність множини натуральних (цілих) чисел і неперервність множини дійсних чисел.

Ще одне важливе питання: чи *єдиним* чином можна зобразити натуральне число, ціле, раціональне, дійсне? Майбутній вчитель математики має знати, що, наприклад, раціональне число можна записати: у вигляді звичайного дробу (і то не єдиним способом), у вигляді системного дробу (як правило, у шкільному курсі математики це десятковий скінченний чи періодичний дріб), ланцюговим дробом.

Виокремимо фундаментальні поняття, факти та відношення навчальної дисципліни «Алгебра і теорія чисел», які є професійно значущими для майбутнього вчителя математики.

Фундаментальні поняття: подільність, ділене, дільник, частка, остача, кратне, спільне і найменше спільне кратне, спільний і найбільший спільний дільник, взаємно прості числа, число просте і складене, канонічна форма натурального числа, числові функції $\sigma(n), \tau(n), \varphi(n)$, $[x]$, $\{x\}$ мультиплікативні числові функції, конгруентні числа, конгруенція, клас лишків, лишок, повна і зведена система лишків, лінійна конгруенція, розв'язок конгруенції, рівносильні конгруенції, конгруенція n-ого степеня за простим модулем, порядок числа та первісний корінь за даним модулем, ознака подільності, чистий і мішаний періодичний дріб, скінченний ланцюговий дріб, підхідний дріб; бінарна алгебраїчна операція, асоціативна, комутативна, дистрибутивна алгебраїчна операція, нейтральний та симетричний елементи, група, підгрупа, кільце, підкільце, поле, підполе, відображення, відображення *в* та *на* множину, взаємно однозначне відображення, гомоморфізм, ізоморфізм, одиниця кільця, дільник нуля і одиниці, область цілісності, характеристика кільця, подільність у комутативному кільці, ідеал і головний ідеал кільця, конгруенція за ідеалом, клас лишків кільця за ідеалом, фактор-кільце, НСД і НСК двох елементів області цілісності, многочлен степеня n, корінь многочлена, кратність кореня, незвідний многочлен, раціональний дріб правильний і неправильний, елементарні дроби,

Фундаментальні факти: властивості відношення подільності, теорема про ділення цілих чисел з остачею, теореми про існування та єдиність НСД та НСК двох цілих чисел, зв'язок між НСД і НСК двох цілих чисел, методи знаходження НСД і НСК цілих чисел, властивості простих і складених чисел, основна теорема арифметики, решето Ератосфена, властивості мультиплікативних функцій, властивості конгруенцій, теорема про існування та кількість розв’язків лінійної конгруенції, способи розв’язування лінійних конгруенцій (спосіб спроб, спосіб рівносильних перетворень, спосіб Ейлера, застосування класів лишків), теорема про кількість розв’язків конгруенції за простим модулем, властивості порядків за модулем, теорема про кількість класів первісних коренів за простим модулем (теорема Гауса), ознака Паскаля, ознаки подільності на 2, 5, 3, 9, 11, 4, 25, 50, теореми про перетворення звичайного дробу у скінченний десятковий та періодичний дроби, теорема про єдиність представлення раціонального числа скінченним ланцюговим дробом, критерій групи (підгрупи), критерій кільця (підкільця), критерій поля (підполя), теорема про зв’язок поля і області цілісності, властивості характеристики кільця, властивості відношення подільності у комутативному кільці, теорема про ідеали в кільці цілих чисел, властивості конгруенції за ідеалом, теорема про зв’язок між класами лишків кільця цілих чисел за ідеалом і класами лишків кільця цілих чисел за модулем, основна теорема про гомоморфізми кілець, Основна теорема алгебри, формули Вієта, теорема про розклад правильного раціонального дробу на суму елементарних, теорема Штурма.

Фундаментальні відношення: відношення подільності, алгебраїчні операції як відношення, гомоморфізм, ізоморфізм, конгруентності, асоційованості.

Коротко розглянемо *історію розвитку* абстрактної алгебри і теорії чисел (табл. 2.2.1). Детально історію становлення і розвитку цих галузей математики можна прочитати у роботах [7], [31], [235].

Окремо треба відмітити внесок у розвиток алгебри українських вчених: Георгій Феодосійович Вороний (теорія чисел), Граве Дмитро Олександрович, Михайло Пилипович Кравчук, Микола Григорович Чеботарьов, Володимир Петрович Вельмін, Антон Казимирович Сушкевич, Сергій Миколайович Черніков, Сергій Сергійович Левіщенко та інші.

Для майбутнього вчителя математики важливо знати, що хоч теорія чисел пройшла у своєму розвитку довгий і тернистий шлях, на сьогодні залишилися ще нерозв’язані проблеми цієї галузі математики. Більшість з цих проблем стосується множини натуральних чисел, множини, яка у шкільному курсі математики навіть не означається, а тільки пояснюється.

Таблиця 2.2.1

Основні історичні періоди розвитку алгебри і теорії чисел

Період	*Математичні факти*	*Вчені*
До XVI ст.	Питання, які входять сьогодні до курсу елементарної алгебри (як правило, рівняння 1-го та 2-го степенів, зрідка розглядалися рівняння 3-го степеня). Виникнення терміну «алгебра». Введення алгебраїчної символіки. *З теорії чисел*: питання подільності чисел, різні категорії чисел: прості, складені, досконалі, дружні. Алгоритм Евкліда. Теорема про нескінченність множини простих чисел. Решето Ератосфена. Вважається, що роботи Діофанта поклали початок теорії чисел як особливій області математики.	Евклід, Діофант, Чжан Цан, Аріабхата, Брамагупта, Браскара, Цинь Цзю-шао, Мухамед Аль-Хорезмі, Омар Хайям, Фібоначі, Ф. Вієт. Школа Піфагора Евклід Ератосфен Діофант
XVI ст.	Знайдено методи розв'язування рівнянь 3-го та 4-го степенів.	Сципіон дель Ферро, Н. Тарталья, Дж. Кардано, Л. Феррарі
XVII - XVIII ст.	Інтенсивна розробка загальної теорії рівнянь (алгебри многочленів). *З теорії чисел:* теорія чисел як окрема галузь математики. Теорія подільності на просте і	Ф. Декарт, І. Ньютон, Ж. Даламбер, Ж. Лагранж. П. Ферма, Л. Ейлер, А. Лежандр

Продовження таблиці 2.2.1

	складене число, розв'язання багатьох задач теорії невизначених рівнянь, теореми Ферма. Ідеї застосування методів математичного аналізу до розв'язання задач теорії чисел.	
1799 рік	Перше повне доведення основної теореми алгебри	К. Гаусс
Початок XIX ст.	Неможливість розв'язності в радикалах рівняння, степінь якого більша 4-ох. Теорія порівнянь.	П. Руффіні, Н. Абель, Е. Галуа К. Гаусс
Середина – друга половина XIX ст.	Теорія скінченних груп. Зародження теорії неперервних груп. Зародження теорії гіперкомплексних систем (теорії алгебр). *З теорії чисел*: Теорія алгебраїчних чисел. Основа теорії трансцендентних чисел.	О. Коші, Л. Силов, Ф. Фробеніус, О. Гельдер. С. Лі Р. Гамільтон, М. Гроссман, Ф. Молін Е. Куммер, Л. Кронекер, Р. Дедекінд, Е. Золотарьов, Г. Вороний. Ж. Ліувіль, Ш. Ерміт
XX ст.	Загальна теорія полів, теорія кілець і загальна теорія груп, топологічна алгебра і теорія структур, теорія напівгруп, гомологічна алгебра, теорія категорій. *З теорії чисел*: подальший розвиток аналітичної теорії чисел.	Д. Гільберт, Е. Штейнц, Е. Артіна, Е. Нетер, Б. Ван дер Варден. Г. Вейль, Г. Вороний, Г. Харді, Ю. Линник, О. Гельфонд, І. Шафаревич.

Яскравий приклад того, що інтуїтивно зрозуміло є чи не найскладнішим для обґрунтування і логічного пояснення. До нерозв'язаних проблем належать, наприклад, такі: скінченними чи нескінченними є множини чисел-близнюків, простих чисел Мерсенна (чисел виду 2^p–1), простих чисел Ферма (чисел виду $2^{2^n}+1$).

Розглянемо *зв'язок з іншими дисциплінами математичного спрямування.*

1) *Лінійна алгебра*. Розпочавши вивчення змістових модулів, пов'язаних з алгебраїчними структурами, варто звернути увагу студентів на те, що з відповідними питаннями вони ознайомилися у курсі «Лінійна алгебра» (це допоможе їм встановити міжпредметні зв'язки). У курсі «Алгебра і теорія чисел» відбувається розширення і поглиблення знань про алгебраїчні структури.

2) *Числові системи*. Під час вивчення цього курсу відбувається подальше розширення знань про алгебраїчні структури, тут розглядаються *упорядковані* групи, кільця, поля. Вивчається аксіоматична будова основних числових систем.

3) *Математичний аналіз*. Бінарну алгебраїчну операцію можна розглядати як функцію двох змінних: $f: M \times M \to M$. Під час вивчення теорії многочленів розглядається функціональний підхід до їх вивчення: многочлен трактується як ціла раціональна функція, а тому корені многочлена можна розглядати як абсциси точок перетину графіка цілої раціональної функції з віссю абсцис (це відіграє істотку роль під час встановлення кількості *дійсних* коренів многочлена). Для доведення основної

теореми алгебри використовуються методи і ідеї математичного (комплексного) аналізу; зокрема, поняття неперервності, методи диференціального числення використовуються для встановлення кратності кореня. Але є і неузгодженості між вивченням окремих тем цих навчальних дисциплін: знання і вміння розкладати на елементарні дроби потрібні під час вивчення інтегрального числення на 1-ому курсі, а обґрунтовуються вони під час вивчення алгебри на 2-ому курсі.

4) *Вища геометрія*. Множина всіх поворотів площини навколо однієї і тієї ж точки, множина всіх паралельних перенесень площини, множина всіх поворотів зі спільним центром, множина всіх переміщень площини, множина усіх гомотетій зі спільним центром, множина всіх подібних перетворень площини утворюють групу; у проективній геометрії розглядається група проективних перетворень. Для знаходження асимптот неявно заданої кривої використовується теорія многочленів. Аналогічними є метод знаходження кратності кореня в теорії многочленів і метод знаходження порядку дотику кривих в диференціальній геометрії.

5) *Елементарна математика*. З однієї сторони, вивчення курсів вищої математики неможливе без міцних системних знань студентів зі шкільної та елементарної математики (дій над числами, розкладом многочлена на множники, основ теорії подільності тощо), а з іншої – під час вивчення навчальної дисципліни «Алгебра і теорія чисел» відбувається розширення, поглиблення, а головне, наукове обґрунтування понять теорії подільності та теорії многочленів.

6) *Математична логіка і теорія алгоритмів*. У навчальній дисципліні «Алгебра і теорія чисел» знайшли широке застосування методи і ідеї теорії алгоритмів.

7) *Диференціальні рівняння*. Для розв’язування ОЛДР *n*-ого порядку важливим є кратність кореня характеристичного рівняння (теорія многочленів). Розв'язки диференціальних рівнянь знаходяться за допомогою груп Лі як груп симетрії.

8) *Методи обчислень*. На основі поняття многочлена, кореня многочлена, основної теореми алгебри, теореми Штурма ґрунтуються наближені методи знаходження коренів нелінійних рівнянь.

9) *Теорія ймовірностей та математична статистика.* Простір елементарних подій (повна група подій) – група, групова операція – сума (об’єднання) подій.

10) *Комплексний аналіз.* Нулі многочлена; кратність кореня многочлена. Алгебраїчна замкненість поля комплексних чисел.

11) *Методика навчання математики*. Змістові лінії «Числа і дії над ними», «Вирази та їх перетворення», «Рівняння, нерівності, системи рівнянь та нерівностей» пронизують увесь курс шкільної математики, окремі питання цих змістових модулів отримують наукове обґрунтування у курсі «Алгебра і теорія чисел». Це в свою чергу сприяє реалізації принципу науковості у навчанні математики.

Крім того, поняття, методи та ідеї вищої алгебри використовуються в інших галузях науки та практиці. Зокрема:

1) Теорія чисел є фундаментом *теорії захисту інформації*.

2) У *природничих науках* (фізиці, хімії, кристалографії тощо) важливу роль відіграє поняття симетрії. Сукупність операцій симетрії утворює групу. У фізиці, за теоремою Нетер, кожній симетрії відповідає інтеграл руху. Так, однорідності простору відповідає закон збереження імпульсу, однорідності часу – закон збереження енергії, ізотропності простору – закон збереження моменту імпульсу, калібрувальній інваріантності – закон збереження електричного заряду. Для класифікації та визначення властивостей мінералів та молекул важливе значення мають операції симетрії, які описуються точковими й просторовими групами.

2.3. Методологічні знання з вищої геометрії

Як правило, вища геометрія у педагогічних ВНЗ представлена такими навчальними дисциплінами:

1. Аналітична геометрія.
2. Диференціальна геометрія і топологія.
3. Проективна геометрія та методи зображень.
4. Основи геометрії.

2.3.1.Аналітична геометрія

Навчальна дисципліна «Аналітична геометрія» віднесена до циклу професійної та практичної підготовки ОПП підготовки бакалавра напряму підготовки 6.040201

Математика* (2009 р.) і на її вивчення відведено 6 кредитів ECTS.

За ОПП підготовки бакалавра напряму підготовки 6.040201 Математика* (2002 р.) передбачено розгляд таких змістових модулів:

- Елементи векторної алгебри.
- Метод координат на площині.
- Пряма на площині.
- Конічні перерізи: еліпс, гіпербола, парабола.
- Загальна теорія алгебраїчних ліній 2-го порядку.
- Геометричні перетворення площини.
- Метод координат у просторі.
- Теорія прямих і площин у просторі.
- Вивчення алгебраїчних поверхонь 2-го порядку за їх канонічними рівняннями.
- Загальна теорія алгебраїчних поверхонь 2-го порядку.
- Геометричні перетворення простору.

Предметом вивчення аналітичної геометрії є геометричні об'єкти.

Від інших геометричних дисциплін аналітична геометрія відрізняється методом вивчення цих об'єктів, а саме: для вивчення геометричних об'єктів в аналітичній геометрії послуговуються методами алгебри, і здійснюється це за допомогою методу координат. Згідно з цим методом положення точки на прямій, площині чи у просторі описують відповідно одним, двома або трьома числами — координатами цієї точки, а кожній кривій (поверхні) відповідає одне або кілька рівнянь, які пов'язують координати будь-якої точки, що їм належить.

Отже, ***основним методом аналітичної геометрії*** є метод координат.

Метод координат дозволяє кожному геометричному об'єкту поставити у відповідність його рівняння, а потім шляхом аналітичного дослідження цього рівняння вивчити властивості даного геометричного об'єкта і навпаки, аналізуючи задане рівняння прийти до певного геометричного об'єкта.

Крім основного методу, у курсі аналітичної геометрії використовуються:

а) метод перерізів (для з'ясування форми поверхні другого порядку). Саме за допомогою цього методу давньогрецький математик Менехм (IV ст. до н. е.) вперше відкрив криві другого порядку;

б) векторний метод. Задачі аналітичної геометрії, які розв'язуються за допомогою цього методу, перераховані нижче;

в) алгебраїчні методи: методи розв'язування рівнянь і систем рівнянь (для знаходження точок і ліній перетину, центра кривої та поверхні, головні напрямки поверхні);

г) алгоритмічний метод (алгоритм зведення рівняння кривої та поверхні другого порядку до канонічного виду; алгоритм знаходження нормуючого множника);

д) метод аналогій (теорія прямої лінії у просторі у певній мірі аналогічна до теорії прямої лінії на площині);

е) метод геометричних перетворень (знаходження точки, симетричної до даної відносно прямої та площини, поворот системи координат та її паралельне перенесення в новий початок під час зведення рівняння кривої до канонічного вигляду).

Під час вивчення аналітичної геометрії провідна роль належить обчисленням, роботі з формулами, а побудови відіграють допоміжну, ілюстративну роль.

Математики виокремлюють дві типові задачі аналітичної геометрії:

1) скласти рівняння лінії (поверхні), яка задана геометрично (як геометричне місце точок, які мають певні властивості);

2) встановити геометричний образ лінії (поверхні), яка задана аналітично (за допомогою певного рівняння).

Варто зауважити, що в аналітичній геометрії друга задача розв'язується тільки для алгебраїчних ліній (поверхонь) першого та другого порядків, тобто ліній (поверхонь), заданих рівняннями: $ax+by+c=0$, $ax^2+by^2+cxy+dx+ey+f=0$ (для ліній на площині) та $ax+by+cz+d=0$, $ax^2+by^2+cz^2+dxy+exz+fyz+gx+hy+kz+l=0$ (для поверхонь). Відомості про те, що в аналітичній геометрії будуть вивчатися лише криві та поверхні 1-го і 2-го порядку позитивно впливає на ставлення студентів до вивчення аналітичної геометрії.

Зазначимо, що для розв'язання першої типової задачі аналітичної геометрії достатньо широко використовується апарат векторної алгебри (векторний метод), тому цей розділ алгебри і входить першим змістовим модулем до курсу аналітичної геометрії.

З'ясуємо, які саме поняття та твердження з векторної алгебри необхідні в курсі аналітичної геометрії: поняття вектора як напрямленого відрізка, поняття орта вектора, поняття лінійної незалежності векторів, поняття базису необхідні для з'ясування поняття координат вектора; поняття колінеарності векторів, умова ортогональності векторів (через скалярний добуток) використовуються для складання рівнянь прямої; поняття векторного добутку необхідне для знаходження напрямного вектора прямої у просторі, яка задана перетином двох площин, та обчислення площі паралелограма та трикутника; умову компланарності векторів використовують для складання рівнянь площини, з'ясування мимобіжності двох прямих у просторі, обчислення об'єму паралелепіпеда та піраміди; поняття скалярного добутку використовують для знаходження кута між прямими на площині, між площиною та прямою й між площинами.

Не можна обійтися в аналітичній геометрії і без розгляду вектора в системі координат. Наприклад, вивівши векторне рівняння прямої $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}, t \in R$ (варто зауважити, що воно має однаковий вигляд як для прямої на площині, так і для прямої в просторі) і врахувавши координати векторів у вибраній системі координат, приходимо до параметричного рівняння прямої: $x = x_0 + lt, y = y_0 + mt$ (на площині); $x = x_0 + lt, y = y_0 + mt, z = z_0 + nt$ (в просторі).

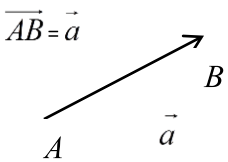
Проведене дослідження, власний досвід, спілкування з вчителями математики та учнями показують, що як у учнів, так і в студентів спостерігається формалізм у знаннях з векторної алгебри, низький рівень залишкових знань. На нашу думку, основні причини цього:

– хаотичне нагромадження у пам'яті учнів та студентів понять та тверджень векторної алгебри без встановлення взаємозв'язків між ними;
– різні форми подання вектора (як напрямленого відрізка і як упорядкованого набору чисел). Психологи стверджують (О. Скрипченко, Т. Лисянська та інші), що переважна більшість людей за різною формою намагається знайти і різний зміст.

Тому корисно запропонувати студентам після вивчення розділу «Елементи векторної алгебри» скласти порівняльну таблицю (табл. 2.3.1), в якій розглянути основні факти векторної алгебри з точки зору двох методичних підходів до вивчення поняття вектора.

Таблиця 2.3.1

Порівняльна таблиця

<table>
<tr><td>Геометричний об'єкт</td><td>Алгебраїчний об'єкт</td></tr>
<tr><td colspan="2">Поняття вектора</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$\overrightarrow{AB} = \vec{a} = (x; y; z)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Додавання векторів</td></tr>
</table>

Така робота не тільки систематизує предметні знання студентів, але й сприятиме пропедевтиці методологічних знань конкретно наукового рівня. Не варто також забувати, що мова йде про підготовку майбутніх учителів математики. Ми підтримуємо думку В. Бевз, Г. Михаліна, що навчати студента треба так, щоб він не тільки опановував відповідний теоретичний матеріал, але й навчався навчати своїх майбутніх учнів ([7], [173]).

На нашу думку, для збереження цілісної картини подання матеріалу аналітичної геометрії окремі властивості скалярного, векторного, мішаного добутків векторів, а також їх застосування доцільно винести на самостійне опрацювання студентами.

Виокремимо фундаментальні поняття, фундаментальні факти та фундаментальні відношення аналітичної геометрії.

Фундаментальні поняття: вектор, колінеарні вектори, компланарні вектори, система координат, радіус-вектор точки, базис, координати вектора, орт-вектор, скалярний, векторний і мішаний добутки, декартова прямокутна система координат на прямій, площині та в просторі, полярна та косокутна системи координат, циліндричні та сферичні координати в просторі, лінія, рівняння лінії, алгебраїчна лінія першого порядку, алгебраїчна лінія другого порядку, пряма, коло, еліпс, гіпербола, парабола, поверхня, рівняння поверхні, алгебраїчна поверхня першого порядку, алгебраїчна поверхня другого порядку, площина, циліндричні поверхні, поверхні обертання, конічні поверхні, сфера, еліпсоїд, однопорожнинний і двопорожнинний гіперболоїд, еліптичний, гіперболічний параболоїд, лінійчаті поверхні, рух, паралельне перенесення, симетрія, поворот, гомотетія, перетворення подібності, інверсія, кут між прямими, площинами, між прямою і площиною.

Фундаментальні факти: правило трикутника, правило паралелограма додавання векторів, геометричний зміст множення вектора на число, теорема про розклад вектора за базисом, зв'язок лінійної незалежності векторів з колінеарністю та компланарністю, види систем координат у просторі та на площині і зв'язок між ними, умова ортогональності векторів, скалярний добуток через координати векторів, умова колінерності векторів, векторний добуток через координати векторів, умова компланарності векторів, мішаний добуток через координати векторів, різні види рівнянь прямої на площині та в просторі, різні види рівнянь площини, канонічні та загальні рівняння кола, еліпса, гіперболи, параболи, канонічні та загальні рівняння сфери, еліпсоїда, одно- та двопорожнинного гіперболоїда, еліптичного параболоїда, гіперболічного параболоїда, конуса, формули для обчислення кутів між прямими, площинами, між прямою і площиною, умова паралельності і перпендикулярності прямих, площин, прямих і площин, відстань та відхилення точки від прямої на площині та просторі.

Фундаментальні відношення: 1) належності (точки – лінії чи поверхні, трьох точок – одній прямій, лінії – поверхні), паралельність, перпендикулярність (векторів, прямих, площин), колінеарність (вектрів та точок), компланарність, лінійна залежність (незалежність), подібність, рівність, композиція.

2) а) Під час вивчення теми «Пряма на площині», майбутній учитель математики повинен розуміти і знати, що з векторного рівняння прямої $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{s}, t \in R$ можна отримати параметричне рівняння $x = x_0 + lt, y = y_0 + mt$, з

нього – канонічне $\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}$, з канонічного – загальне рівняння прямої $ax+by+c=0$ і рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом $y=kx+b$. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки M_1 і M_2, можна отримати з канонічного, врахувавши, що $\vec{s}=\overrightarrow{M_1M_2}$, а з нього вже отримати рівняння прямої у відрізках на осях. Якщо ж за вихідне рівняння взяти загальне рівняння прямої, то послідовність виведення решти видів рівнянь буде іншою.

б) Як відомо, існує кілька підходів до означення еліпса, параболи чи гіперболи (детально про це у [дис. Умань]). Майбутній учитель математики повинен усвідомлювати, що *означивши*, наприклад, гіперболу як криву другого порядку, кожна точка якої задовольняє рівняння $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ і не задовольняє це рівняння жодна точка, яка не належить цій кривій, властивість гіперболи «Множина всіх точок площини, модуль різниці відстаней яких від двох даних точок цієї площини є величина стала, утворює гіперболу» треба *довести*. І навпаки, якщо останнє твердження розглянути як означення гіперболи, то виходячи з цього означення треба вивести канонічне рівняння гіперболи.

в) У курсі аналітичної геометрії ґрунтовно вивчаються криві другого порядку, зокрема, гіпербола та парабола: даються означення цих кривих, виводяться канонічні рівняння, для гіперболи записуються рівняння асимптот тощо. У математичному аналізі та шкільному курсі математики також вивчаються гіпербола та парабола, але вводяться ці криві як графіки відповідних функцій. Майбутній учитель математики повинен знати, що за допомогою перетворення системи координат з канонічного рівняння гіперболи $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ можна отримати «шкільну» гіперболу $y=\frac{1}{x}$ і вміти це зробити. У курсі аналітичної геометрії виводяться 4 канонічні рівняння параболи: $y^2=2px, y^2=-2px, x^2=2py, x^2=-2py.$ Студентам доцільно з'ясувати: чи всі чотири рівняння задають криву, яка є графіком певної функції; який зв'язок між наведеними рівняннями параболи та «шкільною» параболою тощо.

Крім того, майбутній учитель математики повинен розрізняти і розуміти спільне і відмінне між циліндричною та конічними поверхнями в аналітичній геометрії та «шкільними» циліндром та конусом.

Наведемо приклади з*в'язків навчальної дисципліни «Аналітична геометрія» з іншими дисциплінами математичного циклу.*

Про глибокі зв'язки, які пов'язують курс лінійної алгебри з курсом *аналітичної геометрії*, йшлося раніше (див. підпункт 2.2.1 Лінійна алгебра).

Крім того, для вивчення аналітичної геометрії необхідні знання:

1) *Шкільного курсу математики*: операції над числами, поняття вектора (хоч у курсі аналітичної геометрії це поняття означається, вивчаються властивості,

але зробити це легше, якщо першокурсник має уявлення про поняття, і під час вивчення навчальної дисципліни відбувається *розширення і поглиблення* його знань), рівняння прямої, кола тощо.

2) *Елементарної математики*: складання та розв'язування рівнянь, формули скороченого множення, пропорції тощо.

3) *Лінійної алгебри*: визначники, матриці, квадратичні форми, групи (підгрупи).

4) *Математичний аналіз*: поняття асимптоти.

Знання, отримані студентами у курсі аналітичної геометрії, будуть використані під час вивчення таких навчальних дисциплін:

1) *Математичний аналіз* (для складання рівняння дотичної прямої і дотичної площини, рівняння нормалі; під час вивчення інтегрального числення – для обчислення площі області, об'єму тіла часто треба вміти зробити рисунок, а для цього треба знати рівняння прямої, рівняння площини, канонічні рівняння кривих та поверхонь другого порядку).

2) *Диференціальна геометрія* (для складання рівняння дотичної прямої і дотичної площини, рівняння нормалі тощо).

3) *Проективна геометрія* (узагальнюється теорія кривих другого порядку, розглядаються асимптоти і асимптотичні напрямки).

4) *Елементарна математика* (векторна алгебра; теорія прямих і площин; теорія кривих (коло) та поверхонь другого порядку; геометричні перетворення, конструктивна геометрія).

5) *Методика навчання математики* (методика навчання тем «Геометричні перетворення», «Декартові координати і вектори на площині», «Декартові координати і вектори в просторі». Детально зв'язок навчальної дисципліни «Аналітична геометрія» з шкільним курсом математики розглянуто у роботах ([168], [169]).

Методи, поняття аналітичної геометрії знаходять своє застосування і в інших галузях нуки, техніки. Наприклад:

1)*Економіка*. У теорії просторової економіки («регіональній науці») економічний простір розглядають як ідеально рівну поверхню з рівномірно розташованими об’єктами народного господарства та населеними пунктами. За допомогою теорії просторової економіки можна розв’язувати нескладні завдання локалізації об’єкта методами аналітичної геометрії (використовується метод координат, рівняння прямої та кривих другого порядку).

2)*Фізика*. Широко застосовується векторна алгебра (вектори служать для зображення векторних величин (сили, швидкості, прискорення тощо), за допомогою скалярного добутку можна обчислити роботу, за допомогою векторного – момент сили. Знаходять своє відображення у фізиці (навіть шкільному курсі фізики) і криві другого порядку: траєкторією руху снаряда чи ракети, випущених під гострим кутом до горизонту, є парабола; графіком закону Бойля-Маріотта є гіпербола.

3)*Біологія*. Розглядаються параболоподібні криві як графічне зображення динамічних змін функції організму упродовж світлового дня.

Детальніше про криві та поверхні у природі і техніці можна прочитати у [152].

Історія розвитку аналітичної геометрії. Детально з історією розвитку аналітичної геометрії можна ознайомитися за роботами ([7], [31], [152]) Термін «аналітична геометрія» ввів французький математик С. Лакруа у 1807 році (четверте видання книги «Курс математики»). Перша книга під назвою «Аналітична геометрія» – підручник Г. Гарньє (Париж, 1808 р.). Основні етапи виникнення і розвитку аналітичної геометрії наведено у таблиці 2.3.2.

Таблиця 2.3.2

Етапи розвитку аналітичної геометрії

Вчені, школи	Ідеї	Століття, роки
	Передісторія сучасної аналітичної геометрії	
Єгипетські папіруси Райнда	Описово подаються основні геометричні поняття, основна увага приділена обчисленню площ, поверхонь та об’ємів.	1800-1600 рр. до н.е.
Гіппократ Хіоський, Евдокс Кнідський, Фалес Мілетський, Евклід, Архімед, Аполлоній та інші	Геометрія набуває абстрактного характеру: виникають доведення, робляться перші спроби систематизації геометричних понять.	З VI ст. до н. е.
Евклід, «Початки» (13 книг)	Геометрія викладена в логічній послідовності, чітко сформульовані основні положення – аксіоми та основні просторові уявлення: точка, пряма лінія, площина, геометричне тіло. Подаються означення, аксіоми, постулати, пропозиції.	300 р. до н. е.

Продовження таблиці 2.3.2

Менехм	Відкрито криві другого порядку.	IV ст. до н.е
Аполлоній Пергський, «Конічні перерізи»	Детальне дослідження кривих і поверхонь другого порядку.	262 - 190 до н. е.
Період виникнення і становлення		
П. Ферма, Р. Декарт.	Відкриття методу координат та зародження на його основі аналітичної геометрії.	1637 р
А. Клеро, «Дослідження про криві подвійної кривини»	Передумови для системної побудови аналітичної геометрії.	1731р.
Л. Ейлер, другий том книги «Вступ до аналізу нескінченно малих»	Перший виклад аналітичної геометрії на площині й у просторі у формі, близькій до сучасної.	1748 р.

Застосування методу координат у фізиці французьким математиком Ж. Лагранжем (1736 – 1813) призвело до створення векторного числення, частина якого (векторна алгебра) стала частиною аналітичної геометрії як навчальної дисципліни.

2.3.2. Диференціальна геометрія і топологія

Навчальна дисципліна «Диференціальна геометрія і топологія» віднесена до циклу математичної, природничо-наукової підготовки ОПП підготовки бакалавра напряму підготовки 6.040201 Математика* (2009 р.) і на її вивчення відведено 4,5 кредитів ECTS.

За ОПП підготовки бакалавра напряму підготовки 6.040201 Математика* (2002 р.) передбачено розгляд таких змістових модулів:

- Метричні та топологічні простори.
- Відображення топологічних просторів.
- Топологічні многовиди.
- Лінії в евклідовому просторі.
- Поверхні в евклідовому просторі.

Аналіз робочих програм, підручників та посібників з вказаної навчальної дисципліни показує, що переважна більшість авторів реалізують таке розгортання навчального змісту: теорія кривих; теорія поверхонь; елементи топології.

Класична диференціальна геометрія, як і аналітична, має своїм ***предметом*** вивчення геометричні об'єкти, переважно криві і поверхні та їх сімейства. Але відрізняється від аналітичної геометрії методом вивчення цих об'єктів. ***Основним методом*** вивчення диференціальної геометрії є методи математичного аналізу: граничний перехід, методи диференціального та інтегрального числення.

Назвемо характерні особливості диференціальної геометрії (те, що відрізняє її від решти геометричних дисциплін):

1) Якщо аналітична геометрія вивчає алгебраїчні криві та поверхні порядку не вище другого, то диференціальна геометрія вивчає будь-які *гладкі* криві та поверхні.

2) Ще однією характерною особливістю диференціальної геометрії є те, що вона вивчає перш за все

властивості кривих і поверхонь «в малому», тобто, властивості як завгодно малих частин кривих і поверхонь.

Якщо ж говорити про топологію – наймолодшу з геометричних наук, то основною ідеєю цієї галузі математики є ідея про неперервність на максимально абстрактному рівні. Тому поняття неперервності вважається найфундаментальнішим поняттям топології.

Зауважимо, що питання про неперервність, зокрема, неперервність функції, розглядалося у курсі математичного аналізу. Але пов'язане воно було з поняттям близькості між точками, тобто, малої відстані, а остання залежала від метрики, введеної у певному просторі. Топологія ж дозволяє вийти на вищий рівень абстракції.

Предметом вивчення топології є властивості геометричних фігур та їх взаємного розташування, що зберігаються під час гомеоморфізму.

Характерною особливістю топології є надзвичайна широта класу геометричних об'єктів, що потрапляють до сфери дії її законів. Топологія досліджує властивості топологічних просторів як в малому (локальні), так і в цілому (глобальні).

Топологія відноситься до геометричних наук, оскільки предметом вивчення є геометричні об'єкти, але основні задачі топології розв'язуються методами, докорінно відмінними від методів геометрії. У метричній геометрії основну роль відіграє відстань, для топології важливими є не метричні співвідношення, а ті властивості фігур, які не змінюються під час гомеоморфних відображеннях, тобто, топологічні властивості.

Варто зауважити, що ідея неперервності має фундаментальне значення для пізнання, оскільки ця ідея є істотною властивістю простору і часу.

Із методів, які використовуються під час навчання дисципліни «Диференціальна геометрія і топологія», доцільно назвати такі:

1) метод граничного переходу (наприклад, поняття границі і неперервності вектор-функції, означення похідної вектор-функції);

2) метод аналогій (границя, неперервність, похідна, інтеграл Рімана вводяться для вектор-функції аналогічно до відповідних понять скалярної функції);

3) аксіоматичний метод (означення топологічного простору, метричного простору);

4) методи розв'язування рівнянь і систем рівнянь (знаходження порядку дотику кривих, особливих точок кривої тощо).

На змісті розглядуваної навчальної дисципліни є можливість формування методологічних знань *філософського рівня*, зокрема понять:

1) існування, єдиність (теорема про існування і єдиність регулярної кривої за заданими кривиною і скрутом, існування і єдиність геодезичної лінії у кожній точці регулярної поверхні, однозначність визначення кривої натуральними рівняннями за умови, що зафіксовано початкове положення репера Френе, можливість поповнення метричного простору та його єдиність тощо);

2) дискретність, неперервність (множини та простори дискретні і неперервні, дискретна топологія).

Виокремимо *фундаментальні поняття* диференціальної геометрії: вектор-функція, крива, поверхня, дотична пряма та площина, нормальна пряма та площина, кривина, скрут, натуральне рівняння кривої, еволюта та евольвента плоскої кривої; перша та друга квадратичні форми поверхонь; геодезична кривина кривої на поверхні, поверхні постійної гауссової кривини; супроводжуючий тригранник Френе просторової кривої (прямі: бінормаль, головна нормаль, дотична; площини: стична, нормальна, спрямлювана); головні кривини, повна і середня кривини поверхонь; класифікація точок на поверхні (еліптична, гіперболічна, омбілічна, параболічна, точка сплющення), індикатриса Дюпена.

Фундаментальні факти диференціальної геометрії: формули Френе; задання дотичних прямих, нормалі; формули для знаходження кривини плоскої та просторової кривої, обвідної сім’ї плоских кривих, скрута просторової кривої, довжини дуги кривої, обчислення першої та другої квадратичних форм поверхонь, кутів між кривими на поверхні, площ фігур, утворених кривими на поверхні, асимптотичних ліній на поверхні, основні рівняння теорії поверхонь (дериваційні формули, формули Гауса – Петерсена – Кодацці).

До *фундаментальних понять* топології будемо відносити: метричний, топологічний, хаусдорфовий, зв’язний, компактний простори, окіл, множина (замкнена, відкрита, зв’язна, компактна), неперервність, обернене відображення, гомеоморфізм, індукована топологія, фактортопологія, покриття, сітка, многовид, топологічна розмірність та ейлерова характеристика многовиду, правильний многогранник.

Фундаментальні факти топології: властивості відкритих і замкнених множин в метричному просторі, властивості внутрішності, замикання та межі множини; аксіоми зліченності та віддільності; теореми про структуру топологічного підпростору, про структуру межі та внутрішності множини топологічного простору; властивості хаусдорфових просторів; критерії метризованості топологічного простору, неперервності відображень топологічних просторів «в цілому»; властивості та ознаки неперервних відображень; властивості: гомеоморфізмів, компонент зв'язності, компактних топологічних просторів; теореми про: топологічну класифікацію одновимірних многовидів, про топологічну класифікацію двовимірних многовидів, про класифікацію топологічно правильних многогранників; формула Ейлера.

Фундаментальні відношення: 1) Однозначне і взаємно неперервне (топологічне) відображення, ізометрія, гомеоморфізм. 2) Поняття вектор-функції є узагальненням поняття скалярної функції. Будь-який метричний простір є топологічним простором. У той же час афінний та проективний простори не є метричними, але є топологічними просторами. Афінний простір A_k, евклідів простір E_k і проективний простір P_k є k-вимірними многовидами.

Встановимо основні зв'язки навчальної дисципліни «Диференціальна геометрія і топологія» з іншими математичними дисциплінами.

На нашу думку, диференціальна геометрія найтісніше пов'язана з математичним аналізом (через спільний метод пізнання) та аналітичною геометрією (через спільний предмет дослідження та через векторне числення, оскільки в диференціальній геометрії вивчаються лінії та поверхні, задані, як правило, векторно або параметрично). Крім того, варто наголосити на таких міжпредметних зв'язках навчальної дисципліни «Диференціальна геометрія і топологія»:

- *математичний аналіз*: функція, границя, неперервність (для вектор-функції), похідна (кривина, скрут, нормаль, дотична пряма і площина), інтеграл Рімана (довжина дуги), подвійний інтеграл (площа поверхні), елементи теорії множин (властивості відкритих і замкнених множин);

- *аналітична геометрія*: широко використовується векторна алгебра (векторне рівняння кривої і поверхні, модуль вектора, розклад вектора за векторами базису, колінеарність векторів, скалярний, векторний та мішаний добутки векторів та їх властивості), метод координат (ПДСК), ГМТ, теорія ліній першого та другого порядків;

- *лінійна алгебра*: теорія визначників (наприклад, рівняння дотичної площини, рівняння головних напрямів поверхні, знаходження векторного і мішаного добутку векторів), теорія матриць (матриця Якобі), розв'язування систем рівнянь, квадратичні форми першого та другого порядків (кут між кривими на поверхні, нормальна кривина);

- *диференціальні рівняння*: диференціальні рівняння геодезичних ліній, диференціальні рівняння асимптотичних ліній;

- *елементарна математика, методика навчання математики*: многогранники, прості многогранники, правильні многогранники, їх кількість та характеристика. Саме під час вивчення елементів топології обґрунтовується, чому існує тільки п'ять топологічно правильних многогранники.

Диференціальна геометрія і топологія знайшла широке застосування у багатьох галузях науки і техніки, зокрема:

1) диференціальна геометрія є математичним апаратом загальної теорії відносності;

2) диференціальна геометрія зародилася з проблем картографії і геодезії, а тому і зараз знаходить своє широке застосування в цих галузях: у складанні географічних карт; відшуканні найкоротшого шляху між двома точками поверхні Землі; у розрахунках, пов'язаних з прокладанням шляхів на земній поверхні, з рухом морських суден;

3) важливе значення має диференціальна геометрія в геометричному моделюванні форм літаків, космічних ракет, морських кораблів, котлів, куполів, дахів тощо. Тут важливу роль відіграють кривини вздовж головних напрямів поверхні, положення тригранника Френе в точках кривої;

4) властивості окремих кривих та поверхонь знайшли застосування у повсякденному житті та техніці. Так,

наприклад, форму кардіоїди має діаграма напрямленості мікрофона однобічного напрямлення, у мікроскопах для вивчення об'єктів, які менше 0,2 мкм, використовують спеціальні кардіоїд- або параболоїд-конденсори; про застосування логарифмічної спіралі та спіралі Архімеда детально описано у роботі [152]. Для розвитку геодезії, варіаційного числення важливою була задача про брахістохрону. З'ясувалося, що такою кривою є циклоїда.

5) теорія геодезичних ліній і геодезичних відображень має прикладний характер, оскільки рух багатьох типів механічних систем, а також тіл або частинок в гравітаційних і електромагнітних полях в суцільному середовищі часто відбувається по траєкторіях, які можна розглядати як геодезичні лінії деяких просторів трьох і більше вимірів, обумовлених енергетичними режимами, за яких протікають певні процеси.

6) надзвичайно широке і різноманітне застосування має топологія. Так, у молекулярній біології розглядається топологія мембранних органел (топологія хлоропласта, топологія мітохондрій, топологія перенесення білка через мембрану, топологія «скрученої спіралі») [1]. Не викликає сумнівів важливість топологічних методів для різних розділів фізики: теорії поля, загальної теорії відносності, фізики анізотропних суцільних середовищ і низьких температур, сучасної квантової теорії. Так, у біофізиці полімерів, яка вивчає гігантські молекули білків і нуклеїнових кислот, довгу замкнену молекулу розглядають як лінію, а такі лінії утворюють вузли. Важливе питання, яка кількість молекул із загальної кількості молекул заданої довжини має певну вузлову конфігурацію,

розв’язується через перерахування типів топологічно різних вузлів.

Розглядається топологія літер (має своє практичне застосування в трафаретній типографії), топологія різноманітних мереж (комп'ютерних, соціальних, біологічних), яка характеризує фізичну організацію вузлів, тощо.

Коротко розглянемо найважливіші факти з *історії розвитку диференціальної геометрії та топології*. Детальні відомості можна знайти, наприклад, у роботі В. Бевз [7].

Топологія. Вперше ідея вивчення топологічних властивостей фігур зустрічається у роботах Г. Лейбніца (у 1679 році), він же і запропонував попередню назву топології – аналіз положення.

Початкові дослідження з топології належать Леонарду Ейлеру. Він запропонував під час вивчення окремих питань геометрії відмовитися від розгляду метричних властивостей геометричних фігур (довжина, площа тощо). У 1750 Л. Ейлер отримав відому формулу, яка пов’язує кількість вершин В, ребер Р і граней Г опуклого многогранника: В – Р + Г =2. Однією із перших задач топології вважається задача Семи мостів Кенігсберга (автор – Леонард Ейлер).

У 1895 році Анрі Пункаре опублікував цикл статей, які узагальнили дослідження Л. Ейлера, К. Гауса, Б. Рімана, І. Лістінга, А. Мебіуса, М. Жордана та інших і стали фундаментом для розвитку топології.

Другим важливим джерелом розвитку топології (перше – геометрія) є проблеми аналізу, зокрема, проблеми строгого обґрунтування понять границя, неперервність, компактність (цими проблемами займалися Б. Больцано, О. Коші, К. Вейєштрасс, Г. Кантор та інші). Термін «топологія» вперше з'явився у 1847 році (у статті І. Лістінга).

Серед математиків, які працювали над проблемами топології, слід ще відзначити французьких математиків М. Фреше, М. Рісса, німецького математика Ф. Хаусдорфа, польського математика К. Куратовського, радянських математиків П. Урисона, П. Александрова, Л. Люстерника, Л. Шнірельмана та інших.

Диференціальна геометрія. Диференціальна геометрія виникла і розвивалася у тісному зв'язку з математичним аналізом. Її виникнення припадає на першу половину XVIII століття і пов'язане з розв'язанням практичних задач математичної картографії – вчення про властивості різних видів картографічної проекції.

Теорію просторових кривих розробив А. Клеро в праці «Дослідження про криві подвійної кривини» (1713 рік). Згодом теорія А. Клеро набула розвитку в працях Л. Ейлера, Г. Монжа, О. Коші та інших.

Класична основа сучасної загальної теорії поверхонь почала створюватись пізніше. Перші фундаментальні результати в цій області викладені в роботах Л. Ейлера «Дослідження про кривину поверхонь» (1760 рік) та Г. Монжа «Додаток аналізу до геометрії» (1795 р.).

Основи теорії поверхонь в її сучасному вигляді заклав К. Гаус у роботі «Загальне дослідження про криві поверхні», яку опублікував у 1827 році. З того часу диференціальна геометрія перестала бути частиною аналізу і стала самостійною математичною дисципліною.

Вирішальну роль у розвитку всієї геометрії, у тому числі і диференціальної, зіграли такі факти:

1) відкриття неевклідової геометрії (М. Лобачевський, 1829-1830 роки);

2) побудова геометрії Рімана (Б. Ріман, 1854 р.);

3) побудова теорії просторів проективної і афінної зв'язності (Е. Картан, 1924 рік).

Загальновідомо (див., наприклад, [7]), що відкриття неевклідових геометрій має у першу чергу філософське значення: думка про єдиність геометрії, яка панувала серед математиків до М. Лобачевського, виявилася хибною. Побудова еліптичної та гіперболічної геометрій підтвердили думку про те, що істинність математичних знань залежить від умов, в яких ці знання розглядаються.

У першій половині XIX ст. відбулося розширення класичного змісту диференціальної геометрії. А. Карно, Ж. Фур'є, А. Ампер, С. Пуассон та інші привели цю науку до сучасного стану.

2.3.3. Проективна геометрія та методи зображень

Предмет вивчення навчальної дисципліни «Проективна геометрія та методи зображень» – проективні властивості фігур, тобто ті властивості, які пов'язані з взаємною належністю точок і прямих. Саме ці властивості є інваріантними відносно всіх центральних проектувань.

Основний метод – метод центрального проектування. Його, в свою чергу, можна розглядати як композицію проектування і перерізу.

Крім того, в розглядуваній навчальній дисципліні широко використовуються такі характерні саме для цієї дисципліни методи (відносяться до методологічних знань *конкретно наукового рівня*):

1) метод аксонометрії (спосіб зображення просторових фігур на площині за допомогою паралельного проектування. Різновид перспективи);

2) метод основної площини (різновид методу аксонометрії);

3) методи побудови перспективи предмета: радіальний; метод прямокутних координат; метод архітекторів;

4) метод слідів;

5) метод внутрішнього проектування (метод допоміжних перерізів);

6) комбінований метод.

Застосовуються під час вивчення навчальної дисципліни і методи, що відносяться до методологічних знань *загальнонаукового рівня*:

1) аксіоматичний (існує кілька систем аксіом для задання проективного простору як сукупності точок, прямих і площин, зв'язаних відношеннями належності та порядку);

2) метод моделювання (моделлю точки на проективній площині є евклідова пряма, моделлю проективної прямої – розширена евклідова пряма, тобто евклідова пряма

доповнена невласною або нескінченно віддаленою точкою, або пучок евклідових прямих тощо);

3) метод аналогій (за аналітичного підходу до вивчення проективної геометрії використовується метод координат – за аналогією з аналітичною геометрією. Загалом, під час вивчення навчальної дисципліни «Проективна геометрія та методи зображень» доцільно використовувати аналогію з відповідними поняттями евклідової геометрії. У той же час варто наголошувати на обережному використанні цього методу. Так, в проективній геометрії паралельні прямі перетинаються, а в евклідовій – ні, проективна пряма є замкнена тощо;

4) алгоритмічний метод (у роботі [81] наведені алгоритми розв'язування найпростіших та основних задач на побудову, алгоритми розв'язування задач з недосяжними елементами тощо);

5) метод координат (за аналітичного підходу до вивчення проективної геометрії);

На сьогодні існують два підходи до вивчення проективної геометрії: аналітичний та синтетичний. Перший підхід передбачає задання проективної системи координат, виведення рівнянь геометричних образів у цій системі координат, а проективні властивості цих образів доводяться шляхом дослідження їх рівнянь. За другого підходу перевага надається побудові геометричних образів, причому встановлюються алгоритми або правила-орієнтири такої побудови.

Фундаментальні поняття: фігура, відображення фігури у (на) фігуру, взаємно однозначне перетворення, перетворення фігури, подвійна (незмінна) точка, інваріантна властивість, рух, проектуюча пряма, площина проекції, тотожне перетворення, інволютивне перетворення (інволюція), група перетворень, метрична, афінна та проективна геометрія, невласна точка і пряма, проективний простір, тривершинник, тристоронник, конфігурація, повний чотиривершинник, діагональна точка, гармонічна четвірка точок і прямих, складне (ангармонічне) відношення чотирьох точок прямої (чотирьох прямих пучка), просте відношення трьох точок прямої (трьох прямих пучка), повний чотиристоронник, перспективно відповідні (перспективні) прямолінійний ряд точок і пучок прямих, два прямолінійні ряди, два пучки прямих, проективна відповідність, впорядкована відповідність, крива другого порядку, зовнішня та внутрішня точки відносно кривої, шестивершинник, пучок (прямих) другого порядку, точка дотику, шестисторонник, полярна точка, колінеація, вісь гомології, центр гомології, корелятивне перетворення, неоднорідні та однорідні проективні координати, базисні точки проективної системи, афінна гомотетія, вимірність, наочність, обернене зображення, умовне зображення, точка стояння, предметний простір, дистанційне коло, центр перспективи, точка сходу, предметний слід, повне та неповне зображення фігури.

Фундаментальні твердження: інваріанти геометричного перетворення; властивості паралельного проектування; необхідна і достатня умова для інволюції; властивості проективних прямих та площини; аксіоми належності (інцидентності), порядку, конгруентності, неперервності, паралельності; теореми про властивості належності елементів проективного простору; великий принцип двоїстості; малий принцип двоїстості; пряма теорема Дезарга; обернена теорема Дезарга; основна властивість конфігурації Дезарга; властивості гармонічної четвірки точок; властивості гармонічної четвірки прямих; властивості складного відношення чотирьох точок прямої; теорема про складне (ангармонічне) відношення чотирьох прямих пучка; властивості повного чотиривершинника; способи побудови четвертої гармонічної точки; умови, що визначають проективну відповідність форм першого ступеня; теореми Штаудта; види інволюції; друга теорема Дезарга; теорема Штейнера (основна теорема про ряди другого порядку); теореми Паскаля та Бріаншона; властивості поляри; умови, які визначають колінеацію; властивості колінеації плоских полів зі спільним носієм; властивості кореляції; теорема Штуффа; теореми теорії зображення плоских фігур, теорема Польке-Шварца; правила зображення круглих фігур, вписаних та описаних фігур; методи побудови перерізів.

Фундаментальні відношення: 1) належності, порядку, «передувати», композиція, колінеарність точок, складне відношення чотирьох точок прямої (чотирьох прямих пучка), неперервність. 2) Для майбутнього вчителя математики важливо розуміти, що проективна геометрія включає в себе афінну і евклідову геометрію, а за деякої спеціалізації й неевклідові геометрії Лобачевського та Рімана. Афінна геометрія, в свою чергу, включає в себе евклідову геометрію (рис. 2.3.1). А. Келі навіть підкреслював, що «метрична геометрія є, таким чином, частиною проективної геометрії і проективна геометрія представляє собою всю геометрію»[94, с. 245-246].

Встановимо *основні зв'язки* навчальної дисципліни «Проективна геометрія та методи зображень» з дисциплінами математичного циклу:

1) *Аналітична геометрія*. Теорія кривих другого порядку, метод координат, геометричні перетворення, конструктивна геометрія (геометрія циркуля та лінійки), поділ відрізка у заданому відношенні (складне відношення точок прямої).

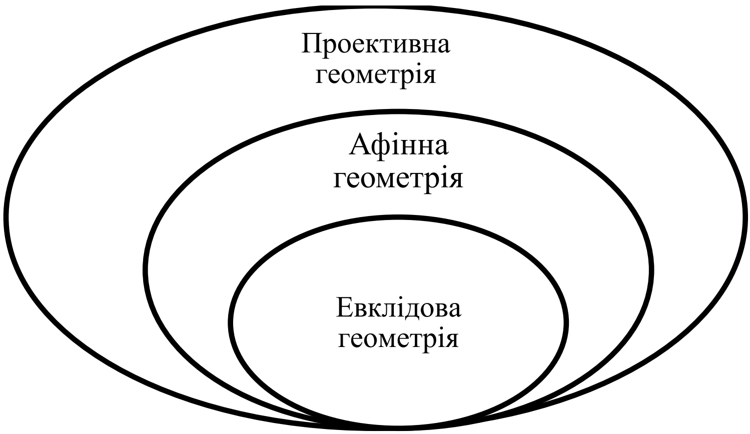


Рис. 2.3.1. Співвідношення між різними геометріями

2) *Лінійна алгебра*. Теорія матриць і визначників (якщо розглядувану навчальну дисципліну вивчати аналітично).

3) *Елементарна математика*, *Методика навчання математики*. Зображення фігур і геометричні побудови в

просторі і на площині, побудова перерізів, паралельне та центральне проектування.

4) *Алгебра і теорія чисел*. Теорія груп.

Застосовується проективна геометрія і в *інших галузях науки і техніки.* Математична теорія геометричних перетворень, особливо афінних та проективних, лежить в основі правил побудови та використання зображень просторових фігур на площині: картини художників, креслення будинків, машин та їх деталей тощо.

Крім того, як показав Ф. Клейн [96], багато типів геометрій можуть бути отримані на основі проективної геометрії, історично першої, відмінної від евклідової геометричної системи. А тому опосередковано проективна геометрія знаходить застосування у спеціальній теорії відносності (геометрія Міньковського). Варто вказати ще одну новітню геометрію, яку фізики намагаються зараз застосувати для розв'язання проблеми з'єднання теорії гравітації і квантової теорії поля. Вона узагальнює проективну геометрію і називається торичною геометрією.

Історія розвитку. Детально історія розвитку проективної геометрії, методів зображень наведена у роботах ([7], [206]). Виникнення проективної геометрії тісно пов'язано з виникненням і розвитком перспективи. Наведемо основні історичні факти, які, на нашу думку, повинен засвоїти майбутній учитель математики під час вивчення навчальної дисципліни «Проективна геометрія та методи зображень» (табл. 2.3.3).

Таблиця 2.3.3

Основні етапи розвитку проективної геометрії

Вчені, школи	Ідеї	Століття, роки
Леонардо да Вінчі, «Трактат про живопис»	Систематичний виклад перспективи.	1-е видання 1651 р.
Ж. Дезарг, «Початковий нарис спроби розібратися в тому, що відбувається при зустрічі конуса з площиною»	Перший систематичний виклад ідей проективної геометрії на основі вивчення конічних перерізів як перспективних образів кола.	1639 р.
Б. Паскаль	Теорема про перетин протилежних сторін шестикутника.	1639 р.
Ж. Понселе, «Трактат про проективні властивості фігур»	Початок формування проективної геометрії як самостійної науки.	1822 р.
А. Келі	Метрична геометрія є частиною проективної геометрії.	Середина XIX ст.
Ф. Клейн	Як евклідові, так і неевклідові геометрії є окремим випадком проективної геометрії.	1871

2.3.4. Основи геометрії

Навчальна дисципліна «Основи геометрії» має історико-методологічний характер, оскільки під час вивчення цієї дисципліни відбувається розширення досвіду пізнання студентів через опанування ними різних наукових концепцій, теорій, логічних систем в їх історичному розвитку шляхом порівняння фактів евклідової та неевклідових геометрій.

Предметом вивчення навчальної дисципліни «Основи геометрії» є обґрунтування геометрії: перелік основних понять та аксіом, достатніх для строго логічного означення всіх інших понять геометрії і доведень усіх тверджень про ці поняття [23, с. 15]. Іншими словами, предметом вивчення даної навчальної дисципліни є аксіоматичний (дедуктивний) метод обґрунтування наукових геометричних систем, зокрема, різні аксіоматичні обґрунтування евклідової геометрії (параболічної геометрії), неевклідових геометрій М. Лобачевського (гіперболічна геометрія), Б. Рімана (еліптична геометрія).

Основний ***метод*** навчальної дисипліни «Основи геометрії» – аксіоматичний, причому цей метод у своєму історичному розвитку виступає і предметом вивчення.

Крім аксіоматичного методу, під час вивчення навчальної дисципліни застосовуються методи, віднесені до *загальнонаукового рівня* методологічних знань:

1)Метод моделювання. Цей метод застосовується, наприклад, для доведення несуперечливості геометрії Лобачевського (розглядаються моделі Е. Бельтрамі, Ф. Клейна, А. Пуанкаре), несуперечливості двовимірної геометрії Рімана (модель в евклідовому просторі – сфера), для доведення незалежності аксіоми від інших аксіом системи.

2)Метод порівняння. Під час вивчення курсу «Основи геометрії» порівнюються факти евклідової та неевклідових геометрій, тільки неевклідових геометрій.

Із методологічних понять *філософського рівня* маємо:

1. Існування та єдиність. Аксіоми першої групи – аксіоми інцидентності (аксіоматика Гільберта) тільки постулюють *існування* прямої (площини), яка задовольняє аксіоми. *Єдиність* такої прямої (площини) формулюється і доводиться у відповідних теоремах. Існування та єдиність паралельної прямої до заданої.
2. Неперервність – група аксіом неперервності.
3. Скінченність, нескінченність (теорема про те, що будь-який відрізок містить нескінченну множину точок).

Розглянемо *фундаментальні поняття дисципліни:* аксіома, постулат, теорема, поняття, означення, доведення, відношення, математична структура роду Т, база структури роду Т; інтерпретація або модель системи аксіом; несуперечливість, незалежність, повнота та категоричність системи аксіом; абсолютна геометрія, змістовний, напівформальний та формальний аксіоматичний метод; точка, пряма, площина, вектор, сферична, гіперболічна та еліптична геометрії, евклідова геометрія, неевклідові геометрії, дефект трикутника; чотирикутник Саккері; паралельні та розбіжні прямі на гіперболічній площині; кут паралельності, стрілка кута паралельності, функція Лобачевського; коло, еквідістанта, орицикл в площині Лобачевського; сферичні двокутники, трикутники, многокутники; рівні сферичні трикутники; спряжені трикутники; поняття руху та рівності на сфері;

поняття роздільності двох пар точок рівновеликість і рівноскладеність многокутників, рівновеликість і рівноскладеність многогранників, поняття величини, додатні адитивно-скалярні величини, поняття відношення еквівалентності, поняття про вимірювання величин, поняття площі, чисельної площі.

Фундаментальні твердження: п’ятий постулат Евкліда; еквівалентні твердження до п’ятого постулату Евкліда; проблема п’ятого постулату Евкліда, теорема Гьоделя про неповноту системи аксіом; постулати Евкліда, система аксіом Гільберта і Вейля, система аксіом М. Лобачевського; моделі Келі, Пуанкаре площини Лобачевського, система аксіом Рімана, теореми Саккері-Лежандра; ознаки рівності трикутників на евклідовій площині, в геометрії Лобачевського, сферичній геометрії; теореми про серединні перпендикуляри сторін трикутника в геометрії Лобачевського; властивості прямих в геометрії Лобачевського, сферичній геометрії, геометрії Рімана; несуперечливість геометрії Лобачевського, Рімана; основні формули сферичної тригонометрії; принцип двоїстості; леми та теореми рівносильності та рівновеликості фігур, властивості величини: нормованість, інваріантність, адитивність, мультиплікативність, теорема єдиності довжини відрізка, теореми про знаходження площі прямокутника, трикутника, об’єму прямокутного паралелепіпеда.

Фундаментальні відношення: 1) лежати між (для точок), належати (для точок і прямих, точок і площин, прямих і площин), конгруентність (геометрична рівність); додавання векторів, множення вектора на число, скалярний добуток двох векторів, відкладання вектора від точки; бути рівновеликими і бути рівноскладеними (для многокутників і многогранників); відношення порядку, паралельності, розбіжності, еквівалентності.

2) Відношення між різними геометріями. Відрізняються трактуванням V постулату Евкліда, який у формулюванні Гільберта звучить так: Нехай *а* — довільна пряма, *А* — точка, яка не лежить на цій прямій. Тоді в площині, яка визначається точкою *А* і прямою *а,* існує *не більше* однієї прямої, яка проходить через *А* і не перетинає *а*.

Тоді: а) відношення між геометріями Евкліда і Лобачевського (рис. 2.3.2): спільна їхня частина – абсолютна геометрія (ґрунтується на аксіомах I-IV груп аксіоматики Гільберта), відмінність – в геометрії Евкліда через точку, не інцидентну прямій, в площині, що ними визначається, проходить одна і тільки одна пряма, яка не перетинає даної прямої, в геометрії Лобачевського така пряма не єдина. Таким чином, в геометрії Лобачевського *заперечується* V постулат Евкліда.

б) відношення між геометріями Евкліда і Рімана (рис. 2.3.3): в геометрії Рімана *не заперечується* V постулат Евкліда, а вираз «не більше однієї» трактується як «жодної». В геометрії Рімана паралельних прямих не існує, отримати цю геометрію з абсолютної геометрії без зміни аксіом не можна. Спільними для обох геометрій залишаються лише аксіоми належності (з абсолютної геометрії), доповнені аксіомою Рімана. Із-за відсутності відношення паралельності в геометрії Рімана маємо, що еліптична пряма є замкнена і має скінченну довжину π, еліптична площина замкнена і її площа дорівнює 2π та багато інших, відмінних від геометрії Евкліда, фактів.

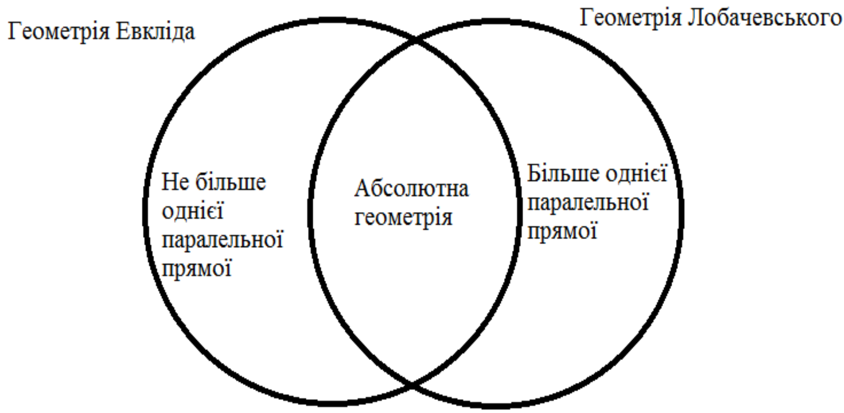


Рис. 2.3.2. Зв'язок геометрії Евкліда і геометрії Лобачевського

Рис. 2.3.3. Зв'язок геометрії Евкліда і геометрії Рімана

Зв'язок з дисциплінами математичного циклу. Навчальна дисципліна «Основи геометрії» узагальнює вивчення елементарної і вищої геометрії майбутніми вчителями математики і має безпосереднє відношення до питань обґрунтування математики, зокрема, геометрії, в тому числі і елементарної. Назвемо основні зв’язки з математичними дисциплінами.

1. *Аналітична геометрія.* Розглядаються об’єкти евклідової геометрії, векторна алгебра (аксіоматика Вейля).

2. *Проективна геометрія і методи зображень*. Проективна геометрія – неевклідова геометрія, використовуються поняття роздільності точок, принципу двоїстості.

3. *Диференціальна геометрія*. Криві та поверхні сталої кривини (дається класифікація геометрії Евкліда, Лобачевського та Рімана через кривину; використовуються в геометрії М. Лобачевського).

4. *Лінійна алгебра*. Поняття ізоморфізму, задання вектора як матриці чисел, поняття групи, структури роду Т.

5. *Математичний аналіз*. Множина, відношення еквівалентності, відображення, послідовності. М. Лобачевський застосовував теорію до обчислення визначених інтегралів, інтерпретуючи їх як вирази для довжини, площі або об'єму фігур в своїй геометрії [88].

6. *Комплексний аналіз.* За допомогою геометрії Лобачевського побудована теорія автоморфних функцій.

7. *Елементарна математика, зокрема, елементарна геометрія*. Для вивчення курсу «Основи геометрії»

необхідні системні знання шкільного курсу геометрії. У той же час будується теорія вимірювання геометричних величин, визначається вплив на структуру шкільного курсу геометрії різних аксіоматик геометрії Евкліда.

8. *Історія математики*. Історичний огляд розвитку основ геометрії, у тому числі етапи розвитку аксіоматичного методу, причини виникнення неевклідових геометрій, біографії видатних математиків, які є творцями геометрії.

Зв'язок з іншими галузями науки.

1. *Кінематика спеціальної теорії відносності*. Із закону поширення світла $x^2+y^2+z^2=c^2t^2$ діленням на t^2 отримуємо закон для швидкості світла $v_x^2+v_y^2+v_z^2=c^2$. Останнє рівняння можна розглядати як рівняння сфери в просторі швидкостей. Перетворення Лоренца є лінійними і зберігають цю сферу, а тому прямі простору швидкостей переводить в прямі. Отже, в просторі швидкостей усередині сфери радіусу *c*, тобто для швидкостей, менших швидкості світла, має місце геометрія Лобачевського.

2. Поняття геометрії Рімана зіграли важливу роль у створенні А. Ейнштейном загальної теорії відносності, подальший її розвиток був пов'язаний зі створенням апарату тензорного числення.

З *історичних фактів*, які стосуються навчальної дисципліни «Основи геометрії», варто навести три основних періоди, які пройшов у своєму розвитку аксіоматичний метод:

1) період змістовної аксіоматизації (від часів Евкліда і до середини XIX століття це була єдина форма аксіоматизації теорій);

2) період напівформальної аксіоматизації (з другої половини XIX століття);

3) період формальної аксіоматизації (з початку XX століття).

Кожен наступний період не заперечує попередній, а навпаки, кожна наступна форма аксіоматизації узагальнює і розвиває попередню. На сьогодні у різних розділах математики використовуються всі три форми аксіоматизації. Так, наприклад, теорія числових систем, теорія ймовірностей – напівформальні аксіоматичні теорії; числення висловлень, числення предикатів – формальні аксіоматичні теорії; яскравим прикладом змістовної аксіоматизації є аксіоматична побудова геометрії Евкліда.

Назвемо основні характеристики кожної з форм аксіоматизації наукових теорій.

Змістовна аксіоматизація теорій. Шляхом означень чи описових характеристик спочатку формується область основних об'єктів. Система аксіом описує основні властивості, відношення та зв'язки об'єктів цієї області. Логічні засоби, які використовуються для доведень тверджень, не описуються в жодній формі.

Напівформальна аксіоматизація теорій. Прямих означень чи описових характеристик основні поняття не мають, опосередковано вони означаються через систему аксіом. В останніх фіксуються властивості, відношення та зв'язки основних об'єктів теорії. Логічні засоби, які використовуються для доведення тверджень, не описуються в жодній формі (див., наприклад, напівформальну аксіоматичну теорію натуральних чисел у Розділі 3).

Формальна аксіоматизація теорій. Формалізація будь-якої теорії передбачає перетворення її на об'єкт вивчення. Для цього описується мова даної теорії: вказується алфавіт теорії – множина всіх її вихідних символів; серед слів (скінченних послідовностей символів) виокремлюють формули; з класу формул виокремлюють аксіоми; вказуються точно правила виводу – правила переходу від одних формул даної теорії до інших формул цієї ж теорії (див., наприклад, числення висловлень).

Крім того, майбутній учитель математики повинен знати, що більшість геометрій можна отримати, розглядаючи підгрупи груп проективних перетворень. Цю підгрупу можна виокремити заданням деякої геометричної фігури – абсолюта.

Так, для побудови афінної геометрії абсолютом є будь-яка пряма проективної площини, для побудови евклідової геометрії абсолют – це дві уявні точки $A_1(1;i;0), A_2(1;-i;0)$, для побудови геометрії Міньковського – $B_1(1;-1;0), B_2(1;1;0)$, гіперболічна геометрії Лобачевського і еліптична геометрія Рімана будуються за абсолютами, які є кривими другого порядку. Всі названі геометрії побудовані на аксіоматичній основі.

Відрізняється від розглянутих геометрій аналітична геометрія, оскільки вона побудована і послуговується іншим методом – методом координат.

2.4. Методологічні знання з теорії ймовірностей та математичної статистики

Проаналізуємо, як визначається предмет теорії ймовірностей у науковій літературі. Так, В. Гмурман визначає предметом теорії ймовірностей вивчення ймовірнісних залежностей масових однорідних випадкових подій [51, с. 15]. М. Жалдак вважає, що предметом теорії ймовірностей є математичний аналіз випадкових явищ [77, с. 7]. З. Шефтель підкреслює, що теорія ймовірностей – це галузь математики, що вивчає математичні моделі випадкових явищ [256, с. 20]. Б. Гнеденко розглядає теорію ймовірностей як математичну науку, яка вивчає закономірності випадкових явищ [52, с. 11].

«Теорія ймовірностей та математична статистика» як навчальна дисципліна у педагогічному ВНЗ об'єднує в собі два розділи математики – теорію ймовірностей, математичну статистику – і відображає у своєму змісті основні факти цих розділів. ***Предметом*** вивчення теорії ймовірностей як складової частини вище названої навчальної дисципліни математичні моделі (ймовірнісні моделі) масових випадкових явищ.

До *методів*, які застосовані в теорії ймовірностей, відносяться:

1) Методи обчислення ймовірності події (за класичною схемою, статистичний метод, геометричний метод).

2) Методи комбінаторики (найчастіше у зв'язку з обчисленням ймовірності події за класичною схемою).

3) Експеримент (саме такий, який можна повторювати за незмінних умов довільну кількість разів. Часто такий експеримент є мисленевий).

4) Метод граничного переходу (для знаходження ймовірності події за статистичним методом, у граничних теоремах теорії ймовірностей (теорема Пуассона, теореми Муавра – Лапласа), теореми про закон великих чисел, центральна гранична теорема тощо).

5) Методи диференціального та інтегрального числень (у розділі про випадкові величини та їх характеристики).

6) Методи математичного моделювання.

За допомогою останніх методів створюються конкретні ймовірнісні моделі конкретних стохастичних явищ.

7) Аксіоматичний метод (сучасна теорія ймовірностей ґрунтується на аксіоматиці А. Колмогорова, на основі якої створюються абстрактні ймовірнісні моделі).

8) Метод аналогій (А. Колмогоров вказує на аналогії між мірою множини і ймовірністю події, між інтегралом від функції і математичним сподіванням випадкової величини, між властивостями незалежних випадкових величин і відповідними властивостями ортогональних функцій, між алгеброю множин і алгеброю випадкових подій, оскільки події інтерпретуються як підмножини множини елементарних подій, але поняття теорії множин мають у теорії ймовірностей свою інтерпретацію (див., наприклад, [49, с 9-10]).

9) Метод індукції (для поширення операцій суми і добутку більше ніж на дві події).

Методи математичної статистики можна умовно поділити якби на три групи:

I. Методи формування вибірки: метод простого ймовірного вибору, метод систематичного (механічного) вибору, методи гніздової, серійної та стратифікованої вибірок, метод багатоступеневого опрацювання даних генеральної сукупності тощо.

II. Методи описової статистики застосовуються для систематизації та опису даних з метою визначення центру (математичне сподівання, середнє значення, медіана та мода), ширини, симетрії й протяжності розподілу. Основні з них – методи зведення та групувань, табличний та графічний методи.

III. Методи статистичних висновків: методи вивчення варіації, диференціації та сталості, тенденцій розвитку, прогнозування, вивчення взаємозв'язків, факторний аналіз, який включає в себе кореляційно-регресивний аналіз, метод головних компонент, метод максимальної правдоподібності тощо.

У переважній більшості підручників розглядають різні «означення» ймовірності події. Але кожне з них насправді є не означенням, а скоріше методом її обчислення. Але перш ніж щось обчислювати, майбутній учитель математики повинен знати, що саме він обчислює. А для цього необхідно знати: що таке випадковий експеримент та сукупність (простір) його можливих результатів, що таке випадкова подія (реально та математично) та її ймовірність тощо.

Крім того, необхідно знати не тільки самі методи обчислення ймовірності, вміти ними користуватися, але й розуміти межі застосовності кожного з них. Обчислити ймовірність за класичним методом можна лише тоді, коли:

1) простір елементарних подій $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$ є скінченною множиною; 2) кожна елементарна подія $\omega_i \in \Omega$ утворює випадкову подію $A_i = \{\omega_i\}, i = \overline{1, n}$; 3) події $A_i = \{\omega_i\}$ можна вважати рівноможливими, тобто немає об'єктивних причин вважати одну з елементарних подій ймовірнішою порівняно з іншими. Тоді $p(A) = \frac{m}{n}$, де m – кількість сприятливих для події A результатів випробування, n – кількість всіх рівноможливих і попарно несумісних результатів випробування.

Якщо названі вище умови не виконуються, але є змога багаторазового повторення досліду, то використовують статичний метод обчислення ймовірності: за цим методом знаходять відносну частоту, яку за великої кількості повторень приймають за ймовірність: $p(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{m(n)}{n}$. Статистичний метод є застосовним до ширшого класу явищ, ніж класичний метод.

Обидва методи застосовуються за умови, що простір елементарних подій – дискретна множина. Якщо множина неперервна, то застосовують геометричний метод, за яким $p(A) = \frac{mes\ g}{mes\ G}$ (при цьому є підстави вважати, що ймовірність попадання в якусь частину області G пропорційна мірі цієї області і не залежить від її розташування і форми).

За А. Колмогоровим [106], основним поняттям теорії ймовірностей є простір елементарних подій. Поняття випадкової події та її ймовірності розкриваються їх основними властивостями, що утворюють систему аксіом А. Колмогорова. Решта властивостей ймовірностей і залежності між ними формулюються у вигляді теорем і доводяться.

На матеріалі навчальної дисципліни «Теорія ймовірностей і математична статистика» доцільно формувати методологічні знання *філософського рівня*, зокрема, такі філософські категорії:

1) Необхідність і випадковість. Саме теорія ймовірностей дозволяє кількісно оцінити об’єктивні зв’язки між цими категоріями.

2) Дискретність і неперервність (випадкові величини дискретні і неперервні).

Розглянемо *фундаментальні поняття теорії ймовірностей:* реальна випадкова подія та її математична модель, елементарна подія або результат проведення випадкового експерименту, простір елементарних подій, подія випадкова, неможлива, вірогідна, події залежні (незалежні), сумісні (несумісні), сума і добуток подій, подія, протилежна до даної події, ймовірність, умовна ймовірність, функція Лапласа, випадкова величина – дискретна і неперервна, закон розподілу випадкової величини (дискретної і неперервної), функція розподілу, щільність розподілу, математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, початкові і центральні моменти випадкової величини, медіана, мода, випадковий вектор, закон розподілу випадкового вектора, кореляційний момент, коефіцієнт кореляції, лінійна регресія.

Фундаментальні факти теорії ймовірностей: властивості операцій над подіями, властивості ймовірності, теорема додавання для довільних подій, теорема множення, формула повної ймовірності, формули Байєса, біномний розподіл і біномна формула, нерівність для визначення найімовірнішої кількості успіхів у схемі Бернуллі, теорема Пуассона, теореми Муавра – Лапласа, властивості функції Лапласа, властивості функцій розподілу, властивості математичного сподівання та дисперсії, нормальний розподіл, закон Пуассона, «правило трьох сигм», нерівність Чебишова, теорема Чебишова, теорема Маркова, теорема Бореля, центральна гранична теорема.

Теорія ймовірностей є теоретичною основою математичної статистики. Предмет вивчення цієї математичної галузі змінювався з розвитком самої математичної статистики. Як зазначає М. Жалдак, спочатку мова йшла тільки про управління, потім – збирання даних про державу, а пізніше взагалі збирання й аналіз даних [77, с. 222]. На сьогодні ***предметом*** вивчення математичної статистики є побудова за даними експериментальних досліджень ймовірнісно-статистичних моделей досліджуваних явищ і їх перевірка.

Фундаментальні поняття математичної статистики: генеральна і вибіркова сукупності, варіанта, варіаційний ряд, відносна частота, статистичний і інтервальний статичний ряди розподілу, полігон, гістограма, середнє арифметичне, середнє гармонічне, середнє геометричне, середнє квадратичне спостережених даних, мода, медіана, розмах вибірки, середнє абсолютне відхилення, коефіцієнт варіації, статистична функція розподілу ймовірностей, статистична оцінка параметра: незміщена, консистентна, ефективна, надійні інтервали, критерій узгодження, рівень значущості, критична область.

Фундаментальні факти математичної статистики: Формули для обчислення середнього арифметичного, середнього гармонічного, середнього геометричного, середнього квадратичного спостережених даних, моди, медіани, розмаху вибірки, середнього абсолютного відхилення, коефіцієнта варіації; середнього вибіркового, виправленої дисперсії; методи побудови надійних інтервалів для математичного сподівання і дисперсії; критерій Пірсона, критерій Колмогорова, метод Монте-Карло.

Фундаментальні відношення. 1) відношення часткового порядку; відношення між подіями $(A \subset B,\ A = B)$, операції над подіями (як і операції над множинами) також відношення: операції додавання і множення – тернарні відношення, знаходження протилежної події – бінарне відношення; 2) поняття випадкової величини є узагальненням поняття випадкової події, а поняття випадкової функції є узагальненням поняття випадкової величини, оскільки значення випадкової функції для кожного конкретного значення її аргументу є випадковою величиною. Теорема Бернуллі є наслідком теореми Чебишова (теореми про закон великих чисел), а теорема Чебишова – наслідок теореми Маркова. За своєю суттю метод найменших квадратів є окремим випадком методу максимуму правдоподібності.

У роботах В. Бевз [7], Б. Гнеденка [54], М. Жалдака [77], А. Колмогорова [106], Л. Майстрова [156] представлені основні етапи розвитку теорії ймовірностей. Коротко наведемо їх у вигляді таблиці 2.4.1.

Таблиця 2.4.1

Основні етапи розвитку теорії ймовірностей

Вчені, школи	Ідеї	Джерела становлення та розвитку
Передісторія теорії ймовірностей (до кінця XVI ст.)		
Парменід, Демокріт, Платон, Аристотель, Лука Пачіолі, Дж. Кардано, Н. Тарталья.	Рівноможливі результати,принцип – «не більше так, ніж інакше», ймовірнісне знання, ймовірнісні міркування.	Розв'язування елементарних задач, філософія, азартні ігри.
Виникнення теорії ймовірностей як науки (з XVII ст. до поч. XVIII ст.)		
Б. Паскаль, П. Ферма, Х. Гюйгенс, Г. Лейбніц, Д. Граунт, В. Петті, Е. Галлей	Кількісна оцінка можливості настання випадкової події, уявлення про частоту події, математичне сподівання, про теореми додавання і множення, формули комбінаторики.	Демографія, страхова справа, оцінка помилок спостереження.
Період формування основ теорії ймовірностей (з 1713 р. до сер. XIX ст.)		
Я. Бернуллі, Д. Бернуллі, А. Муавр, П. Лаплас, Ж. Лагранж, Ж. Бюффон, К. Гаус, Т. Байєс, А. Лежандр, С. Пуассон, М. Остроградський.	Класичне і статистичне означення ймовірності, геометричні ймовірності, теореми додавання і множення ймовірностей, закон великих чисел, математичне сподівання, формула Бернуллі, теорема Байєса, випадкова величина.	Демографія, страхова справа, оцінка помилок спостереження, природознавство тощо.

Продовження таблиці 2.4.1

Сучасний етап розвитку теорії ймовірностей (друга пол. XIX ст. – наші дні)		
П. Чебишов,	Граничні теореми, теорія	Контроль якості
А. Марков, О. Ляпунов, В. Буняковський.	випадкових процесів, узагальнення закону великих чисел, метод моментів.	продукції, природознавство тощо
С. Бернштей, А. Колмого-ров, О. Хінчин, Р. Фішер, Д. Нейман, Й. Гіхман, В. Королюк, А. Скороход, А. Турбін, М. Ядренко.	Аксіоматична побудова теорії ймовірностей, частотна інтерпретація ймовірності, стаціонарні випадкові процеси тощо.	Внутрішні потреби самої математики, статистична фізика, теорія інформації, теорія випадкових процесів, астрономія, біологія, генетика тощо.

Зв'язок з дисциплінами математичного спрямування. Для успішного вивчення теорії ймовірностей і математичної статистики необхідні предметні і методологічні знання з:

1. *Математичного аналізу*. Основні положення теорії множин, поняття функції, її властивості (неперервність, одностороння неперервність, монотонність), теорема про проміжне значення функції, границя функції, методи диференціального й інтегрального числення, зокрема і для функції багатьох змінних, числові ряди.

2. *Лінійної алгебри*. Теорія матриць, розв'язування систем, квадратичні форми (наприклад, для застосування методу найменших квадратів).

3. *Дискретної математики.* Комбінаторика. Варто зауважити, що комбінаторику іноді вважають підрозділом

теорії ймовірності, настільки часто основні поняття та методи цієї математичної галузі використовуються для обчислення ймовірності події.

4. *Елементарної математики.* Дії над числами, формули для обчислення площ фігур і об'ємів тіл.

5. *Математичної логіки і теорії алгоритмів.* Поняття алгоритма. Алгоритм обчислення ймовірності події (за класичним методом), алгоритм застосування критерію Пірсона, алгоритм Дж. Неймана (метод середини квадратів).

Знання, отримані під час вивчення теорії ймовірностей та математичної статистики, необхідні для вивчення:

1. *Методики навчання математики*. Ймовірнісно-стохастична змістова лінія у шкільному курсі математики.

2. *Методи обчислень*. Метод Монте-Карло.

Висновок про застосування теорії ймовірностей та математичної статистики в інших розділах науки, техніки та господарства можна зробити з таблиці 2.4.1, де показано, як змінювалися межі застосування цих розділів математики з їх розвитком.

Моделі на основі або із застосуванням теорії ймовірностей розроблені для вирішення завдань практично у всіх галузях науки і техніки. До таких моделей можна, наприклад, віднести моделі теорії масового обслуговування. Ця теорія виникла в зв'язку з потребами практики, зокрема широким розвитком телефонних мереж. На сьогодні моделі масового обслуговування успішно застосовуються для розв'язання проблем надійності, аналізу функціонування складних систем: системи зв'язку, системи постачання, транспорт, організація виробництва, медичне обслуговування тощо.

Серед абстрактних моделей теорії ймовірностей та математичної статистики варто назвати моделі статистичної теорії розпізнавання образів, моделі стохастичного математичного програмування, статистичні моделі в багатокритеріальних задачах прийняття рішення тощо.

Все ширше застосування теорія ймовірностей знаходить в моделях економіки, біології, соціології. Так, математична теорія смертності (яка бере свій початок ще з робіт Галілея) може бути використана для вивчення розпаду атомів. А остання теорія використовується в інших галузях науки: Ф. Ліббі використав поняття напіврозпаду в області археологічної хронології (за що отримав Нобелівську премію 1960 року), М. Свадеш – для визначення дати поділу споріднених мов (метод лексикостатистики).

На сьогодні методи математичної статистики використовуються практично у всіх природничих науках. Варто зауважити, що регресійний аналіз виник у зв'язку з дослідженнями Ф. Гальтона і К. Пірсона у галузі генетики, знайшов своє подальше застосування у біології, економіці і призвів до виникнення нової галузі – економетрики.

Практично в усіх областях знань використовується статистична обробка результатів експериментів.

Наведемо ще приклади застосування теорії ймовірностей та математичної статистики у фізиці та астрономії.

1. До середини XIX ст. поняття розподілу випадкової величини у фізиці було переважно пов'язано з розподілом похибок вимірювання. Зі створенням у другій половині XIX ст. статистичної механіки, яка описувала стан розряджених систем, що містять велику кількість частинок (порядку числа Авогадро) випадково розподіленими виявилися різні фізичні величини – швидкість, енергія, довжина вільного пробігу та інші.

2. У квантовій механіці стан системи характеризується хвильовою функцією – комплекснозначною функцією «координат». Квадрат модуля цієї функції інтерпретується як щільність імовірності отримання заданих значень «координат». Відповідно до сучасних уявлень імовірнісне визначення стану є повним і причина імовірнісного характеру квантової фізики пов'язана з природою самих процесів. У квантовій фізиці взаємоперетворення різних частинок підпорядковуються імовірнісним закономірностям. За сучасними уявленнями принципово неможливо передбачити ні момент взаємоперетворення, ні конкретний результат. Можна лише говорити про ймовірності тих чи інших процесів перетворення. Замість точних класичних величин у квантовій фізиці можлива тільки оцінка середніх значень (математичних сподівань) цих величин, наприклад, середній час життя частинки.

3. Білий шум – постійний шум, спектральні складові якого рівномірно розподілені по всьому діапазону частот. Термін «білий шум» зазвичай застосовується до сигналу, що має автокореляційну функцію, і математично описується дельта-функцією Дірака. Сигнали, які мають неперервний розподіл (наприклад, нормальний розподіл),

також можуть бути білим шумом. Прикладом білого шуму є шум водоспаду. Білий шум широко використовується в фізиці й техніці, зокрема в архітектурній акустиці – для того, щоб сховати небажані шуми у внутрішніх просторах будинків, генерується постійний білий шум низької амплітуди.

4. За допомогою методів теорії ймовірностей Дж. Максвелл у 1859 році вивів закон розподілу молекул за швидкостями.

5. Варто назвати ще такі розділи сучасної фізики (їх назви свідчать про зв'язок із статистикою): статистична фізика, квантова статистична фізика, статистична механіка тощо.

6. Дослідження матерії у просторі, вивчення потоків космічних частинок потребує систематичного використання статистичних уявлень і різноманітного математичного апарату теорії ймовірностей.

7. На основі теорії ймовірностей К. Гаус дослідив і обґрунтував метод найменших квадратів (1795 р.). Цей метод він застосував для опрацювання астрономічних даних з метою уточнення орбіти малої планети Церера.

2.5. Методологічні знання з дискретної математики

Дискретна математика або дискретний аналіз – область математики, яка займається дослідженнями структур і відношень на *скінченних* множинах.

До змісту навчальної дисципліни «Дискретна математика» (у педагогічному ВНЗ) включено (за ОПП бакалавра) два змістові модулі:

1. Елементи комбінаторики.
2. Основи теорії графів.

А тому можемо зробити висновок, що «Дискретна математика» як навчальна дисципліна має ***предметом*** вивчення скінченні множини, окремі операції і відношення на них (включає комбінаторику) та графи (включає основи теорії графів).

Назвемо основні ***методи*** навчальної дисципліни «Дискретна математика»:

І. Методи комбінаторного аналізу

1. Метод рекурентних співвідношень (МРС) – у комбінаториці цей метод дає можливість знаходити розв’язок комбінаторної задачі для *n* елементів через розв’язок аналогічної задачі з меншою кількістю елементів.

2. Метод включень і виключень – дозволяє знайти кількість елементів у скінченному об’єднанні скінченних множин.

3. Метод породжуючих (продуктивних) функцій – узагальнює методи комбінаторного аналізу. Тісно пов’язаний з поняттям ряду.

4. Методи, в основі яких лежить правило суми, правило добутку, формули для обчислення кількості перестановок, розміщень, комбінацій.

5. Метод перебору (найуживаніший у шкільній практиці).

6. Метод траєкторій (геометрична інтерпретація для біномних коефіцієнтів C_n^k).

ІІ. Методи теорії графів

1. Метод знаходження найкоротших шляхів за алгоритмом Дейкстри.
2. Методи розв'язування задачі комівояжера: метод Беллемора, Немхаузена, Хелдома і Карна, метод гілок і меж, метод послідовного поліпшення розв'язання та інші.
3. Методи розв'язання задачі мережного планування (управління проектом): СРМ (метод критичного шляху) і PERT (метод оцінювання й огляду програми).[Ніколаєва]

Серед методів, які відносяться до знань *загальнонаукового рівня*, варто назвати:

- метод індукції (для доведення узагальненого правила добутку, доведення критерію того, що зв'язний граф є ейлеровим, доведення формули Ейлера та інші);
- алгоритмічний метод (алгоритми пошуку у глибину та ширину, алгоритм розпізнавання двочастинності графа, алгоритм Дейкстри);
- метод формалізації (запис прикладної задачі мовою графа), математичного моделювання (модель – граф);
- метод аналогій (операціям об'єднання, перетину та доповнення графів відповідають *аналогічні* операції для відношень).

До *фундаментальних понять* елементів комбінаторики відносимо: комбінаторна задача, упорядкована множина, розміщення, комбінації, перестановки (з повторенням і без), рекурентне співвідношення, породжуюча функція.

Фундаментальні факти елементів комбінаторики: правило суми і добутку, формули для обчислення кількості розміщень, комбінацій, перестановок, формула включень та виключень, трикутник Паскаля, біном Ньютона.

Фундаментальні поняття теорії графів: граф, його порядок, вершина і ребро, суміжні і несуміжні вершини та ребра графа, інцидентні вершина і ребро, степінь вершини, петля, вершина ізольована і висяча (кінцева), граф повний, регулярний, повністю незв'язний (пустий), плоский, платонові, ейлерові і гамільтонові графи, двочастинні, орієнтовані графи, підграф, маршрут (шлях), цикл, ациклічний граф (ліс), відстань між вершинами графа, діаметр графа, матриця суміжностей і матриця досяжності графа, правильне розфарбування і хроматичне число графа, мережевий граф.

Фундаментальні факти теорії графів: лема про рукостискання, властивості операцій над графами, необхідна і достатня умова зв'язності графа, теорема про існування регулярного графа певного порядку і степеня, властивості двочастинних, зв'язних, ейлерових графів, теорема Дірака, формула Ейлера, теореми про хроматичні числа графа, гіпотеза чотирьох фарб, правила побудови мережевих графіків.

Фундаментальні відношення навчальної дисципліни «Дискретна математика»: 1) відношення порядку, відношення суміжності вершин (ребер), відношення інцидентності, ізоморфізм графів, маршрут, який з'єднує вершини. Операції над графами можна розглядати як відношення, задані на певних множинах. Так, операція вилучення ребра з графа – це відношення, задане на множині ребер графа. Сам граф – це також відношення;

2) поняття перестановок з n елементів можна розглядати як частинний випадок поняття розміщень з n елементів по k за умови $n = k$, тобто поняття «розміщення» є видовим по відношенню до поняття «перестановка»; граф можна розглядати як одну з моделей алгебраїчної системи, а тому всю теорію графів можна трактувати як розділ сучасної алгебри; поняття «ациклічний зв'язний граф» (дерево) є родовим по відношенню до поняття «ациклічний граф» (ліс).

Історія розвитку. Варто зауважити, що перші завдання теорії графів були пов'язані з розв'язанням математичних розважальних задач і головоломок. Термін «граф» ввів німецький математик Дені Кеніг у 1936 році. Наведемо основні історичні віхи розвитку теорії графів (табл. 2.5.1).

Наведемо *основні зв'язки з навчальними д*исциплінами математичного циклу.

1) *Математичний аналіз*: елементи теорії множин, функція, через МРС – рекурентно задана числова послідовність (числа Фібоначчі), через метод продуктивних функцій – з степеневими рядами та їх властивостями.

2)*Елементарна математика*: метод включень і виключень використовується як правило для знаходження кількості елементів у об'єднанні двох або трьох скінченних множин: $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$,

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) -$$

$-n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$; сума нескінченної геометричної прогресії (для застосування методу породжуючих функцій); МРС застосовується для визначення сум арифметичної і геометричної прогресії, рекурентно задається формула n – ого члена арифметичної та геометричної прогресії; комбінаторні задачі.

Таблиця 2.5.1

Основні етапи розвитку теорії графів

Вчені, школи	Ідеї	Століття, роки
Л. Ейлер	Опублікував розв'язок задачі про кенігсберзькі мости, знайшов загальний критерій існування в графі спеціального маршруту (ейлерового циклу). До середини XIX ст. цей результат був єдиним результатом теорії графів.	1736 р.
Г. Кірхгоф	Запропонував для складання повної системи рівнянь для струмів і напруг в електричній схемі представляти таку схему за допомогою графа і знаходити в цьому графові основні дерева, за допомогою яких виокремлювати лінійно незалежні системи контурів.	1847 р.
А. Келі	Розглядаючи задачу підрахунку кількості ізомерів граничних вуглеводнів, прийшов до задачі перерахування і опису дерев.	1854 р.
Ф. Гатрі	Сформульована проблема чотирьох фарб.	1852 р.
	Перші результати, що відносяться до вивчення властивостей зв'язності, планарності, симетрії графів; призвели до виникнення нових напрямів в теорії графів.	Поч. ХХ ст.
	Розширення досліджень з теорії графів через: 1) розвиток кібернетики і обчислювальної техніки; 2) широке застосування теорії графів у різноманітних галузях науки і техніки.	Сер. ХХ ст.

3)*Теорія ймовірностей і математична статистика*: комбінаторика; теорія графів (наприклад, ланцюги Маркова).

4)*Топологія*. Якщо не враховувати метричні характеристики графів, то теорію графів можна розглядати як одну з гілок топології.

5)*Лінійна алгебра*. Теорія матриць (матриці суміжності, інцидентності, досяжності для графів).

Відмітимо, що високий рівень абстракції типових алгоритмів теорії графів дозволяє застосовувати ці алгоритми до розв'язування зовні несхожих задач з багатьох галузей науки, природи, техніки: психології, соціології, економіки, логіки, програмування, квантової механіки, хімії, медицини, транспорту, будівництва ([180], [184], [237], [263] та інші).

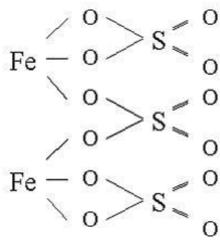
Так, у вигляді графів можна зображувати такі об'єкти [237]:

- електричні, транспортні, інформаційні, комп'ютерні мережі;
- карти різноманітних доріг та магістралей;
- моделі кристалів, молекул, ігор;
- плани діяльності, розклади;
- лабіринти;
- генеалогічні дерева;
- різноманітні математичні об'єкти: відношення на множині, решітки, автомати, алгоритми, програми, ланцюги Маркова тощо.

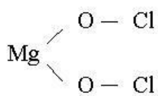
Наведемо приклади *зв'язків дискретної математики* з різними галузями знань.

1. *Квантова механіка* – діаграми Фейнмана. Це спосіб опису взаємодії в квантовій теорії поля (КТП) і використовується для аналізу аналітичних властивостей амплітуд розсіювання, для опису конденсованих тіл і ядерних реакцій.

2. *Хімія*. Використовується термін – хімічні графи. До хімічних графів відносяться молекулярні, дводольні та сигнальні графи кінетичних рівнянь реакцій. Молекулярні графи, що застосовуються в стереохімії і структурній топології, хімії кластерів, полімерів є неорієнтованими графами, що відображають будову молекул. Вершини і ребра цих графів відповідають відповідним атомам і хімічним зв'язкам між ними На рисунку 2.5.1 зображено сульфат заліза (III) $Fe_2(SO_4)_3$ (а), гіпохлорит магнію $Mg(OCl)_2$ (б).



а



б

Рис. 2.5.1. Хімічні графи

3. *Медицина* – нервові, судинні та інші мережі. Наприклад, нейронні мережі можна представити орієнтованими графами (рис. 2.5.2).

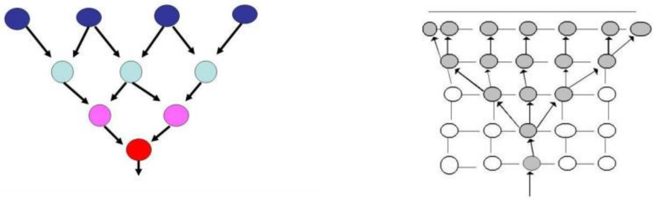


Рис. 2.5.2. Конвергенція та дивергенція нервових імпульсів в ЦНС

4. *Соціологія.* Окремі алгоритми теорії графів можна використовувати для обчислення соціометричних коефіцієнтів (індексів), але найрозвиненіший напрям використання теорії графів в соціології – аналіз структури міжособистісних відносин в малій соціальній групі.

5. *Економіка*. Перелік задач, для яких варто застосовувати теорію графів, наведено у [180]. Назвемо деякі з них: задачі розподілу ресурсів, задачі управління запасами, задачі мережного планування і управління, задачі масового обслуговування систем з чергами заявок, задача комівояжера тощо.

2.6. Методологічні знання з математичної логіки та теорії алгоритмів

Навчальна дисципліна «Математична логіка і теорія алгоритмів» складається з двох розділів: 1) математична логіка; 2) елементи теорії алгоритмів.

Для майбутнього вчителя математики курс математичної логіки сприяє:

1)розумінню математики як науки. Дійсно, математика відрізняється від інших дисциплін тим, що її факти вимагають доведень у вигляді деяких правильно побудованих умовиводів;

2)вихованню культури логічного мислення;

3)проникненню в суть процесу доведення теорем, встановлення зв'язків між етапами доведення, між тезою і аргументами доведення;

4)науковому обґрунтуванню шкільного курсу математики;

5)умінню стисло і точно описувати означення математичних понять, формулювання теорем, побудову їх доведень;

6)формуванню методологічних знань і вмінь. Саме під час вивчення цієї навчальної дисципліни доцільно ознайомити майбутніх учителів математики з окремими філософськими проблемами математики, зокрема, з концепціями обґрунтування математики (логіцизм, інтуїціонізм, формалізм, конструктивізм) – це методологічні знання філософського рівня.

З проведеного нами аналізу математичної, науково-методичної літератури слідує, що є різні підходи до з'ясування предмету математичної логіки. Так, М. Попов зазначає, що математична логіка – «це наука про математичне мислення і структуру математичних теорій» [203, с. 6]. Ю. Дрозд вважає, що «математична, або формальна, логіка – це наука, яка вивчає логічні питання математичними методами». А саму логіку автор розглядає як науку «про правила міркувань, у першу чергу – доведень та спростувань» [67, с. 1]. У математичній енциклопедії (т. 3) вказано, що «предмет сучасної математичної логіки різноманітний», і в першу чергу треба відмітити дослідження логічних та логіко-математичних числень, а серед них – класичне числення предикатів [167, с. 571].

О. Кужель зауважує, що «математична (символічна) логіка – це розділ формальної логіки, у якому вивчаються закономірності логічних обґрунтувань» [138, с. 94].

Ф. Лиман розрізняє предмет математичної логіки залежно від періоду її розвитку: у другій половині XIX ст. – другій половині XX ст. предметом дослідження математичної логіки стають «… цілі математичні теорії, такі як арифметика, елементарна геометрія, математичний аналіз та інші». На сьогодні основним предметом вивчення математичної логіки є «… різні числення та побудова і дослідження різних формалізованих математичних теорій» [151, с. 4-6].

На думку А. Конверського, предметом традиційної і сучасної (математичної) логіки залишається вивідне знання, а методом є формалізація. Автор підкреслює, що «…сучасна логіка досліджує функціонування мислення в мові науки, іншими словами аналізує принципи побудови наукових теорій, принципи трансформації наукових теорій, принципи обґрунтування наукових теорій» [107, с. 11 - 12].

Відомий математик і логік П. Порецький вважав: «Математична логіка є логіка за предметом і математика за методом» (цитата за [151, с. 4]).

Будемо вважати, що ***предметом*** математичної логіки як навчальної дисципліни є числення висловлень та предикатів, а основним ***методом*** – метод формалізації (зауважимо, що цей метод відноситься до методологічних знань загальнонаукового рівня).

Серед методів, які відносяться до методологічних знань загальнонаукового рівня і знайшли застосування у математичній логіці, варто назвати:

- аксіоматичний метод (причому числення висловлень і числення предикатів – формально аксіоматизовані теорії);
- метод аналогій (наприклад, логічні операції над предикатами аналогічні до логічних операцій над висловленнями);
- алгоритмічний метод (наприклад, алгоритм визначення типу будь-якої формули алгебри висловлень);
- метод моделювання (наприклад, для доведення незалежності аксіом числення висловлень достатньо побудувати моделі, в яких одна з аксіом приймає значення (0 чи 1), що відрізняється від значень інших аксіом (1 чи 0));
- метод індукції (математичної) (наприклад, для доведення твердження: Кількість всіх наборів значень аргументів булевої функції $f(x_1, ..., x_n)$ дорівнює 2^n, а кількість всіх булевих функцій від n змінних дорівнює 2^{2^n}).

Основна задача числення висловлень – з’ясування, чи є дана формула тавтологією чи суперечністю. Для розв’язання цієї задачі є кілька методів. Назвемо основні з них:

а) тривіальний метод – за допомогою таблиці істинності (цей метод досить простий, але громіздкий);

б) алгебраїчний метод (ґрунтується на застосуванні законів булевої алгебри);

в) метод Куайна (узагальнення тривіального методу);

г) метод редукції (дає можливість виконувати перевірку формул числення висловлювань шляхом зведення до абсурду).

До *фундаментальних понять* математичної логіки віднесемо: висловлення, алгебра висловлень, числення висловлень, логіка предикатів, булева функція (функція істинності), кон'юнкція, диз'юнкція, заперечення, імплікація, еквіваленція, атомарна формула (атом), складене висловлення, правильно побудовані формули (ппф), інтерпретація та модель для формули, тавтологія, суперечність, логічний наслідок, логічна еквівалентність, формальна аксіоматична теорія, алфавіт теорії, виведення, теорема, аксіома, теорія розв'язна (нерозв'язна), несуперечна, повна, система аксіом незалежна, несуперечлива, повна; квантор загальності, квантор існування, вільна (зв'язана) змінна, предикат, предикат тотожно істинний, хибний, виконуваний, спростовний, область визначення і область істинності предиката, терм, елементарна формула, зведена формула, математична теорія першого порядку, правило узагальнення або правило вводу квантора загальності.

Фундаментальні факти. Теорема про повноту системи зв'язок, аксіоматизації числення висловлень, найважливіші закони математичної логіки (подвійного заперечення, виключення третього, заперечення суперечності, тотожності, ідемпотентності, контрапозиції, силогізму, де Моргана), правило modus ponens (MP) і правило підстановки, умови задання формальної аксіоматичної теорії, теорема дедукції, теореми про повноту і несуперечність числення висловлень, теорема про множину істинності заперечення, кон'юнкції, диз'юнкції, імплікації, еквіваленції предикатів.

Фундаментальні відношення. 1) відношення рівносильності на множині формул, відношення рівносильності предикатів, логічне слідування, Крім того, всі логічні операції над висловленнями чи предикатами можна розглядати як унарні чи бінарні відношення, задані відповідно на алгебрі висловлень чи предикатів;

2) відношення між поняттями та фактами: поняття предиката є узагальненням поняття висловлення, а тому і числення предикатів є узагальненням числення висловлень; проблема вирішення для логіки предикатів є узагальненням відповідної проблеми для алгебри висловлень.

Розглянемо основні з*в'язки з навчальними дисциплінами.* У широкому розумінні, математична логіка пов'язана з усіма математичними дисциплінами, оскільки одне із завдань математичної логіки – дослідження математичних теорій. У вужчому розумінні – ідеї, символіка і мова математичної логіки використовуються практично у всіх математичних дисциплінах (і не тільки). Математична логіка і теорія алгоритмів стали теоретичним фундаментом кібернетики, сучасних інформаційних та автоматизованих систем, комп'ютерних технологій.

Професійно значущими для майбутнього вчителя математики є вміння практичного використання математичної логіки в процесі викладання математики. Для цього необхідні, у першу чергу, такі знання:

1) будь-яке рівняння і нерівність (із змінною) – це предикати; числова рівність або нерівність – висловлення. Множина розв'язків рівняння (нерівності) – область істинності предиката;

2) система рівнянь (нерівностей) – кон'юнкція предикатів, а тому щоб розв'язати систему, треба знайти спільні розв'язки (перетин розв'язків рівнянь (нерівностей)); сукупність рівнянь (нерівностей) – диз'юнкція предикатів, а тому щоб розв'язати сукупність, треба знайти об'єднання розв'язків рівнянь (нерівностей);

3) крім кванторів загальності й існування вводяться до розгляду так звані обмежені квантори (для предметних змінних під знаком квантора зразу вказується область їх зміни), квантор існування й єдиності. Правильне використання кванторів дозволить грамотно записувати різні математичні твердження, а це у свою чергу сприятиме вмінню застосовувати метод формалізації;

4) знання про види і будову теорем, необхідні і достатні умови, структуру доведення, види доведень, правила доведень і спростувань [130].

Крім того, для майбутнього вчителя математики є важливим знання про те, що аксіоматизувати певну математичну теорію можна не єдиним чином. Прикладом, який це підтверджує, є різні аксіоматизації числення висловлень. Вони відрізняються логічними зв'язками, відповідно набором аксіом, спільним залишається правило виведення – modus ponens (MP). Варто наголосити, що формули, які в одній аксіоматизації були аксіомами, в іншій стають теоремами і, відповідно, мають бути виведені. Розглянемо конкретний приклад:

Нехай $Al = \{A, B, C, ..., X, Y, A_1, ...\}$ – алфавіт змінних, кожна з яких може приймати одне із двох значень ТАК (істина – 1) або НІ (хибність – 0). Тоді формальна аксіоматична теорія *Th* для числення висловлень задається так:

1. Символами теорії *Th* є $\neg, \rightarrow$, (,) і букви алфавіту *Al*.
2. Всі букви алфавіту *Al* є формулами *Th*. Якщо A, B – формули *Th*, то $(\neg A), (A \rightarrow B)$ – формули *Th*. Інших формул в теорії *Th* нема.
3. Для будь-яких формул *A, B, C* теорії *Th* формули

A1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$;

A2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$;

A3) $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow ((\neg B \rightarrow A) \rightarrow B)$ є аксіомами (схемами аксіом).

4. Єдине правило виведення – правило ***modus ponens*** (MP): із формул A і $A \rightarrow B$ виводиться *B*, скорочено: $A, A \rightarrow B \vdash B$.

Інша аксіоматизація:

1. Символами теорії *Th* є $\neg, \vee$, (,) і букви алфавіту *Al*. $A \rightarrow B$ служить скороченням для $\neg A \vee B$.
2. Всі букви алфавіту *Al* є формулами *Th*. Якщо A, B – формули *Th*, то $(\neg A), (A \vee B)$ – формули *Th*. Інших формул в теорії *Th* нема.

3. Для будь-яких формул *A, B, C* теорії *Th* формули

A1) $A \vee A \to A$;

A2) $A \to A \vee B$;

A3) $A \vee B \to B \vee A$;

A4) $(B \to C) \to ((A \vee B) \to (A \vee C))$ є аксіомами (схемами аксіом).

4. Єдине правило виведення – правило ***modus ponens*** (MP): із формул A і $A \to B$ виводиться B, скорочено: $A, A \to B \vdash B$.

Класична (традиційна) логіка виникла ще в у стародавній Греції. Творцем цієї науки вважають Арістотеля. У сучасній (математичній, формальній) логіці продовжуються і поглиблюються ті проблеми, які були порушені у традиційній логіці. Характерна відмінність сучасної логіки від традиційної – послідовне застосування методу формалізації, відмова від змістовної, природної мови. Основні етапи розвитку математичної логіки наведені у таблиці 2.6.1.

В останні десятиліття XX століття бурхливий розвиток математичної логіки обумовлено розвитком теорії алгоритмів і алгоритмічних мов, теорії автоматів, теорії графів, теорії моделей (В. Глушков [50], С. Кліні [100], А. Колмогоров ([104], [105]), А. Марков [160]), П. Новиков [182] ,А. Черч [249] і багато інших).

Поняття алгоритму відіграє в елементарній математиці (і не тільки в ній) надзвичайно велику роль. Це, насамперед, алгоритми виконання арифметичних дій над числами, алгоритми геометричних побудов за допомогою циркуля та лінійки, алгоритми розв’язування окремих видів рівнянь та нерівностей та багато інших. Курс вищої математики розширює арсенал алгоритмів: алгоритм Евкліда, решето Ератосфена, алгоритм знаходження НСД і НСК многочленів тощо.

Таблиця 2.6.1

Основні етапи розвитку математичної логіки

Вчені, школи	Ідеї	Століття, роки
Передісторія сучасної логіки		
Т. Гоббс	Людське мислення Гоббс зводив до однієї логіки, а останню обмежував нескладними математичними операціями порівняння і розрізнення, додавання і віднімання.	XVII ст.
Р. Декарт, «Міркування про метод»	Ввів і обґрунтував поняття «змінна величина» і «функція».	1637 р.
О. Арно, П. Ніколь,, «Логіка, або Мистецтво мислити»	Послідовники Р. Декарта розвинули ідеї дедуктивної логіки.	1662 р.
Г. Лейбніц, зокрема «Про мистецтво комбінаторики»	Символи для логічних сталих. Ідея побудови універсальної мови для всієї математики і формалізація на основі цієї мови математичних доведень.	1966 р.
Період алгебри логіки		
Дж. Буль, «Математичний аналіз логіки»	Ввів у логіку алгебраїчну символіку для побудови логічних числень, розглянув процес умовиводу як розв’язання логічних рівностей.	1847 р.
О. де Морган, Ч. Пірс, П. Порецький	Розвиток алгебри висловлень.	Кін. XIX ст. – поч. XX ст.

Продовженя таблиці 2.6.1

Період розробки логіки як теорії обґрунтування математики		
Г. Фреге, зокрема «Числення понять. Формульна мова чистого мислення, побудована подібно до арифметичного»	Розробка аксіоматичної побудови числення висловлювань, теорії квантифікації, основних принципів логічної семантики.	1879 р.
Б. Рассел, А. Уайтхед «Принципи математики»	Спроба логічного обґрунтування математики.	1910 р.
Д. Гільберт, «Основи геометрії»	Повна формалізація аксіоматичного методу.	1899 р.
Період розробки металогіки, логічної семантики, некласичної логіки		
А. Тарський	Засновник формальної семантики. Засновник формальної теорії істинності.	1901 – 1983 рр.
Я. Лукашевич	Логіка Лукашевича — багатозначна логіка, яка спочатку була визначена Яном Лукашевичем як тризначна логіка, а потім узагальнена до скінченної n-значної логіки, та до нескінченної дійснозначної логіки як для числення висловлень, так і логіки першого порядку.	1878 – 1956 рр.

До *фундаментальних понять* розділу «Елементи теорії алгоритмів» відносяться такі: алгоритм, дискретність, детермінованість, направленість, масовість алгоритму, елементарність кроків алгоритму, обчислювана, примітивно рекурсивна і частково рекурсивна функції, алгоритмічно розв'язна (нерозв'язна) проблема, машина Поста, машини Тьюрінга, нормальні алгорифми Маркова.

Фундаментальні факти: теза Черча, теза Тьюрінга, принципи роботи машини Поста, машини Тьюрінга, алгоритмічної системи Маркова, твердження про еквівалентність алгоритмічних систем: рекурсивні функції, машини Поста, Тьюрінга, нормальні алгорифми Маркова.

Для майбутнього вчителя математики важливо знати: 1) користуючись інтуїтивним поняттям алгоритму можна описати процес розв'язання певного класу задач, але не можна довести, що цей процес є алгоритмом. У теорії алгоритмів розглядаються дві різні задачі: довести існування алгоритму і довести його відсутність; 2) у математиці є алгоритмічно нерозв'язні проблеми. Це означає неможливість розв'язку ***всіх*** задач певного класу одним і тим самим способом. Але це не означає неможливість розв'язку конкретної задачі цього класу. Так, наприклад, проблема вирішення в логіці предикатів є нерозв'язною.

Коротко розглянемо *історію розвитку* теорії алгоритмів. Вважають, що слово «алгоритм» декілька століть назад означало не термін, а ім'я (європейським математикам узбецький математик Аль-Хорезмі був відомим під ім'ям Алгоризмі). Як термін, вперше з'явився у працях Е. Бореля та Г. Вейля (початок XX століття). Перші фундаментальні праці з теорії алгоритмів були опубліковані у 1935-1937 роках А. Тьюрінгом, Е. Постом, А. Черчем, К. Геделем. Істотний внесок у розвиток теорії алгоритмів мали праці А. Колмогорова, А. Маркова (60-і роки XX століття). Процес становлення теорії алгоритмів як окремої галузі математики розпочався з 30-их років XX століття і триває до нині. Хоча слово «алгоритм» з'явилося набагато раніше.

Зв'язок з навчальними дисциплінами математичного циклу. Теорія алгоритмів виникла як розділ математичної логіки, поняття алгоритму тісно пов'язане з поняттям числення. Своє перше і наймасовіше застосування теорія алгоритмів отримала саме у математичній логіці. Дійсно, для з'ясування того, чи є дана формула тавтологією чи суперечністю, потрібно було мати чітко описану загальну процедуру. Як приклад, алгоритм виводу тавтологій у логіці висловлювань.

Теорія алгоритмів застосовується в усіх галузях, де зустрічаються алгоритмічні проблеми. Практично кожен метод, який застосовується в тій чи іншій навчальній дисципліні, має свій алгоритм – систему правил, яка задає точно визначену послідовність операцій, яка приводить до шуканого результату (точного або наближеного). Наведемо приклади.

1) *Алгебра і теорія чисел.* Алгоритм Евкліда, решето Ератосфена, алгоритм знаходження НСД і НСК цілих чисел (за допомогою розкладу на прості множники), алгоритм перетворення періодичного дробу у звичайний і навпаки та багато інших.

2) *Лінійна алгебра.* Алгоритм методу Гауса, алгоритм обчислення визначника тощо.

3) Широке застосування теорія алгоритмів знайшла в *методах обчислень* (див. параграф 2.7).

4) *Диференціальні рівняння.* Як зазначалося раніше, існують алгоритми розв'язування багатьох конкретних видів ДР. Так, алгоритм розв'язування ДР першого порядку з відокремлюваними змінними, другого порядку з сталими коефіцієнтами та багато інших.

5) *Математичний аналіз*. У роботі Г. Михаліна [173, с. 218-232] розкрито можливості використання алгоритмів у процесі навчання математичного аналізу майбутніх учителів математики. Як приклад, алгоритм знаходження границь виду $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$.

6) *Дискретна математика*. Алгоритм переведення чисел з однієї системи числення в іншу, алгоритми обходу графа, для пошуку найкоротших шляхів між парами вершин зваженого графа з невід'ємними вагами дуг застосовується алгоритм Дейкстри.

7) *Теорія ймовірностей і математична статистика*. Алгоритми обчислення ймовірності події, загальний алгоритм перевірки правильності нульової гіпотези.

8) *Вища геометрія*. Алгоритм зведення рівняння кривої (поверхні) другого порядку до канонічного вигляду (аналітична геометрія), алгоритми розв'язування задач з недосяжними елементами (проективна геометрія, [81]).

Поняття алгоритму зустрічається практично у всіх сферах людського життя і діяльності, від дитинства (складання пірамідки), від повсякденного побуту (приготування їжі) до розв'язання наукових проблем. Застосовується теорія алгоритмів і в інших галузях знань. Наведемо приклади.

1) *Інформатика*. Поняття алгоритма є не тільки фундаментальним поняттям математики, але й належить до фундаментальних концепцій інформатики. Розробка алгоритма – необхідний етап в процесі розв'язання задачі на ЕОМ. Як зазначив академік О. Самарський, «Наукоємність нових інформаційних технологій визначається тріадою модель – алгоритм – програма» [166, с. 3]. Центральне місце належить теорії алгоритмів, яка разом з математичною логікою становлять теоретичний фундамент сучасних комп'ютерних наук.

2) *Медицина*. Є термін «медицинський алгоритм». Застосовується для розв'язання задачі діагностики чи лікування.

2.7. Методологічні знання з методів обчислень

Навчальна дисципліна «Методи обчислень» має ***предметом*** вивчення алгоритми побудови наближених розв'язків задач з різних розділів сучасної математики: алгебри, математичного аналізу, диференціальних та інтегральних рівнянь тощо.

Як і у всіх математичних дисциплінах, знову маємо можливість формування методологічних знань *філософського рівня*: існування, єдиність. Ці поняття у даному випадку пов'язані безпосередньо з одним із фундаментальних понять методів обчислень – поняттям коректно поставленої задачі.

Під час вивчення навчальної дисципліни «Методи обчислень» відкриваються значні можливості для майбутніх учителів математики в оволодінні такими важливими методами (відносяться до знань *загальнометодологічного рівня*): метод математичного моделювання, обчислювальний експеримент, алгоритмічний метод. Всі три методи знаходять безпосереднє застосування у процесі вивчення цієї дисципліни.

Дійсно, для розв’язання більшості прикладних задач використовується *метод математичного моделювання*, для чого будується математична модель, яка описує найістотніші властивості реального процесу чи явища. Далі обирається за певними критеріями метод і відповідний йому *алгоритм* реалізації створеної математичної моделі, а потім здійснюється числове розв'язання задачі – *обчислювальний експеримент*.

Оскільки існують різні математичні моделі (алгебраїчні рівняння та їх системи, функції, диференціальні та інтегральні рівняння тощо), то існують і різні методи розв’язання різноманітних задач, пов’язаних з цими моделями.

З аналізу ОПП бакалавра, підручників та навчально-методичних посібників з методів обчислень ([39], [78], [93], [154], [204]) слідує, що до *основних методів* наближених обчислень відповідно до змістових модулів, які виокремлені в ОПП бакалавра, варто віднести такі:

1. Числові методи, які використовуються для розв’язання СЛАР; вони поділяються на прямі та ітераційні.

Прямими методами називаються такі, за допомогою яких розв'язують задачу $A\vec{u} = \vec{f}$, де $A = \left\{a_{ij}\right\}_{i,j=1}^{n}$ – матриця,

$f = \{ f_i \}_{i=1}^{n}, u = \{u\}_{i=1}^{n}$ – заданий та шуканий вектор відповідно, n – порядок системи, за умови, що всі арифметичні операції виконуються точно. До них відносяться:

– методи виключення (засновані на поетапному зменшенні невідомих у рівняннях). До таких методів належать класичний метод Гауса, метод оптимального виключення, метод Жордана, метод відбиття тощо;

– методи на основі знаходження оберненої матриці, серед яких блочний метод, метод обведення, метод ортогоналізації матриць тощо;

– методи прогонки полягають у використанні певних рекурентних співвідношень, як правило, першого порядку (методи лівої, правої, зустрічної прогонки, матричної прогонки);

– методи факторизації матриць засновані на зображенні матриці СЛАР у вигляді добутку простіших за структурою матриць (метод Халецького, метод квадратного кореня);

– методи ортогоналізації ґрунтуються на побудові вектора, перпендикулярного до заданої гіперплощини [204, с.13].

Ітераційними методами називаються такі, за допомогою яких СЛАР можна розв’язати наближено за певними рекурентними співвідношеннями із заданою наперед точністю. До них відносять метод послідовних наближень (метод простої ітерації), метод Зейделя (стаціонарні методи), методи Річардсона і верхньої релаксації (нестаціонарні методи). Варто зауважити, що до задачі розв'язування СЛАР зводиться більшість сучасних числових методів розв'язування крайових задач, інтегральних рівнянь.

2. Як відомо з курсу вищої алгебри, рівняння степеня $n \geq 5$ нерозв'язне в радикалах. Якщо ж маємо рівняння з наближеними коефіцієнтами, то отримати його точний розв'язок взагалі не можна. Тому виникає необхідність застосування наближених методів розв'язування нелінійних рівнянь. Для розв'язання нелінійних рівнянь з однією змінною $f(x)=0$ спочатку треба застосувати метод відокремлення кореня (графічно або аналітично), а далі для уточнення значення цього кореня можуть бути використані метод половинного поділу, метод ітерацій (послідовних наближень), метод хорд, метод дотичних (метод Ньютона).

3. Важливого значення для розв'язання багатьох прикладних задач набуває проблема апроксимування функції. До методів вирішення цієї проблеми належать: інтерполювання функції (поліноміальне, за допомогою многочлена Лагранжа, многочлена Ньютона), найкраще наближення функції (рівномірне, середньоквадратичне (метод найменших квадратів)).

4. Ідея задачі чисельного диференціювання функції полягає у заміні функції $f(x)$ інтерполяційною функцією. Метод невизначених коефіцієнтів (метод Коллатца) водночас дає формули наближеного обчислення похідної і апостеріорну оцінку цих формул.

5. Методи чисельного інтегрування: метод прямокутників, метод трапецій, метод Сімпсона –

відповідні формули для застосування цих методів відносяться до квадратурних формул Ньютона – Котеса і основою цих формул є заміна підінтегральної функції інтерполяційною функцією; метод випадкових випробувань (метод Монте – Карло).

6. Наближені методи розв'язання задачі Коші для звичайного ДР можна поділити на три групи: аналітичні (дають наближений розв'язок у вигляді аналітичного виразу); чисельні (дають наближений розв'язок у вигляді таблиці значень); графічні (дають наближений розв'язок у вигляді графіка). До першої групи відносяться ітераційний метод Пікара, метод розвинення розв'язку задачі Коші в ряд Тейлора, метод малого параметра або метод збурення. До методів другої групи відносять методи типу Ейлера (метод Ейлера, удосконалений метод Ейлера, удосконалений метод Ейлера – Коші; вони належать до сімейства методів Рунге – Кутта), метод скінченних різниць. До третьої – метод ізоклін, метод ламаних Ейлера. Для числового розв'язання інтегральних рівнянь використовують: метод квадратур, метод послідовних наближень, метод заміни ядра виродженим.

7. Методи обробки експериментальних даних – різні методи побудови математичної моделі об'єкта за таблицею експериментальних даних – можна умовно поділити на дві групи: первинні і вторинні. Первинними називають методи, за допомогою яких можна отримати показники, які безпосередньо відображають результати, отримані в експериментальному вимірюванні. До них відносять, наприклад, визначення вибіркової середньої величини, вибіркової дисперсії, вибіркової моди і вибіркової медіани.

Вторинними називаються методи статистичної обробки, за допомогою яких на базі первинних даних виявляють приховані в них статистичні закономірності. Це регресійний аналіз, методи порівняння між собою двох або декількох елементарних статистик (середніх, дисперсій тощо), що відносяться до різних вибірок, методи встановлення статистичних взаємозв'язків між змінними, наприклад їх кореляцію між собою, методи виявлення внутрішньої статистичної структури емпіричних даних (наприклад, факторний аналіз). Регресійний аналіз – найпоширеніший метод обробки даних, який включає в себе метод найменших квадратів. За регресійного аналізу таблиця експериментальних даних зазвичай відображається многочленами, які називають многочленами або рівняннями регресії. Основним «робочим інструментом» і експерименту, і обробки експериментальних даних є число. Числа при експериментуванні отримують трьома способами: підрахунком, вимірюванням, методом експертних оцінок.

До *фундаментальних понять* навчальної дисципліни «Методи обчислень» будемо відносити: похибка та її види: похибка математичної моделі, неусувна, похибка методу, похибка округлень, повна похибка; абсолютна, гранична абсолютна та відносна похибки наближеного числа; значуща та вірна цифра числа; стійкість розв'язку, коректно поставлена задача; точність числового методу розв'язання задачі, стійкість методу, збіжність методу, прямі та ітераційні методи, оцінка похибки наближеного значення кореня нелінійного рівняння.

Фундаментальні факти. До них віднесемо ідею та алгоритм кожного із перерахованих вище наближених методів, а також необхідні та достатні умови збіжності цих методів.

Фундаментальні відношення. Головна ідея методів обчислень – так званий головний метод наближених обчислень, який можна описати на прикладі розв'язування деякого операторного рівняння

$$Lu = f,\ L : U \to F,\ u \in U,\ f \in F, \tag{2.7.1}$$

де u – шуканий елемент множини U. Оператор L може мати різний вид: матричний оператор (тоді мова йтиме про розв'язування системи рівнянь), диференціальний чи інтегральний оператор (знаходження розв'язків диференціального чи інтегрального рівняння) тощо.

Нехай рівняння (2.7.1) має єдиний розв'язок u*. Далі розглядають операторне рівняння

$$\tilde{L}\tilde{u} = \tilde{f},\ \tilde{L} : \tilde{U} \to \tilde{F},\ \tilde{u} \in \tilde{U},\ \tilde{f} \in \tilde{F}, \tilde{U} \subset U, \tilde{F} \subset F \tag{2.7.2}$$

для якого відомий точний і єдиний розв'язок $\tilde{u}^*$ і яке у деякому розумінні «схоже» на рівняння (2.7.1). Головний метод наближених обчислень полягає в побудові та розв'язуванні такого рівняння (2.7.2), щоб $\left\| u - \tilde{u}^* \right\| \to 0$. У цьому випадку за розв'язок рівняння (2.7.1) вибирають його наближений розв'язок – розв'язок рівняння (2.7.2).

Майбутній вчитель математики має чітко розуміти, що методи розв'язання різноманітних задач можуть бути пов'язані між собою. Так, наприклад, без методів інтерполювання функції не можна було б записати методи чисельного диференціювання та інтегрування.

Зв’язок з іншими математичними дисциплінами. Навчальна дисципліна «Методи обчислень» вирізняється серед математичних дисциплін багатоплановістю навчального матеріалу, тому для засвоєння цього курсу необхідні методологічні та предметні знання з математичного аналізу, диференціальних рівнянь, вищої алгебри, теорії ймовірностей та математичної статистики тощо. Як стверджує Р. Хемінг, мета обчислень – не числа, а розуміння [246, с. 397]. Студент, який має цього розуміння досягнути, повинен знати, як відбуваються ті чи інші обчислення. Якщо він цього не розуміє, то вивчення курсу «Методи обчислень» навряд чи сприятиме формуванню як математичної, так і методологічної культури майбутнього вчителя математики. «Обчислення є засобом отримання числових результатів, але це також знаряддя розуму для дослідження світу» [246, с. 397].

Наведемо приклади міжпредметних зв’язків методів обчислень з іншими математичними дисциплінами.

1. *Математичний аналіз.* Функція, неперервна і диференційовна функція, метричний простір, принцип стискуючих відображень та його застосування, збіжність у метричному просторі, фундаментальна послідовність, повний метричний простір, лінійний нормований простір, скалярний добуток у лінійному просторі, евклідовий лінійний простір, гільбертовий простір – ці знання необхідні для з’ясування збіжності методу ітерацій, стійкості отриманого розв’язку, оцінки похибки наближення. Крім того, для розуміння розв’язування задач апроксимації функцій, задач чисельного диференціювання та інтегрування необхідні знання про ряди, похідну

функції першого та вищих порядків, визначений інтеграл та його геометричний зміст, теорему про середнє значення для визначеного інтеграла (наприклад, для обґрунтування застосування формули прямокутників). Рівняння дотичної застосовується для знаходження коренів рівняння методом дотичних. Метод дихотомії приводить до вкладених стяжних відрізків, які, за аксіомою Кантора, мають єдину спільну точку.

2. *Вища алгебра*. До задач, які розв'язуються під час вивчення методів обчислення, відносяться задачі на знаходження наближених розв’язків системи лінійних та нелінійних рівнянь. Тому необхідні знання про СЛАР, її розв'язок, матричну форму запису СЛАР, обернену матрицю, визначник. Метод скінченних різниць зводить розв'язання звичайних диференціальних рівнянь до розв'язування системи алгебраїчних рівнянь. Для розв'язання задачі априксимації функції використовуються знання про многочлени (многочлени Тейлора, Лежандра, Чебишова), схему Горнера, визначник Ван дер Монда. Під час розгляду задачі про наближені корені нелінійного рівняння варто майбутнім учителям математики наголосити про нерозв’язність рівнянь степеня $n \geq 5$ в радикалах.

3. *Теорія ймовірностей та математична статистика*. Процес вимірювання певної величини *A* потрібно розглядати як випадковий дискретний процес з випадковими величинами $a_1, a_2, ..., a_n$, які за певних умов можна вважати незалежними з однаковим математичним сподіванням a і дисперсією σ^2. Тоді за наближене

значення величини A можна взяти середнє арифметичне значення $\overline{x}$. Оцінити істинне значення величини A можна з використанням довірчого інтервалу з надійністю γ: $\overline{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < A < \overline{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}$. Крім того, необхідні знання про статистичну та геометричну ймовірності, середнє квадратичне відхилення, виправлену дисперсію, нормальний розподіл випадкової величини, правило трьох сигм (для застосування методу Монте – Карло до наближених обчислень визначеного або невласного інтеграла).

4. *Диференціальні рівняння*. Поняття диференціального рівняння, задачі Коші, розв'язку задачі Коші.

5. *Вища геометрія*. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки (метод хорд).

6. *Математична логіка і теорія алгоритмів.* Поняття алгоритму.

7. Знання та вміння, отримані майбутніми вчителями математики під час вивчення методів обчислень сприятимуть формуванню навичок прикладних математичних обчислень, які необхідні для проведення наукових досліджень під час виконання курсових, бакалаврських, дипломних та магістерських робіт.

8. Крім того, навчальна дисципліна «Методи обчислень» тісно пов'язана з інформатикою. Реалізація вибраного методу і відповідного алгоритму розв’язання тієї чи іншої математичної моделі відбувається за допомогою комп’ютерних навчальних програм

Науковці, зокрема В. Попов [204, с. 8-9], *історію розвитку* методів обчислень умовно поділяють на три періоди:

1)До епохи Відродження – пов'язаний із необхідністю обчислень характеристик простих геометричних об'єктів (відстані, кути, площі, об'єми тощо), розрахунків простих механічних пристроїв та систем, обчислень в астрономії. Найпомітніші відкриття цього періоду – Архімед знайшов відрізок числової осі, в якому міститься число π, надав йому прості у практичному використанні межі інтервалу $(3\frac{10}{17};\ 3\frac{1}{7})$. Відносна похибка запропонованого Архімедом наближеного значення $3\frac{1}{7}$ числа π з цього відрізка становить усього 0,04 %; давньогрецький філософ Гіпарх обчислив тривалість року на Землі: 365 днів 5 годин 55 хвилин. Ці дані відрізняються від сучасних лише на 0,001 %.

2)Від епохи Відродження до середини XX століття. Дослідження І. Ньютона, Л. Ейлера, Ж. Лагранжа, К. Гауса, І. Бубнова, Б. Гальоркіна та багатьох інших стали вагомим внеском в обчислювальну математику. Виникнення математичного аналізу, диференціальних рівнянь збагатило арсенал математичних моделей, що, в свою чергу, привело до необхідності розвитку методів наближених обчислень з високою точністю.

3)Від середини XX століття до нашого часу. Це етап постановки та розв'язування нелінійних задач, що відповідають складним математичним моделям процесів природи і технологій. Характерна риса цього етапу – систематичне використання комп’ютерів.

Методи обчислень знайшли широке застосування у різних галузях науки, техніки і виробництва, оскільки для формулювання і розв’язання задач тієї чи іншої галузі, як правило, використовуються не точні, а наближені дані.

РОЗДІЛ 3. МЕТОДОЛОГІЧНІ ЗНАННЯ МАЙБУТНЬОГО ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ З ДИСЦИПЛІН МЕТОДИЧНОГО СПРЯМУВАННЯ

3.1. Методологічні знання з елементарної математики

Під елементарною математикою як *розділом математики* розуміють «… методи, поняття, теорії, що були створені до початку XVII ст.» [257, с. 5]. Елементарна математика вивчає переважно сталі величини й фігури. Ще однією характерною рисою елементарної математики є те, що «… елементарна алгебра і елементарна геометрія будують свої теорії відокремлено» [257, с. 5]. Вища математика об'єднує у собі дисципліни, що виникли у XVII – XVIII ст. «Характерною особливістю вищої математики є те, що вона вивчає змінні величини» [257, с. 5]. Ще одна особливість: метод координат став тим загальним принципом, на основі якого задачі геометрії можна перекласти на мову алгебри і навпаки.

Доцільно зауважити, що поділ математики на вищу і елементарну є досить умовним, ідеї вищої математики зародилися ще до початку XVII ст. (наприклад, метод вичерпування для обчислення площ і об'ємів у працях Евдокса неявно включав поняття границі, ідея методу координат неявно фігурувала у роботах Аполлонія, який вивчав конічні перерізи). У той же час вища математика широко використовує ідеї і методи елементарної математики.

Якщо розглядати елементарну математику як *навчальну дисципліну*, то вона об'єднує в собі елементи арифметики, алгебри, геометрії та початків аналізу. Крім того, на відміну від елементарної математики як розділу математики, вже з 6-го класу вводиться ідея методу координат, тобто встановлюється зв'язок між задачами алгебри і геометрії.

У зв’язку з цим визначити предмет елементарної математики як навчальної дисципліни однозначно досить складно. Предметом арифметики є поняття числа, предметом елементарної алгебри – рівняння, предметом елементарної геометрії – геометричні об’єкти, початків аналізу – функція.

А тому ***предметом*** вивчення елементарної математики як навчальної дисципліни можна вважати: числа, вирази, рівняння (нерівності), функції, геометричні об’єкти. Далі мова йтиме про елементарну математику як навчальну дисципліну у педагогічних ВНЗ. Зауважимо, що навчальна дисципліна «Елементарна математика» відіграє значну роль у фаховій підготовці вчителя математики: саме під час вивчення цієї дисципліни відбувається повторення, узагальнення і розширення знань про математичні поняття і факти, які розглядалися у шкільному курсі математики. І відбувається це з точки зору закладених в них фундаментальних математичних ідей і наукового обґрунтування методів і прийомів, які використовуються в елементарній математиці.

За ОПП підготовки бакалавра математики передбачено вивчення таких змістових модулів:

1. Числові множини.
2. Вирази і їх перетворення.
3. Функції і їх графіки.

4. Рівняння і нерівності.
5. Геометричні фігури та їх міри.

Окремі питання шкільного курсу математики, які пов’язані з вищою математикою (границя, неперервність, похідна та її застосування, інтеграл та його застосування, елементи стохастики тощо), у курсі елементарної математики можуть не розглядатися, оскільки їх детальне вивчення передбачене у відповідних математичних навчальних дисциплінах.

За такого підходу до наповнення змісту навчальної дисципліни «Елементарна математика» необхідно, щоб викладачі курсів вищої математики звертали особливу увагу на ті питання, які мають особливу професійну значущість для вчителя математики. Наприклад, розглядаючи методи знаходження похідної (за означенням, за правилами диференціювання, логарифмічна похідна, похідна неявно заданої функції, похідна параметрично заданої функції) доцільно підкреслити, що у шкільному курсі математики можна розглянути тільки два з них: за означенням і за правилами диференціювання. Із методів інтегрування (безпосереднє, заміна змінної, частинами, метод Остроградського, наближені методи інтегрування тощо) у шкільному курсі математики можна застосувати лише метод безпосереднього інтегрування.

У той же час під час розв’язування задач з елементарної математики варто використовувати знання, вміння і методи з різних розділів математики, вивчених у школі чи вже у ВНЗ. При цьому важливо підкреслювати можливість і правомірність застосування тих чи інших методів під час розв'язування відповідних задач у школі. Пояснимо це на прикладах.

1) Яскравим прикладом є дослідження властивостей функції та побудова її графіка. Дослідження функції на монотонність, екстремум та вгнутість можна здійснити за допомогою методів як елементарної математики, так і методами диференціального числення. Майбутній учитель математики повинен знати і розуміти, на якому етапі вивчення шкільного курсу математики які з методів можна використати. Крім того, важливим для формування наукового світогляду і професійної культури майбутнього вчителя математики є знання і розуміння того, що методи нового розділу математики дозволяють простіше, красивіше і швидше розв'язати відомі задачі. Варто запропонувати студентам розв'язати задачу «Довести, що функція $f(x)=x^3$ зростає на множині всіх дійсних чисел» за допомогою а) методів елементарної математики; б) методами диференціального числення.

2) Для обчислення інтеграла $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx$ більшість студентів використовують метод підстановки $x=a\sin t\,(x=a\cos t)$. Хоча такого типу інтеграл можна обчислити простіше, застосувавши геометричний зміст визначеного інтеграла (у даному випадку – це площа півкруга радіуса 2, і тому $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx=2\pi$), і пропонувати його можна (і він є у шкільних збірниках) учням 11–го класу, хоча метод підстановки вони не вивчають.

Оскільки навчальна дисципліна «Елементарна математика» об'єднує у собі різні галузі математики, і не тільки елементарної, то і поєднує у собі алгебраїчні, геометричні, аналітичні методи. Назвемо основні з них:

1) Метод заміни. За словами А. Самойленка, «використання замін змінних для зведення складних об'єктів до простіших» є «надзвичайно плідною математичною ідеєю» [217, с. 34]. Цей метод в елементарній математиці широко використовується для розв'язування рівнянь і нерівностей (і не тільки).

2) Метод інтервалів.

3) Методи розкладу на множники.

4) Метод невизначених коефіцієнтів.

5) Метод оцінок.

6) Метод геометричних перетворень.

7) Метод рівносильних перетворень.

8) Методи доведення нерівностей (за означенням, синтетичний, аналітичний, метод математичної індукції, метод від супротивного, метод підсилення)

9) Метод координат.

10) Векторний метод.

Важливо для майбутнього вчителя математики вміти комбінувати методи, використовувати їх в нестандартних ситуаціях. Так, наприклад, більшість студентів – майбутніх учителів математики пов'язують застосування методу невизначених коефіцієнтів з математичним аналізом, рідше згадують ще диференціальні рівняння або комплексний аналіз. У той же час цей метод «працює» і в елементарній математиці. Наведемо приклади:

1. Для яких значень m і n є тотожністю рівність $\frac{7}{(x-6)(x+1)} = \frac{m}{x-6} + \frac{n}{x+1}$?

2. Розкласти на квадратні множники з цілими коефіцієнтами многочлен $x^4 - 21x^2 + 100$.

Як правило, перший приклад не викликає в студентів труднощів (зауважимо, що цей приклад *аналогічний* до прикладів з математичного аналізу, у яких потрібно розкласти дріб на суму елементарних дробів). Для розв'язання другого прикладу також можна застосувати метод невизначених коефіцієнтів: $x^4 - 21x^2 + 100 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$, де a, b, c, d – цілі числа. (Наведений приклад можна розв'язати і з використанням формул скороченого множення: $x^4 - 21x^2 + 100 = x^4 - 2\cdot 10x^2 + 10^2 - x^2 = (x^2 - 10)^2 - x^2 =$ $(x^2 - x - 10)(x^2 + x - 10)$).

Звернемо увагу на застосування методу інтервалів у шкільному курсі математики. Як відомо, в основі цього методу лежить поняття неперервної функції, яке не є предметом вивчення елементарної математики. Ознайомлення з цим методом учнів 9-го класу повинно відбуватися на інтуїтивній основі, теоретичного обґрунтування на цьому етапі методу дати не можна. Для майбутніх учителів математики про це треба наголосити після доведення теореми Больцано – Коші про проміжне значення неперервної функції («Математичний аналіз»), а потім нагадати (або нагадають студенти) під час вивчення елементарної математики.

Знайшли своє відображення під час навчання елементарній математиці і методи, які відносяться до знань *загальнонаукового рівня*:

- аксіоматичний (в геометрії);
- метод математичного моделювання;
- метод аналогій;
- метод індукції (математичної) та інші.

Оскільки масив фундаментальних понять і фактів навчальної дисципліни досить широкий, то, на нашу думку, доцільно виокремлювати фундаментальні поняття, відношення та факти у кожному розділі (змістовому модулі) цієї дисципліни.

Числові множини. Ф*ундаментальні поняття*: число натуральне, ціле, раціональне, ірраціональне, дійсне, комплексне, сума, різниця, добуток і частка чисел, модуль дійсного числа, подільність, ділене, дільник, частка, остача, кратне, спільне і найменше спільне кратне, спільний і найбільший спільний дільник, взаємно прості числа, число просте і складене, канонічна форма натурального числа, відсоток, відношення, пропорція, степінь з натуральним показником, корінь n-го степеня та арифметичний корінь n-го степеня числа, степінь з цілим, раціональним та ірраціональним показником, логарифм числа, синус, косинус, тангенс і котангенс числа, арксинус, арккосинус, арктангенс і арккотангенс числа; числова послідовність, арифметична і геометрична прогресії.

Фундаментальні факти: властивості арифметичних дій над числами, властивості модуля дійсного числа, принцип і метод математичної індукції, властивості відношення подільності, теорема про ділення цілих чисел з остачею, теореми про існування та єдиність НСД та НСК двох цілих чисел, зв'язок між НСД і НСК двох цілих чисел, методи знаходження НСД і НСК цілих чисел, властивості простих і складених чисел, основна теорема арифметики, решето Ератосфена, основні типи задач на відсотки, основна властивість дробу і пропорції, похідні пропорції; формули n-го члена арифметичної і геометричної прогресій, характеристична властивість, формули суми перших n членів арифметичної й геометричної прогресій, формула суми нескінченної геометричної прогресії.

Вирази і їх перетворення. Ф*ундаментальні поняття*: числовий вираз, вираз із змінними, область допустимих значень змінних, тотожність, тотожне перетворення, одночлен, многочлен, раціональні, ірраціональні, трансцендентні вирази.

Фундаментальні факти: формули скороченого множення, розклад многочлена на множники (винесення спільного множника, теорема Безу, схема Горнера, метод невизначених коефіцієнтів), розклад квадратного тричлена на множники, властивості степеня, кореня n-го степеня і логарифма числа, тригонометричні тотожності, властивості арксинуса, арккосинуса, арктангенса і арккотангенса числа.

Функції і їх графіки. Ф*ундаментальні поняття*: функція, область визначення, область значень, графік функції,обмеженість, монотонність, знакосталість, нулі функції, періодичність, вгнутість (опуклість), парність (непарність), найбільше (найменше) значення, основні елементарні функції та елементарні функції.

Фундаментальні факти: способи задання функції, основні властивості функцій та їх геометрична інтерпретація, геометричні перетворення графіків функцій.

Рівняння і нерівності. Ф*ундаментальні поняття*: рівняння та його корінь, нерівність та її розв'язок, область допустимих значень змінних рівняння (нерівності), рівносильні рівняння, рівняння-наслідок, рівняння і нерівності лінійні, квадратичні, вищого порядку (кубічні, біквадратні, зведені, однорідні та симетричні рівняння), дробово-раціональні, ірраціональні, тригонометричні (обернено тригонометричні), показникові, логарифмічні, система та сукупність рівнянь (нерівностей), параметр.

Фундаментальні факти: теореми про рівносильність рівнянь і нерівностей, графічний спосіб розв'язування рівнянь (нерівностей) та їх систем з параметрами, з модулями, метод інтервалів, способи розв'язування рівнянь та систем рівнянь, методи доведення нерівностей (за означенням, синтетичний, аналітичний, метод математичної індукції, метод від супротивного, метод підсилення).

Геометричні фігури та їх міри. Ф*ундаментальні поняття*: точка, плоска та об'ємна фігура, тіла, пряма, промінь, відрізок, ламана, площина, аксіома, теорема; кути: суміжні, вертикальні, гострі, прямі, тупі, розгорнуті; трикутник: гострокутний, прямокутний, тупокутний, рівносторонній і різносторонній; бісектриса, медіана, висота, серединний перпендикуляр; рівність і подібність фігур; чотирикутники: паралелограм, ромб, прямокутник, квадрат, трапеція; правильний многокутник, многокутник; коло і круг; рух, симетрія відносно точки, прямої, площини, паралельне перенесення, поворот, гомотетія, перетворення подібності; вектор, вектори колінеарні і перпендикулярні, модуль вектора, сума та різниця векторів, скалярний добуток векторів, прямокутна декартова система координат на прямій, площині та в просторі; призма, піраміда; циліндр, конус, сфера і куля; поняття міри та вимірювання найпростіших, простих та вимірних фігур; градусна і радіанна міра кута, довжина відрізка, ламаної і і кривої лінії, кола і дуги кола; площа многокутника і плоскої фігури, круга, сектора і сегмента, площа поверхні многогранних фігур та тіл обертання, об’єм тіла; відстань між двома точками, між двома фігурами, від точки до прямої, від точки до площини; кут між прямими, прямою і площиною, площинами, паралельні, перпендикулярні та мимобіжні прямі.

Фундаментальні факти: аксіоми планіметрії та стереометрії, основні властивості й ознаки многокутників, властивості і ознаки паралельних прямих на площині і в просторі, властивості і ознаки паралельних і перпендикулярних площин, паралельних прямих і площин; властивості геометричних перетворень, загальне рівняння прямої, рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом, рівняння прямої, що проходить через дві задані точки, рівняння кола, формули для обчислення площ многокутників, круга та його частин, формула для обчислення довжини кола і його дуги, формули обчислення площ поверхонь і об’ємів призми, піраміди, циліндра, конуса, кулі.

До *фундаментальних відношень*, які розглядаються у курсі елементарної математики, варто віднести: належати (не належати): точки до прямої, точки до площини, точки до графіка функції (належність елемента множині); включення: прямої до площини, розміщення точки між двома іншими (лежати між); відношення конгруентності (або рівності); відношення паралельності і перпендикулярності прямих, площин, прямих і площин, мимобіжності прямих тощо. Крім того, майбутній учитель математики повинен розуміти, що арифметичні операції над числами – це також відношення (бінарні, якщо мова йде про додавання, віднімання, множення, ділення).

Навчальна дисципліна «Елементарна математика» відрізняється від решти дисциплін математичного циклу тим, що з багатьма (чи не з усіма) фундаментальними поняттями та фактами цієї дисципліни студенти ознайомлені ще зі школи. Дійсно, елементарна математика вивчається учнями з першого класу і до кінця навчання у школі. Але відбувається це на різних рівнях.

Заслуговують на увагу слова Г. Михаліна: «… слід відмовитися від хибної думки про те, що деякі питання … вивчаються у шкільному курсі математики на рівні, достатньому для професійної культури вчителя математики. Насправді більшість тем шкільного курсу математики засвоюється переважною більшістю учнів, у кращому випадку, на описовому (інтуїтивному) рівні, без відповідних обґрунтувань. Разом з тим ці теми, як і всі інші, повинні бути викладеними логічно струнко, глибоко, яскраво, доступно, щоб бути зразком того, як треба подавати відповідний матеріал у школі, щоб у майбутнього вчителя математики сформувався відповідний математичний кругозір, який дозволив би йому бачити відповідну проблему з усіх боків, щоб він бачив усі логічні прогалини шкільного курсу математики та знав шляхи їх усунення і при необхідності міг би їх пояснити своїм учням.» [173, с. 37].

Проілюструємо це на прикладах. Розглянемо перший змістовий модуль «Числові множини». Поняття натурального числа пронизує весь шкільний курс математики, починаючи з першого класу. Але, як зазначалося раніше, це поняття у шкільному курсі не означається, дається тільки інтуїтивне розуміння: числа, які використовуються для лічби, називаються натуральними. Розширення і поглиблення знань про натуральні числа відбувається під час навчання у ВНЗ, зокрема під час вивчення таких дисциплін: «Математичний аналіз», «Алгебра і теорія чисел», «Числові системи». У процесі навчання елементарної математики ці знання мають бути систематизовані.

Крім того, у шкільному курсі математики не доводяться властивості арифметичних операцій, не розглядається питання про існування і єдиність суми, добутку, НСД і НСК двох натуральних чисел; про існування різниці, частки (це відбувається у курсах «Числові системи» та «Алгебра і теорія чисел»). Систематизуються знання і про властивості множини натуральних чисел: нескінченність множин натуральних чисел, простих і складених чисел, дискретність множини натуральних чисел.

Наступна множина чисел – цілі числа. Розширення множини натуральних чисел до множини цілих чисел відбувається конструктивним методом: $Z = N \cup \{0\} \cup N^-$.

Майбутній учитель математики повинен знати і про інший спосіб – аксіоматичний (у курсі «Числові системи»).

Не піднімається у шкільному курсі математики і питання про єдиність зображення (представлення) числа, зокрема і раціонального. Але найбільшою логічною прогалиною у шкільному курсі математики є питання про введення ірраціональних, а отже, і дійсних чисел. З навчальних дисциплін «Математичний аналіз», «Числові системи» майбутній учитель математики повинен знати, що існує кілька теорій побудови множини дійсних чисел і що жодна з них не може бути повністю реалізована у шкільному курсі математики. У процесі навчання елементарної математики ці та інші знання мають бути систематизовані. У майбутніх учителів математики необхідно сформувати вміння проектувати здобуті знання на шкільний курс математики.

Ще одне важливе поняття всієї математики, а тому і шкільного курсу математики – функція. Поняття функції має тривалу історію розвитку, протягом кількох століть це поняття уточнювалося. На сьогодні в основі поняття функції лежить поняття упорядкованої пари $(a;b), a \in A, b \in B$, або іншими словами поняття множини і відповідності між множинами. Під час вивчення навчальної дисципліни «Математичний аналіз» відбувається розширення і поглиблення знань студентів про властивості функцій, а під час вивчення курсу «Елементарна математика» ці знання мають бути систематизовані, у студентів сформовані вміння проектуванняцих знань на шкільний курс математики.

Назвемо властивості функцій, які не входять (або практично не розглядаються) до шкільного курсу математики: обмеженість знизу, зверху, обмеженість; вгнутість; неперервність, рівномірна неперервність. Крім того, навіть і ті властивості, які у шкільному курсі математики розглядаються, часто не доводяться.

З областю значень функції пов'язане ще одне важливе поняття методологічних знань філософського рівня – існування і єдиність розв'язків рівнянь. Якщо про кількість коренів квадратного рівняння залежно від знака дискримінанта і від множини, на якому це рівняння розглядається, ще згадують і під час вивчення шкільного курсу математики, й елементарної математики у ВНЗ, то про найпростіші тригонометричні, показникові – не завжди (а практично дуже рідко). Майбутній учитель математики повинен знати, що питання про існування і кількість розв'язків рівняння має розглядатися залежно від множини, на якій рівняння задано (табл. 3.1.1).

Доцільно звернути увагу майбутніх учителів на розв'язування степенево-показникових рівнянь, тобто рівнянь виду $\left(f(x)\right)^{g(x)}=\left(f(x)\right)^{h(x)}, \left(f(x)\right)^{g(x)}=1$. Для коректного розв'язання вказаних рівнянь треба знати поняття дійсного степеня з дійсним показником. Кількість розв'язків такого рівняння (на множині дійсних чисел) залежить від того, що вважати областю визначення функції $y=\left(f(x)\right)^{g(x)}$.

Таблиця 3.1.1

Множина розв'язків окремих видів рівнянь

Рівняння	Множина дійсних чисел	Множина комплексних чисел
$ax = b$	1) $a \neq 0$ – розв'язок існує і єдиний; 2) $a = 0, b = 0$ – розв'язки існують, їх безліч; 3) $a = 0, b \neq 0$ – розв'язків не існує	Аналогічно
$ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$	1) $D \geq 0$ – розв'язки існують, їх два; 2) $D < 0$ – розв'язків не існує	Розв'язки існують завжди, їх два
$\sin x = a, \cos x = a$	1) $\lvert a \rvert \leq 1$ – розв'язки існують, їх безліч; 2) $\lvert a \rvert > 1$ – розв'язків не існує	Для будь-якого a розв'язки існують, їх безліч
$tgx = a, ctgx = a$	Для будь-якого a розв'язки існують, їх безліч	Для будь-якого a розв'язки існують, їх безліч
$a^x = b$	1) $b > 0$ – розв'язок існує і єдиний; 2) $b \leq 0$ – розв'язків не існує	Для будь-якого $b \neq 0$ розв'язки існують, їх безліч

Незаперечним є факт, що успішне вивчення курсів вищої математики і підготовка майбутнього вчителя математики неможливі без належної сформованої системи знань і вмінь студентів з елементарної математики. У той же час вивчення курсів вищої математики у педагогічному ВНЗ сприяє доповненню і систематизації таких знань і вмінь у майбутніх учителів математики, дозволяє науково обґрунтувати шкільний курс математики. Зокрема, прослідковується *тісний зв'язок елементарної математики* з:

1) *математичним аналізом*: вивчення числових множин та функцій, причому як методами елементарної математики, так і методами диференціального та інтегрального числення; початки диференціального та інтегрального числення;

2) *лінійною алгеброю*: розв'язування систем лінійних рівнянь;

3) *аналітичною геометрією*: векторна алгебра; теорія прямих і площин; теорія кривих (коло) та поверхонь другого порядку; геометричні перетворення, конструктивна геометрія;

4) *проективною геометрією*: перетворення площини і простору; побудова перерізів; зображення фігур, тіл та їх комбінацій;

5) *алгеброю і теорією чисел*: теорія многочленів; теорія подільності;

6) *диференціальними рівняннями*: найпростіші диференціальні рівняння першого порядку;

7) *теорією ймовірностей та математичною статистикою*: елементи теорії ймовірностей та математичної статистики;

8) *числовими системами*: вивчення натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних чисел; властивості операцій над числами;

9) *дискретною математикою*: комбінаторика;

10) *методикою навчання математики*: для того, щоб навчити учнів математиці, майбутній учитель математики у першу чергу повинен сам вміти володіти теоретичними фактами шкільного курсу математики та застосовувати їх до розв'язування задач. І тільки за такої умови може студент *навчитися навчати дітей математики.*

Період розвитку елементарної математики як розділу математики (математика сталих величин) займає найдовший проміжок у розвитку математики: VI – V ст. до н. е. – кінець XVI ст. н. е. Тому, на нашу думку, навіть коротко ознайомити студентів з основними етапами становлення цієї галузі математики під час вивчення елементарної математики буде досить складно. Варто запропонувати студентам навчальні проекти, основна мета яких – ознайомлення з розвитком найважливіших понять елементарної математики. Як приклад – «Розвиток поняття числа від давнини до сьогодення».

3.2. Методологічні знання з числових систем

Навчальна дисципліна «Числові системи», як і «Математична логіка та теорія алгоритмів», має пряме відношення до питань логічного обґрунтування математики, а тому відіграє особливу роль у процесі формування методологічних знань і фахового становлення не тільки майбутніх учителів, але й викладачів математики різних навчальних закладів.

Предметом вивчення навчальної дисципліни «Числові системи» є аксіоматична побудова основних числових систем: натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних чисел. Основний ***метод*** вивчення цієї дисципліни – аксіоматичний метод. Крім основного, варто назвати ще такі методи:

- метод математичної індукції (застосовується, наприклад, для доведення властивостей додавання, множення натуральних чисел);
- метод повної індукції (застосовується, наприклад, для доведення теореми: Для довільних натуральних чисел $a,b \in N$ справедливий один і тільки один з таких випадків: I. $a = b$;II. $(\exists\, k \in N)\ (a = b + k)$; III. $(\exists\, l \in N)\ (b = a + l)$);
- методи побудови системи дійсних чисел: перетини Дедекінда, теорія Вейєрштрасса (теорія нескінченних десяткових дробів), теорія Кантора (теорія фундаментальних послідовностей), теорія Колмогорова – Кавун (за якого дійсні числа вводяться безпосередньо слідом за цілими. Теорія раціональних чисел не передбачається заздалегідь побудованою) – конструктивні методи; аксіоматичний метод;
- метод граничного переходу (застосовується для введення дійсного числа, для доведення теореми про можливість зображення ірраціонального числа нескінченним ланцюговим дробом).

Під час вивчення навчальної дисципліни «Числові системи» відбувається узагальнення, розширення, систематизація і повне обґрунтування знань студентів про два важливі принципи математики:

1. Принцип математичної індукції.
2. Принцип побудови розширення числових систем.

Загальновідомо, що на практиці мають місце два основні методи побудови розширення числової системи – аксіоматичний метод і конструктивний метод. Варто зауважити, що у шкільному курсі математики використовується другий із них – конструктивний. А під час вивчення курсу «Числові системи», як правило, використовується аксіоматичний метод побудови розширення числових систем. Майбутні вчителі математики повинні володіти обома методами, розуміти різницю між ними та знати, в яких умовах кожен із методів можна застосувати.

Крім того, аксіоматична теорія натуральних чисел, а значить і всіх решти числових систем, – напівформальна. Це означає, що прямих означень основні поняття не мають, опосередковано вони означаються через систему аксіом. В останніх фіксуються властивості, відношення та зв'язки основних об'єктів теорії. Логічні засоби, які використовуються для доведень тверджень, не описуються в жодній формі. Наприклад, розглянемо аксіоматичне означення системи натуральних чисел, наведене у [34]:

Означення. Натуральними числами називаються елементи будь-якої алгебри (N, '. +, ·, 1), де N – непорожня множина, $1 \in N$, «'» – символ унарної алгебраїчної операції, «+», «·» – символи бінарних алгебраїчних операцій на N, причому виконуються такі властивості (аксіоми Пеано):

1. $\forall a \in N \; a' \neq 1$;

2. $\forall a,b \in N \; a' = b' \Rightarrow a = b$;

3. Аксіома індукції:

$\forall M \; (M \subseteq N \wedge 1 \in M \wedge \forall a \in N \; (a \in M \Rightarrow a' \in M) \Rightarrow M = N$;

4. $\forall a \in N \; a + 1 = a'$;

5. $\forall a,b \in N \; a + b' = (a + b)'$;

6. $\forall a \in N \; a \cdot 1 = a$;

7. $\forall a,b \in N \; a \cdot b' = a \cdot b + a$.

Варто зауважити, що це не єдина система аксіом натуральних чисел, існують інші, які рівносильні між самою (див., наприклад, [136], [248]).

Важливо розуміти, що твердження, які в одній системі аксіом є аксіомами, в іншій будуть теоремами, а, значить, повинні бути в тій іншій аксіоматичній теорії доведені.

Знайшли своє відображення під час вивчення розглядуваного курсу елементи методологічних знань *філософського і загальнонаукового рівнів*, зокрема:

І. *Методологічні знання філософського рівня:*

а) існування і єдиність. Теореми про існування і єдиність суми, різниці, добутку, частки двох чисел (натуральних, цілих, раціональних, дійсних, комплексних), питання про єдиність зображення (позначення) чисел, теореми про єдиність упорядкування числових множин тощо;

б) дискретність і неперервність. Ці поняття можна проілюструвати на числових множинах (дискретність множини натуральних і цілих чисел та неперервність множини дійсних чисел);

в) скінченність і нескінченність. Основні числові множини (натуральні, цілі, раціональні, дійсні, комплексні числа) – нескінченні, але ця нескінченність «різна»: множини натуральних, цілих, раціональних чисел – зчисленні, дійсних та комплексних – незчисленні;

г) логічне та історичне. Історично розвиток поняття числа відбувався за схемою $N \subset N_0 \subset Q^+ \subset Q \subset R \subset C$, логічно вивчати $- N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$;

д) істина. Як зазначалося раніше, математика має свій критерій істинності: виводимість, послідовне використання дедуктивного методу доведення тверджень. Побудова теоретичного курсу навчальної дисципліни «Числові системи» задовольняє цей критерій: під час вивчення дисципліни доводяться навіть «очевидні» для студентів факти, наприклад, 2 + 2 = 4 (та й ще не одним способом).

II. *Методологічні знання загальнонаукового рівня:*

а) метод моделювання (застосовується, наприклад, для доведення незалежності системи аксіом Пеано, для доведення категоричності аксіоматичних теорій числових систем);

б) метод аналогій (наприклад, аксіоматичні означення цілих, раціональних, дійсних, комплексних чисел вводяться *аналогічно:* формулюються структурні аксіоми (кільця чи поля), а далі – спеціальні аксіоми);

в) індукція та дедукція (взаємозв’язок цих методів яскраво проявляється під час доведення тверджень методом математичної індукції – на першому етапі маємо індуктивні міркування, але в цілому це дедуктивне міркування, бо опирається на аксіому. Роль аксіоми індукції саме і полягає в тому, що вона дає змогу за *скінченну* кількість кроків завершити доведення властивості, характерної для *нескінченної* множини натуральних чисел);

г) метод узагальнення (наприклад, аксіома мінімальності для кільця цілих чисел є узагальненням аксіоми індукції для множини натуральних чисел);

д) метод абстракції. Число – одна з найперших абстракцій у математиці, причому, якщо натуральне число – це абстракція, то ціле число – це абстракція від абстракції.

Фундаментальні поняття курсу «Числові системи»: алгебраїчна операція, відношення, рефлексивне, симетричне, транзитивне відношення, відношення порядку й еквівалентності, архімедівський порядок, алгебраїчна структура, упорядкована структура, натуральне, ціле, раціональне, ірраціональне, дійсне, комплексне число, кватерніон, алгебра скінченного рангу, комутативна, асоціативна, дистрибутивна алгебраїчна операція.

Фундаментальні теоретичні факти: принцип побудови розширення числової системи, аксіоматичний і конструктивний методи побудови розширення числових систем, аксіоми Пеано; аксіоматичні означення системи натуральних, цілих, раціональних, дійсних та комплексних чисел; властивості операцій додавання, множення, віднімання та ділення у названих числових системах; теореми про представлення цілих чисел через натуральні, раціональних через цілі, дійсних через раціональні, комплексних через дійсні; теорема Фробеніуса.

Фундаментальні відношення: 1) безпосередньо слідувати за, включення множин, рівність множин, відношення порядку, відношення еквівалентності, ізоморфізм. Алгебраїчні операції також можна розглядати як відношення; 2) у процесі вивчення розглядуваного курсу потрібно не тільки продемонструвати, що кожна наступна числова система є мінімальним розширенням попередньої, а й підкреслити, що число ширшої системи можна отримати з чисел попередньої: кожне ціле число є різниця двох натуральних; кожне раціональне число є частка двох цілих; кожне дійсне число є границею фундаментальної послідовності раціональних чисел; кожне комплексне можна представити у вигляді $x + iy$, де x та y – дійсні числа. Крім того, всі розглянуті числові системи мають дві основні комутативні та асоціативні операції – додавання та множення, операція множення дистрибутивна відносно додавання. Майбутній учитель математики має знати, що існує подальше розширення поля комплексних чисел – тіло кватерніонів. Але для побудови такого розширення прийшлося відмовитися від властивості комутативності множення.

Зв'язок з математичними дисциплінами. Поняття числа є основою, фундаментом вивчення всіх математичних (і не тільки) дисциплін. Крім того, несуперечливість всієї математики зводиться до несуперечливості арифметики натуральних чисел.

Назвемо основні зв’язки навчальної дисципліни «Числові системи» з математичними дисциплінами. Для вивчення вказаної дисципліни необхідні знання з:

1) *Математичного аналізу*: множина, операції над множинами, скінченні, зчисленні множини, функція, фундаментальна послідовність, границя послідовності, норма, послідовності в нормованих просторах. У той же час поняття числа лежить в основі обґрунтування теорії границь.

2) *Алгебри і теорії чисел*: алгебраїчна операція, алгебраїчні структури, ланцюгові дроби та їх властивості, підхідний дріб.

3) *Математичної логіки та теорії алгоритмів*: логічні операції, логічні закони, аксіоматична теорія, властивості системи аксіом, поняття алгоритму (наприклад, алгоритм зображення квадратичної ірраціональності ланцюговим дробом).

Знання, отримані студентами під час вивчення дисципліни «Числові системи», необхідні для вивчення:

1) *Елементарної математики*: знання про числові множини необхідні практично для вивчення всіх змістових модулів цієї навчальної дисципліни. Наприклад, без знання властивостей множин натуральних та дійсних чисел студенту важко зрозуміти, що функції $y = x^2, x \in N;$ $y = x^2, x \in R;$ $y = x^2, x \in$ [-2; 2], $y = x^2, x \in N \cap$ [-2; 2], є різними.

2) *Методики навчання математики*: даний курс є теоретичною базою для розширення поняття числа в курсі математики загальноосвітньої школи.

Історія розвитку. Історія науки дозволяє прослідкувати шлях виникнення та розвитку певного поняття чи теорії. Оскільки розглядувана навчальна дисципліна вивчає числові системи, то в першу чергу треба наголосити, що ідея розширення поняття числа послідовно розвивається в шкільному курсі математики за *історичною* схемою розвитку цього поняття, а саме: $N \subset N_0 \subset Q^+ \subset Q \subset R \subset C$. Що стосується курсу «Числові системи», то порядок введення числових систем інший: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$.

Наведемо основні історичні факти, з якими доцільно ознайомити студентів під час вивчення дисципліни «Числові системи» (табл. 3.2.1).

Таблиця 3.2.1

Основні етапи розвитку числових систем

Вчені, школи	Ідеї	Століття, роки
Я. Відман	Вперше записав додатні та від'ємні числа із знаками «+» та «-» відповідно.	Кінець XV ст.
Д. Кардано, Р. Бомбеллі	Поява комплексних чисел в алгебрі.	XVI - XVII ст.
І. Бернуллі, Г. Лейбніц	Поява комплексних чисел в аналізі.	Початок XVIII ст
Ж. Ліувілль	Доведено існування трансцендентних чисел.	1844 р.
Г. Кантор	Довів незчисленність множини трансцендентних чисел.	60-і роки XIX ст.
Ж. Ерміт	Довів трансцендентність числа *e*.	1873 р.
К. Ліндеман	Довів трансцендентність числа π	1882 р.
Р. Дедекінд	Ідеї аксіоматизації системи натуральних чисел, зокрема, принцип індукції.	1888 р.
Д. Пеано	Напівформальна аксіоматична теорія натуральних чисел.	1891 р.

Продовження таблиці 3.2.1.

К. Вейєрштрасс, Р. Дедекінд, Г. Кантор, А. Колмогоров, Є. Ремез	Створення теорії дійсних чисел. Побудова розширення поля дійсних чисел до тіла кватерніонів.	Кінець XIX – початок XX ст.

Варто зазначити, що натуральні та додатні раціональні числа були відомі вченим ще в античні часи. Від'ємні раціональні числа, ірраціональні, дійсні та комплексні числа довгий час не визнавалися повноправними.

3.3. Методологічні знання з методики навчання математики

У науково-методичній літературі знаходимо такі підходи до трактування предмету дослідження методики математики:

1) Г. Саранцев [220, с. 31] зауважує: «Використання системного аналізу дозволило точно сформулювати предмет методики навчання математики: ним є методичні системи. Об'єктом дослідження методики навчання математики є математична освіта, навчання математики і виховання».

2) Схоже тлумачення пропонують В. Швець та А. Прус [207, с. 8]: «Предметом методики навчання математики є спеціальна методична система, яку складають цілі та зміст математичної освіти, методи, засоби, форми навчання, індивідуальність учня та результати навчання».

3) За З. Слєпкань [227, с. 8] методика навчання математики – «це наука про математику як навчальний предмет і закономірності процесу навчання математики учнів різних вікових груп».

4) Н. Вірченко [33, с. 9], розглядаючи методику викладання вищої математики, визначає: «Методика викладання математики (дидактика математики) – це наука про різні способи та форми передачі математичних знань, тобто наука про математику як навчальний предмет».

Врахувавши основні завдання методики навчання математики і співставивши їх зі складовими методичної системи, приходимо до висновку, що у всіх трьох тлумаченнях мова йде практично про одне і теж. Отже, ***предметом*** дослідження методики навчання математики як навчальної дисципліни у педагогічному ВНЗ є методичні системи.

Основними (фундаментальними) поняттями методики навчання математики як науки є мета, зміст, методи, засоби та форми навчання математики [14, с. 9].

До *основних відношень* в методиці навчання математики відносять:

1) залежність змісту навчання математики, методів, засобів і форм від цілей освіти і навчання, поставлених суспільством;

2) відношення «викладання – навчальний матеріал – учіння».

Методика навчання математики належить до циклу педагогічних наук. Вона тісно пов’язана з *математичними дисциплінами педагогічного ВНЗ, дидактикою, психологією, логікою, фізіологією, філософією,* *педагогічним досвідом учителів.* Наведемо приклади названих зв'язків.

1. Зміст навчального матеріалу шкільного курсу математики має відповідати сучасному стану розвитку математики. Завдання методики навчання математики – відібрати необхідні математичні знання та дидактично їх обробити. При цьому треба враховувати, що «істинна доступність курсу математики, тобто істинна можливість його засвоєння, досягається не через його збіднення і спрощення, а навпаки досягненням «критичної маси» його змісту і породженої нею можливості здійснення різноманітних форм пошуково-дослідницької діяльності, «критичної маси» її багатовимірності і багаторівневості» [103, с. 83]. Предмет математики як науки безпосередньо впливає на ідеологію математики як шкільного предмета, а, отже, і на методику навчання математики.

2. Дидактика і методика навчання математики є різними науковими областями, які відносяться до педагогічних наук. Дидактичні закономірності і положення проявляються в методиці навчання математики, але форми їх прояву можуть відрізнятися від дидактичних. Так, загальні цілі освіти (дидактичні положення) виступають у конкретних методиках, у тому числі і методиці навчання математики, у якості методологічних положень для предметних методик. У той же методика навчання математики збагачує дидактику своїми досягненнями.

3. Для дослідження і розв'язання проблем, які розглядаються в методиці навчання математики, використовуються результати психологічних досліджень, враховуються психологічні особливості певної вікової

групи (закономірності розвитку пам’яті, мислення, уваги, уяви та уявлення, мови, волі тощо). Наприклад, у роботі [81] на основі аналізу психологічних досліджень встановлено, що вік 18-20 років є вдалим для вивчення курсу проективної геометрії, хоча студентам було б легше засвоювати його, якби він розглядався у 20-річному віці – піку розвитку теоретичного та образного мислення, пам’яті.

4. Методика навчання математики тісно пов’язана з логікою, оскільки остання є складовою частиною математики, а математична логіка – мовою математики. Питання, пов’язані з формуванням понять, роботою над теоремою, навчанням доведенню тощо, розв’язуються з урахуванням логічних закономірностей. Для майбутнього вчителя математики важливо бачити і розуміти логічні прогалини шкільного курсу математики та знати шляхи їх усунення. Розглянемо приклади.

- Під час вивчення числової лінії. У шкільному курсі математики жодна із числових систем не означається (цих означень і не може бути, враховуючи принцип доступності), ні одна із арифметичних операцій не означається, ні одна із властивостей цих операцій не доводиться. І якщо поняття (але не означення) про натуральне число, про арифметичні дії над натуральними числами та їх властивості формуються ще в початковій школі на теоретико-множинній основі, а на основі поняття натурального числа формуються поняття про цілі та раціональні числа, то теорія дійсного числа у шкільному курсі математики не має теоретичного підґрунтя.

- Під час вивчення функцій. Питання про обґрунтування (навіть не доведення) області визначення та області значень функцій залишаються відкритими, оскільки вони спираються на теорію чисел.

- Послідовність вивчення окремих питань. Поняття про лінійну функцію, її графік та властивості вивчаються у 7 класі. Графік цієї функції – пряму – будують, враховуючи що областю визначення цієї функції є множина всіх дійсних чисел, але поняття дійсного числа розглядається у 8 класі.

5. І. Павлов підкреслював: «Мабуть, наше виховання, навчання, дисципліна, будь-які звички – це довгі ряди умовних рефлексів» [195, с. 65]. Утворення умовних рефлексів складає першу сигнальну систему, яка забезпечує предметне, образне мислення конкретними образами реальної дійсності. Проте для навчання математики як науки абстрактної особливе значення має властивість вищої нервової діяльності сприймати почуті й побачені слова та символи. Такі властивості складають другу сигнальну систему.

За допомогою 1-ї сигнальної системи досягається конкретно-чуттєве сприйняття навколишнього середовища й самого організму у вигляді почуття та уявлення. 2-га сигнальна система забезпечує абстрактно-узагальнене сприйняття навколишнього світу у вигляді понять, роздумів, висновків.

6. Учительська практика не тільки вказує актуальні напрями методичних досліджень, а й має значний вплив на формування наукових концепцій. Крім того, практика є засобом аргументації і апробації результатів методичних

досліджень. Саме на практиці за допомогою експерименту підтверджується гіпотеза дослідження. Під час навчання методики математики майбутнього вчителя математики треба готувати як до проведення самостійних методичних досліджень, так і до впровадження розроблених іншими методик.

Варто розрізняти методику навчання математики як навчальну дисципліну у педагогічному ВНЗ і як науку. Якщо розглядати методику навчання математики *як навчальну дисципліну*, то до методів цієї дисципліни варто віднести методи навчання математики.

На сьогодні існує різна класифікація методів навчання математики залежно від вибору основи класифікації (детально про це у [227, с. 54 - 55]). Так, можна визначити *систему методів* навчання математики як сукупність загальних і спеціальних методів навчання. До спеціальних методів відносять ті методи навчання, які відповідають науковим методам пізнання математики (спеціальні методи навчання залишаються незмінними протягом усього періоду навчання студентів). Група спеціальних методів навчання: спостереження, експеримент, аналіз, синтез, індукція, дедукція, порівняння, узагальнення, абстрагування, конкретизація, аналогія, моделювання, алгоритмічний метод [321].

У контексті нашого дослідження, де методологія розглядається як вчення про організацію діяльності, підтримуємо класифікацію методів навчання математики, яку виокремив Г. Саранцев [220, с. 91-92]: індуктивно-репродуктивний, індуктивно-евристичний, індуктивно-дослідницький, дедуктивно-репродуктивний, дедуктивноевристичний, дедуктивно-дослідницький, узагальнено-репродуктивний, узагальнено-евристичний, узагальнено-дослідницький.

Ми підтримуємо думку Г. Саранцева, що методологічною основою методів досліджень у методиці навчання математики *як науці* є діалектика, системний аналіз та діяльнісний підхід [220, с. 101].

Діалектичний метод, як правило, використовується під час аналізу становлення методики навчання математики як самостійної науки, для з'ясування об'єкта та предмета дослідження цієї дисципліни тощо.

Оскільки предметом дослідження методики навчання математики є методичні системи, то не можна обійтися без різних форм системного аналізу.

Сутність діяльнісного підходу з точки зору методології реалізується в дільнісній природі знань.

Слідом за Г. Саранцевим вважаємо експеримент найпоширенішим методом досліджень у методиці навчання математики. Існує кілька видів експериментів: констатувальний (на етапі обґрунтування гіпотези дослідження), навчальний (в процесі перевірки гіпотези), психолого-дидактичний (для перевірки теоретичних висновків із психолого-дидактичних закономірностей), методико-психологічні (з метою перевірки прогнозу та проведених спостережень), експерименти-репетиції. Також до методів досліджень у методиці навчання математики відносять: спостереження, анкетування, моделювання, аналіз тощо. Варто зауважити, що до конкретно наукових методів, які застосовуються у методиці навчання математики, доцільно віднести спостереження та анкетування.

Для перевірки гіпотез, оцінки ефективності розроблених методик, обґрунтування результатів експериментів, спостережень, прогнозів використовуються різноманітні статистичні методи. До найпоширеніших відносять: критерій Пірсона (хі-квадрат), медіанний критерій, критерій Стьюдента, критерій рангової кореляції тощо. Приклади використання цих та інших статистичних критеріїв наведено у роботі [17].

Детально *історію становлення і розвитку* методики навчання математики викладено у роботах [7], [33], [220], [227] тощо. Наведемо коротко основні історичні факти.

Виникнення методики навчання математики співвідносять як правило з появою перших шкільних підручників і посібників. Назвемо основні з них:

1. «Арифметика сиречь наука числительная», 1703 рік, автор – Л. Магніцький (1669 – 1739 рр.).
2. Перкладено на російську мову «Початки» Евкліда, 1739 р.
3. «Руководство к арифметике», 1740 р., автор – Л. Ейлер (1707 – 1783 рр.).
4. «Наглядное учение о числе», «Наглядное учение об измерении», 1803 р., автор – Й. Песталоцці (1746 – 1827 рр.).
5. «Руководство к арифметике», 1784 р., автор – Ф. Янкович (1741 – 1814 рр.).
6. «Плоская и сферическая тригонометрия с алгебраическими доказательствами», 1789 р., автор – М. Головін (1756 – 1790 рр.).

7. «О началах геометрии», 1830 р., автор – М. Лобачевський (1792 – 1856 рр.).

8. «Опыт усовершенствования элементов геометрии», 1838 р., автор – С. Гу’рєв (1766 – 1813 рр.).

У другій половині ХІХ ст і початку ХХ ст. роботами В. Єрмакова, М. Попруженка, В. Шереметевського, К. Лебединцева, О. Страннолюбського, В. Євтушевського, О. Гольденберга, С. Шохор-Троцького, А. Давидова, А. Острогорського, В. Латишева створено основи методики навчання алгебри, тригонометрії, початкам аналізу, геометрії, арифметики.

Проблемі вдосконалення математичної освіти, підвищення наукового рівня навчання і викладання велику увагу приділяли відомі математики і методисти: М. Архієзер, О. Астряб, В. Бевз, Г. Бевз, М. Боголюбов, М. Вороний, Д. Граве, О. Дубинчук, А. Конфорович, М. Кравчук, М. Лаврентьєв, К. Лебединцев, Д. Майєргойз, М. Михайловський, М. Остроградський, Є. Ремез, З. Слєпкань, О. Сморгжевський, І. Тесленко, І. Шиманський, В. Швець, М. Шкіль, К. Щербина та багато інших.

У кінці 30-х років ХХ ст. розпочалася робота з підготовки наукових кадрів для розвитку методики математики (відкрито аспірантуру, а потім докторантуру), активізувалася робота з виконання дисертаційних тем з теорії та методики навчання математики [33]. У 1941 році захищена перша докторська дисертація з методики математики (автор І. Арнольд).

На розвиток математичної освіти, а отже і на розвиток методики навчання математики, великий вплив мали:

а) I і II Всеросійські з’їзди викладачів математики (1912, 1914 рр.);

б) міжнародний рух за реформу математичної освіти, перший період якого розпочався наприкінці XIX ст., другий – в 50-х роках XX ст. і триває досі;

в) видання журналу «Математика в школі» (з 1918 року).

РОЗДІЛ 4. ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ НАВЧАННЯ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ МАТЕМАТИКИ В УКРАЇНІ ТА ДЕЯКИХ КРАЇНАХ ЄВРОПИ

4.1. Система навчання майбутніх учителів математики у Польщі

Прагнення України інтегруватися в європейське співтовариство визначає необхідність кардинальних змін у системі освіти України, зокрема вищої. Важливою проблемою розвитку сучасної системи освіти є якість підготовки майбутніх вчителів, у тому числі вчителів математики. Сучасна школа потребує фахівців, здатних сприяти розвиткові самостійної і відповідальної особистості, вихованню творчої індивідуальності. Сьогодні неможливо розв'язувати проблеми, що виникають у конструюванні й організації освітнього процесу звичними способами, спираючись тільки на власний досвід; необхідно враховувати соціальні й культурні потреби підростаючого покоління, інновації та міжнародний досвід.

Окремого дослідження потребують питання підготовки вчителів математики у вищих навчальних закладах України на тлі досвіду Польщі, оскільки обидві країни мають спільне культурне минуле, Польща є нашим найближчим сусідом і входить до зони європейської освіти.

Загальновідомо, що однією з умов інтеграції вітчизняної освіти у зону європейської освіти та міжнародного визнання є створення відповідної документальної бази. Тому запозичення досвіду польської системи освіти сприятиме наближенню до європейських стандартів підготовки професійно компетентних учителів.

Пропонується порівнювати час, відведений на вивчення навчальних дисциплін, у кредитах ECTS та у відсотках, оскільки Україна і Польща мають двоступеневу вищу освіту, але у Польщі перший ступінь триває три роки (180 кредитів ECTS), в Україні – чотири роки (240 кредитів ECTS).

Вимоги до змісту педагогічної підготовки польського вчителя, у тому числі математики, встановлені модернізованим освітнім стандартом (січень 2012 р.) [272]. У стандарті передбачено модульне навчання, реалізація якого полягає в опрацюванні трьох основних модулів:

● математична підготовка;

● психолого-педагогічна підготовка, що здійснюється з урахуванням різних освітніх етапів (дитячий навчальний заклад і початкова школа – I етап, середня школа – II етап, гімназія – III етап, післягімназійна школа та професійне навчання – IV етап), а також з набуттям навичок роботи з дітьми, які мають особливі потреби (інваліди або хронічно хворі діти);

● предметно-методична підготовка з математики.

Є також два факультативних модулі, у межах яких студент може обирати додаткову підготовку до вивчення другого предмета (четвертий модуль) та підготовку у сфері спеціальної педагогіки (п’ятий модуль).

Для аналізу підготовки майбутнього вчителя математики у Польщі було вибрано такі ВНЗ: Поморська академія в Слупську [266], Педагогічний університет ім.

Комісії національної освіти в Кракові [277] та Університет імені Марії Кюрі-Склодовської в Любліні [276], в Україні – Національний педагогічний університет (НПУ) імені М. П. Драгоманова (м. Київ), Глухівський НПУ імені О. Довженка (м. Глухів).

У процесі аналізу було виявлено низку особливостей, які відрізняють підготовку майбутніх учителів математики в Польщі. Так, у польських навчальних планах всіх згаданих ВНЗ не викладаються такі дисципліни:

● національного спрямування (історія Польщі, історія польської культури, польська мова (за фаховим спрямуванням));

● екологія.

Для українських ВНЗ нормативною є дисципліна «Безпека життєдіяльності» (3 кредити),у польських планах навчальна дисципліна «Безпека життєдіяльності (БЖД) та гігієна праці» є позакредитною(у Слупську та Любліні) і на її вивчення відведено 4 год. лекцій; у Кракові – 1 кредит.

В Україні навчальні дисципліни «Історія української державності», «Українська культура», «Українська мова (за професійним спрямуванням)», «Екологія», «Безпека життєдіяльності» належать до нормативних дисциплін і на їх вивчення відведено загалом 15 кредитів ECTS (6,5 % загальної кількості).

Крім того, серед варіативних дисциплін польських навчальних планів немає політології, релігієзнавства, правознавства тощо. Серед дисциплін гуманітарного та соціально-економічного спрямування пропонуються

«Етика» (Люблін, 1 кредит), «Історія математики» або «Історія філософії» (Слупськ, 3 кредити).

У польських навчальних планах зменшено кількість годин на вивчення філософії (Україна – 3 кредити, Польща – 2 кредити). Водночас на вивчення іноземної мови (Україна) відведено 6 кредитів ECTS, або 2,5 % загальної кількості, у Польщі – 4 кредити (2 %) у Любліні, 12 кредитів (7 %) у Кракові й Слупську.

Отже, на *загальну підготовку* майбутнього вчителя математики у Польщі відведено і менше предметів, і меншу кількість годин.

Порівняльна характеристика предметів *психолого-педагогічного спрямування* у ВНЗ Польщі та України свідчить, що ці предмети, а також педагогічна практика передбачені навчальними планами обох країн. В Україні предмети цього спрямування становлять 7–8 %, у Польщі – 5–7 % загального навантаження студентів-математиків.

Також не істотно відрізняється обсяг часу, відведений на вивчення дисциплін *методичного спрямування*: в обох країнах це приблизно 6 % загального навантаження.

Дещо відрізняється організація проходження *педагогічних практик* у Польщі та Україні. Так, в Україні студенти-математики проходять три види практик: педагогічна практика (пропедевтична) (3–4-й або 7-й семестри, 4,5 кредиту), навчально-залікова педагогічна практика з математики (8-й семестр, 7–9 кредитів) та педагогічна практика в літніх оздоровчих таборах (6-й семестр, 3 кредити, м. Глухів) або практика з виготовлення та використання засобів наочності з математики (8-й семестр, 1,5 кредиту, м. Київ). Таким чином, на шкільну практику відведено 6 % часу загального обсягу підготовки. Практики у польських ВНЗ реалізуються у двох формах: загальнопедагогічна практика (1 кредит) і предметно-методична практика (4 кредити на практику з математики та 4 кредити на практику з інформатики, якщо студент обрав додатковий предмет викладання – інформатику). Отже, шкільна практика охоплює 5 % загального навантаження. Варто зауважити, що вже на першому ступені (три роки навчання) польські студенти проходять практику з додаткової спеціальності.

Істотною мірою відрізняється і кількість предметів *математичного спрямування* (рис. 4.1.1).

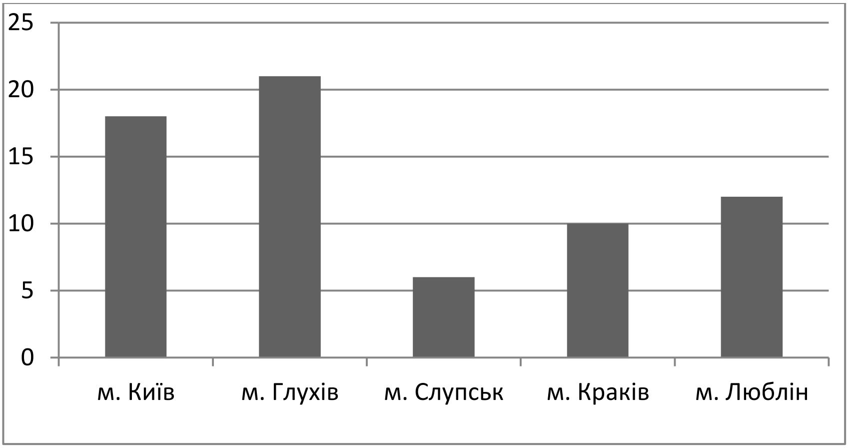


Рис. 4.1.1. Кількість предметів математичного спрямування

Назви математичних предметів, які вивчають польські студенти, наведені в таблиці 4.1.1 курсивом (переклад авторський). Незважаючи на значні відмінності в кількості математичних предметів, їх частка від загального навантаження у ВНЗ обох країн відрізняється незначно: 44-45 % в Україні та 39-52 % у Польщі.

Варто відмітити, що в обох країнах значну роль у математичній підготовці майбутнього вчителя математики відіграє математичний аналіз (з усіх математичних дисциплін в обох країнах на його вивчення відведено найбільшу кількість годин, а саме: в Україні – 18 кредитів, у Польщі – 22 кредити).

У всіх трьох досліджуваних нами ВНЗ Польщі на першому курсі читається дисципліна «Вступ до логіки та теорії множин» (Wstęp do logiki i teorii mnogości). На її вивчення відведено 7 кредитів. Підсумковим етапом I ступеня підготовки є дипломні семінари обсягом від 8 до 21 кредиту.

Таблиця 4.1.1.

Навчальний план

Університет імені Марії Кюрі-Склодовської (Люблін, Польща) (Matematyka (specjalności nauczycielskie), I stopień [6 sem], stacjonarny, ogólnoakademicki, 2014)

Назва дисципліни	**ECTS**
Обов'язкові дисципліни	
1 семестр	
Лінійна алгебра та аналітична геометрія	8
БЖД та гігієна праці	0
Основи інформатики	4
Використання бібліотеки	0
Вступ до логіки і теорії множин	7
Вибрані питання математики	1
2 семестр	
Алгебра	7
Математичний аналіз 1.	9
Англійська мова I	1

Продовження таблиці 4.1.1

Основи алгоритмізації і програмування	6
Практика загально педагогічна	1
3 семестр	
Математичний аналіз II	8
Бази даних	5
Англійська мова II	1
Числові методи	1
Інструменти і методи інформаційних технологій	3
Математичні пакети	1
Практика з математики	1
4 семестр	
Математичний аналіз III	5
Комплексний аналіз	2
Елементи топології і диференціальної геометрії	3
Лабораторні роботи з фізики	2
Англійська мова III	1
Практика з математики	3
Диференціальні рівняння	2
Операційні системи	3
Фізичне виховання	1
Вступ до комп'ютерної графіки	2
5 семестр	
Англійська мова IV	1
Практика з інформатики	4
Практика з математики	1
Розробка веб-сторінок	2
Теорія ймовірностей	2
Структури даних і алгоритми	2
6 семестр	
Архітектура комп'ютерних мереж	2
Філософія	2
Розробка програмного забезпечення	2
Дискретна математика	2
Охороно інтелектуальної власності	1
Математична статистика	4

Продовження таблиці 4.1.1

Вибіркові дисципліни	
Спецкурс 1 (за вибором навч. закладу)	5
Психологія (2-ий етап)	2
Загальна психологія	3
Педагогіка (2-ий етап)	2
Загальна педагогіка	3
Етика	1
Основи методики	3
Спецкурс 2 (за вибором навч. закладу)	5
Методика математики (2-ий етап)	6
Методика інформатики (2-ий етап)	6
Семінар по дипломній роботі	9
Риторика	1
Семінар по дипломній роботі	11

Як відомо, у європейських університетах традиційно велику увагу приділяють використанню інформаційних технологій навчання вчителів всіх напрямів підготовки, у тому числі і вчителів математики. Звідси виникає потреба ґрунтовної інформатичної підготовки вчителів усіх профілів до широкого використання комп'ютера як засобу навчання. У Польщі велику кількість годин виокремлюють на проведення лабораторних робіт, що, зокрема, свідчить про високе матеріально-технічне забезпечення навчального процесу. Так, наприклад, за три роки навчання у Любліні кількість годин, відведених на лабораторні роботи, становить 595 годин (з них 435 годин на предмети інформатичного спрямування), а в Україні за чотири роки – всього 390 годин (з них 246 годин на предмети інформатичного спрямування) (НПУ ім. М. П. Драгоманова).

Отже, із проведеного порівняльного аналізу навчальних планів окремих ВНЗ Польщі та України можемо стверджувати, що процес підготовки майбутніх учителів математики у цих двох країнах має спільні та відмінні риси (рис. 4.1.2 і рис. 4.1.3).

Рис. 4.1.2. Розподіл предметів у навчальному плані підготовки вчителя математики у Педагогічному університеті імені Комісії національної освіти в Кракові

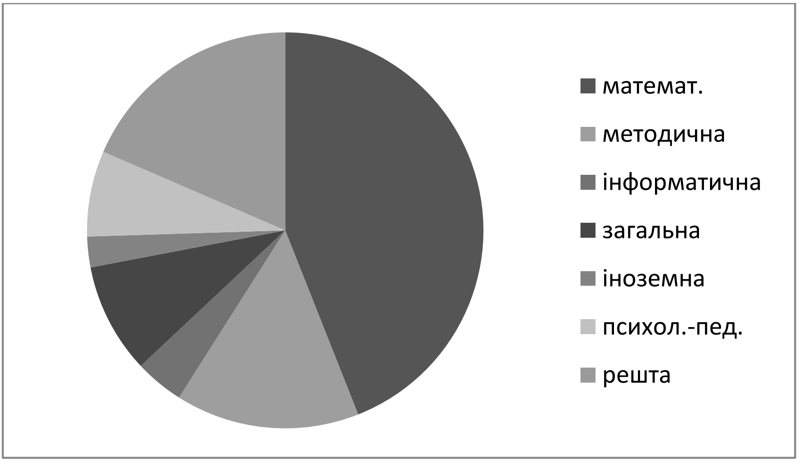


Рис. 4.1.3. Розподіл предметів у навчальному плані підготовки вчителя математики у Національному педагогічному університеті імені М. П. Драгоманова

Майже не відрізняється обсяг годин на математичну та методичну підготовки. Але в Україні студенти вивчають ширший спектр математичних дисциплін протягом довшого терміну. Значна увага у польських ВНЗ приділяється вивченню іноземної мови та інформатичному навчанню майбутніх учителів математики.

Проаналізуємо навчальні плани підготовки магістрів (Педагогічний університет імені Комісії національної освіти в Кракові, Польща та Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, м. Київ, Україна).

У підготовці магістрів можна виокремити дисципліни таких спрямувань: математичного, методичного, методологічного, психолого-педагогічного.

Розподіл кредитів відповідно до певного спрямування наведено у таблиці 4.1.2. та рисунку 4.1.4.

Таблиця 4.1.2

Розподіл обсягу навчального навантаження

Спрямування	**Україна**	**Польща**
Математичне	25 кредитів (21 %)	74 кредити (62 %)
Методичне (включаючи і практику)	36 кредитів (30 %)	22 кредити (18 %)
Методологічне	10 кредитів (8, 3 %)	10 кредитів (8,3%)
Психолого-педагогічне	12 кредитів (10 %)	3 кредити (2,5 %)

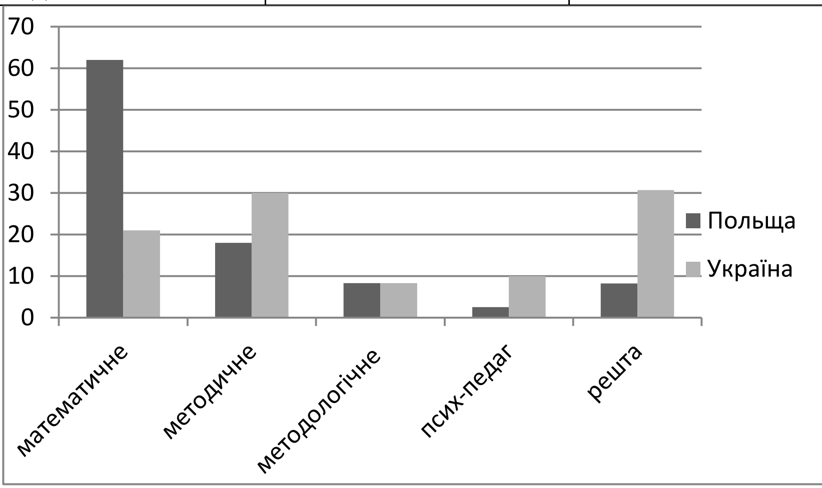


Рис. 4.1.4. Розподіл обсягу навчального навантаження

З наведеної таблиці та діаграми слідує, що у Польщі велика увага приділяється математичній підготовці, менше – методичній. Відрізняється кількість кредитів, відведених на методичну підготовку, через педагогічну практику. Так, в Україні магістри-математики проходять три види практик: науково-дослідна (3 кредити), педагогічна (9 кредитів), науково-педагогічна (12 кредитів). Таким чином, практична підготовка займає 24 кредити. Практика у Польщі реалізується у двох формах: практичні заняття в школі з дидактики математики (3 кредити) та професійна педагогічна практика (4 кредити), що становить 7 кредитів.

Не відрізняється обсяг часу, відведений на вивчення дисциплін методологічного спрямування.

Решта навчального навантаження розподілена так:

1) У Польщі 8,3 % навчального навантаження студентів відводиться на підготовку і проведення державного екзамену, 1,2 % відведено на фізичну культуру та іноземну мову (рівень В2+).

2) В Україні 10 % на підготовку і захист магістерської роботи, 20,7 % на другу спеціальність та спеціалізацію (18,2 %) та 2,5 % на науково-дослідну практику.

Є відмінності і в організації навчання тих студентів, які вступили до магістратури без відповідної психолого-педагогічної чи методичної підготовок. Так, якщо магістрант не отримав відповідну психолого-педагогічну підготовку на першому рівні підготовки (аналог нашого бакалаврату), то він додатково має вивчати дисципліни цього спрямування в обсязі 12 кредитів. Магістранти, які не мають методичної підготовки для викладання математики на II освітньому етапі (середня школа), обов’язково мають додатково пройти таку підготовку в обсязі 13 кредитів, у тому числі практики 4 кредити.

Проаналізуємо, які навчальні дисципліни і в якій послідовності вивчаються магістрами Педагогічного університету (м. Краків) (переклад авторський).

Таблиця 4.1.3

Дисципліни математичного спрямування

Семестр	**Навчальна дисципліна**	**Статус**	**Кредити**
1	Математичний аналіз 1	обов'язкова	4
	Диференціальні рівняння	обов'язкова	4
	Топологія	обов'язкова	5
	Алгебра і теорія чисел 1	обов'язкова	4
	Комплексний аналіз	обов'язкова	5
	Курс за вибором (один із запропонованих Інститутом математики)	вибіркова	5
Разом за семестр			***27***
2	Алгебра і теорія чисел 2	обов'язкова	6
	Математичний аналіз 2	обов'язкова	6
	Геометрія	обов'язкова	5
	Семінар по диплому 1	вибіркова	2
Разом за семестр			***19***
3	Функціональний аналіз	обов'язкова	6
	Теорія ймовірності та математична статистика	обов'язкова	6
	Курс за вибором (один із запропонованих: алгебраїчна геометрія, математичні основи інформатики, методи обчислень, числові методи розв'язання диференціальних рівнянь)	вибіркова	3
Разом за семестр			***16***
4	Теорія множин	обов'язкова	5
	Дискретна математика	обов'язкова	4
	Семінар по диплому 2	вибіркова	3
Разом за семестр			***12***

Таблиця 4.1.4

Дисципліни методичного спрямування

Семестр	**Навчальна дисципліна**	**Статус**	**Кредити**
1	Семінар з евристичних методів розв'язування математичних задач 2	обов'язкова	2
Разом за семестр			***2***
2	Методика навчання математики на III і IV освітньому етапі 1	обов'язкова	3
	Інформаційні технології в навчанні математики	вибіркова	2
Разом за семестр			***5***
3	Методика навчання математики на III і IV освітньому етапі 2	обов'язкова	3
	Теоретичні основи шкільної математики на III і IV освітньому етапі	обов'язкова	2
	Курс за вибором (один із запропонованих: семінар з методики вищої школи, семінар з методики старшої школи, семінар з досліджень у методиці математики)	вибіркова	3
	Практичні заняття в школі з дидактики математики для III і IV освітнього етапу	обов'язкова	3
Разом за семестр			**11**
4	Практика	обов'язкова	4
Разом за семестр			**4**

Частка математичної підготовки зменшується за семестрами, у той же час збільшується відповідно частка методичної підготовки (див. таблиці 4.1.3 та 4.1.4).

Зупинимося детальніше на дисциплінах методологічного спрямування. З аналізу змісту предметів навчального плану підготовки магістрів (Польща) слідує, що формування і розвиток методологічних знань здійснюється під час вивчення практично всіх дисциплін.

Зокрема, серед питань, які розглядаються під час проведення семінарів (seminarium dyplomove) є питання про основи написання магістерських робіт (правила і редакційні вимоги).

Метою Оглядового семінару (Konwersatorium przeglądowe) є: Огляд основних понять і тверджень, які вивчалися в основних курсах I та II рівнів навчання. З'ясування зв'язків між різними математичними теоріями та їх застосуваннями. Формування вмінь точно і водночас доступно сформулювати зміст певної математичної теорії. На вивчення цієї дисципліни відведено 1 кредит.

Значну роль у формуванні методологічних знань і вмінь магістрантів відіграють історія математики, філософія математики (вони відносяться до вибіркових дисциплін і на їх вивчення відведено по 3 кредити).

Значна увага формуванню методологічних знань і вмінь приділена і під час проведення Семінару з евристичних методів розв'язування математичних задач (Konwersatorium z heurystycznych metod rozwiązywania zadań matematycznych). Зокрема, тут розглядаються питання, пов'язані з узагальненням, з'ясуванням аналогій, відкриттям тверджень та доведень.

До дисциплін методологічного спрямування, які вивчаються магістрантами НПУ імені М. П. Драгоманова, ми відносимо: філософія науки, методологія наукового дослідження, історія та методологія математики. Серед названих дисциплін на формування методологічних знань та вмінь саме майбутнього вчителя математики чи не найбільший вплив має «Історія та методологія математики».

Зрозуміло, що ефективно вирішити проблему формування методологічних знань і вмінь можна тільки за умови, що названі знання і вміння будуть включені до всіх предметів математичного циклу.

Як бачимо, найбільше відрізняється обсяг годин, відведених на математичну підготовку майбутнього вчителя математики. Відрізняється і організація та проведення педагогічних практик. Заслуговує на увагу і впровадження у практику підготовки магістрів – майбутніх учителів (викладачів) математики організація навчання тих студентів, які не мають відповідної психолого-педагогічної та методичної підготовки.

4.2. Система навчання майбутніх учителів математики у Болгарії

Для з'ясування особливостей підготовки майбутніх учителів математики проаналізуємо навчальний план підготовки бакалавра у Шуменському університеті імені Єпископа Костянтина Преславського (м. Шумен, Болгарія)[271] (табл. 4.2.1, курсивом виокремлено дисципліни математичного спрямування).

Таблиця 4.2.1

Навчальний план

(Шуменський університет імені Єпископа Костянтина Преславського)

№	Навчальна дисципліна	ECTS
	1 семестр	
1.	*Лінійна алгебра*	8
2.	*Математичний аналіз I*	9
3.	Практикум з інформаційних технологій	4
4.	Психологія	4
5.	*Факультативна дисципліна I (Математика)*	5
	2 семестр	
6.	*Аналітична геометрія*	6
7.	*Математичний аналіз II част*	8
8.	Програмування I част	8
9.	Іноземна мова (Англійська мова)	2
10.	Педагогіка	4
11.	*Факультативна дисципліна II (Математика)*	2
	3 семестр	
12.	*Математичний аналіз III част*	7
13.	Програмування II част	6
14.	*Алгебра I част*	7
15.	*Геометрія I част*	5
16.	Факультативна дисципліна III	3
17.	Факультативна дисципліна IV: Спорт	2
	4 семестр	
18.	*Математичний аналіз IV част*	6
19.	*Алгебра II част*	6
20.	Шкільний курс алгебри	8
21.	Комп’ютерні системи	5
22.	*Вибіркова дисципліна I (Математика)*	5
	5 семестр	
23.	*Диференціальні рівняння*	6
24.	*Числові методи*	5
25.	*Теорія чисел*	4
26.	Шкільний курс геометрії	7

Продовження таблиці 4.2.1

27.	Загальна методика навчання математики	6
28.	Вибіркова дисципліна II (Практикум з інформатики)	2
	6 семестр	
29.	Методика навчання математики (окремих тем)	4
30.	Практикум з web-технологій	2
31.	*Комплексний аналіз*	6
32.	*Теорія ймовірностей та математична статистика*	6
33.	Пропедевтична педагогічна практика з математики	2
34.	Пропедевтична педагогічна практика з інформатики	2
35.	Шкільний курс інформатики з методикою викладання інформатики	5
36.	Вибіркова дисципліна III (Методика)	3
	7 семестр	
37.	Поточна педагогічна практика з математики	4
38.	Поточна педагогічна практика з інформатики	3
39.	*Геометрія II част (Диференціальна)*	8
40.	Математичний практикум	4
41.	Шкільний курс інформатики з методикою викладання інформатики	7
42.	*Вибіркова дисципліна IV (Математика)*	4
	8 семестр	
43.	Переддипломна педагогічна практика з математики	5
44.	Переддипломна педагогічна практика з інформатики	3
45.	Вибіркова дисципліна V (Методика)	3
46.	Вибіркова дисципліна VI (Інформатика)	4
47.	Вибіркова дисципліна VII (Практикум з інформатики)	2
48.	Вибіркова дисципліна VIII (Практикум з інформатики)	3

З аналізу таблиці 4.2.1. можемо зробити висновок про такий розподіл навчального навантаження студентів:

1) Математична підготовка займає 47 % всього навантаження.
2) Методична підготовка – 20%.
3) Інформатична підготовка – 23 %.
4) Психолого-педагогічна підготовка – 3 %.
5) Мовна підготовка (вивчення англ. мови) – 2 %.

Наочно співвідношення між різними видами підготовок бакалаврів показано на рисунку 4.2.1.

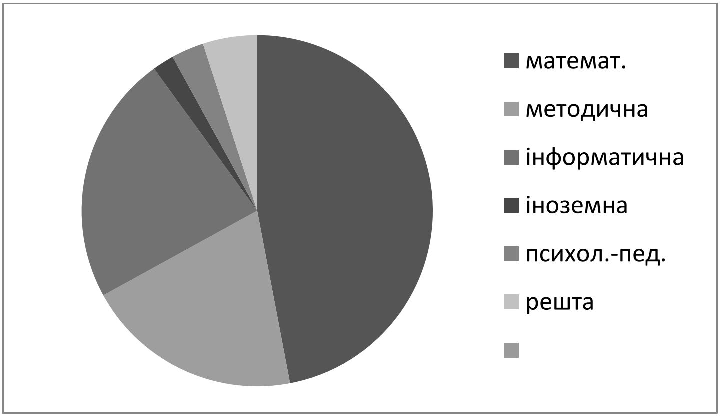


Рис. 4.2.1.Розподіл обсягу навчального навантаження

Підготовка майбутнього вчителя на ОС «Магістр» триває у Шуменському університеті імені Єпископа Костянтина Преславського 1,5 роки (90 кредитів). Зразу доцільно зауважити, що в університеті робиться наголос на *методичній* підготовці майбутнього вчителя математики. Із 90 кредитів 6 кредитів (7 %) відводиться на психолого-педагогічну підготовку, а решта – на методичну підготовку, причому на методичні дисципліни, пов'язані з викладанням математики – 40 кредитів (44 %), з викладанням інформатики – 29 кредитів (32 %).

Таким чином, математична підготовка майбутнього вчителя математики у Шуменському університеті імені Єпископа Костянтина Преславського здійснюється тільки на ОС «Бакалавр». На рівні ОС «Магістр» відбувається розширення і поглиблення психолого-педагогічної та методичної підготовки майбутнього вчителя.

4.3. Система навчання майбутніх учителів математики у Великобританії

Особливий інтерес представляє собою вивчення теорії і практики підготовки майбутнього вчителя, зокрема і вчителя математики, у Великобританії, оскільки за останні десятиліття саме у цій країні з'явилися нові підходи до професійної підготовки вчителя (основний з них – практико-орієнтований [183]).

Галузь знань «Освіта» представлена у британських ВНЗ трьома основними групами освітніх програм: *педагогічні науки* («Education», «Education Studies»), *дошкільна освіта* («Early Years Studies», «Childhood Studies»), *початкова і середня освіта* («Primary Education», «Secondary Education»).

Програми *першої групи* характеризуються вивченням фундаментальних дисциплін (педагогіки, психології, історії й філософії освіти) та великим об'ємом науково-дослідної роботи студентів теоретичного характеру. Випускники таких програм отримують степінь бакалавра гуманітарних або природничих наук, але не є вчителями. Вони можуть вступати на післядипломні педагогічні програми освітніх організацій університетського і неуніверситетського типів [183].

У рамках нашого дослідження розглянемо програми *третьої групи*, які є першою ступінню професійної підготовки майбутніх учителів початкової і середньої шкіл. Їх зміст відрізняється степінню академічності й об'ємом практичної складової. Порівняємо програми підготовки майбутніх учителів математики в університетах Едж Хілл (Edge Hill University) [267] та Сандерленд (Sunderland University)[273].

Проаналізовані програми розраховані на різну кількість британських кредитів: Едж Хілл – 360 академічних кредитів (навчальні дисципліни) і 80 кредитів педагогічна практика; Сандерленд – 360 кредитів (разом з педагогічною практикою). Зауважимо, що 2 кредити CATS (Credit Accumulation and Transfer Scheme) відповідають 1 кредиту ECTS (European Credit Transfer and Accumulation System).

В обох навчальних закладах:

1) підготовка майбутнього вчителя математики триває 3 роки;

2) відсутні навчальні дисципліни загальної підготовки;

3) значна увага приділена практичній підготовці майбутнього вчителя математики. Але розподілена педагогічна практика у ВНЗ по-різному.

Так, в університеті Сандерленд педагогічна практика триває (вона включає в себе і індивідуальне дослідження в галузі освіти) протягом всього третього року навчання (120 британських кредити). Цей рік (3-ій рік підготовки) має назву The Professional Year.

В університеті Едж Хілл педагогічна практика розподілена так: 1-ий рік навчання – Професійна практика1А (20 кредитів), 2-ий рік навчання – Професійна практика 1Б (20 кредитів), 3-ій рік – Професійна практика 2 (40 кредитів), всього – 80 кредитів. Таким чином, практична підготовка майбутнього вчителя математики складає 33% (Сандерленд) і 18% (Едж Хілл) навчального навантаження студентів.

У програмі підготовки майбутнього вчителя математики в університеті Едж Хілл значна увага приділена *математичній підготовці*: 200 британських кредитів (46%). Планується вивчення таких математичних дисциплін: «Математичне доведення і логіка», «Моделювання», «Неперервні функції», «Алгебраїчні та геометричні структури», «Математична статистика», «Дискретна математика», «Лінійна алгебра», «Математичні моделі», «Теорія чисел», «Звичайні диференціальні рівняння» (на кожну навчальну дисципліну відведено по 20 кредитів). Дисципліни *педагогічного спрямування* займають 80 кредитів (18%). Решта приходиться на дисципліни *методичного* спрямування – 80 кредитів (18%).

У програмі підготовки майбутнього вчителя математики в університеті Сандерленд дисципліни *математичного* спрямування займають 160 кредитів (45%). Як і в університеті Едж Хілл, тут значна увага приділена методу моделювання в математиці та практичному застосуванню математики (передбачається вивчення дисциплін: «Моделі в математиці» (20 кредитів), «Структура і модель» (20 кредитів), «Практичні застосування математики» (20 кредитів)). Для дисциплін *психолого-педагогічного* спрямування відведено 40 кредитів (11%), *методичного* – 40 кредитів (11%), серед них 20 кредитів займає дисципліна «Використання і застосування інформаційних технологій в області математики» (у програмі підготовки майбутнього вчителя математики в університеті Едж Хілл така навчальна дисципліна не передбачена).

Наочно співвідношення між дисциплінами різного спрямування підготовки бакалаврів – майбутніх учителів математики показано на рисунках 4.3.1 та 4.3.2.

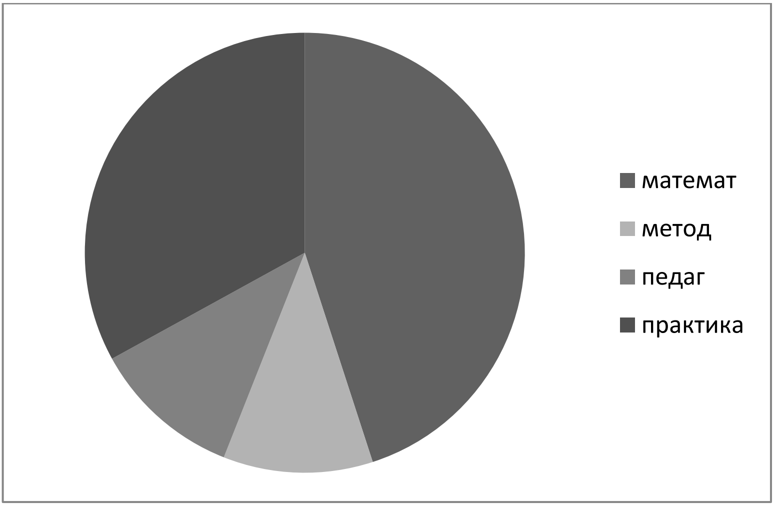


Рис. 4.3.1. Розподіл обсягу навчального навантаження в університеті Сандерленд

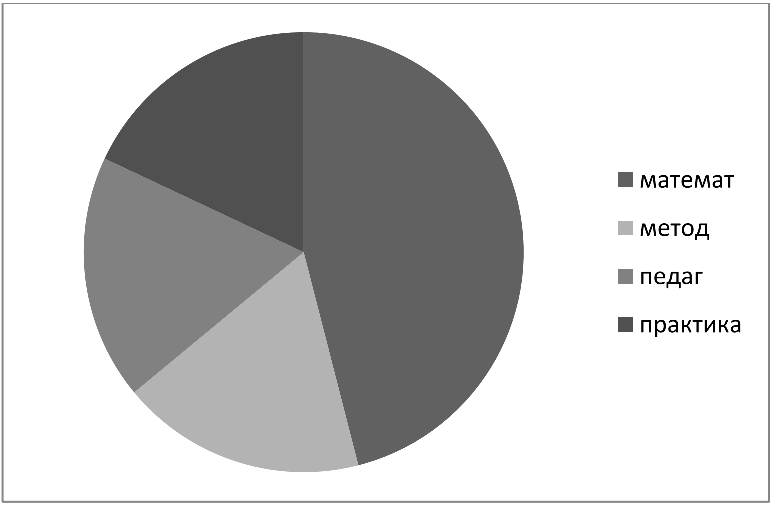


Рис. 4.3.2. Розподіл обсягу навчального навантаження в університеті Едж Хілл

З аналізу змісту навчальних дисциплін підготовки майбутнього вчителя математики випливає, що формування і розвиток методологічних знань відбувається практично під час вивчення всіх дисциплін. Особливу роль у цьому процесі відіграють навчальні дисципліни, пов'язані з методом математичного моделювання: Сандерленд – «Моделі в математиці», «Структура і модель»; Едж Хілл – «Математичні моделі», «Моделювання в механіці». Крім того, значний вплив на формування методологічних знань майбутнього вчителя математики має вивчення навчальної дисципліни «Природа математики» (The Nature of Mathematics) та «Практичне застосування математики» (Practical Applications in Mathematics).

Таким чином, програми підготовки майбутнього вчителя математики у ВНЗ Великобританії відрізняються від відповідних програм України, Польщі, Болгарії об’ємом практичної підготовки. Дисципліни математичного спрямування в названих країнах займають практично однакову частину всього навчального навантаження майбутніх учителів математики.

4.4. Порівняльний аналіз математичної та методичної підготовки майбутніх учителів математики

Формування методологічних знань не може відбуватися відірвано від формування предметних знань, а тому важливим фактором є кількість кредитів (і відповідно годин), відведених на вивчення навчальної дисципліни, та її змістова наповнюваність.

Порівняльний аналіз підготовки майбутніх учителів математики (спеціалізація – інформатика) в Польщі, Болгарії та Україні (таблиця 4.4.1) проведено на основі навчальних планів підготовки бакалаврів Педагогічного університету імені Комісії Національної Освіти (м. Краків) [277], Шуменського університету імені Єпископа Костянтина Преславського (м. Шумен) [271] та ОПП підготовки бакалавра галузі знань 0402. Фізико-математичні науки напряму підготовки 6.040201 Математика* (м. Київ, 2009 р.). (ВНЗ України можуть змінити час на вивчення дисципліни у межах 5 %. Тому реально кількість кредитів, відведених на фундаментальні математичні дисципліни, може змінюватися залежно від ВНЗ).

У таблиці 4.4.1 відображені ті навчальні дисципліни математичного циклу, які відносяться до *нормативних* (обов’язкових) дисциплін. Варто зауважити, що підготовка бакалавра в Україні та Болгарії триває 4 роки (240 кредитів), у Польщі – 3 роки (180 кредитів). Тому частку, яку займають *вибіркові* дисципліни математичного та методичного спрямування від загальної кількості кредитів, назвемо у %: Україна – 7 % і 4 % відповідно; Польща – 3 % і 0 %; Болгарія – 9 % і 4 % відповідно.

Таблиця 4.4.1

Дисципліни математичного та методичного спрямування

Україна		**Польща**		**Болгарія**	
Навчальна дисципліна (семестр)	кредити	Навчальна дисципліна (семестр)	кредити	Навчальна дисципліна (семестр)	кредити
Математичний аналіз (1-4)	18	Математичний аналіз (1-4)	25	Математичний аналіз (1-4)	30
Лінійна алгебра (1-2)	6	Лінійна алгебра (1-2)	14	Лінійна алгебра (1)	8
Алгебра і теорія чисел (3-4)	6	Абстрактна алгебра (3)	6	Алгебра част. 1 (3)	7
				Алгебра част. 2 (4)	6
				Теорія чисел (5)	4
Аналітична геометрія (1-2)	6	Геометрія 1 (1)	7	Аналітична геометрія (2)	6
Основи геометрії (1 або 5)	3	Геометрія 2 (5)	6		
Проективна геометрія та методи зображень (3)	3			Геометрія І (3)	5
Диференціальна геометрія і топологія (4)	4,5	Вступ до топології (2)	4	Геометрія ІІ (диференц.) (7)	8

Продовження таблиці 4.4.1

Диференціальні рівняння (6)	4,5	Вступ до диференціальних рівнянь (6)	2	Диференціальні рівняння (5)	6
Методи обчислень (8)	3			Числені методи (5)	5
Комплексний аналіз (5)	4,5			Комплексний аналіз (6)	6
Теорія ймовірностей та математична статистика (6)	4,5	Теорія ймовірностей (4) Елементи математичної статистики (5)	4 5	Теорія ймовірностей та математична статистика (6)	6
Числові системи (6)	3				
Дискретна математика (5)	3				
Математична логіка і теорія алгоритмів (7)	3	Вступ до логіки і теорії множин (1)	7		
Елементарна математика (3-8)	9			Математичний практикум (7)	4
				Шкільний курс алгебри (4)	8
				Шкільний курс геометрії (5)	7
Методика навчання математики (5-8)	7	Дидактика математики (4-5)	8	Методика навчання математики (5-6)	10
Педагогічна практика	12	Педагогічна практика	8	Педагогічна практика	11

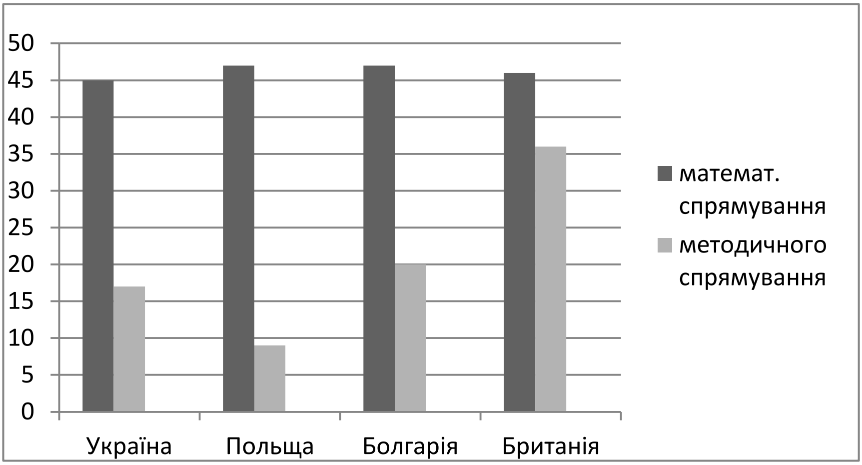


Рис. 4.4.1. Розподіл обсягу навчального навантаження

З'ясуємо частку від загального навантаження студентів у ВНЗ пропонованих країн дисциплін математичного і методичного спрямування (враховуємо дисципліни як обов'язкові, так і вибіркові): Україна – 45 % і 17 %; Польща – 47 % і 9 %; Болгарія – 47 % і 20 % відповідно.

Як бачимо, частка дисциплін математичного спрямування від загального навантаження студентів у ВНЗ розглянутих країн відрізняється незначно. Дисципліни методичного спрямування займають найбільшу частку у Болгарії.

Варто зауважити, що на відміну від України, у Польщі та Болгарії відведено незначну кількість кредитів на вивчення дисциплін психолого-педагогічного спрямування. Так, у Болгарії відведено 4 кредити (2 %) на психологію та 4 кредити (2 %) на педагогіку; у Польщі– 15 кредитів (8 %) на всі дисципліни психолого-педагогічного спрямування. У Польщі та Болгарії значна увага приділена дисциплінам інформатичного спрямування: у Польщі – 17%, у Болгарії – 23 %.

З аналізу таблиці 4.4.1 можна зробити висновок, що найбільша частка у математичній підготовці майбутнього вчителя математики у трьох країнах відведена навчальній дисципліні «Математичний аналіз». Варто зауважити, що навчальні програми з математичного аналізу у Польщі мають деякі відмінності від традиційної, яка прийнята в Україні. Вивчення математичного аналізу у польських ВНЗ розпочинається з аксіоматичної теорії дійсного числа, а не з теорії множин, оскільки на першому курсі читається дисципліна «Вступ до логіки та теорії множин» (Wstęp do logiki i teorii mnogości) (7 кредитів). Доцільно зауважити, що польські студенти вивчають теорію числових рядів одразу після вивчення границі числової послідовності (так, як це пропонує Г. Михалін [173]). Навчальними програмами з математичного аналізу у Польщі і Болгарії не передбачено вивчення змістових модулів «Елементи функціонального аналізу» та «Міра та інтеграл Лебега». Але на вивчення навчального матеріалу відведено кредитів більше, ніж в Україні.

Що стосується навчальної дисципліни «Диференціальні рівняння», то у Болгарії та Україні є така дисципліна, а у Польщі для студентів ОС «Бакалавр» є «Вступ до диференціальних рівнянь», а основні питання теорії диференціальних рівнянь розглядаються для студентів магістратури. Змістова наповнюваність навчальної дисципліни у розглянутих ВНЗ також різна. Зокрема, у Болгарії до змісту навчальної дисципліни

«Диференціальні рівняння» не включено: «Диференціальні рівняння в частинних похідних», «Математичні моделі та диференціальні рівняння» (відповідні змістові модулі передбачені ОПП підготовки бакалавра в Україні).

Наповнюваність навчальних дисциплін вищої алгебри детально проаналізовано у роботі Д. Требенка [236]. Зупинимося детальніше на дисциплінах вищої геометрії.

У Болгарії вища геометрія представлена трьома навчальними дисциплінами:

1. Аналітична геометрія – 6 кредитів (так і в Україні).
2. Геометрія 1 – 5 кредитів. Тут розглядаються питання проективної геометрії, нема питань з методів зображень (в Україні «Проективна геометрія та методи зображень» – 4 кредити).
3. Геометрія 3 – 8 кредитів. Вивчаються питання диференціальної геометрії, нема питань топології (в Україні – «Диференціальна геометрія і топологія» – 4,5 кредити).

У Польщі маємо також три навчальні дисципліни, які презентують вищу геометрію у педагогічному ВНЗ:

1. Геометрія 1 – 7 кредитів. Розглядаються основні поняття і вибрані твердження евклідової геометрії, аналітичний метод на площині, поняття про аксіоматичний метод у геометрії, геометричні перетворення, класичні геометричні побудови. Як бачимо, більшість перерахованих питань відносяться до елементарної геометрії.

2. Геометрія 2 – 6 кредитів. Передбачено вивчення питань диференціальної і аналітичної геометрії. Надаються початкові відомості про різні геометрії.

3. Вступ до топології – 4 кредити. Пропонуємо порівняти питання, з якими мають ознайомитися студенти під час вивчення топології у Польщі та Україні (переклад з польської авторський). Спільні питання виокремлено курсивом.

Таблиця 4.4.2

Перелік питань з топології

Україна	**Польща**
Метричні простори. Властивості відкритих множин. *Топологічний простір*. Методи введення топології в просторі. *Класифікація* точок та *множин топологічного простору*. Аксіоми зліченності. *Збіжні послідовності* в топологічних просторах. *Аксіоми віддільності. Хаусдорфові простори. Неперервні відображення та їх властивості. Гомеоморфні відображення. Проблема гомеоморфізму*. Топологічні властивості множин. Топологічні многовиди. Топологічна розмірність та ейлерова характеристика многовиду. Топологічні многовиди малих розмірностей (одно- та двовимірні) та їх класифікація. Модельні поверхні. Топологічна класифікація многогранників. Правильні многогранники.	*Метричний простір*, куля, *збіжні послідовності* та їх властивості. Операції на множинах. *Різні види множин. Поняття топологічного простору. Неперервні функції, гомеоморфізм, ізометрія та їх інваріанти. Аксіоми віддільності в метричних просторах. Певні типи метричних просторів – віддільні (хаусдорфові), повні, компактні, зв'язні. Неперервні відображення компактних і зв'язних множин. Характеристика компактних і зв'язних множин в певних просторах.*

Отже, студенти українських ВНЗ мають вивчити вищу геометрію ґрунтовніше, фундаментальніше, ніж у Болгарії та Польщі, але за менший проміжок часу!

Проаналізуємо відображення методологічних знань у навчальних дисциплінах ВНЗ розглянутих країн. З аналізу системи змістових модулів навчальних дисциплін (ОПП підготовки бакалавра, Україна) випливає, що *явно* вказані елементи методологічних знань серед змісту таких дисциплін:

1. *Математичний аналіз*: Предмет і метод математичного аналізу. Місце курсу у фаховій та професійній підготовці вчителя математики.

2. *Диференціальні рівняння*. Математичні моделі та диференціальні рівняння: поняття математичної моделі. Обчислюваний експеримент. Застосування звичайних диференціальних рівнянь до розв'язування задач науки і техніки. Застосування диференціальних рівнянь у частинних похідних до дослідження процесів реальної дійсності.

3. *Методика навчання математики.* Методика математики як наука і як навчальний предмет.

4. *Методи обчислень.* Математичне моделювання і обчислювальний експеримент.

Болгарія. Значна увага під час підготовки майбутніх учителів математики у Болгарії приділена методу моделювання. Серед дисциплін за вибором пропонуються такі: «*Вступ до математичного моделювання*», «*Образні моделі в алгебрі*», «*Логічні моделі під час вивчення математики*». Під час вивчення дисципліни «*Складання завдань в шкільному курсі математики*» (варіативна) пропонується розглянути питання: Аналогія. Узагальнення, спеціалізація, конкретизація, неповна індукція. Моделювання.

До змісту навчальної дисципліни «*Числовіметоди*» включено питання: Предмет і історія числових методів.

Значний внесок у формування методологічних знань філософського та загальнонаукового рівня дає навчальна дисципліна «Загальна методика навчання математики». Наведемо перелік питань цієї дисципліни, які це підтверджують:

1. Елементи теорії наукового пізнання. Структурні елементи наукового пізнання. Поняття наукового знання. Взаємозв'язок структурних елементів наукового знання з поняттями «знання», «усвідомлення» і «розуміння». Критерії наукового знання.
2. Співвідношення наукових знань і практики.
3. Форми наукового знання. Види наукових знань (емпіричні і теоретичні знання, інтуїтивні і раціональні моменти в емпіричному і теоретичному знаннях) і зв'язок між ними.
4. Методика навчання математики як наука і предмет: історія, предмет і завдання. Зв'язок з іншими науками.

Польща. Студентам пропонуються курси за вибором «*Математичні моделі в біології і медицині*», «*Основи підготовки математичних документів*». Вивчення першого з них сприяє формуванню методологічних знань філософського та загальнонаукового рівнів, другого – технологічного рівня.

Для кожної навчальної дисципліни пропонується Карта курсу, у якій названо, який зв'язок має дисципліна з іншими дисциплінами математичного циклу, що вивчалися раніше (елемент методологічних знань конкретно наукового рівня).

Серед результатів, яких мають досягти студенти 1-го ступеня навчання (аналог українського бакалаврату), є такі:

1. Розуміє роль і значення математики для розвитку особистості і суспільства (ці знання формуються під час вивчення дисципліни «Seminarium dyplomowe»).

2. Розуміє роль і значення доведень в математиці («Вступ до логіки і теорії множин», «Геометрія 1», «Математичний аналіз», «Вступ до топології», «Абстрактна алгебра»).

3. Розуміє будову математичних теорій, знає математичні засоби для опису і аналізу простих математичних моделей в інших галузях наук («Обчислювальна математика», «Теорія ймовірностей», «Елементи математичної статистики»).

Крім того, серед питань, які розглядаються під час проведення семінарів (Seminarium dyplomove) є питання про основи написання магістерських робіт (правила і редакційні вимоги).

Отже, у досліджуваних ВНЗ майже не відрізняється обсяг годин на математичну та методичну підготовки. Значна увага у польських ВНЗ приділяється вивченню іноземної мови та інформатичному навчанню майбутніх учителів математики. Програми підготовки майбутніх учителів математики у ВНЗ Великобританії вирізняються об’ємом практичної підготовки.

ПІСЛЯСЛОВО

Сучасний ринок праці вимагає від випускника не лише глибоких теоретичних знань, а й здатності самостійно їх застосовувати в нестандартних, постійно змінюваних життєвих ситуаціях, переходу від суспільства знань до суспільства життєво компетентних громадян. У зв'язку з цим розбудова системи освіти України вимагає і нової методичної системи підготовки майбутніх учителів математики.

Неможливість вирішення поставлених завдань за рахунок включення в зміст навчання математики нових навчальних відомостей вимагає пошуку шляхів, задіяння внутрішніх прихованих резервів змісту математичної освіти. Тому на перший план постає завдання цілеспрямованої підготовки студентів до самостійного розвитку набутих в процесі навчання математичних знань і досвіду їх використання. Підготовка учнів і студентів до самоосвіти вимагає опанування ними під час навчання знань про особливості математичного пізнання – методологічних знань.

Навчання майбутніх учителів математики варто розглядати як складну систему: студенти вивчають різні математичні дисципліни, які відповідають певним математичним галузям. Для формування системи методологічних знань майбутнього вчителя математики необхідно виокремити методологічні знання названих рівнів з кожної дисципліни математичного циклу.

Джерелами і критеріями добору системи методологічних знань майбутнього вчителя математики мають виступати: 1) науково-дослідна діяльність вчителя математики, інноваційна діяльність вчителя-практика та навчальна діяльність студента – майбутнього вчителя математики як види діяльності; 2) математика як система і як діяльність.

Система методологічних знань майбутнього вчителя математики у рамках дисциплін математичного циклу має включати всі рівні методологічних знань: філософського, загальнонаукового, конкретно наукового, технологічного.

Формування методологічних знань майбутнього вчителя математики не може відбуватися відособлено від формування предметних знань. Разом з тим акцентування уваги студентів на методологічних знаннях сприяє систематизації предметних знань, а методологічні знання виступають як засіб для системного засвоєння предметних знань.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Албертс Б. Молекулярная биология клетки: В 3-х т. 2-е изд., перераб. и доп. Пер. с англ. / Б. Албертс, Д. Брей, Дж. Льюис, Б. Рэфф, К. Робертс, Дж. Уотсон. – М.: Мир, 1994.– Т. 1. – 517 с.

2. Алексеев П. В. Диалектический материализм (общие теоретические принципы): Учебное пособие / П. В. Алексеев, А. В. Панин. – М.: Высшая школа, 1987. – 335 с.

3. Андронов И.К. Математика действительных и комплексных чисел / И. К. Андронов. – М.: Просвещение, 1975. – 158 с.

4. Артемов А. К. Методологические основы методики формирования математических умений школьников: Дис. … докт. пед. наук: 13.00.02. / Артёмов Алексей Кирилович. – Л., 1986. – 390 с.

5. Баскаков А. Я. Методология научного исследования: учеб. пособие. / А. Я. Баскаков, Н. В. Туленков.– К.: МАУП, 2004. – 216 с.

6. Бевз В. Г. Історія математики / В. Г. Бевз.– Х.: Вид. гр. «Основа», 2006. — 176 с.

7. Бевз В. Г. Історія математики у фаховій підготовці майбутніх учителів: Монографія. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2005. – 360 с.

8. Бевз В. Г. Практикум з історії математики: Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів / В. Г. Бевз. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2004. – 312 с.

9. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры [Текст]: учеб. / Д. В. Беклемишев. – М.: Физматлит, 2005. – 307 с.

10. Белов В.В. Теория графов: учебное пособие для втузов / В. В. Белов, Е.М. Воробьев, В. Е. Шаталов.– М.: «Высшая школа»,1976. – 392 с.

11. Березина Л.Ю. Графы и их применение: Пособие для учителей / Л. Ю. Березина. – М.: Просвещение, 1979. – 143 с.

12. Биков В. Ю. Моделі системи освіти і освітнього середовища – [Електронний ресурс] – Режим доступу: iitta.gov.ua

13. Берталанфи Л. Общая теория систем: критический обзор. Краткий конспект / Берталанфи Людвиг фон // В сборнике переводов: Исследования по общей теории систем. М.: – Прогресс, 1969. – 520 с. (с. 23–82).

14. Богданович М. В. Методика викладання математики в початкових класах: Навч. пос. – 3-є вид., перероб. і доп. / М. В. Богданович, М. В. Козак, Я. А. Король. – Тернопіль: Навчальна книга–Богдан, 2006.–336 с.

15. Большая Советская Энциклопедия. 3-е издание. – М.: Советская Энциклопедия, 1968-1979.

16. Борисов Є. М. Вступ до фінансової математики. Навчально-методичний посібник / Є. М. Борисов, Н. В. Кугай. – Глухів: РВВ ГНПУ ім. О. Довженка, 2015. – 58 с.

17. Борисов Є. М. Математична статистика. Навчально-методичний посібник / Є. М. Борисов, Н. В. Кугай – Глухів, 2012. – 44 с.

18. Борисов Є. М. Задачі прикладного змісту на уроках геометрії / Є. М. Борисов, Н. В. Кугай // Математика в рідній школі. – 2014. – № 7-8. – С.17-21.

19. Борисов Є. М. Про деякі способи наближеного розв'язування рівнянь / Є. М. Борисов, Н. В. Кугай, В. М. Лимар // Математика в сучасній школі. – 2012. – № 7-8. – С. 45-48.

20. Борисов Є. М. Способи розв'язування задач на екстремум / Є. М. Борисов, Н. В. Кугай // Математика в сучасній школі. – 2013. – № 9. – С. 21-25.

21. Борисов Є. М. Досліджуємо кубічну функцію / Є. М. Борисов, Н. В. Кугай // Математика в сучасній школі. – 2013. – № 4. – С. 36-39.

22. Бородин А. И. Выдающиеся математики: Биогр. слов. справ. / А. И. Бородин, А. С. Бугай – [2-е изд., перераб. и доп.]– К.: Рад.школа, 1987. – 656 с.

23. Боровик В. Н. Курс вищої геометрії : навчальний посібник для вузів / В. Н. Боровик, В. П. Яковець . – Суми: ВТД "Університетська книга", 2004. – 463 с.

24. Бурбаки Н. Очерки по истории математики / Н. Бурбаки. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963 – 292 с.

25. Бухштаб А. А. Теория чисел / А. А. Бухштаб. – М.: Просвещение, 1966. – 384 с.

26. Буцан Г. П. Нетипові нерівності та способи їх розв'язування / Г. П. Буцан, Н. В. Кугай, Є. М. Борисов // Математика в рідній школі. – 2015 – № 12. – С. 9-12.

27. Бэкон Ф. Новый Органон. – М.: Соцэкономгиз, 1938. – 243 с.

28. Варій М. Й. Психологія: навч. пос. / М. Й. Варій – [2-ге вид.] – К.: Центр учбової літератури, 2009. – 288 с.

29. Вебер М. В Избранные произведения: Пер. с нем. /Сост., общ. ред. и послесл. Ю. Н. Давыдова; Предисл П. П. Гайденко. – М.: Прогресс, 1990. – 808 с.

30. Вечтомов Е. М. Философия математики: монографія / Е. М. Вечтомов. – Киров: Изд-во ООО «Радуга-ПРЕСС», 2013. – 316 с.

31. Вилейтнер Г. История математики от Декарта до середины XIX столетия / Г. Вилейтнер. – М.: «Наука», 1966. – 508 с.

32. Вірченко Н. О. Вибрані питання методики вищої математики [Текст] / Н. О. Вірченко. – К., 2003. – 282 с.

33. Вірченко Н. О. Нариси з методики викладання вищої математики. / Н. О. Вірченко. – К., 2006. – 396 с.

34. Вивальнюк Л. М. Числові системи / Л. М. Вивальнюк, В. К. Григоренко, С. С. Левіщенко. – К . : Вища шк., 1988. – 272 с.

35. Вигнер Е. Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров / Е. Вигнер. – М.: ИЛ, 1961.– 444с.

36. Вишневський О. І. Теоретичні основи сучасної української педагогіки : навч. посібник / О. І.Вишневський. – [вид. 3-тє, доопрац. і доп.]. – К.: Знання, 2008. – 566 с.

37. Выготский Л. С. Вопросы детской психологии / Л. С. Выготский. – СПб.: СОЮЗ, 1999. – 224 с.

38. Выготский Л. С. Умственное развитие детей в процессе обучения: Сборник статей / Л. С. Выготский.– М.–Л.: Государственное учебно-педагогическое издательство, 1935. – 136 с.

39. Гаврилюк І. П. Методи обчислень. У 2 ч. / І. П. Гаврилюк, В. Л. Макаров.– К. : Вища шк., 1995. – Ч. 1. – 367 с.

40. Галилей Г. Пробирных дел мастер. – М.: Наука, 1987. – 272 с.

41. Гальперин П. Я. Психология мышления и учение о поэтапном формировании умственных действий // Исследование мышления в советской психологии. – М.: Наука, 1966. – С. 230 – 277 с.

42. Ганюшкін О. Г. Теорія груп: Навчальний посібник для студентів механіко–математичного факультету / О. Г. Ганюшкін, О. О. Безущак. – К.: Видавничо–поліграфічний центр «Київський університет», 2005. – 123с.

43. Гегель Г. Энциклопедия философских наук / Г. Гегель. – М.: Мысль, 1974. – Т. 1. Наука логика. – 452 с.

44. Гегель. Энциклопедия философских наук / Г. Гегель. – М.: Мысль, 1975. – Т. 2. Философия природы. – 695 с.

45. Гегель. Энциклопедия философских наук / Г. Гегель. – М.:Мысль, 1977. – Т. 3. Философия духа. – 471 с.

46. Гельфанд А. О. Элементарные методы в аналитической теории чисел / А. О. Гельфанд, Ю. В. Линник. – М. : Физматгиз, 1962. – 272 с.

47. Гербеков Х. А. Дифференциальные уравнения в системе профессиональной подготовки учителя математики в педвузе: Дис. …канд. пед. наук: 13.00.02. / Гербеков Хамид Абдулович. – М., 1991. – 186 с.

48. Гилев В. Г. Методический анализ учебного материала в профессиональной подготовке учителя математики: Дис. …канд. пед. наук: 13.00.02. / Гилев Валерий Георгиевич. – М., 1986. – 180 с.

49. Гихман И. И. Теория вероятностей и математическая статистика / И. И. Гихман, А. В. Скороход, М. И. Ядренко. –М.: Вища школа, 1979. - 408 с.

50. Глушков В. М. Синтез цифровых автоматов / В. М. Глушков. − М.: Физматгиз, 1962. − 476 с.

51. Гмурман Г. Е. Теория вероятностей и математическая статистика / Г. Е. Гмурман. - М.: Высшая школа, 2003. - 480 с

52. Гнеденко Б. В. Курс теории вероятностей / Б. В. Гнеденко. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1988. – 447 с.

53. Гнеденко Б. В. Математика и научное познание / Б. В. Гнеденко. – М. : Знание, 1983. – 63 с.

54. Гнеденко Б. В. Развитие теории вероятности / Очерки по истории математики. Учебн. Пособие / Под ред. Б. В. Гнеденко – М.: Изд-во МГУ, 1997. – 496 с.

55. Гой Т. П. Диференціальні рівняння: навчальний посібник / Т. П. Гой, О. В. Махней. – Івано-Франківськ : Сімик, 2012. – 352 с.

56. Голин Г. М. Вопросы методологии физики в курсе средней школы: Кн. для учителя. – М.: Просвещение, 1987. – 127 с.

57. Голод П. І. Симетрія та методи теорії груп у фізиці (дискретні симетрії) / П. І. Голод. – К. : Києво-Могилянська академія, 2005. — 215 с.

58. Голод П. І. Математичні основи теорії симетрій /П. І. Голод, А. У.Клімик.– К.: Наукова думка, 1992.– 368с.

59. Голубков Е. Системный анализ как методологическая основа принятия решений / Е. Голубков // Менеджмент в России и за рубежом. – 2003. – № 3. – С. 95-115.

60. Гончаренко С. У. Український педагогічний словник / С. У. Гончаренко. – К.: Либідь, 1997. – 376 с.

61. Горський В. С. Сучасні системи вищої освіти: порівняння для України / В. С. Горський, Г. К. Немиря, В.А. Погребняк– К.: Видавничий дім «КМ Академія», 2009. – С. 36 – 55.

62. Гриндер М. Исправление школьного конвейера / М. Гриндер – Минск: Институт общегуманитарных исследований, 2001. – 120 с.

63. Гуссерль Э. Избранные работы / Сост. В. А. Куренной. – М.: Изд. дом «Территория будущего», 2005. – 464 с.

64. Декарт Р. Рассуждение о методе с приложениями. Диоптрика, метеоры, геометрия / Р. Декарт. – М.: АН СССР, 1953. – 656 с.

65. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти затверджений постановою Кабінету Міністрів України від 23 листопада 2011 р. №1392: [Електронний ресурс]. − Режим доступу: http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011-п

66. Дидактика средней школы: Некоторые проблемы современной дидактики / Под ред. М. Н. Скаткина. − [2-е изд., перераб. и доп.] − М.: Просвещение, 1982. − 319 с.

67. Дрозд Ю. А. Основи математичної логіки / Ю. А. Дрозд. − К.: Київський університет імені Т. Шевченка, 2003. − 96 с.

68. Дроздов Н. Д. История и методология прикладной математики: Учебное пособие / Н. Д. Дроздов. − Тверь: Твер. гос. ун-т, 2006. − 303 с.

69. Дубовик В. П. Вища математика: Навч. посібн. / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.

70. Евграфов М. А. Аналитические функции: Учеб. пособие для вузов / Евграфов М. А. – [3-е изд., перераб. и доп.] – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1991. – 448 с.

71. Емеличев В. А. Лекции по теории графов / [В. А. Емеличев., О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич.] – М.: «Наука», 1990. – 384 с.

72. Ефимов В. В. Управление знаниями: учебное пособие / В. В. Ефимов. – Ульяновск: УлГТУ,2005. – 111с.

73. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики: Посібник для вчителів / М. І. Жалдак, Ю. В. Горошко, Є. Ф. Вінниченко. – К.: Техніка, 1997. – 303 с.

74. Жалдак М. І. Математика (тригонометрія, геометрія, елементи стохастики) з комп'ютерною підтримкою: Навч. посіб. / М. І. Жалдак, А. В. Грохольська, О. Б. Жильцов. – К.: МАУП, 2004. – 456 с.

75. Жалдак М. І. Математичний аналіз з елементами інформаційних технологій: навч. посіб. / М. І. Жалдак, Г. О. Михалін, С. Я. Деканов. – К. : Редакції газет природничо-математичного циклу, 2012. – 124 с.

76. Жалдак М. І. Математичний аналіз. Функції багатьох змінних: Навчальний посібник / М. І. Жалдак,

Г. О. Михалін, С. Я. Деканов. – Київ, НПУ імені М. П. Драгоманова, 2007. – 430 с.

77. Жалдак М. І. Теорія ймовірностей і математична статистика з елементами інформаційної технології: Навчальний посібник / М. І. Жалдак, Н. М. Кузьміна, С. Ю. Берлінська. – К.: Вища шк., 1995 – 351 с.

78. Жалдак М. І. Чисельні методи математики: посібник для самоосвіти вчителів. / М. І. Жалдак, Ю. С. Рамський. – К.: Рад. шк., 1984. – 206 с.

79. Завало С. Т. Алгебра і теорія чисел: В 2-х ч. / С. Т. Завало, В. М. Костарчук, Б. І. Хацет. – К. : Вища школа, 1974. – Ч. 1. – 464 с.

80. Завало С. Т. Алгебра і теорія чисел: В 2-х ч. / С. Т. Завало, В. М. Костарчук, Б. І. Хацет. – К. : Вища школа, 1974. – Ч. 2. – 384 с.

81. Заїка О. В. Методична система навчання проективної геометрії в педагогічних університетах : дис. ... канд. пед. наук: 13.00.02 / Заїка Оксана Володимирівна. – К., 2013. – 257 с.

82. Залізко В. Д. Навчальний посібник з математичного аналізу / В. Д. Залізко, О. В. Заїка, Н. В. Кугай. – Київ: НПУ ім.М. П. Драгоманова, 2011. – 325 с.

83. Зинченко В. П. Сознание и творческий акт / В. П. Зинченко. – М. : Языки славянских народов, 2010. – 592 с.

84. Зорина Л. Я. Дидактические аспекты естественно-научного образования: Монография / Л. Я. Зорина. – М.: Изд-во РАО, 1993. – 163 с.

85. Зорина Л. Я. Дидактические основы формирования системности знаний старшеклассников / Зорина Л. Я. – М.: «Педагогика», 1978. – 128 с.

86. Кабанов П. Г. Методологическая культура педагога: проблема уровней и содержания / П. Г. Кабанов // Образование в Сибири. – 1995. – №1. – С.49-54.

87. Кавун Н. И. Обоснование теории вещественных чисел по способу А. Н. Колмогорова / Кавун Н. И. – УМН, 1947. – Т. 2, выпуск 5(21). – С. 199–229.

88. Каган В. Ф. Лобачевский / В. Ф. Каган. – М.-Л.: Изд-во Академии наук СССР, 1948. – С. 238-242.

89. Кант І. Критика практичного розуму. Переклад з німецької Ігоря Бурковського / І. Кант. – Київ: Юніверс, 2004. – 240 с.

90. Кант І. Критика чистого розуму. Переклад з німецької Юрія Федорченка / І. Кант. – Київ: Юніверс, 2000. – 504 с.

91. Кант И. Сочинения в шести томах / И. Кант. – М., 1966. – Том 6. – 743 с.

92. Кассирер Э. Философия символических форм / Э. Кассирер. – М. – СПб.: Университетская книга, 2002. – Том 2. Мифологическое мышление. – 280 с.

93. Квєтний Р. Н. Комп'ютерне моделювання систем та процесів. Методи обчислень. Частина 1: навчальний посібник / За заг. ред. Р. Н. Квєтного. – Вінниця : ВНТУ, 2013. – 191 с.

94. Келли А. Шестой мемуар о формах / А Келли // В сб.: Об основаниях геометрии. – М., 1956. – 526 с.

95. Кириллов В. К. Методологическая культура учителя, ее формирование в учебном процессе педвуза /

В. К. Кириллов // Новые исследования в педагогических науках. – М., 1991. – Вып. I. – С. 29-34.

96. Клейн Ф. Неевклидова геометрия / Ф. Клейн. – М.-Л.: ГТТИ, 1936. – 355 с.

97. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей / Ф. Клейн. – М.: Наука, 1987. – Т. 1. Арифметика, алгебра, анализ. – 431 с.

98. Клейн Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей / Ф. Клейн. – М.: Наука, 1987. – Т. 2. Геометрия. – 416 с.

99. Клепиков В. Н. Методологическая культура учителя математики / В. Н. Клепиков // Муниципальное образование: инновации и эксперимент. – 2015. – № 3. – С. 15-22.

100. Клини С. К. Математическая логика / С. К. Клини. – М.: Мир, 1973. – 480 с.

101. Коваленко І. І. Вступ до системного аналізу: Навчальний посібник / І. І. Коваленко, П. І. Бідюк, О. П. Гожий. – Миколаїв: МДГУ ім. Петра Могили, 2004. – 148 с.

102. Кованцов М. І. Диференціальна геометрія : навч. посіб. для ун-тів і пед. ін-тів / М. І.Кованцов. – К. : Вища школа, 1973. – 276 с.

103. Когаловский С. Р. Развивающее обучение математике как преображающее обучение: [монография] / С. Р. Когаловский. – Иваново: ОАО «Изд-во «Иваново», 2010. – 209 с.

104. Колмогоров А. Н. Введение в математическую логику / А. Н. Колмогоров, А. Г. Драгалин. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1982. – 120 с.

105. Колмогоров А. Н. Математическая логика. Дополнительные главы / А. Н. Колмогоров, А. Г. Драгалин. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1984. – 120 с.

106. Колмогоров А. Н. Основные понятия теории вероятностей / А. Н. Колмогоров. – М., 1974. – 120 с.

107. Конверський А. Є. Логіка (традиційна та сучасна): Підручник для студентів вищих навчальних закладів / А. Є. Конверський. – К.: Центр учбової літератури, 2008. – 536 с.

108. Копнин П. В. Гносеологические и логические основы науки / П. В. Копнин. – М.:Мысль, 1974. – 568с.

109. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Основы алгебры. Учебник для вузов. – 3-е изд. /А. И. Кострикин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. –Часть I. – 272 с.

110. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Линейная алгебра: Учебник для вузов / А. И. Кострикин.– М.: Физико-математическая литература, 2000. – Часть II. – 368 с.

111. Кострикин А. И. Линейная алгебра и геометрия. Учеб. пособие для студентов мех.-мат. спец. вузов. /А. И. Кострикин, Ю. И. Манин – 2-е изд., перераб. – М.: Наука, 1986. – 304 с.

112. Крушельницька О. В. Методологія та організація наукових досліджень: Навчальний посібник / О. В. Крушельницька. – К.: Кондор, 2006. – 206 с.

113. Крылов В. И. Вычислительные методы. В 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – М. : Наука, 1976. –Т. 1. – 584 с.

114. Крылов В. И. Вычислительные методы. В 2 т. / В. И. Крылов, В. В. Бобков, П. И. Монастырный. – М. : Наука, 1976.– Т. 2. – 304 с.

115. Кугай Н. В. Взаємозв'язки між вищою та елементарною математикою у задачах / Н. В. Кугай, Л. Ф. Щасна // Математика в сучасній школі. – 2012. – № 9. – С. 10-14.

116. Кугай Н. В. Діофантові рівняння у шкільному курсі математики / Н. В. Кугай, І. Зайцева // Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки. – Черкаси, 2013. – Випуск 17(270). – С. 49 - 53.

117. Кугай Н. В. До питання про методологічну компетентність майбутнього вчителя математики / Н. В. Кугай// Щомісячний науково-педагогічний журнал «Молодь і ринок». – 2014. – № 11 (118). – С. 165-168.

118. Кугай Н. В. Методологічні аспекти математичного моделювання / Н. В. Кугай, Є. М. Борисов // Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology, III (19), Issue: 38, 2015. – С. 39-42.

119. Кугай Н. В. Методологічні знання конкретно наукового рівня з математичного аналізу майбутнього вчителя математики / Н. В. Кугай // Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки. – Черкаси, 2015. – Випуск 17 (350). – С. 18 - 25.

120. Кугай Н. В. Методологічні знання конкретно наукового рівня з навчальної дисципліни «Комплексний аналіз» майбутнього вчителя математики / Н. В. Кугай // Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології. – Науковий журнал. – Суми: СумДПУ. – 2016. – № 2 (56). – С. 305 - 313.

121. Кугай Н. В. Методологічні знання майбутнього вчителя математики / Н. В. Кугай // Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки. – Черкаси, 2014. – Випуск 26 (319). – С. 56 - 61.

122. Кугай Н. В. Методологічні знання та міжпредметні зв'язки / Н. В. Кугай, Л. Ф.Сухойваненко // Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology, II(16), Issue: 33, 2014. – С. 49-52.

123. Кугай Н. Методологические знания по элементарной математике как основа формирования готовности будущих учителей математики к инновационной педагогической деятельности / Н. Кугай, В. Ачкан // МАТТЕХ 2016. Сборник научни трудове. – Том 1. – Шумен, 2016. – С. 226-234.

124. Кугай Н. В. Методологія математики: її види, основи та рівні / Н. В. Кугай // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія № 3. Фізика і математика у вищій і середній школі: Зб. наукових праць. – К. : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2014. – № 13. – С. 66-73.

125. Кугай Н. В. Навчання майбутніх учителів математики як складна система / Н. В. Кугай, Є. М. Борисов // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми // Зб. наук. пр. – Випуск 41 / Редкол. – Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2015. – С. 371 – 375.

126. Кугай Н. В. Нерівності як математичні моделі для розв'язування прикладних задач / Н. В. Кугай, Є. М. Борисов // Вісник Чернігівського НПУ. Серія:

Педагогічні науки. – Чернігів, 2015. – Випуск 127. – С. 77 – 80.

127. Кугай Н. В. Порівняльний аналіз підготовки майбутніх учителів математики у Польщі та Україні / Н. В. Кугай // Український педагогічний журнал. – 2015.– № 2.– С. 23-32.

128. Кугай Н. В. Пропедевтика методологічних знань у першокурсників під час навчання математичних дисциплін / Н. В. Кугай // Оновлення змісту, форм та методів навчання і виховання в закладах освіти. Збірник наукових праць. Наукові записки Рівненського державного гуманітарного університету. – Випуск 12 (55). – Частина 2. – Рівне-Київ : Міленіум, 2015. – С. 184-191.

129. Кугай Н. В. Решение прикладных задач как средство формирования методологической компетентности будущих учителей математики / Н. В. Кугай, Е. Н. Борисов, О. В. Заика // Сборник научных трудов SWorld. – Выпуск 1(38). Том 8. – Иваново: МАРКОВА АД, 2015. – С.4-11 - ЦИТ: 115-012.

130. Кугай Н. В. Розвиток умінь старшокласників доводити твердження у процесі вивчення алгебри і початків аналізу: дис... канд. пед. наук: 13.00.02 / Кугай Наталія Василівна; Національний педагогічний ун-т ім. М. П. Драгоманова. – К., 2007. – 240 с.

131. Кугай Н. В. Розширення досвіду пізнання студентів у процесі навчання лінійної алгебри / Н. В. Кугай // Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми // Зб. наук. пр.. – Випуск 43 / Редкол. – Київ-Вінниця: ТОВ фірма «Планер», 2015. – С. 358– 362.

132. Кугай Н. В. Ряди. Навчальний посібник / Н. В. Кугай, Є. М. Борисов. – Глухів: РВВ ГНПУ ім. О. Довженка. – 2014. – 104с.

133. Кугай Н. В. Система навчання майбутніх учителів математики у Польщі та Україні (магістратура): спільне та відмінне / Н. В. Кугай // Выпуск 2(43). Том 7. – Иваново: Научный мир, 2016. – С.42-48.

134. Кугай Н. В. Структура методології навчальної діяльності студентів / Н. В. Кугай // Управління якістю підготовки майбутнього вчителя фізико-технологічного профілю // Збірник наукових праць Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка: серія педагогічна. –Випуск 20. –Кам’янець-Подільський, 2014. – С. 199-202.

135. Кугай Н. В. Теоретична основа розв’язування одного виду задач із початків аналізу / Н. В. Кугай // Математика в сучасній школі. – 2012. – № 3. – С. 24-26.

136. Кугай Н. В. Числові системи : навчально-методичний посібник / Н. В. Кугай. – Глухів : РВВ ГНПУ ім. О. Довженка. – 2011. – 84 с.

137. Кугай Н. В. Що повинен знати вчитель математики про натуральні числа / Н. В. Кугай, Є. М. Борисов, Ю. Ю. Дем'яненко.– Вісник Черкаського університету. Серія: Педагогічні науки. – Черкаси, 2014. – Випуск 8 (301). – С. 62 - 66.

138. Кужель О. В. Елементи теорії множин та математичної логіки / О. В. Кужель. – К.: Радянська школа, 1977. – 160 с.

139. Кузнецов О. П. Дискретная математика для инженеров / О. П. Кузнецов, Г. М. Адельсон–Вельский –

[2–е изд., перераб. и доп.] – М.: Энергоатомиздат, 1988 – 400 с.

140. Куклин В. Ж. Системный анализ, моделирование и управление в системе высшего профессионального образования: автореф. дисс. на соискание ученой степени доктора тех. наук: спец. 05.13.14 «Системы обработки информации и управления» / В. Ж. Куклин. – Йошкар-Ола, 2000. – 20 с.

141. Курош А. Г. Курс высшей алгебры / А. Г. Курош. – М.: Наука, 1965. – 431 с.

142. Курош А. Г. Теория групп.– [3-е изд.] – М.: Наука, 1967. – 648 с.

143. Кустовська О. В. Методологія системного підходу та наукових досліджень: Курс лекцій. / О. В. Кустовська. – Тернопіль: Економічна думка, 2005. – 124 с.

144. Кутішенко В. П. Вікова та педагогічна психологія (курс лекцій) : Навч. посіб. / В. П. Кутішенко. – [2-ге вид.].– К.: Центр учбової літератури, 2010. – 128 с.

145. Лаврентьев М. А. Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. – [4-е изд., перераб. и доп.] – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1973. – 749 с.

146. Леднев В. С. Содержание общего среднего образования: Проблемы структуры / В. С. Леднев. – М.: Педагогика, 1980. – 320 с.

147. Лейман И. И. Наука как социальный институт / И. И. Лейман.– Л.: Наука, 1971. – 177 с.

148. Лекторський В. А. Обьект, субьект, познание / В. А. Лекторський. – М., 1980. – 323с.

149. Леонтьев А. Н. Избранные психологические произведения: В 2-х т. / А. Н. Леонтьев. – М.: Педагогика, 1983.– Т. II.– 320 с

150. Лернер И. Я. Качества знаний учащихся: какими они должны быть / И. Я. Лернер. – М. : Знание, 1978. – 48 с.

151. Лиман Ф. М. Математична логіка і теорія алгоритмів. Навчальний посібник / Ф. М. Лиман. – Суми: Видавництво «Слобожанщина», 1998. – 152 с.

152. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / За ред. проф. В. В. Булдигіна. — К. : ТВіМС, 2011. – 224 с.

153. Ліфарєва Н. В Психологія особистості : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / Н. В. Ліфарєва. – К. : Центр навчальної літератури, 2003. – 240 с.

154. Ляшенко Б. М. Методи обчислень: навчально-методичний посібник для студентів фізико-математичного факультету / Б. М. Ляшенко, О. М. Кривонос, Т. А. Вакалюк. – Житомир: Вид-во ЖДУ, 2014. – 228 с.

155. Мадер В. В. Введение в методологию математики. – М.: ИНТЕРПРАКС, 1994.– 448 с.

156.Майстров Л.Е. Теория вероятностей. Исторический очерк / Л. Е. Майстров – М.: Наука, 1967. – 321 с.

157.Максименко С. Д. Загальна психологія: Навч. посібник / С. Д. Максименко, В. О. Соловієнко. – К.: МАУП, 2000. – 256 с.

158. Манкевич Р. История математики. От счетных палочек до бессчетных вселенных / Р. Маркевич. – М.: Изд-во Ломоносовъ, 2011. – 252 с.

159. Марков А. А. Теория алгорифмов / А. А. Марков. – М. - Л.: Изд-во АН СССР, 1954. – 376 с.

160. Марков А. А. Элементы математической логики / Под ред. А. Г. Драгалина. – М.: Изд-во МГУ, 1984. – 79 с.

161. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций / А. И. Маркушевич. – [изд. 3-е, испр. и доп.] – М.: ФМЛ, 1966 – 388 с.

162. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций / А. И. Маркушевич. – [изд. 2-е, испр. и доп.] – М.: Наука, 1967. – Т. 1: Начала теории. – 486 с.

163.Маркушевич А. И. Теория аналитических функций / А. И. Маркушевич. – [изд. 2-е, испр. и доп.]– М.: Наука, 1968. – Т. 2: Дальнейшее построение теории. – 624 с.

164. Мартиненко М. А. Теорія функцій комплексної змінної. Операційне числення. Навчальний посібник / М. А. Мартиненко, І. І. Юрик. – [2-е видання].– К.: Видавничий Дім «Слово», 2010. – 296 с.

165. Матвієнко М. П. Математична логіка та теорія алгоритмів. Навчальний посібник / М. П. Матвієнко, С. П. Шаповалов. – К.: Видавництво Ліра-К, 2015. – 212 с.

166. Математическое моделирование: Методы описания и исследования сложных систем / Отв. ред. А. А. Самарский. – М.: Наука, 1989.– 271 с.

167. Математическая энциклопедия / Гл. ред. И. М. Виноградов. – М.: «Советская Энциклопедия», 1982. – Т.3. – 1184 стб.

168. Матяш О. І. Формування методичної компетентності з навчання геометрії майбутніх учителів математики: дис. ... докт. пед. наук : 13.00.02 / Матяш Ольга Іванівна .– Вінниця, 2014. – 550 с.

169. Махомета Т. М. Методика вивчення ліній і поверхонь у курсі аналітичної геометрії в педагогічних університетах : дис. ... канд. пед. наук : 13.00.02 / Махомета Тетяна Миколаївна. – Київ, 2014. – 238 с.

170. Мелихов А. Н. Применение графов для проектирования дискретных устройств. / А. Н. Мелихов, Л. С. Бернштейн, В. М. Курейчик. – М.: Наука, 1974. – 304 с.

171. Методологія наукової діяльності: Навчальний посібник / Д. В. Чернілевський [та ін.]; за редакцією професора Д. В. Чернілевського. – К. : Видавництво Університету «Україна», 2008. – 478 с.

172. Михалін Г. О. Професійна підготовка вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу / Г. О. Михалін. – Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2003. – 320 с.

173. Михалін Г. О. Елементи теорії множин і теорії чисел /Г. О. Михалін, Л. І. Дюженкова. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2003. – 128 с.

174. Научная деятельность: структура и институты / Под. ред. Э. М. Мирского, Б. Г. Юдина. – М.: Прогресс, 1980. – 430 с.

175. Національна стратегія розвитку освіти в Україні на 2012–2021 роки: [Електронний ресурс].− Режим доступу: http://www.meduniv.lviv.ua/files/info/nats_strategia.pdf

176. Немов Р. С. Психологія / Р. С. Немов. – М. : ВЛАДОС, 1998. – Кн. 2: Психологія освіти. – 608 с.

177. Нечаев В. И. Элементы криптографии. Основы теории защиты информации / В. И. Нечаев. – М.: Высшая школа, 1999. – 109 с.

178. Нивен А. Числа рациональные и иррациональные / А. Нивен. – М.: Мир, 1966. – 196 с.

179. Никитин В. А. Организационные типы современной культуры: автореф. дис. на соискание науч. степ. д-ра культурологии: 24.00.01 – «Теория культуры»/ В. А. Никитин. – Тольятти - М., 1998. – 48 с.

180. Ніколаєва К. В. Дискретний аналіз. Графи та їх застосування в економіці: Навчально-методичний посібник / К. В. Ніколаєва, В. В. Койбічук. – Суми: УАБС НБУ, 2007. – 84 с.

181. Новиков А. М. Методология / А. М. Новиков, Д. А. Новиков. – М.: СИНТЕГ, 2007 – 668 с.

182. Новиков П. С. Элементы математической логики / П. С. Новиков. – М.: Наука, 1973. – 400 с

183. Новикова Ю. Б. Практико-ориентированный подход к профессиональной подготовке британского учителя (конец XX – начало XXI вв.): дис. ... канд. пед. наук: 13.00.01 / Новикова Юлия Борисовна. – М., 2014. – 208 с.

184. Новицький І. В. Дискретна математика: навч. посібник / І. В. Новицький, С. А. Ус. – Д. : Національний гірничий університет, 2013. – 89 с.

185. Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию её идей. – Редакция и вступительная статья А. П. Нордена. – М.: Гостехиздат, 1956. – 528 с.

186. Общая психология: Учебное пособие для пед институтов / Под ред. Богословского В. В. [и др.]– М.: Просвещение, 1981. – 383 с.

187. Овчинников П. П. Вища математика: підручник. У 2 ч. / П. П. Овчинников, В. М. Михайленко. – К. : Техніка, 2004. – Ч. 2.– 792 с.

188. Оре О. Теория графов / О. Оре. – [2-е изд.]– М.: Наука, 1980.– 336 с.

189. Основи дискретної математики. Підручник / Ю. В. Капітонова [та ін.] –К.: Наукова думка, 2002. – 580 с.

190. Основи методології та організації наукових досліджень: Навч. посіб. для студентів, курсантів, аспірантів і ад'юнтів / за ред. А. Є. Конверського.– К.: Центр учбової літератури, 2010. — 352 с.

191.Основи психології і педагогіки : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / О. М. Степанов, М. М. Фіцула. – К.: Академвидав, 2006. – 520 с.

192. Основи філософських знань: Підручник / М. І. Горлач [та ін.] – К.: Центр учбової літератури, 2008. – 1028 с.

193. Охріменко О. Г. Фундаментальні філософські проблеми. Конспективний виклад курсу лекцій для студентів негуманітарних факультетів: Навч. посіб. / О. Г. Охріменко.— К. : Вид. Парапан, 2002. – 112 с.

194. Павелків Р. В.Загальна психологія:підручник для студ. вищ. навч. закл. /Р. В. Павелків. – К.: Кондор, 2002. – 506 с.

195. Павлов И. П. Полное собрание сочинений: В 6-ти т. / И. П. Павлов. – М.-Л.: АН СССР, 1951. – Т. 4. – 452 с.

196. Пальчевський С. С. Педагогіка : навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / С. С. Пальчевський. – [2-ге вид.]. – К. : Каравела, 2008. – 496 с.

197. Панов В. Ф. Современная математика и её творцы / В. Ф. Панов; под ред. В. С. Зарубина. – М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2011. – 646 с.

198. Парсонс Т. О структуре социального действия. – М.: Академический Проект, 2000. – 880 с.

199. Пастернак Н. В. Формування системи методологічних знань школярів при навчанні фізики: автореферат дис. на здобуття наук. ступ. канд. пед. наук: 13.00.02 – методика викладання фізики / Н. В. Пастернак, Укр. держ. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. – К., 1995. – 24 с.

200. Перегудов Ф. И. Введение в системный анализ / Ф. И. Перегудов, Ф. П. Тарасенко. – М. : Высшая школа, 1989. – 76 с.

201. Перестюк М. О. Збірник задач з диференціальних рівнянь: Навч. посібник / М. О. Перестюк, М. Я. Свіщук. – К.: Либідь, 1997. – 192 с.

202. Попечителев Е. П. Методы медико-биологических исследований. Системные аспекты: Учебное пособие / Е. П. Попечителев. – Житомир:ЖИТИ, 1997. – 186 с.

203. Попов М. М. Математична логіка: конспект лекцій для студентів механіко-математичного факультету / М. М. Попов. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2015. – 79 с.

204. Попов В. В. Методи обчислень: конспект лекцій для студентів механіко-математичного факультету / В. В. Попов. – К.: Видавничо-поліграфічний центр «Київський університет», 2012. – 303 с.

205. Поппер К. Логика и рост научного знания / К. Поппер. – Москва, 1983 – 605 с..

206. Практикум з основ геометрії : навчальний посібник для студентів фізико-математичних спеціальностей педагогічних університетів / укл. О. В. Заїка, Т. М. Махомета. – Умань : ФОП Жовтий О. О., 2016. – 140 с.

207. Прус А. В. Збірник задач з методики навчання математики / А. В. Прус, В. О. Швець. – Житомир: «Рута», 2011. – 388 с.

208. Пушак Я.С. Теорія ймовірностей і елементи математичної статистики: Навч. посібник/ Я. С. Пушак – [2-ге видання, переробл. і доповнене]– Львів: «Магнолія-2006», 2007. – 276 с.

209. Пышкало А. М. Методическая система обучения геометрии в начальной школе: авторский доклад по монографии «Методика обучения элементам геометрии в начальных классах», представленной на соискание … д-ра пед. наук / А. М. Пышкало. – М.: Академия пед. наук СССР 1975.– 60 с.

210. Различные подходы к определению вероятности: методические указания / сост. Н. С. Дорофеева. – Томск: Изд-во Том.гос. архит.- строит. ун-та, 2010. – 53 с.

211. Раков С. А. Математична освіта: компетентнісний підхід з використанням ІКТ [монографія] / С. А. Раков. – Х. : Факт, 2005. – 360 с.

212. Рассоха Е. Н. Теория вероятностей: учебное пособие / Е. Н. Рассоха, Л. М. Анциферова, И. В. Березина. – Оренбург: ОГУ, 2011. – 243с.

213. Раухман А. С. Формирование методических умений и навыков у студентов математических специальностей

пединститутов: дис. … канд. пед. наук: 13.00.02 / – К., 1974. – 194 с.

214. Романенко Ю. М. Филисофские и эстетические аспекты математического знания: дис. канд. филос. наук: 09.00.00. / Романенко Юрий Михайлович. – Москва, 2005. - 170 с.

215. Рубинштейн С. Л. Проблемы общей психологии / С. Л. Рубинштейн.– М.-СПб.: ПИТЕР, 2003. – 720 с.

216. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння у задачах / А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, М. О. Перестюк. – К. : Либідь, 2003. – 504 с.

217. Самойленко А. М. Диференціальні рівняння: Підручник / А. М. Самойленко, М. О. Перестюк, І. О. Парасюк. – [2-ге вид., перероб. і доп.]– К., Либідь, 2003. – 600 с.

218. Самохин А. В. Проблема 4-х красок: неоконченная история доказательства / А. В. Самохин // Соросовский образовательный журнал. – 2000. – №7. –С. 91-96.

219. Саранцев Г. И. Методика обучения математике в средней школе / Г. И. Саранцев. – М.: Просвещение, 2002.– 223 с.

220. Саранцев Г. И. Методология методики обучения математике / Г. И. Саранцев. – Саранск : Тип. «Крас. Окт.», 2001. – 144с.

221. Свешников А. Г. Теория функций комплексной переменной: Учеб.: для вузов / А. Г. Свешников, А. Н. Тихонов. – [6-е изд., стерео]– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. – 336 с.

222. Семенович О. Ф. Перетворення і аксіоматичний метод в геометрії . В 3-х частинах. / О. Ф. Семенович, Т. В. Ломаєва. – Черкаси, 1998. – Частина 1.– 215 с.

223. Сергєєнкова О. П. Педагогічна психологія: Навч. посіб. / О. П. Сергєєнкова. – К.: Центр учбової літератури, 2012. – 168 с.

224. Скрипченко О. В. Загальна психологія / О. В. Скрипченко та [ін]– К. : А.П.Н., 1999. – 461 с.

225. Сластенин В. А. Методологическая культура учителя / В. А. Сластенин, В. Э. Тамарин //Советская педагогика. – 1990. – № 7.

226. Сластенин В. А. Психология и педагогика / В. А. Сластенин, В. П. Каширин – М.: Академия, 2001. – 480 с.

227. Слєпкань З. І. Методика навчання математики: Підруч. для студентів матем. спеціальностей пед. вузів / З. І. Слєпкань. – К.: Зодіак-ЕКО, 2000. – 512 с.

228. Современные философские проблемы математических, естественных и технических наук. Учебно-методическое пособие для аспирантов и соискателей ученой степени кандидата наук / сост. А. Г. Деменев. – Архангельск: Изд-во АГТУ. – 78 с.

229. Спасский Б. И. Вопросы методологии и историзма в курсе физики средней школы / Б. И. Спасский. – М.: Просвещение, 1975.

230. Співаковський О. В. Збірник задач і вправ з лінійної алгебри Навчальний посібник / О. В. Співаковський, В. А. Крекнін, К. В. Черниш.– Херсон, 2000.– 208 с.

231.Столяр А. А. Педагогика математики / А. А. Столяр. – Минск: Высшая школа, 1986. – 414 с.

232.Талызина Н. Ф. Теория поэтапного формирования умственных действий сегодня / Н. Ф. Талызина // Вопросы психологии. – 1993. – № 1. – С. 92-101.

233.Талызина Н. Ф. Управление процессом усвоения знаний / Н. Ф. Талызина. – М.: Изд-во МГУ, 1975. – 343 с.

234.Тичинська Л. М. Теорія ймовірностей. Історичні екскурси та теоретичні відомості: навчальний посібник / Л. М. Тичинська, А.А. Черепащук. – Вінниця: ВНТУ, 2010 – Ч.1. – 112 с.

235.Требенко Д. Я. Алгебра і теорія чисел: У 2 ч. / Д. Я. Требенко, О. О. Требенко. – К.: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2009. – Ч. 1. – 420 с.

236.Требенко Д. Аналіз сучасної міжнародної практики конструювання курсу вищої алгебри / Дмитро Требенко // Збірник наукових праць Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини. – 2012. – Ч. 1. – С. 291-297.

237. Трохимчук Р. М. Дискретна математика: Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / Р. М. Трохимчук. – К.: ДП «Видавничий дім «Персонал», 2010. – 528 с.

238.Уилсон Р. Введение в теорию графов / Р. Уилсон. – М.: Мир, 1977. – 208 с.

239.Філософія : підручник для вищої школи / В. С. Афанасенко [та ін.]; ред.: В. Г. Кремень, М. І. Горлач. – Харків: Прапор, 2004. – 736 с.

240.Философская энциклопедия. В 5-ти т. / Глав. ред. Ф. В. Константинов. – М.: Советская энциклопедия, 1964. – Т. 3: Коммунизм – Наука. – 584 с.

241.Философский энциклопедический словарь / Гл. редакция: Л. Ф. Ильичёв, П. Н. Федосеев, С. М. Ковалёв, В. Г. Панов.– М.: Советская энциклопедия, 1983. – 840 с.

242.Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа / Г. М. Фихтенгольц. – М.: Наука, 1964.– Т. 1. изд. 5-е. – 440 с.

243.Фихтенгольц Г. М. Основы математического анализа: в 2 т. / Г. М.Фихтенгольц. – М., 1957. – Т. 2. – 465 с.

244. Хаггарти Р. Дискретная математика для программистов / Р. Хаггарти. – М.: «Техносфера», 2003. – 320с.

245.Харари Ф. Лекции по теории графов / пер. с англ. В.В.Козырев, ред. Т.П. Гаврилов. – М.: «Мир», 1973. – 304 с.

246.Хемминг Р. В. Численные методы / Р. В. Хемминг. – М. : Наука, 1972. – 400 с.

247.Ходжсон Дж. Социально-экономические последствия прогресса знаний и нарастания сложности / Дж. Ходжсон// Вопросы экономики. – 2001. – №8. – С. 32-45.

248.Числові системи: навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів / укл. М. О. Медведева, І. М. Білятинська – Умань: Візаві, 2015. – 130 с.

249.Чёрч А. Введение в математическую логику / А. Чёрч. – М. : ИЛ, 1960. – 486 с.

250.Шабанова М. В. Формирование методологических знаний при изучении математики в системе «школа-вуз»:

дис. ... д-ра пед. наук : 13.00.02 / Шабанова Мария Валерьевна. – Москва, 2005. – 422 с.

251.Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ / Б. В. Шабат. – М.: Наука, 1961. – 571 с.

252.Шарапов О. Д. Системний аналіз: Навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / О. Д. Шарапов, В. Д. Дербенцев, Д. Є. Семьонов. – К.: КНЕУ, 2003. – 154 с.

253.Швырев В. С. Анализ научного познания: основные направления, формы, проблемы / В. С. Швырев. – М.: Наука, 1988. – 176 с.

254.Швырев В. С. Научное познание как деятельность / В. С. Швырев. – М.: Политиздат, 1984. – 232 с.

255.Шевцова С. М. Становлення методологічної культури вчителя на основі проектної діяльності: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. філос. наук: спец. 09.00.10 Філософія освіти / С. М. Шевцова. – Київ, 2010. – 20 с.

256.Шефтель З. Г. Теорія ймовірностей: Підручник / З. Г. Шефтель. – [2-ге вид., перероб. і допов.].– К.: Вища шк., 1994. – 192 с.

257.Шкіль М. І. Математичний аналіз: Підручник: У 2 ч. / М. І. Шкіль. – Київ: Вища школа, 2005. – Ч. 1 – 447 с.

258.Шкіль М. І. Математичний аналіз: Підручник: У 2 ч. / М. І. Шкіль. – Київ: Вища школа, 2005. – Ч. 2. – 447 с.

259.Школа живой традиции / Авторский коллектив гимназии №11 им. С. П. Дягилева, г. Пермь. – М. :Эврика, 2005. – 208с.

260.Щедровицкий Г. П. Оргуправленческое мышление: идеология, методология, технология. – М., 2000. – Т. 4. – 384 с.

261.Щедровицкий Г. П. Проблемы методологии системного исследования / Г. П. Щедровицкий. – М., 1964. –48 с.

262.Щерба С. П. Філософія Навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. / С. П. Щерба, В. К. Щедрін, О. А. Заглада; За заг. ред. С. П. Щерби. – К.: МАУП, 2004. – 216 с.

263. Ядренко М. Й. Дискретна математика : навчальний посібник / М. Й. Ядренко. – К.: Вид.– поліграф.центр „Експрес”, 2003. – 244 с.

264.Яскевич Я. С. Методология и этика в современной науке: поиск открытой рациональности: учеб.-метод. пособие / Я .С. Яскевич. – Минск: БГЭУ, 2007. – 186 с.

265.Юдин Э. Г. Системный подход и принцип деятельности. Методологические проблемы современной науки / Э. Г. Юдин.– М.: Наука, 1979.– 391 с.

266.Akademia Pomorska w Słupsku, Instytut Matematyki. [Elektronnyy resurs]. – Rezhym dostupu: http://matematyka.apsl.edu.pl/dydaktyka/plany-zajec.

267.Edge Hill University. [Elektronnyy resurs]. – Rezhym dostupu:
https://www.edgehill.ac.uk/courses/secondary-mathematics-education-with-qts/tab/modules

268.Fichte J. G. Werke. Auswahl in sechs Bänden. Leipzig: hrsg. von F. Medicus. 1908 – 1911. – 481 p.

269.Jurlewicz T. Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory / T. Jurlewicz, Z. Skoczylas.– Wrocław: Oficyna Wydawnicza GiS, 2003. – 163 str.

270.Jurlewicz T. Algebra liniowa 1. Przykłady i zadania / T. Jurlewicz, Z.Skoczylas.– Wrocław: Oficyna Wydawnicza GiS, 2003. – 167 str.

271.Шуменски университет "Епископ Константин Преславски", Факултет по математика и информатика. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://shu.bg/razpisi-i-grafici?speciality=155

272.Rozporządzenie Ministra Nauki i Szkolnictwa Wyŝszego z dnia 17 stycznia 2012 r. w sprawie standardow kształcenia przygotowującego do wykonywania zawodu na uczyciela. [Elektronnyy resurs]. – Rezhym dostupu: http://isap.sejm.gov.pl/Download?id=WDU20120000131&type=2

273.Sunderland university. [Elektronnyy resurs]. – Rezhym dostupu: http://www.sunderland.ac.uk/courses/educationandsociety/undergraduate/mathematics-education-11-18-qts/#tab_content

274.Stewart T. A. Intellectual capital : the new wealth of organizations. – New York: Doubleday / Currency, 1997.– 278.

275.Wiig K. Knowledge Management Foundation. – Schema Press, 1993.

276.Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie. [Elektronnyy resurs]. – Rezhym dostupu: http://syjon.umcs.lublin.pl/merovingian/course/studies_plan/2762/

277.Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej, Instytut Matematyki. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://matematyka.up.krakow.pl/1st.php.

Кугай Наталія

МЕТОДОЛОГІЧНІ ЗНАННЯ МАЙБУТНЬОГО ВЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

Монографія

Підписано до друку 10.02.2017 р.
Формат 60x84/16. Папір офсетний.
Гарнітура «Time New Roman». Друк – лазерний.
Ум.-друк. арк. 19,59. Обл.-вид.арк. 20,17.
Наклад 300 прим. Вид. № 665. Зам. № 700.

Видавець: **ФОП Панов А. М.**
Свідоцтво серії ДК №4847 від 06.02.2015 р.

Надруковано в типографії
ТОВ «Цифрова типографія»
м. Харків, вул. Данилевського, 30.