Нетипові нерівності та способи їх розв’язування

Георгій Буцан, доктор фізико-математичних наук

Наталія Кугай, кандидат педагогічних наук

Євген Борисов, кандидат фізико-математичних наук

Принцип навчання через розв'язування задач є очевидним наслідком самої природи математики. Розв'язування задач – найефективніша форма не тільки для розвитку математичної діяльності учнів, а й для засвоєння знань, навичок, методів і застосувань математики. Недаремно багато відомих учених наголошували і наголошують на тому, що в математиці задачі відіграють чи не найважливішу роль. Ідея навчати математики через розв'язування задач не втратила свого значення і тепер. Однак, тенденція зниження зацікавленості учнів і студентів до навчання, яка спостерігається останнім часом, ставить перед учителем та викладачем серйозні проблеми.

Одним із засобів вирішення цих завдань є продумане використання на заняттях з математики задач практичного, прикладного змісту, до розв'язування яких, як показує досвід роботи, учні та студенти мають більший потяг ([2], [3]).

Як показує досвід, розв’язування завдань, що містять нерівності, досить часто викликають у учнів проблеми. Цей факт з одного боку можна пояснити, наприклад, недостатнім часом, який виділено на вивчення нерівностей, а з іншого - недостатнє використання нерівностей як математичних моделей. Адже відомо, що розв'язуючи прикладні задачі, учні не тільки засвоюють найважливіші математичні поняття, опановують математичну символіку, вчаться наводити обґрунтування, але й складають різні математичні моделі, відчувають взаємозв'язок теорії з практикою, усвідомлюють значущість і необхідність вивчення теми, набувають навичок у розв’язуванні проблемних ситуацій, що виникають у повсякденному житті [1].[4].

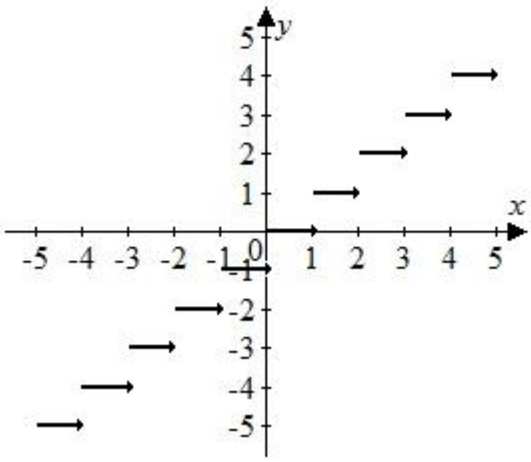
Метою даної роботи є: 1) демонстрація розв’язання нетипових нерівностей; 2) розгляд прикладних задач, математичною моделлю яких є нерівності.

1. **Ціла і дробова частина дійсного числа**

Цілою частиною числа x називається найбільше ціле число, яке не перевищує x. Ціла частина числа x позначається x і читається "антьє" x.

Так $\left[1\frac{1}{2}\right] = 1,\ \left[5\frac{1}{3}\right] = 5,\ \ 3 = 3,\ \ 4 = 4,\ \left[-1\frac{1}{3}\right] = -2,\ \left[-4\frac{1}{8}\right] = -5.$

Для того, щоб побудувати графік цієї функції зауважимо, що при $n \le x < n+1,$ де $n-$ довільне ціле число, $x = n$. Тому графік функції $y = x$ має вигляд, зображений на рис. 1.



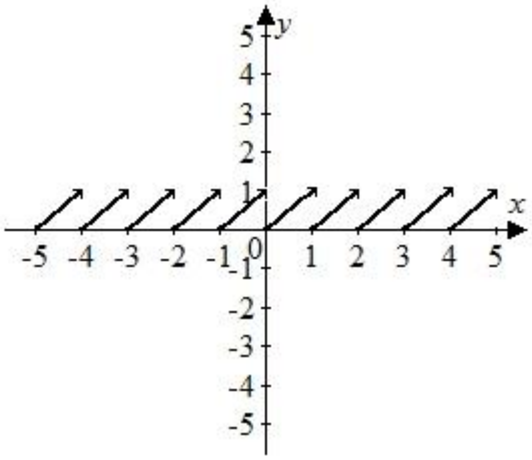


Рисунок 1 Рисунок 2

Дробовою частиною x числа x називається число виду $x = x - x$.

Так $3 = 0$, $4 = 0$, $1\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $5\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$, але $-1\frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $-4\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.

Як випливає з означення, дробова частина x числа завжди невід'ємна і доповнює цілу частину цього числа до самого числа. Керуючись графіком функції $y = x$, побудуємо графік функції $y = x$. Він зображений на рис. 2.Стрілками на цих графіках позначається той факт, що ордината точки на площині, в яку спрямована стрілка, не є значенням функції у відповідній абсцисі цієї точки.

Приклад 1. Розв'язати нерівність $x \cdot x < x + x$.

Використовуючи означення, наведені вище, легко бачити, що задана нерівність на проміжках $\left[n, n+1\right., n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ еквівалентна сукупності таких систем нерівностей:

$$\begin{cases} n \le x < n+1 \\ n-1 \ x < n. \end{cases}$$

Для розв'язання розглянемо чотири випадки: $n > 1, n = 1, n = 0, n < 0$.

У першому з них отримуємо системи: $\begin{cases} n \le x < n+1 \\ x < \dfrac{n}{n-1}. \end{cases}$

Але $\dfrac{n}{n-1} \le n$, тоді розв'язків в даному випадку не існує.

Для $n = 1$ маємо $\begin{cases} 1 \le x < 2 \\ 0 < 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le x < 2.$

Для $n = 0$ маємо $\begin{cases} 0 \le x < 1 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x < 1.$

І, нарешті, для $n < 0$ розв'язків не існує, оскільки в цьому випадку $n+1 < \dfrac{n}{n-1}$.

Відповідь: $x \in \ 0,2\ $.

Для порівняння розв'яжемо цю нерівність іншим методом, і насамперед відзначимо, що для $x < 0$ вона розв'язків не має, тобто ліва її частина додатна, а права від'ємна, далі $x = 0$, як легко бачити, також не є розв'язком. Нарешті для $x > 0$ перепишемо нерівність у вигляді: $x \quad x - 1 \ < \ x$. Для $0 < x < 1$ вона має вигляд $-x < 0$, а для $x = 1 \ \ 0 < 1$ і, отже, точки інтервалу $\ 0,1\big]$ її задовольняють. Для $1 < x < 2$ нерівність набирає вигляду $0 < \big[x\big]$ і, отже, точки цього інтервалу її задовольняють. Для $x \geq 2$ нерівність рівносильна $kx < \ x$, де k приймає натуральні значення і тому розв'язків не має, оскільки $kx \geq x > \ x$ для натуральних k.

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\ x \ \cdot x < 1$.

Оскільки $\ x \ = x - \ x$, то нерівність еквівалентна такій: $x^2 - \ x \ x - 1 < 0$, яка на кожному з інтервалів $\big[n, n+1\ , n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ еквівалентна серії систем нерівностей:

$$\begin{cases} n \leq x < n+1 \\ \dfrac{n - \sqrt{n^2+4}}{2} < x < \dfrac{n + \sqrt{n^2+4}}{2}. \end{cases}$$

Для будь-яких цілих n справедлива нерівність $\dfrac{n - \sqrt{n^2+4}}{2} < n.$

З іншого боку, розв'язуючи нерівність $\dfrac{n + \sqrt{n^2+4}}{2} \leq n+1$, отримаємо $n \geq 0$. Звідси випливає, що для $n = 0, 1, 2, \ldots$ розв'язки нерівності мають вигляд: $\left[n, \dfrac{n + \sqrt{n^2+4}}{2}\right)$, а оскільки для від'ємних n справедлива нерівність $n+1 < \dfrac{n + \sqrt{n^2+4}}{2}$, то в цьому випадку відповідь слід записати у вигляді: $\big[n, n+1\ $.

Відповідь: $\left(\bigcup_{n=-\infty}^{-1} \big[n, n+1\ \right) \cup \bigcup_{n=0}^{+\infty} \left[n, \dfrac{n + \sqrt{n^2+4}}{2}\right) = \ -\infty, 0\ \cup \bigcup_{n=0}^{+\infty} \left[n, \dfrac{n + \sqrt{n^2+4}}{2}\right).$

2. Нерівності, що містять вирази $\max$ **і** $\min$**.**

Перш ніж перейти до конкретних прикладів, зробимо кілька зауважень, корисних надалі. Позначимо через $\max\ x,y$ найбільше із чисел x і y, а через $\min\ x,y$ найменше з цих чисел. Нерівність $\max\ x,y\ < z$ еквівалентна системі нерівностей: $\begin{cases} x < z \\ y < z. \end{cases}$

Справді, для того, щоб максимальне з двох чисел було менше заданого числа, необхідно і достатньо, щоб кожне з них було менше цього числа.

Нерівність $\max\ x,y\ > z$ в свою чергу виконується тоді і тільки тоді, коли або $x > z$, або $y > z$, або обидві ці нерівності виконуються одночасно.

Аналогічно, нерівність $\min\ x,y\ > z$ еквівалентна системі нерівностей: $\begin{cases} x > z \\ y > z,\end{cases}$ а нерівність $\min\ x,y\ < z$ виконується тоді і тільки тоді, коли або $x < z$, або $y < z$, або обидві вони виконуються одночасно.

Приклад 3. Розв’язати нерівність $\max\ x, x^2 - 1\ > 2$.

Враховуючи сказане вище, розв’язком цієї нерівності буде наступна множина:

$$x\,|\,x > 2\ \cup\ x\,|\,x^2 - 1 > 2\ =$$
$$= x\,|\,x > 2\ \cup\ x\,|\,x > \sqrt{3}\ \cup\ x\,|\,x < -\sqrt{3}\ =$$
$$= x\,|\,x > \sqrt{3}\ \cup\ x\,|\,x < -\sqrt{3}\ .$$

Відповідь. $x \in (-\infty; -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.

Приклад 4. Розв’язати нерівність $\min\left(\dfrac{x-1}{x+1}, \dfrac{x+1}{x-1}\right) > x$.

Задана нерівність еквівалентна системі:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{x+1} > x \\ \dfrac{x+1}{x-1} > x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-1-x^2-x}{x+1} > 0 \\ \dfrac{x+1-x^2+x}{x-1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x^2+1}{x+1} < 0 \\ \dfrac{x^2-2x-1}{x-1} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 < 0 \\ x^2 - 2x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < -1 \\ x\,|\,x < 1-\sqrt{2}\ \cup\ x\,|\,x > 1+\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow x < -1.$$

Відповідь. $x < -1$.

3. Розв’язування нерівностей як спосіб доведення нерівностей

Розглянемо, наприклад, нерівність *f(x)* ≥ 0. Розв’язуючи цю нерівність, знаходимо множину *M* значень *x*, для яких функція *f* невід’ємна. Можна також зазначити, що на множині *M* виконувана нерівність *f(x)* ≥ 0. Так, розв’язуючи нерівність $x^2 - 5x + 6 \geq 0$, ми знаходимо, що $x \in (-\infty; 2] \cup [3; +\infty)$. Інакше кажучи, доведена нерівність $x^2 - 5x + 6 \geq 0$ на множині $M = (-\infty; 2)] \cup [3; +\infty)$.

Приклад 5. Довести подвійну нерівність $-2 \leq \sqrt{9-x} - \sqrt{x-5} \leq 2$.

Розглянемо ліву частину: $-2 \leq \sqrt{9-x} - \sqrt{x-5} \Leftrightarrow \sqrt{x-5} - 2 \leq \sqrt{9-x}$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq 9 \\ \sqrt{x-5} \geq 2 \\ (\sqrt{x-5}-2)^2 \leq 9-x \end{cases} \vee \begin{cases} x \geq 5 \\ x \leq 9 \\ \sqrt{x-5} < 2 \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{cases} 5 \leq x \leq 9, \\ x-5 \geq 4, \\ (\sqrt{x-5}-2)^2 \leq 9-x \end{cases} \vee \begin{cases} 5 \leq x \leq 9, \\ x-5 < 4 \end{cases} \right) \Leftrightarrow (x = 9 \vee 5 \leq x < 9) \Leftrightarrow 5 \leq x \leq 9.$$

Отже, нерівність $-2 \leq \sqrt{9-x} - \sqrt{x-5}$ виконується на всій області визначення.

Розглянемо праву частину: $\sqrt{9-x} - \sqrt{x-5} \leq 2 \Leftrightarrow \sqrt{9-x} \leq 2 + \sqrt{x-5} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 5 \leq x \leq 9, \\ 9 - x \leq 4 + 4\sqrt{x-5} + x - 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 \leq x \leq 9, \\ 5 - x \leq 2\sqrt{x-5} \end{cases} \Leftrightarrow 5 \leq x \leq 9.$$

Для $5 \leq x \leq 9$, $5 - x \leq 0 \leq 2\sqrt{x-5})$. Нерівність $\sqrt{9-x} - \sqrt{x-5} \leq 2$ також виконується на всій області визначення. В такому випадку говорять, що нерівність доведено.

Приклад 6. Довести нерівність $|x-1| + 2|x-2| \geq 1$.

Для розв'язання цієї нерівності розглянемо три випадки:

1) $\begin{cases} x < 1, \\ 1 - x - 2(x-2) \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1, \\ x \leq \frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x < 1.$

2) $\begin{cases} 1 \leq x < 2, \\ x - 1 - 2(x-2) \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x < 2, \\ x \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x < 2.$

3) $\begin{cases} 2 \leq x, \\ x - 1 + 2(x-2) \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \leq x, \\ x \geq 2, \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x.$

Об'єднуючи результати, отримуємо: $x \in R$. Отже, дана нерівність виконується для будь-якого дійсного x.

Приклад 7. Довести подвійну нерівність. $-\frac{2}{7} \leq \frac{1-2x}{2x^2+x+1} \leq 2.$

Ліва частина:

$$-\frac{2}{7} \le \frac{1-2x}{2x^2+x+1} \Leftrightarrow -4x^2-2x-2 \le 7-14x \Leftrightarrow 0 \le 4x^2-12x+9 \Leftrightarrow 0 \le (2x-3)^2,$$ що

справедливо для $x \in R$.

Права частина: $\frac{1-2x}{2x^2+x+1} \le 2 \Leftrightarrow 1-2x \le 4x^2+2x+2 \Leftrightarrow 0 \le 4x^2+4x+1 \Leftrightarrow$

$0 \le (2x+1)^2$, що справедливо для $x \in R$. Отже, нерівність доведено.

Приклад 8. Довести подвійну нерівність $-1 \le \frac{3\sin x}{5-4\cos x} \le 1$.

Розглянемо ліву частину:

$$-1 \le \frac{3\sin x}{5-4\cos x} \Leftrightarrow -5 \le 3\sin x - 4\cos x \Leftrightarrow -1 \le \frac{3}{5}\sin x - \frac{4}{5}\cos x.$$

Припустивши, що $\cos\varphi = \frac{3}{5}, \sin\varphi = \frac{4}{5}$, маємо : $-1 \le \sin(x-\varphi)$, що справедливо для $x \in R$.

Права частина: $\frac{3\sin x}{5-4\cos x} \le 1 \Leftrightarrow 3\sin x + 4\cos x \le 5 \Leftrightarrow \frac{3}{5}\sin x + \frac{4}{5}\cos x \le 1.$

Припустивши, що $\cos\varphi = \frac{3}{5}, \sin\varphi = \frac{4}{5}$, маємо $\sin(x+\varphi) \le 1$, що виконується для

$x \in R$. Отже, нерівність доведено.

Як показує практика і власний досвід, в літературі з елементарної математики наявна незначна кількість прикладних задач, які розв'язуються за допомогою нерівності. Тому в учнів (та й студентів) природно виникає питання: а для чого вивчаються нерівності? Заради самих нерівностей?

Тому пропонуємо низку прикладних задач, математичною моделлю яких будуть нерівності. Зауважимо, що застосування математичних моделей в різних науках є реалізацією методологічної сутності математичних знань і самої математики, сприяє встановленню міжпредметних зв'язків ([2], ([3]) .

4. Нерівності як математичні моделі

Приклад 9. Металеву кульку, температура якої дорівнює 120 ^{0}C, помістили в приміщення з температурою 20 ^{0}C. Через скільки хвилин температура кульки буде меншою 84 ^{0}C, якщо закон охолодження тіла виражається формулою $D = D_0 \cdot b^{kt}$, де D – різниця між температурою тіла, яке охолоджується, і температурою навколишнього середовища; D_0 – початкова різниця температур тіла і середовища; t – час у хвилинах; b, k – сталі величини, які залежать від форми тіла і матеріалу? Для даного тіла b = 0,6; k = 0,1.

Обчислимо $D_0 = 120 - 20 = 100\ ^0$С. Дізнаємося, через скільки часу температура кульки буде 84 ^{0}С. Для цього розв'яжемо рівняння: $120 - 84 = 100\ (0{,}6)^{0{,}1t}$. Маємо, що $0{,}36 = (0{,}6)^{0{,}1t}$, звідки $t = 20$ хв. Отже, через час $t > 20$ хв температура кульки буде меншою 84 ^{0}С.

Відповідь. $t > 20$ хв.

Приклад 10. Ємність легень людини виражається функцією $V(x) = \dfrac{110(\ln x - 2)}{x}$, де x – вік людини у роках, x є [10; 100]. Протягом якого часу ємність легень людини буде збільшуватись?

Знайдемо максимальне значення ємності легень людини в залежності від її віку. Для цього обчислимо похідну функції $V(x)$, прирівняємо її до нуля та розв'яжемо відповідне рівняння. Розв'язок цього рівняння буде: $x = e^3 \approx 20$. Отже в період від 10 до 20 років ємність людини збільшується.

Відповідь. від 10 до 20 років.

Приклад 11. У коробці лежать 20 червоних кульок, 10 зелених кульок, а решта – сині кульки. Скільки синіх кульок має бути у коробці, щоб ймовірність вийняти навмання з коробки синю кульку була не менша $\frac{1}{3}$, якщо загальна кількість кульок менша 50?

Нехай у коробці x синіх кульок, тоді всіх кульок $30 + x$, а ймовірність вийняти навмання з коробки синю кульку буде $\dfrac{x}{30 + x}$. За умовою ця ймовірність не менша $\frac{1}{3}$. Крім того, $30 + x < 50$. У цьому випадку математичною моделлю задачі є система нерівностей: $\begin{cases} \dfrac{x}{30+x} \geq \dfrac{1}{3} \\ 30 + x < 50 \end{cases}$. Знаходимо натуральні розв'язки цієї системи: 15, 16, 17, 18 або 19. Отже, у коробці може бути 15, 16, 17, 18 або 19 синіх кульок.

Відповідь. 15, 16, 17, 18 або 19 синіх кульок.

Приклад 12. В посудині об'єму V_0, міститься p - відсотковий розчин солі. Із посудини виливається a *л* суміші і додається a *л* води. Ця процедура повторюється n разів. Після скількох переливань концентрація солі в розчині зменшиться більш ніж у k раз?

Концентрація солі в розчині після n переливань визначається формулою:

$$C_n = \frac{p}{100}\left(1 - \frac{a}{V_0}\right)^n$$

Використовуючи цю формулу для концентрації солі в розчині після n переливань, маємо: $\dfrac{p}{100}\left(1 - \dfrac{a}{V_0}\right)^n < \dfrac{1}{k} \cdot \dfrac{p}{100}$. Звідси знаходимо $n > \log_{1-a/V_0} \dfrac{1}{k}$.

Відповідь. Найменша кількість таких переливань дорівнює $\left[\log_{1-a/V_0}\frac{1}{k}\right]+1$.

Приклад 13. Зустрічаються дві команди шахістів A і B. За умовами змагань кожен учасник однієї команди грає по одній партії з кожним учасником іншої команди. Загальна кількість майбутніх партій у 4 рази більша за кількість усіх гравців в обох командах. Однак через хворобу два гравці не змогли з'явитися на матч, у зв'язку з чим кількість усіх зіграних у матчі партій виявилося на 17 менше за передбачувану. Скільки гравців виступило в матчі за команду A, коли відомо, що в ній було менше гравців, ніж у команді B?

Позначимо кількість гравців, які мали виступити відповідно за команди A і B, через m і n $(n>m)$. Очевидно, що планувалося зіграти mn партій. Перша умова задачі приводить до рівняння $mn=4(m+n)$. Друге рівняння відразу записати не можна, оскільки невідомо, до яких команд належали захворілі гравці. Можливі три випадки:

1) якщо занедужали гравці команди A, то $(m-2)n=mn-17$;

2) якщо занедужали гравці команди B, то $(n-2)m=mn-17$;

3) якщо занедужало по одному гравцю з команд A і B, то $(m-1)(n-1)=mn-17$.

Перший випадок дає $2n=17$, що неможливо, оскільки n — ціле число. Другий випадок також неможливий з цієї ж причини: $2m\neq 17$. У третьому випадку маємо систему

$$\begin{cases} mn=4(m+n), \\ m+n=18, \\ n>m. \end{cases}$$

Звідси знаходимо, що $m=6$, $n=12$.

Відповідь. За команду A виступило 6 гравців.

Отже, розгляд нерівностей як математичних моделей дозволить обґрунтувати необхідність вивчення самих нерівностей та спонукати до розширення арсеналу математичних моделей учнів та студентів. Розглянуті приклади розв'язування нерівностей можуть бути використані вчителем в класах з профільним вивченням математики, на гуртках, під час підготовки до різноманітних олімпіад, а також викладачами у курсі «Елементарна математика».

Список використаних джерел

1. Кугай Н. В. Нерівності як математичні моделі для розв'язування прикладних задач / Н. В. Кугай, Є. М. Борисов // Вісник Чернігівського НПУ. Серія: Педагогічні науки. – Чернігів, 2015. – Випуск 127. – С. 77 - 80.

2. Кугай Н. В. Методологічні аспекти математичного моделювання / Н. В. Кугай, Є. М. Борисов // Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology, III (19), Issue: 38, 2015. – С. 39-42.
3. Кугай Н. В. Методологічні знання та міжпредметні зв'язки // Н. В. Кугай, Л. Ф. Сухойваненко // Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology, II(16), Issue: 33, 2014. – С. 49-52.
4. Соколенко Л. О. Прикладна спрямованість шкільного курсу алгебри і початків аналізу: навч. посібник / Л. О. Соколенко. – Чернігів: Сіверянська думка, 2002. – 128 с.