МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ЗНАНИЯ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКЕ КАК ОСНОВА ФОРМИРОВАНИЯ ГОТОВНОСТИ БУДУЩИХ УЧИТЕЛЕЙ МАТЕМАТИКИ К ИННОВАЦИОННОЙ ПЕДАГОГИЧНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ

Н. Кугай, В. Ачкан

METHODOLOGICAL KNOWLEDGE FROM ELEMENTARY MATHEMATICS AS THE BASIS FOR FORMATION OF READINESS OF THE FUTURE MATHEMATICS TEACHERS OF INNOVATIVE PEDAGOGICAL ACTIVITY

N.Kuhai, V. Achkan

In the article were singled out methodological knowledge of specifically scientific level from elementary mathematics. Demonstrated their use in of the propaedeutic training of future mathematics teachers for innovative teaching activities. In particular, defined the subject matter of elementary mathematics. Highlighted the basic studied methods, and fundamental concepts and facts related to the semantic module "number of sets". It presents methods, forms and means used for the acquisition of methodological knowledge as a basis for the formation (in the propaedeutic stage) readiness for innovative pedagogical activities.

KEYWORDS: *methodological knowledge, innovative pedagogical activities, mathematics teachers, elementary mathematics.*

Постановка проблемы. В условиях европейской интеграции становится важной модернизация образования, его направленность на формирование личности, способной к восприятию изменений на протяжении жизни, которая может применять полученные знания в практической деятельности. Интенсивные инновационные процессы в современном образовании привели к появлению большого количества разнообразных и часто разрозненных инициатив, направленных на совершенствование учебно-воспитательного процесса. Это делает актуальной проблему теоретического обоснования и разработки методики подготовки учителя математики к сознательному выбору, апробации, адаптации и реализации инноваций в педагогической деятельности. Реализация такой подготовки в условиях информационной перегруженности современного учебно-познавательного процесса не может быть эффективной без включения в содержание образования знаний о путях и методах получения научной информации и ее рационального использования – методологических знаний.

Система методологических знаний (в частности, методологических знаний по элементарной математике) – основа, без которой невозможен процесс формирования готовности будущих учителей математики к инновационной педагогической деятельности. Под готовностью будущего учителя математики к инновационной педагогической деятельности понимаем интегративное качество его личности, которое является результатом синтеза мотивов, ценностей, знаний, умений и практического субъектного опыта и обеспечивает успешную педагогическую деятельность, направленную на создание, распространение, сознательное и целесообразное использование инноваций в процессе обучения математике. Подробнее об этом в статье [2].

Анализ последних исследований и публикаций. На сегодняшний день усилиями ученых-философов, психологов, педагогов (В. Бажановым, В. Давыдовым, Л. Зориной, Т. Куном, М. Полани, Г. Саранцевым, М. Холодной, И. Якиманской и др.) уже в достаточной степени разработаны вопросы, связанные с выяснением специфики становления, развития и функционирования методологических знаний как в научном, так и в учебном (математическом) познании. Накоплен богатый опыт решения проблем, связанных с формированием отдельных видов методологических знаний при изучении различных дисциплин в школе и ВУЗе (Л. Зорина, Н. Кочергина, Е. Лященко, В. Мадер, А. Столяр, Н. Терешин, Е. Плотникова, Г. Голин, Н. Пастернак, Б. Спасский, И. Лернер, А. Бугаев, Б. Будний, С. Раков и др.).

Методологические знания состоят из нескольких структурных уровней. На сегодня самой распространенной является структурная модель методологических знаний, в которой выделены четыре уровня: философский; общенаучный; конкретно научный; уровень процедур и техник исследования. Структура методологических знаний будущего учителя математики проанализирована нами в работе [5].

Вопросу формирования готовности к инновационной педагогической деятельности учителей-предметников посвящены исследования И. Волощук, Т. Демиденко, К. Завалко, Н. Заричанской, А. Мосиюка. Теоретические аспекты готовности к инновационной педагогической деятельности учителя математики проанализированы нами в работе [1].

Различным аспектам изучения элементарной математики на физико-математическом факультете педагогического ВУЗа посвящены работы В. Бевз [3], Т. Годованюк [4], Е. Колесник, С. Семенеца и др. В то же время вопрос выделения методологических знаний конкретно научного уровня по элементарной математике в контексте формирования готовности будущих учителей математики к инновационной педагогической деятельности исследован недостаточно.

Цель статьи – выделить методологические знания конкретно научного уровня по элементарной математике и продемонстрировать их использование в процессе пропедевтической подготовки будущих учителей математики к инновационной педагогической деятельности.

Методы исследования: теоретический анализ, синтез, аналогия, сравнение, сравнительно-исторический, системный подход.

Изложение основного материала. Формирование готовности будущего учителя математики к инновационной педагогической деятельности (пропедевтический этап) начинается уже на первом курсе. Одну из ключевых ролей в этом процессе играет элементарная математика. Обучение элементарной математике направлено на овладение студентами фундаментальных фактов и понятий элементарной математики с учетом принципов системности, целостности, инновационности, интеграции. Знания и умения по элементарной математике является основой для формирования у студентов математической компетентности, креативности, развития способности к осуществлению поисково-исследовательской деятельности, к самостоятельному поиску новой информации, к использованию новых способов решения задач и т.п.

Элементарная математика как учебная дисциплина объединяет в себе элементы арифметики, алгебры, геометрии и начал анализа. Предметом арифметики является понятие числа, предметом элементарной алгебры – уравнение, предметом элементарной геометрии – геометрические объекты, начал анализа – функция. Заметим, что понятие "функция" не является предметом изучения элементарной математики как науки. Предметом изучения элементарной математики как учебной дисциплины можно считать: числа, выражения, уравнения (неравенства), функции, геометрические объекты.

В современных условиях подготовки будущих учителей математики обучения элементарной математики не может быть сознательным и эффективным без включения к содержанию подготовки методологических знаний.

К методологическим знаниям конкретно научного уровня будем относить знания о: предмете учебной дисциплины; конкретно научные методы учебной дисциплины; фундаментальные понятия; фундаментальные отношения между понятиями; фундаментальные теоретические факты (определения, аксиомы, теоремы) связь с другими учебными дисциплинами; пределы применимости знаний; историю развития.

Далее речь пойдет о элементарной математике как учебной дисциплине в педагогических вузах. Необходимо заметить, что в разных педагогических университетах элементарная математика изучается на разных курсах (например, в Бердянском государственном педагогическом университете это первый курс, в НПУ имени М. Драгоманова – 2 – 4 курсы), в разном объёме и с несколько разными целями. Но вне зависимости от ВУЗа учебная дисциплина "Элементарная математика" играет значительную роль в профессиональной подготовке учителя математики: именно при изучении этой дисциплины происходит повторение, обобщение и расширение знаний о математических понятиях и фактах, которые рассматривались в курсе школьной математики. И происходит это с точки зрения заложенных в них фундаментальных математических идей и научного обоснования методов и приемов, используемых в элементарной математике.

Согласно ОПП подготовки бакалавра по направлению 6.040201 Математика * (Киев, 2002 год) предусмотрено изучение таких содержательных модулей: числовые множества; выражения и их преобразования; функции и их графики; уравнения и неравенства; геометрические фигуры и величины.

Поскольку массив фундаментальных понятий и фактов учебной дисциплины достаточно широк, то, по нашему мнению, целесообразно выделять фундаментальные понятия, отношения и факты в каждом разделе (содержательном модуле) этой дисциплины. В качестве примера, рассмотрим содержательный модуль "Числовые множества".

Фундаментальные понятия: число натуральное, целое, рациональное, иррациональное, действительное, комплексное, сумма, разность, произведение и частное чисел, модуль действительного числа, делимость, делимое, делитель, частное, остаток, кратное, общее и наименьшее общее кратное, общий и наибольший общий делитель, взаимно простые числа, число простое и составное, каноническая форма натурального числа, процент, отношение, пропорция, корень n-й степени и арифметический корень n-й степени числа, логарифм и степень числа, синус, косинус, тангенс и котангенс числа, арксинус, арккосинус, арктангенс и арккотангенс числа. Числовая последовательность, арифметическая и геометрическая прогрессии.

Фундаментальные факты: свойства арифметических действий над числами, свойства модуля действительного числа, принцип и метод математической индукции, свойства отношения делимости, теорема о делении чисел с остатком, теоремы о существовании и единственности НОД и НОК двух целых чисел, связь между НОД и НОК двух целых чисел, методы нахождения НОД и НОК целых чисел, свойства простых и составных чисел, основная теорема арифметики, решето Эратосфена, основные типы задач на проценты, основное свойство дроби и пропорции, производные пропорции. Формулы n-го члена арифметической и геометрической прогрессии, характеристическое свойство, формулы суммы первых n членов арифметической и геометрической прогрессии, формула суммы бесконечной геометрической прогрессии.

К *фундаментальным отношениям*, которые рассматриваются в курсе элементарной математики, следует отнести: принадлежать (не принадлежать); точка и прямая, точка и плоскость, прямая и плоскость, точка и график функции (принадлежность элемента множеству); размещение точки между двумя другими (лежать между); отношение конгруэнтности (или равенства); отношение параллельности и перпендикулярности прямых, плоскостей, прямых и плоскостей, скрещивания прямых и тому подобное. Кроме того, будущий учитель математики должен понимать, что арифметические операции над числами – это также отношение (бинарные, если речь идет о сложении, вычитании, умножении, делении).

Будущий учитель математики должен обладать логически обоснованными знаниями о фундаментальных понятиях математики. В частности, должен различать понятия, которые в школьном курсе обозначить невозможно. К таким понятиям относится, в частности, понятие натурального числа. Подробнее об этом в работе [6].

Для успешного изучения студентами элементарной математики необходимы прочные знания школьного курса математики. Неоспоримым является тот факт, что успешное изучение курсов высшей математики и подготовка будущего учителя математики невозможны без должным образом сформированной системы знаний и умений студентов по элементарной математике. В то же время изучение курсов высшей математики в педагогическом ВУЗе способствует дополнению и систематизации таких знаний и умений у будущих учителей математики, позволяет научно обосновать школьный курс математики.

При решении задач по элементарной математике следует использовать знания и методы по различным разделам математики, изученных в школе или уже в ВУЗе. При этом важно подчеркнуть возможность и правомерность применения тех или иных методов при решении соответствующих задач в школе. Объясним это на примерах.

1) Ярким примером является исследование свойств функции и построение ее графика. Исследование функции на монотонность, экстремум и вогнутость можно осуществить с помощью методов как элементарной математики, так и методами дифференциального исчисления. Будущий учитель математики должен знать и понимать, на каком этапе изучения школьной математики какие из методов можно использовать. Кроме того, важным для формирования научного мировоззрения и профессиональной культуры будущего учителя математики является знание и понимание того, что методы нового раздела математики позволяют проще, красивее и быстрее решить известные задачи. Стоит предложить студентам решить задачу “Доказать, что функция $f(x)=x^3$ возрастает на множестве всех действительных чисел” с помощью: а) методов элементарной математики; б) методами дифференциального исчисления.

2) Для вычисления интеграла $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$ большинство студентов используют метод подстановки $x=a\sin t\,(x=a\cos t)$. Хотя такого типа интеграл можно вычислить проще, применив геометрический смысл определенного интеграла (в данном случае – это площадь полукруга радиуса 2, и поэтому $\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=2\pi$), и предлагать его можно (и он есть в школьных сборниках) ученикам 11-го класса, хотя метод подстановки они не изучают.

Поскольку учебная дисциплина “Элементарная математика” объединяет в себе различные области математики, и не только элементарной, то и сочетает в себе алгебраические, геометрические, аналитические методы. Назовем основные из них: 1) метод замены; 2) метод интервалов; 3) методы разложения на множители; 4) метод неопределенных коэффициентов; 5) метод оценок; 6) методы решения систем уравнений; 7) метод геометрических преобразований; 8) метод равносильных преобразований; 9) методы доказательства неравенств (по определению, синтетический, аналитический, метод математической индукции, метод от противного, метод усиления) 10) метод координат; 11) векторный метод.

Сделаем несколько замечаний относительно первых двух методов. По словам А. Самойленко, “использование замен переменных для приведения сложных объектов к более простым” является “чрезвычайно плодотворной математической идеей” [7, с. 34].

Этот метод в элементарной математике широко используется для решения уравнений и неравенств (и не только).

Как известно, в основе метода интервалов лежит понятие непрерывной функции, которое не является предметом изучения элементарной математики. Поэтому учителя должны понимать: если этот метод рассматривать в 9-м классе, то обосновать его теоретически невозможно, его использование возможно только на интуитивном уровне.

Знания о методах и особенностях их использования в обучении математике являются одной из необходимых предпосылок для формирования когнитивного компонента готовности будущего учителя математики к инновационной педагогической деятельности.

Нашли свое отображение во время обучения элементарной математике и общенаучные методы: аксиоматический (в геометрии), метод математического моделирования, метод аналогий, метод индукции (математической) и др.

Рассмотрим, как методологические знания о методах решения задач способствуют формированию (на пропедевтическом этапе) готовности к инновационной педагогической деятельности в процессе изучения элементарной математики. Целесообразно использовать такие средства.

✓ Задачи по различным темам курса элементарной математики, которые решаются несколькими методами (способами). Такая деятельность способствует формированию у будущих учителей способностей использовать фундаментальные понятия и фундаментальные факты на практике, умений математического моделирования, способностей экспериментировать с выбором метода (способа) решения и объяснять его целесообразность.

Приведем несколько примеров. При изучении содержательного модуля “Числа и выражения” студентам предлагается упростить выражение $\sqrt{x+2\sqrt{3x-9}}+\sqrt{x-2\sqrt{3x+9}}$. Студенты в процессе решения задачи или сразу переходят к нахождению области определения выражения через решение системы иррациональных неравенств $\begin{cases} x+2\sqrt{3x-9} \gg 0 \\ x-2\sqrt{(3x-9)} \gg 0 \end{cases}$ (первый способ), либо сначала выполняют несколько тождественных преобразований и получают: $\left|\sqrt{x-3}+\sqrt{3}\right|+$ $+\left|\sqrt{x-3}-\sqrt{3}\right|$ (второй способ). После выполнения тождественных преобразований студентам значительно проще определить область определения выражения и значение, в котором “подмодульное” выражение меняет свой знак. После решения примера целесообразно предложить студентами такие вопросы и задания:

• какие фундаментальные факты, фундаментальные понятия Вы использовали в процессе решения этого примера?

• какие этапы в решении задачи каждым из способов кажутся Вам наиболее сложными и почему?

• составьте задачу аналогичную этой.

При изучении содержательного модуля “Уравнения и неравенства” студентам целесообразно предлагать решать практические и прикладные задачи несколькими методами (способами). В частности, задачи на смеси и сплавы, задачи на работу, задачи на движение целесообразно по возможности решать как аналитическим, так и арифметическим методами. Например, при решении задачи на смеси и сплавы студентам предлагается использовать сначала аналитический метод. Он более привычный для студентов младших курсов, поскольку опирается на относительно недавний субъективный школьный опыт математической деятельности по решению таких задач. При этом задачу аналитическим методом студенты решают двумя способами (сведя к уравнению с одной переменной или системы уравнений с двумя переменными). После этого проводится обсуждение решений. Студенты формулируют фундаментальные понятия и факты, которые они использовали в процессе решения задачи каждым из способов, выделяют (с помощью преподавателя) ориентировочные основы деятельности по решению подобных задач каждым из способов; обсуждают, какой из способов для них “ближе” с точки зрения актуализации субъективного школьного опыта (для большинства студентов, как правило, это сведение к системе уравнений, что объясняется среди прочего тем, что этот способ в школе изучался позже). Затем студентам предлагается решить задачу арифметическим способом и происходит обсуждение полученного решения. В контексте пропедевтики методической подготовки студентов важно, чтобы будущие учителя математики осознали важность формирования способностей решения практических и прикладных задач арифметическим способом, который не только способствует развитию у них логического мышления и креативных способностей, расширению субъективного опыта математической деятельности, но необходим для будущей педагогической деятельности.

- ✓ Задачи интегративного характера, решение которых способствует установлению у будущих учителей содержательной, понятийной и методической связи между отдельными разделами школьных математических дисциплин и даже между самими дисциплинами (в частности, алгеброй и геометрией), систематизации, обобщению и углублению методологических знаний, совершенствованию умений и навыков студентов, увеличению их опыта.

Приведем пример такой задачи интегрированного характера, решение которой требует применения знаний, умений, навыков и субъективного опыта первокурсников, связанного с тождественными преобразованиями иррациональных, степенных и логарифмических выражений. Вычислить значение выражения $\left(\sqrt{21+8\sqrt{5}}+\sqrt{21-8\sqrt{5}}\right)^{\log_2 25\log_5 2}$. После решения этой задачи одним способом студенты перечисляют, какие фундаментальные понятия и факты они могут использовать для решения этой задачи, и получают задания для самостоятельной внеаудиторной работы: решить задачу еще одним способом и “сконструировать” аналогичную задачу.

- ✓ Задачи интегративного характера, решение которых способствует установлению у будущих учителей междисциплинарных связей с отдельными дисциплинами высшей математики, изучаемыми в этом же семестре (или которые будут изучаться в будущем). В процессе подготовки будущего учителя математики уже с первого курса необходимо формировать у него способности применять методы, которые используются в элементарной математике, в нестандартных ситуациях, комбинировать эти методы как в элементарной, так и в отдельных разделах высшей математики. Так, большинство студентов – будущих учителей математики связывают применение метода неопределенных коэффициентов с математическим анализом. В то же время этот метод “работает” и в элементарной математике. Приведем пример: для каких значений m и n является тождеством равенство $\frac{7}{(x-6)(x+1)}=\frac{m}{x-6}+\frac{n}{x+1}$?

Необходимо обратить внимание студентов, что он аналогичен примерам из математического анализа, в которых требуется разложить дробь на сумму элементарных дробей, а, следовательно, владение методом неопределенных коэффициентов им пригодится и в дальнейшем изучении математического анализа, и в будущем изучении дифференциальных уравнений.

- ✓ Задачи с последующим определением цели коррекционной деятельности в случае ошибочного решения. Студенты выбирают одну из разноуровневых задач, решают ее, анализируют собственное решение, сравнивают его с правильным, определяют причины осложнений и формулируют на этой основе цель дальнейшей коррекционной деятельности. Такая работа способствует закреплению методологических знаний, формированию не только математических компетентностей, но и методической компетентности учителя математики (в частности, способности к анализу, планированию, моделированию, объяснению и корректировке своей математической и методической деятельности), способности к рефлексии собственной деятельности. Все перечисленные компетентности и способности являются одними из необходимых составляющих готовности будущего учителя математики к инновационной педагогической деятельности. Например, при изучении содержательного модуля “Уравнения и неравенства” студентам целесообразно предложить составить план решения следующей задачи: $f(f(x))=f(x)$, где $f(x)=-x^2-x-3$. Чему равен x? После этого студентам постепенно предлагается:

• сформулировать проблему, которая может возникнуть в процессе решения этой задачи;

• назвать причину возникновения такой проблемы и выяснить пути преодоления этой проблемы;

• назвать равносильную формулировку этой задачи, которая не требует поиска корней многочлена высокой степени;

• решить задачу в новой формулировке и сформулировать ориентир по решению уравнений вида $f(f(x))=f(x)$.

✓ Поисково-исследовательские задачи для аудиторной и внеаудиторной работы. Например, на основе анализа учебных пособий по элементарной математике и школьных учебников составить перечень основных способов введения новой переменной. Заполните таблицу 1.

Таблица 1

№	Вид замены	Пример уравнения

Кроме средств, важную роль в процессе формирования методологических знаний, интеграции математической и методической подготовки студентов, пропедевтической подготовке к инновационной педагогической деятельности играют формы и методы обучения. В частности, мы считаем целесообразным:

• использовать интерактивные методы обучения, организовывать групповую деятельность студентов в гомогенных и гетерогенных группах переменного состава как во время практических занятий по элементарной математике, так и в процессе самостоятельной внеаудиторной работы. Например, во время практического занятия на тему “Многогранники” студентам предлагается с помощью метода “круг идей” создать прикладную задачу, которая сводилась бы к решению следующей: “Стороны равностороннего треугольника равны 40 м. Найти расстояние от плоскости треугольника до точки, находится на расстоянии 3 м от каждой из вершин”;

• использовать метод проектов. В процессе изучения курса элементарной математики студенты готовят как индивидуальные, так и групповые информационные и исследовательские проекты. Приведём пример исследовательского проекта. Группе из двух-трех студентов предлагается ознакомиться с пакетом динамической математики “DG”, подобрать из школьных учебников (пособий и т.п.) задачи и продемонстрировать их решения как без использования “DG”, так и с его использованием. Во время защиты своего проекта студенты не только знакомятся коллег с возможностями использования “DG”, но и, что самое главное, обосновывают целесообразность использования компьютерной поддержки для решения определенного типа задач, выделяют этапы работы с задачей, на которых эта поддержка будет кстати;

• осуществление традиционных и инновационных форм индивидуальной помощи студентам со стороны преподавателей и студентов-старшекурсников. Например, на факультете физико-математического и технологического образования Бердянского государственного педагогического университета уже несколько лет в рамках ассистентской практики магистров действует экспериментально-консультационных пункт “Первая сессия”, где студенты-магистранты в октябре-декабре проводят индивидуальные и групповые консультации для первокурсников, помогая им адаптироваться в ВУЗе, преодолеть проблемы, возникающие в изучении математических дисциплин (в частности, элементарной математики). Такая работа не только помогает первокурсникам, но и позволяет студентам магистратуры приобрести субъективный опыт педагогической деятельности (в том числе и инновационной). В 2016 году этот положительный опыт планируется расширить, организовав сотрудничество студентов-первокурсников, изучающих элементарную математику, и студентов четвертого курса, изучающих дисциплину “Избранные вопросы школьной математики”.

Выводы. Выделение методологических знаний конкретно научного уровня по элементарной математике и использование в процессе обучения предложенных средств, методов и форм обучения, оказание помощи студентам со стороны преподавателей и студентов-старшекурсников способствует формированию методологических знаний, создает необходимые предпосылки для получения методической компетентности, привычки к креативному инновационному поведению, способности подражать и внедрять инновационный педагогический опыт, осуществлять экспериментальную, поисково-исследовательскую деятельность, выступает основой для дальнейшего формирования в процессе обучения дисциплинам математического цикла готовности к инновационной педагогической деятельности у будущих учителей математики.

Литература

1. Ачкан В.В. Готовность учителя математики к инновационной образовательной деятельности: теоретический аспект / Виталий Ачкан // Научные записки. – Выпуск 5. – Серия: Проблемы методики физико-математического и технологического образований. Часть 1. – Кировоград: РИО КГПУ им. В. Винниченко, 2014. – С. 13 – 18.

2. Ачкан В.В. Интеграция математической и методической подготовки как предпосылка формирования готовности к инновационной педагогической деятельности будущих учителей математики / Виталий Ачкан // Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology, III (30), Issue 59, 2015 – p. 23 – 26.

3. Бевз В.Г. Использование исторического материала в обучении элементарной математики будущих учителей / Валентина Бевз // Дидактика математики: проблемы и исследования. – Выпуск 22. – 2014. – С. 62 - 68.

4. Годованюк Т.Л. Методическая подготовка будущего учителя математики в процессе изучения элементарной математики / Татьяна Годованюк // Дидактика математики: проблемы и исследования. – Выпуск 39. – 2013. – С. 11 – 15.

5. Кугай Н.В. Методологические знания будущего учителя математики / Наталия Кугай // Вестник Черкасского университета. Серия: Педагогические науки. – 2014. – № 26 (329). – С. 56 – 61.

6. Кугай Н.В. Что должен знать учитель математики о натуральных числах / Н.В. Кугай, Е.Н. Борисов, Ю.Ю. Демьяненко // Вестник Черкасского университета. Серия: Педагогические науки. – Черкассы, 2014. – Выпуск 8 (301). – С. 62 – 66.

7. Самойленко А.М. Дифференциальные уравнения: учебник / А.М. Самойленко, Н.А. Перестюк, И.А. Парасюк. – 2-е изд., Перераб. и доп. – К., Либедь, 2003. – 600 с.

Кугай Наталия Васильевна, кандидат педагогических наук, доцент, докторант НПУ имени М. П. Драгоманова. E-mail: nkuhai@meta.ua.

Ачкан Виталий Валентинович, кандидат педагогических наук, доцент, докторант Бердянского государственного педагогического университета. E-mail: v_achkan@ukr.net