Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2014, № 16 (1). — С. 258–278.

Про деякі ймовірнісні феномени, пов'язані з розподілами випадкових векторів, породжених $W-$зображенням

В. О. Волошина, Г. М. Торбін
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

Анотація. Робота присвячена висвітленню нових ймовірнісних феноменів, які отримані при спробі узагальнення на багатовимірний випадок результатів М.В.Працьовитого та Г.М.Торбіна про властивості розподілів випадкових величин типу Джессена-Вінтнера (зокрема, випадкових величин з незалежними Q- та Q^*-символами). У роботах О.В.Школь-ного показано, що за умови виконання N-властивості для системи подрібнюючих розбиттів, більшість ймовірнісних результатів переноситься з одновимірного випадку на двовимірний із застосуванням розроблених методів. В роботі нами отримано ряд нових несподіваних результатів, які спростовують гіпотези стосовно чистоти, критеріїв дискретності двовимірних випадкових векторів типу Джессенна-Вінтнера та наявності неперервної лебегівської компоненти для таких розподілів. З цією метою вводиться поняття W-зображення точок одиничного квадрата, вивчаються основні властивості W-зображення. Основним об'єктом досліджень є випадкові вектори з незалежними символами W-зображення. Показано, що їх розподіли не є, взагалі кажучи, чистими. У роботі знайдено необхідні і достатні умови абсолютної неперервності таких розподілів та наведено приклад *чисто дискретного* розподілу випадкового вектора з незалежними символами W-зображення, для якого виконується умова Леві: $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_{i} p_{ik} = 0$.

Ключові слова: випадкові величини типу Джессена-Вінтнера, сингулярні міри, випадкові вектори з незалежними символами $W-$зображення.

Abstract. The paper is devoted to new probabilistic phenomena which where discovered during the process of multidimensional generalizations of results by M.Pratsiovytyi and G.Torbin on random variables of the Jessen-Wintner type (in particular, random variables with independent symbols of Q- and Q^*-expansions). It has been shown by O.Shkolnyi that under the N-condition, most probabilistic results can be transferred from one-dimensional to two-dimensional case by using the same techniques. In the paper we demonstrate a series of rather unexpected results related to conjectures on probabilistic purity, necessary and sufficient conditions for the discreteness and the existence of continuous components for such distributions. To this end we introduce the W-expansion of elements from the unit square and study some basic properties of these expansions. Random vectors with independent symbols of W-expansion are main objects of our study. We show that their distributions are, generally speaking, not of pure type. Necessary and sufficient conditions for absolute continuity of such distributions are found. We also construct an example of *pure discretely* distributed random vectors with independent symbols of W-expansions such that the Levy condition holds: $\prod_{k=1}^{\infty} \max_i p_{ik} = 0$.

Key words: random variables of the Jessen-Wintner type, random vectors with independent symbols of $W-$expansion.

Mathematics Subject Classification (2010): 11K55, 28A80, 60G30.

1. Вступ

Однією з важливих проблем теорії ймовірності є поглиблення теореми Джессена-Вінтнера, що стверджує чистоту розподілу випадкової величини, яка є сумою майже напевно збіжного ряду незалежних дискретно розподілених випадкових величин, тобто випадкової величини виду

$$\psi = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k, \tag{1}$$

де ψ_k– незалежні дискретно розподілені випадкові величини [18].

Теорема Леві дає необхідні і достатні умови дискретності випадкових величин вказаного виду (їх називають випадковими величинами Джессена-Вінтнера): випадкова величина ψ, яка задається рівністю (1) має чисто дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_i p_{ik} > 0,$$

де $p_{ik} = P\{\psi_k = x_i\}$[12].

Критерій же абсолютної неперервності та сингулярної непервності на сьогодні є невідомим, незважаючи на багаточисельні спроби розв'язання цієї проблеми для випадкових величин з певних класів. Результати цього напряму досліджень викладено у роботах Б. Джессена, А. Вінтнера, П. Ердеша, Ю. Переса, Б. Соломяка, С. Альбеверіо, М.В. Працьовитого, Г.М. Торбіна, Я.В. Гончаренко, О.В. Школьного [1, 3, 4 – 6, 8 – 11, 15, 19, 23 – 25].

У роботах М.В.Працьовитого та Г.М.Торбіна було відзначено, що висновок про чистоту розподілу залишається правильним не лише для вказаних вище випадкових величин, але і для випадкових величин з незалежними символами різних зображень дійсних чисел ($Q-, Q^*, \widetilde{Q}$ тощо). Зазначимо, що навіть випадкова величина з незалежними символами Q-розкладу вже, взагалі кажучи, не є випадковою величиною Джессена-Вінтнера (вона може бути представлена у вигляді потраекторно збіжного ряду дискретно розподілених випадкових величин, але ці випадкові величини, взагалі кажучи, не є незалежними).

Випадковою величиною *типу* Джессена-Вінтнера називається випадкова величина $\psi = \varphi(\xi_1, ..., \xi_n, ...)$, яка має чистий розподіл, а випадкові величини $\xi_1, ..., \xi_n, ...$ є незалежними і дискретно розподіленими. Важливим підкласом є клас випадкових величин виду

$$\psi = \Delta^F_{\xi_1 \ldots \xi_n \ldots}$$

з незалежними символами узагальнених F-розкладів.

Аналогічно, випадкові вектори виду

$$\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k,$$

де ζ_k– незалежні дискретно розподілені випадкові вектори, а випадковий вектор ζ має чистий розподіл, ми домовимося називати випадковими векторами Джессена-Вінтнера.

Випадковим вектором *типу* Джессена-Вінтнера називатимемо випадковий вектор $\omega = \varphi(\zeta_1, ..., \zeta_n, ...)$, який має чистий розподіл, а $\zeta_1, ..., \zeta_n, ...$ є незалежними дискретно розподіленими випадковими векторами.

Теорія багатовимірних випадкових векторів типу Джессена-Вінтнера розвинена значно слабше за відповідну теорію для випадкових величин. Відзначимо серію робіт О.В. Школьного, який досліджував розподіли комплекснозначних випадкових величин типу Джессена-Вінтнера із застосуванням розроблених для одновимірного випадку методів (див. дисертаційне дослідження О.В.Школьного та статті [12-15]). Отримані у вказаних роботах результати стосувались двовимірних розподілів ймовірностей з незалежними символами спеціальних представлень точок одиничного квадрата, при яких кожна точка має не більш як зчисленну кількість різних зображень (N-властивість) і тому отримані результати були природним узагальненням результатів щодо властивостей випадкових величин з незалежними Q*-символами на двовимірний випадок. Зазначимо, що внаслідок певної аналогії отриманих результатів з відомими одновимірними об'єктами, великої хвилі зацікавленості розподілами таких випадкових векторів не спостерігалось, що пояснюється також складністю аналізу таких об'єктів у загальному випадку (без припущення про N-властивість). У вказаних вище роботах зазначається важливість N-властивості для застосовності методів, але не будується контрприкладів, які б демонстрували, що проблеми носять принциповий, а не технічний характер.

У нашій роботі висвітлюються нові результати у теорії розподілів багатовимірних випадкових векторів. Було отримано ряд нових феноменів, пов'язаних із чистотою та неперервністю розподілів у багатовимірному випадку, які відсутні в одновимірному випадку. Зокрема, ми будуємо серію контрприкладів, які спростовують гіпотези щодо чистоти та критеріїв неперервності та сингулярності розподілів випадкових векторів з незалежними W-символами, які є природнім двовимірним узагальненням розподілів випадкових величин з незалежними Q-символами.

У першій частині роботи вводиться поняття W-зображення точок одиничного квадрата, описуються найпростіші властивості W-зображення (за алгоритмом побудови W-зображення є двовимірним аналогом Q-зображення дійсних чисел). У другій частині роботи розглядаються випадкові вектори типу Джессена-Вінтнера з незалежними символами W-зображення. Строго доведено вимірність відображення, яке діє з нескінченного добутку ймовірнісних просторів і породжує відповідну ймовірнісну міру. У третій і четвертій частині роботи розглядаються властивості розподілів випадкових векторів, породжених незалежними символами W-зображення та спростовуються аналоги теорем Джессена-Вінтнера та Леві для вказаного класу ймовірнісних мір. Більше того, нами побудовано чисто дискретний розподіл випадкового вектора з незалежними символами W-зображення, для якого виконується умова Леві. Водночас в роботі знайдено необхідні і достатні умови абсолютної неперервності ймовірнісних мір з досліджуваного класу.

2. W-зображення точок одиничного квадрата

Розглянемо одиничний квадрат $E = [0;1] \times [0;1] \subset R^2$. Виконаємо його поділ на n $(n \geq 2)$ замкнених у цьому просторі множин $\Delta_0^W, \Delta_1^W, ..., \Delta_{n-1}^W$ (ці множини називаються циліндрами першого рангу). При цьому мають виконуватися умови

$$\bigcup_{i=0}^{n-1} \Delta_i^W = E,\ \lambda\left(\Delta_i^W \bigcap \Delta_j^W\right) = 0,\ i \neq j,\ i,j \in \overline{0,n-1},$$

$$\lambda\left(\Delta_0^W\right) : \lambda\left(\Delta_1^W\right) : ... : \lambda\left(\Delta_{n-1}^W\right) = q_0 : q_1 : ... : q_{n-1},$$

де $q_i > 0,\ \sum\limits_{i=0}^{n-1} q_i = 1$.

Всі отримані множини виду $\Delta_{\alpha_1}^W$, де $\alpha_1 \in \overline{0,n-1}$ діляться на n частин $\Delta_{\alpha_1 0}^W,\ \Delta_{\alpha_1 1}^W,\ ...,\ \Delta_{\alpha_1 [n-1]}^W$ (ці множини називаються циліндрами другого рангу), замкнених у R^2 так, щоб:

$$\bigcup_{i=0}^{n-1} \Delta_{\alpha_1 i} = E,\ \lambda\left(\Delta_{\alpha_1 i}^W \bigcap \Delta_{\alpha_1 j}^W\right) = 0,\ i \neq j,\ i,j \in \overline{0,n-1},$$

$$\lambda\left(\Delta^W_{\alpha_1 0}\right) : \lambda\left(\Delta^W_{\alpha_1 1}\right) : ... : \lambda\left(\Delta^W_{\alpha_1 [n-1]}\right) = q_0 : q_1 : ... : q_{n-1}$$

для довільного фіксованого α_1.

На k-му кроці кожна множина $\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}}$, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1} \in \overline{0, n-1}$ знову ділиться на n частин $\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}0}, \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}1}, ..., \Delta_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}[n-1]}$ (ці множини називаються циліндрами (k+1)-го рангу), кожна з яких має бути замкненою в R^2.

При цьому для довільного фіксованого набору $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1} \in \overline{0, n-1}$ мають виконуватися умови:

(1) $\bigcup\limits_{i=0}^{n-1} \Delta^W_{\alpha_1...\alpha_{k-1}i} = \Delta^W_{\alpha_1...\alpha_{k-1}}$.

(2) $\lambda\left(\Delta^W_{\alpha_1...\alpha_{k-1}i} \bigcap \Delta^W_{\alpha_1...\alpha_{k-1}j}\right) = 0$, $i \neq j$.

(3) $\lambda\left(\Delta^W_{\alpha_1...\alpha_{k-1}0}\right) : \lambda\left(\Delta^W_{\alpha_1...\alpha_{k-1}1}\right) : ... : \lambda\left(\Delta^W_{\alpha_1...\alpha_{k-1}[n-1]}\right) = q_0 : q_1 : ... : q_{n-1}$.

(4) $diam\left(\Delta_{\alpha_1...\alpha_k}\right) \to 0$, $k \to \infty$.

Теорема 1. *Для довільної послідовності* $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}, \alpha_k \in A, A := \{0, 1, ..., n-1\}$ *існує послідовність* $\Delta^W_{\alpha_1} \supset \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2} \supset ... \supset \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k} \supset ...$ *та єдина точка* x *така, що*

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k}.$$

Доведення. Оскільки для $\forall k \in N,\ \alpha_k \in A$ то за описаною вище конструкцією маємо $\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2} \subset \Delta^W_{\alpha_1}, \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \subset \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2}, ..., \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}\alpha_k} \subset \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}}, ...$

Звідси випливає, що для довільної послідовності $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}, \alpha_k \in A$, існує послідовність

$$\Delta^W_{\alpha_1} \supset \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2} \supset ... \supset \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k} \supset ...$$

Оскільки кожна множина виду $\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k}$ є замкненою в R^2 , то отримуємо послідовність вкладених замкнених множин, діаметри яких, в силу виконання умови 4, прямують до 0 зі зростанням k. Отже, існує єдина точка x, така що

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k} =: \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_k...} \quad .(2)$$

□

Теорема 2. *Для довільного фіксованого* x *з квадрата* E *існує послідовність символів* $\{\alpha_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ *така, що:*

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta^W_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)...\alpha_k(x)} =: \Delta^W_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)...\alpha_k(x)...}.$$

Останній вираз називається W-представленням точки x.

Доведення. Зафіксуємо довільну точку $x \in E$ і виконаємо розбиття E за алгоритмом, описаним вище так, щоб виконувались умови (1) – (4).

Тоді, оскільки $E = \bigcup\limits_{i=0}^{n-1} \Delta_i^W$, то $\exists \alpha_1(x) : x \in \Delta_{\alpha_1(x)}^W$, причому α_1 залежить від вибору x. Далі:

$$\Delta_{\alpha_1(x)}^W = \bigcup_{i=0}^{n-1} \Delta_{\alpha_1(x)i}^W,$$

тому $\exists\ \alpha_2(x) : x \in \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)}^W$, при цьому α_2 залежить від вибору x.

Продовжуючи цей процес, на k-му кроці маємо:

$$\Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k-1}(x)}^W = \bigcup_{i=0}^{n-1} \Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k-1}(x)i}^W,$$

звідки випливає, що $\exists\alpha_k(x) : x \in \Delta_{\alpha_1(x)\ldots\alpha_{k-1}(x)\alpha_k(x)}^W$, і α_k залежить від вибору x.

Продовживши вказані дії до нескінченності, за теоремою 1 отримуємо, що

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)}^W,$$

тобто така послідовність $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ існує для довільного фіксованого $x \in E$. □

Нескладно навести приклад конкретного W-зображення, для якого виконується $N-$властивість [24, 25], тобто кожна точка має не більш ніж зчисленну кількість $W-$представлень.

Розглянемо розбиття одиничного квадрата, в якому E ділиться на першому кроці на чотири рівні квадрати, які ми позначимо $\Delta_0^W, \Delta_1^W, \Delta_2^W, \Delta_3^W$ з центром поділу у точці $A(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$. Нумерація буде йти із лівого верхнього кута проти годинникової стрілки.

На другому кроці $\Delta_i^W, i \in \{0, 1, 2, 3\}$ ділитимемо знову на чотири квадрати, позначаючи отримані квадрати аналогічно, але поділ нижніх квадратів Δ_2^W, Δ_3^W за своєю нумерацією повинен бути симетричним відносно верхніх Δ_0^W, Δ_1^W.

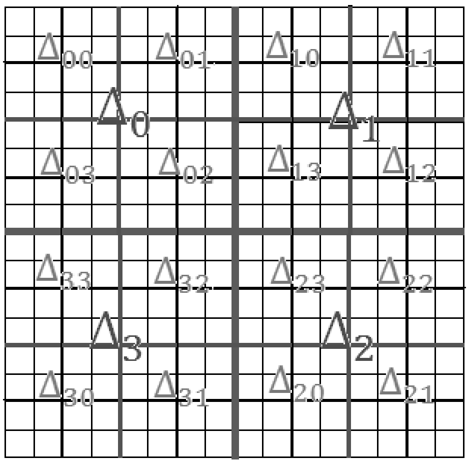

Рис. 1. Перші три кроки розбиття.

На подальших кроках процедура повторюється і легко бачити, що умови, накладені на розбиття виконуються. Кожна точка одиничного квадрата належить не більше як чотирьом циліндрам одного рангу і для даного зображення виконується N-властивість.

Існує також широкий клас W-зображень, для яких $N-$властивість не виконується. Деякі з них ми розглянемо у наступних розділах.

3. Про проблему чистоти розподілів випадкових векторів з незалежними символами W-зображення

Зафіксуємо довільне W-зображення із алфавітом $A = \{0, 1, 2, ..., n-1\}$ і розглянемо об'єкт виду

$$\xi = \Delta^W_{\xi_1\xi_2...\xi_k...},$$

де ξ_k - незалежні випадкові величини з наступними розподілами:

ξ_k	0	1	2	...	$n-1$
p_{ik}	p_{0k}	p_{1k}	p_{2k}	$\cdots$	$p_{[n-1]k}$

Означення. Нехай

$$\xi = \Delta^W_{\xi_1\xi_2...\xi_k...},$$

де ξ_k - незалежні випадкові випадкові, які можуть набувати значення i із алфавіту A фіксованого W-зображення з ймовірністю p_{ik}. Тоді ξ називатимемо випадковим вектором, породженим незалежними символами W-зображення.

Для обгрунтування коректності цього означення необхідно довести, що введений вище математичний об'єкт

$$\xi = \Delta^W_{\xi_1\xi_2...\xi_k...},$$

справді є випадковим вектором, тобто довести вимірність відображення $(\Omega, S) \to (R^1, B)$.

Теорема 3. ξ *– випадковий вектор.*

Доведення. Розглянемо послідовність $\Omega_k = \{0, 1, ..., n-1\}$, над кожним з яких задано σ-алгебру $S_k = 2^{\Omega_k}$. Означимо ймовірнісну міру на P_k на кожному із заданих вимірних просторів наступним чином: покладемо $P_k(i) := p_{ik}$ і $P_k(L) := \sum\limits_{i \in L} P_k(i)$.

Означимо ймовірнісний простір (Ω, S, P) як нескінченний добуток ймовірнісних просторів [8] :

$$(\Omega, S, P) := \prod_{k=1}^{\infty} (\Omega_k, S_k, P_k),$$

де

$$\Omega = \{\omega : \omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, ...)\},$$

S–мінімальна σ-алгебра, яка містить всі циліндричні множини C в Ω:

$$C = \{\omega : \omega = (c_1, c_2, ..., c_k, \omega_{k+1}, \omega_{k+2}, ...)\} = c_1 \times c_2 \times ... \times c_k \times \Omega_{k+1} \times \Omega_{k+2} \times ...,$$

де $\omega_j \in \Omega_j, \forall j > k$.

Розглянемо ймовірнісний простір (Ω^*, B, P^*), де Ω^*–одиничний квадрат, B–борелівська σ-алгебра підмножин одиничного квадрата, P^*–ймовірнісна міра, яка відповідає в.в. ξ.

Маємо:

$$\forall \omega \in \Omega : \omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, ...) \in \Omega$$
$$\xi(\omega) = \Delta^W_{\omega_1 \omega_2 ... \omega_k ...} \in \Omega^*$$

Оскільки B породжується системою циліндрів W-розбиття, то для доведення вимірності досить довести, що $\forall k \in N$ прообразом циліндра $\Delta^W_{c_1 c_2 ... c_k}$, є множина з S.

Оскільки

$$\xi^{-1}(\Delta^W_{c_1 c_2 ... c_k}) = \{\omega : \ \omega = (c_1, c_2, ... c_k, \omega_{k+1}, \omega_{k+2} ...), \omega_j \in \Omega_j \forall j > k\} \in S,$$

то вказана функція ξ із Ω в R^2 є вимірним відображенням, тобто випадковим вектором. $\square$

Проведемо аналогію між розподілом випадкової величини виду

$$\psi = \Delta^Q_{\psi_1 \psi_2 ... \psi_k ...},$$

породженої незалежними символами Q-зображення і випадковими векторами, породженими незалежними символами W-зображення.

Означення. Випадкова величина ψ називається породженою незалежними символами Q-зображення, якщо $\psi = \Delta^Q_{\psi_1 \psi_2 ... \psi_k ...}$, де ψ_k - незалежні випадкові величини, які набувають значень із алфавіту $A = \{0, 1, ..., n-1\}$ даного Q-зображення, і розподілені за законом

ψ_k	0	1	2	...	$n-1$
p_{ik}	p_{0k}	p_{1k}	p_{2k}	$\cdots$	$p_{[n-1]k}$

Відомо (див. [18]), що випадкова величина

$$\psi = \Delta^Q_{\psi_1 \psi_2 ... \psi_k ...},$$

має чистий розподіл, причому він є чисто неперервним тоді і тільки тоді, коли $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max p_{ik} = 0$. Із доведенням та деякими узагальненнями цього твердження на більш загальні класи зображень можна ознайомитися у роботах [1, 18, 19, 21, 24 - 26].

Сформулюємо деякі необхідні означення.

Означення.[18] Випадковий вектор має чистий розподіл, якщо його розподіл є або:

(1) Чисто дискретним.
(2) Чисто абсолютно неперервним.
(3) Чисто сингулярно неперервним.

Означимо тепер детальніше кожен тип чистого розподілу [9].

Означення. Розподіл випадкового вектора ξ називається дискретним, якщо множина значень, яких може набувати ξ з ненульовою ймовірністю є не більш, ніж зчисленною.

Означення. Розподіл випадкового вектора ξ називається неперервним, якщо ймовірнісна міра $P(\cdot)$, яка відповідає в.в. ξ рівна нулю на кожній одноточковій множині.

Означення. Розподіл випадкового вектора ξ називається сингулярно неперервним, якщо його розподіл є неперервним і при цьому існує така вимірна множина A, що $\lambda(A) = 0$ і $P(\xi \in A) = 1$, де $\lambda(\cdot)$ – міра Лебега, а $P(\cdot)$ - ймовірнісна міра, що відповідає в.в. ξ.

Означення. Розподіл випадкової величини ξ називається абсолютно неперервним (відносно двовимірної міри Лебега), якщо для кожної борелівської множини A з того того, що $\lambda(A) = 0$ випливає,що $P(\xi \in A) = 0$.

У роботах О.В. Школьного було показано, що якщо $W-$ зображення має $N-$властивість, то узагальнення теорем про чистоту і неперервність випадкових векторів, породжених цим зображенням, мають місце [26]. Але наскільки суттєвими є припущення про N-властивість? І як далеко можна буде просувати подібні узагальнення?

Було би бажано розширити наслідки вищевказаних теорем на клас випадкових векторів, породженими незалежними символами довільного $W-$зображення. Тому природними були наступні гіпотези.

Гіпотеза 1. Випадковий вектор

$$\xi = \Delta^W_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots},$$

породжений незалежними символами W-зображення має чистий розподіл.

Гіпотеза 2. Випадковий вектор

$$\xi = \Delta^W_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots},$$

породжений незалежними символами W-зображення має чисто неперервний розподіл тоді і тільки тоді, коли $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max p_{ik} = 0$.

Одне з завдань даної роботи - спростування обох цих гіпотез.

Контрприклад.

Розглянемо розбиття квадрата $E = [0;1] \times [0;1] \subset R^2$, яке породжує спеціальне W-зображення точок одиничного квадрата.

На першому кроці E поділимо на чотири рівні трикутники $\Delta^W_0, \Delta^W_1, \Delta^W_2, \Delta^W_3$, провівши діагоналі.

Утворені трикутники $\Delta^W_{\alpha_1}, a_1 \in \{0,1,2,3\}$ ділитимемо, провівши медіану з точки $A(\frac{1}{2};\frac{1}{2})$ і відрізок, паралельний основі так, щоб утворені фігури $\Delta^W_{\alpha_1 0}, \Delta^W_{\alpha_1 1}, \Delta^W_{\alpha_1 2}, \Delta^W_{\alpha_1 3}$ були рівновеликими.

Трикутники позначимо $\Delta^W_{\alpha_1 0}, \Delta^W_{\alpha_1 1}$, трапеції – $\Delta^W_{\alpha_1 2}, \Delta^W_{\alpha_1 3}$. Далі трикутники $\Delta^W_{\alpha_1 0}, \Delta^W_{\alpha_1 1}$ ділитимемо аналогічно до $\Delta^W_{\alpha_1}$.

Трапеції $\Delta^W_{\alpha_1 2}, \Delta^W_{\alpha_1 3}$ будемо ділити, провівши два відрізки, один із яких паралельний основам, а інший сполучає їх, так, щоб $\Delta^W_{\alpha_1 20}, \Delta^W_{\alpha_1 21}, \Delta^W_{\alpha_1 22}, \Delta^W_{\alpha_1 23}$, а також $\Delta^W_{\alpha_1 30}, \Delta^W_{\alpha_1 31}, \Delta^W_{\alpha_1 32}, \Delta^W_{\alpha_1 33}$ були рівновеликими.

Далі всі трикутники, тобто множини виду $\Delta^W_{\alpha_1\beta_2\ldots\beta_k}, \alpha_1 \in \{0,1,2,3\}, \beta_i \in \{0,1\}, i \in \overline{2,k}$, ділимо аналогічно до $\Delta^W_{\alpha_1}$, а трапеції, тобто $\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} : \exists \alpha_i \in \{2,3\}, i > 1$ – аналогічно до $\Delta^W_{\alpha_1 2}, \Delta^W_{\alpha_1 3}$.

Таким чином, із побудови розбиття випливає, що

$$\bigcup_{i=0}^{3} \Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}i} = \Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}}, \ \lambda\left(\Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}i} \bigcap \Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}j}\right) = 0, i \neq j,$$

$$\lambda\left(\Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}0}\right) = \lambda\left(\Delta_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}1}\right) = \lambda\left(\Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}2}\right) = \lambda\left(\Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}3}\right), \forall k \in N.$$

Геометрична інтерпретація даного розбиття наведена на рис. 2.

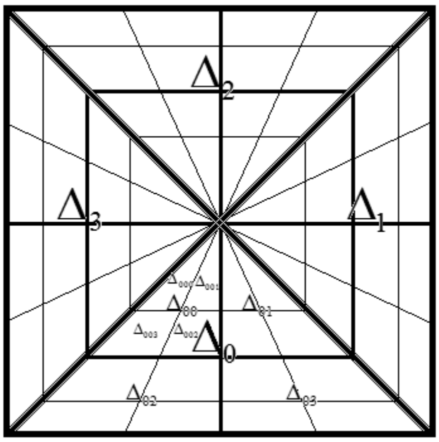

Рис. 2. Перші три кроки розбиття.

Також, неважко переконатися, що $diam\left(\Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\right) \to 0, k \to \infty$. Накладемо також умову замкнeності $\Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$.Тоді всі умови для того, щоб дане розбиття задавало $W-$зображення виконуватимуться.

Розглянемо випадковий вектор $\xi = \Delta^W_{\xi_1\ldots\xi_k\ldots}$, де

ξ_k	0	1	2	3
p_{ik}	$\frac{1}{2} - \frac{1}{10^k}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{10^k}$	$\frac{1}{10^k}$	$\frac{1}{10^k}$

Легко бачити, що $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max p_{ik} = \prod\limits_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^k}\right) = 0$, тобто і умови, накладені в гіпотезі 1, і умови, накладені в гіпотезі 2, задовільняються.

Розглянемо точку $A(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$:

$$A = \Delta^W_{\alpha_1\beta_2\ldots\beta_k}, \alpha_1 \in \{0,1,2,3\},\ \beta_i \in \{0,1\}, i \in \overline{2,k},$$

і знайдемо ймовірність потрапити у точку A

$$P\left(\Delta^W_{\alpha_1 0} \bigcup \Delta^W_{\alpha_1 1}\right) = 4\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^2}\right) + 4 \cdot \frac{1}{10}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^2}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^2}\right) = \left(1 - \frac{2}{10^2}\right).$$

$$P(\Delta^W_{\alpha_1 00} \bigcup \Delta^W_{\alpha_1 01} \bigcup \Delta^W_{\alpha_1 10} \bigcup \Delta^W_{\alpha_1 11}) = 8(\frac{1}{2} - \frac{1}{10})(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^2})(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^3}) +$$
$$+8 \cdot \frac{1}{10}(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^2})(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^3}) = 4\ (\frac{1}{2} - \frac{1}{10^2})(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^3}) = (1 - \frac{2}{10^2})(1 - \frac{2}{10^3}).$$

Далі маємо

$$P(\bigcup \alpha_1\beta_2 \ldots \beta_k) = 2^{k-1} \prod_{i=2}^{k} (\frac{1}{2} - \frac{1}{10^i}) = \prod_{i=2}^{k} (1 - \frac{2}{10^i}),$$

де $\alpha_1 \in \{0,1,2,3\}, \beta_k \in \{0,1\}$.

Звідси,

$$P(A) = \lim_{k\to\infty} \prod_{i=2}^{k} \left(1 - \frac{2}{10^i}\right) = \prod_{i=2}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{10^i}\right) > 0,$$

оскільки ряд $\sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{2}{10^i}$ є збіжним. Тому $P(A) > 0$.

Оскільки існує точка A така, що $P(A) > 0$, то розподіл випадкового вектора ξ не є неперервним, що суперечить гіпотезі 2. Оскільки будь-яка інша точка одиничного квадрата (крім точки A) має не більш як зчисленну кількість W-зображень і $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_{i} p_{ik} = 0$, то $P_\xi(x_0) = 0, \forall x_0 \neq A$. Отже, ймовірнісна міра P_ξ має у своєму лебегівському розкладі і дискретну, і неперервну компоненти, що спростовує обидві вказані вище гіпотези.

Таким чином, ми показали, що такі узагальнення теорем про чистоту і неперервність розподілів випадкових величин, породжених незалежними символами $Q-$зображення на клас випадкових векторів, породжених $W-$зображенням, не мають місця.

4. Про проблему неперервності та абсолютної неперервності розподілу випадкових векторів, породжених незалежними символами W-зображення

Повернемося до умов неперервності розподілу випадкової величини, породженої незалежними символами $Q-$ зображення.

Розподіл випадкової величини $\psi = \Delta^{Q}_{\psi_1\psi_2...\psi_k...}$ є чисто неперервним тоді і тільки тоді, коли $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max p_{ik} = 0$, де $p_{ik}-$ ймовірність того, що в.в. ψ_k набуде значення $i \in A$, A – алфавіт вказаного $Q-$зображення.

Даний розділ роботи присвячений з'ясуванню умов дискретності та неперервності розподілу випадкового вектора ξ.

Теорема 4. *Якщо*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_i p_{ik} > 0, \tag{3}$$

то розподіл випадкового вектора ξ є дискретним.

Доведення. Розглянемо вище означений ймовірнісний простір

$$(\Omega, S, P) := \prod_{k=1}^{\infty} (\Omega_k, S_k, P_k).$$

Як доведено в роботі [5], ймовірнісна міра P буде чисто дискретною тоді і тільки тоді, коли $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_i p_{ik} > 0$.

Розглянемо відображення ξ:

$$\xi(\omega) = \Delta^{W}_{\omega_1\omega_2...\omega_k...} \in \Omega^*,\ \forall\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, ...) \in \Omega,$$

яке діє з Ω в одиничний квадрат. Вище було доведено, що це відображення є вимірним і ймовірнісна міра μ_ξ є образом міри P під дією відображення ξ, тобто $\mu_\xi(M) = P(\xi^{-1}(M))$ для довільної борелівської підмножини M одиничного квадрата.

Покажемо, що умова (3) є достатньою для дискретності міри μ_ξ. Нехай умова (3) виконується. Тоді ймовірнісна міра P є чисто дискретною. Тому існує не більш як зчисленна множина G_1 така, що $P(G_1) = 1$. Позначимо $G_2 := \xi(G_1)$. Тоді G_2 - теж не більш як зчисленна множина.

Позначимо $G := \xi^{-1}(G_2)$. Тоді

$$\mu_\xi(G_2) = P(\xi^{-1}(G_2)) = P(G),$$

де $G \supset G_1$.

Оскільки $P(G_1) = 1$ і $G_1 \subset G$, то $P(G) = 1$. Отже, $\mu_\xi(G_2) = 1$, що і доводить дискретність міри μ_ξ. □

Наслідок 1. *Умова (3) є необхідною умовою неперервності ймовірнісної міри μ_ξ.*

У попередньому розділі ми вже довели, що випадковий вектор $\xi = \Delta^W_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots}$, де ξ_k−незалежні, не завжди має чисто неперервний розподіл за умови $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\, p_{ik} = 0$, де p_{ik}− ймовірність того, що в.в. ξ_k набуде значення $i \in A$, A – алфавіт вказаного W−зображення.

Покажемо, що можливий більш радикальний випадок, коли для вказаного вектора ξ: $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\, p_{ik} = 0$, але розподіл ξ є чисто дискретним.

Цей приклад покаже, що твердження, обернене до щойно доведеної теореми, неправильне!

Контрприклад.

Розглянемо розбиття E, у якого перший крок і розбиття трикутників $\Delta^W_{\alpha_1}, a_1 \in \{0, 1, 2, 3\}$ співпадають із наведеним у прикладі з розділу 4.

Трапеції $\Delta^W_{\alpha_1 2}, \Delta^W_{\alpha_1 3}$ ділитимемо на чотири рівновеликі частини за правилом: із вершини $\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2}, \alpha_1 \in \{0, 1, 2, 3\}, \alpha_2 \in \{2, 3\}$ проводимо відрізок a_1, який ділить $\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2}$ на рівновеликі трикутник і чотирикутник. Чотирикутник ділимо на рівновеликі частини, провівши відрізок a_2, що має одним із кінців вершину $\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2}$, і $a_1 \bigcap a_2 = A_{\alpha_1\alpha_2}$. Із $A_{\alpha_1\alpha_2}$ опустимо a_3, що ділить трикутник на рівновеликі частини.

Утворені трикутники позначимо $\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2 0}, \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2 1}$, а чотирикутники – $\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2 2}, \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2 3}$.

Чотирикутники $\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2 2}, \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2 3}$ і всі утворені в подальшому ділитимемо за принципом, вказаним для $\Delta^W_{\alpha_1 2}, \Delta^W_{\alpha_1 3}$, але накладаючи умову, що $diam(\Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_k}) \to 0, k \to \infty$.

Трикутники $\Delta^W_{\alpha_1 0}, \Delta^W_{\alpha_1 1}$ розбиваємо аналогічно до $\Delta^W_{\alpha_1}$, а при розбитті трикутника $\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$ медіану проводитимемо із вершини $\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$ – мінімальний чотирикутник, який цілком містить $\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$. Те, що дана точка є вершиною $\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$ випливає із побудови розбиття.

Також, всі трикутники при $k \geq 2$ мають вигляд $\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 0}$, $\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 1}$, а чотирикутники – $\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 2}$ і $\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 3}$.

Геометрична ілюстрація системи подрібнюючих розбиттів для даного W-зображення наведена на рисунку 3.

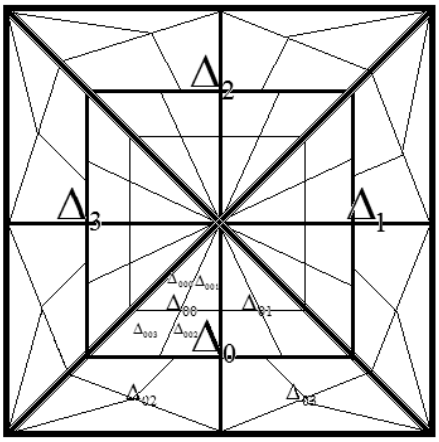

Рис. 3. Перші три кроки розбиття.

Бачимо, що умови, накладені на розбиття, виконуються,

$$\bigcup_{i=0}^{3} \Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}i} = \Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}},\ \lambda\left(\Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}i} \bigcap \Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}j}\right) = 0, i \neq j,$$

$$\lambda\left(\Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}0}\right) = \lambda\left(\Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}1}\right) = \lambda\left(\Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}2}\right) = \lambda\left(\Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}3}\right), \forall k \in N.$$

Із побудови розбиття також випливає, що $diam\left(\Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\right) \to 0$, $k \to \infty$. Вибравши $\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}$ замкненими в R^2, отримуємо розбиття, що задовольняє вимоги, вказані в розділі 1, тобто породжує частинний випадок $W-$зображення.

Позначимо $A = \bigcap\limits_{i=0}^{3} \Delta^W_i, A_{\alpha_1} = \bigcap\limits_{i=0}^{3} \Delta^W_{\alpha_1 i}, A_{\alpha_1\alpha_2} = \bigcap\limits_{i=0}^{3} \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2 i}\ldots,$

$A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k} = \bigcap\limits_{i=0}^{3} \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k i}$ і т.д.

Розглянемо випадковий вектор $\xi = \Delta^W_{\xi_1\ldots\xi_k\ldots}$, де ξ_k- незалежні і розподілені за вказаним правилом:

ξ_k	0	1	2	3
p_{ik}	$\frac{1}{2} - \frac{1}{10^k}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{10^k}$	$\frac{1}{10^k}$	$\frac{1}{10^k}$

Тоді, за доведеним вище $P(A) = \prod\limits_{i=2}^{\infty}\left(1 - \frac{2}{10^i}\right)$.

Знайдемо, наприклад, $P(A_{02})$:

$$P\left(\Delta^W_{020} \bigcup \Delta^W_{021}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\right) \cdot \frac{1}{10^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^3}\right) \cdot 2,$$

$$P\left(\Delta^W_{0200} \bigcup \Delta^W_{0201} \bigcup \Delta^W_{0210} \bigcup \Delta^W_{0211}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\right) \cdot \frac{1}{10^2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^4}\right) \cdot 2^2,$$

Далі отримуємо:

$$P\left(\bigcup \Delta^W_{02\beta_3\beta_4\ldots\beta_k}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\right) \cdot \frac{1}{10^2} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^3}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^4}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^k}\right) \cdot 2^{k-2},$$

де $\bigcup \Delta^W_{02\beta_3\beta_4\ldots\beta_k} = \Delta^W_{020\ldots00} \bigcup \Delta^W_{020\ldots01} \bigcup \ldots \bigcup \Delta^W_{021\ldots11}$.

Звідси,

$$P\left(A_{02}\right) = \lim_{k\to\infty} P\left(\Delta^W_{02}\right) \prod_{i=3}^{k} \left(1 - \frac{2}{10^{\mathrm{i}}}\right) = P\left(\Delta^W_{02}\right) \prod_{i=3}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{10^{\mathrm{i}}}\right).$$

Аналогічно, для $P(A_{\alpha_1\alpha_2}), \alpha_2 \in \{2,3\}$:

$$P\left(\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2 0} \bigcup \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2 1}\right) = P\left(\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^3}\right) \cdot 2,$$

$$P\left(\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2 00} \bigcup \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2 01} \bigcup \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2 10} \bigcup \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2 11}\right) = P\left(\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^3}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^4}\right) \cdot 2^2,$$

Далі, якщо $\bigcup \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2\beta_3\beta_4\ldots\beta_k} = \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2 0\ldots00} \bigcup \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2 0\ldots01} \bigcup \ldots \bigcup \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2 1\ldots11}$, то:

$$\bigcup \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2\beta_3\beta_4\ldots\beta_k} = \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2 0\ldots00} \bigcup \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2 0\ldots01} \bigcup \ldots \bigcup \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2 1\ldots11}$$

Отримуємо:

$$P\left(A_{\alpha_1\alpha_2}\right) = \lim_{k\to\infty} P\left(\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2}\right) \prod_{i=3}^{k} \left(1 - \frac{2}{10^{\mathrm{i}}}\right) = P\left(\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2}\right) \prod_{i=3}^{\infty} \left(1 - \frac{2}{10^{\mathrm{i}}}\right).$$

Знайдемо $P\left(A_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\right)$, де $\Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_k}$ – чотирикутник:

$$P\left(\Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_k 0} \bigcup \Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_k 1}\right) = P\left(\Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^{k+1}}\right) \cdot 2,$$

$$P\left(\Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_k 00} \bigcup \Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_k 01} \bigcup \Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_k 10} \bigcup \Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_k 11}\right) =$$

$$= P\left(\Delta^W_{\alpha_1\ldots\alpha_k}\right) \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^{k+1}}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^{k+2}}\right) \cdot 2^2.$$

Далі,

$$P\left(\bigcup \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\beta_{\mathrm{k}+1}\ldots\beta_{k+s}}\right) = P\left(\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^{k+1}}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^{k+2}}\right) \cdot \ldots \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^{k+s}}\right) \cdot 2^s,$$

де $\beta_i \in \{0;1\}$, тобто $\bigcup \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2..\alpha_k\beta_{k+1}\ldots\beta_{k+s}} = \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 0\ldots00} \bigcup \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 0\ldots01} \bigcup \ldots \bigcup$ $\bigcup \Delta^W_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k 1\ldots11}$.

Отже,

$$P\left(A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}\right) = \lim_{s\to\infty} P\left(\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^{k+1}}\right) \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^{k+2}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^{k+s}}\right) \cdot 2^s =$$

$$= P\left(\Delta^W_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k}\right) \prod_{i=k+1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10^i}\right).$$

Знайдемо суму

$$P\left(A_{02}\right) + P\left(A_{03}\right) + P\left(A_{12}\right) + P\left(A_{13}\right) + P\left(A_{22}\right) + P\left(A_{23}\right) + P\left(A_{32}\right) +$$

$$+ P\left(A_{33}\right) := \sum P\left(A_{\alpha_1\beta_2}\right),$$

де $\alpha_1 \in \{0,1,2,3\}$, $\beta_2 \in \{0,1\}$:

$$\sum P\left(A_{\alpha_1\beta_2}\right) = P\left(\Delta_{02}^W\right) \cdot \prod_{i=3}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right) + P\left(\Delta_{03}^W\right) \cdot \prod_{i=3}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right) + ...+$$

$$+P\left(\Delta_{33}^W\right) \cdot \prod_{i=3}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right) = \prod_{i=3}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right) \cdot \left(P\left(\Delta_{02}^W\right) + P\left(\Delta_{03}^W\right) + ... + P\left(\Delta_{33}^W\right)\right) =$$

$$= \left(4 \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{10}\right) \cdot \frac{1}{10^2} + 4 \cdot \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10^2}\right) \cdot \prod_{i=3}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right) = \frac{2}{10^2} \cdot \prod_{i=3}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right).$$

Аналогічно позначимо $\sum P\left(A_{\alpha_1\alpha_2\beta_3}\right)$ – сумарну ймовірність потрапити у всі точки виду $A_{\alpha_1\alpha_2\beta_2}$, де $\alpha_1, \alpha_2 \in \{0,1,2,3\}, \beta_3 \in \{0,1\}$:

$$\sum P\left(A_{\alpha_1\alpha_2\beta_3}\right) = \sum_{\substack{\alpha_i \in \{0,1,2,3\} \\ \beta_3 \in \{2,3\}}} P\left(\Delta_{\alpha_1\alpha_2\beta_3}^W\right) \prod_{i=4}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right) = P\left(\Delta_{002}^W\right) + P\left(\Delta_{003}^W\right) +$$

$$+P\left(\Delta_{012}^W\right) + ... + P\left(\Delta_{333}^W\right) \prod_{i=4}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right) = \frac{1}{10^3} \cdot \left(2P\left(\Delta_{00}^W\right)\right) + 2P\left(\Delta_{01}^W\right) + 2P\left(\Delta_{02}^W\right) + ...+$$

$$+2P(\Delta_{33}^W)) \cdot \prod_{i=4}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right) = \frac{2}{10^3} \cdot \prod_{i=4}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right).$$

Знайдемо $\sum P\left(A_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}\beta_k}\right), \alpha_i \in \{0,1,2,3\}, i \in \overline{1,k-1},\ \beta_k \in \{2,3\}$:

$$\sum P\left(A_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}\beta_k}\right) \sum_{\substack{\alpha_i \in \{0,1,2,3\} \\ \beta_k \in \{2,3\}}} P\left(\Delta_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}\beta_k}^W\right) \prod_{i=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right) =$$

$$= \sum_{\alpha_i \in \{0,1,2,3\}} P\left(\Delta_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}}^W\right) \cdot \frac{1}{10^k} \prod_{i=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right) = \frac{2}{10^k} \prod_{i=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right).$$

Тепер розглянемо суму $P\left(A\right) + \sum\limits_{k=2}^{\infty} \sum P\left(A_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}\beta_k}\right)$

$$P\left(A\right) + \sum_{k=2}^{\infty} \sum P\left(A_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{k-1}\beta_k}\right) = \prod_{i=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right) + \frac{2}{10^2} \prod_{i=3}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right)+$$

$$+\frac{2}{10^3} \prod_{i=4}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right) + ... + \frac{2}{10^k} \prod_{i=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right) + ...$$

Оскільки

$$\prod_{i=2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right) + \frac{2}{10^2} \prod_{i=3}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right) = \left(1 - \frac{2}{10^2} + \frac{2}{10^2}\right) \prod_{i=3}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right) = \prod_{i=3}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right),$$

$$\prod_{i=3}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right) + \frac{2}{10^3} \prod_{i=4}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right) = \left(1 - \frac{2}{10^3} + \frac{2}{10^3}\right) \prod_{i=4}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right) = \prod_{i=4}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right).$$

У загальному:

$$\prod_{i=m}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right)+\frac{2}{10^m}\prod_{i=m+1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right)=\left(1-\frac{2}{10^m}+\frac{2}{10^m}\right)\prod_{i=m+1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right)=$$
$$=\prod_{i=m+1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right).$$

Відповідно, отримуємо

$$P\left(A\right)+\sum_{k=2}^{\infty}\sum P\left(A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\beta_k}\right)=\prod_{i=3}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right)+\frac{2}{10^3}\prod_{i=4}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{2}{10^k}\prod_{i=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right)+\ldots=\prod_{i=4}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right)+\frac{2}{10^4}\prod_{i=5}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right)+$$
$$+\frac{2}{10^5}\prod_{i=6}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right)+\ldots+\frac{2}{10^k}\prod_{i=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right)+\ldots=\prod_{i=m}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right)+$$
$$+\frac{2}{10^m}\prod_{i=m+1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right)+\frac{2}{10^{m+1}}\prod_{i=m+2}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right)+\ldots+\frac{2}{10^k}\prod_{i=k+1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right)+\ldots$$

Тобто, на m-тому кроці отримуватимемо добуток $\prod\limits_{i=m}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right)$, який є хвостом збіжного нескінченного добутку $\prod\limits_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right)$.

Отже, $\prod\limits_{i=m}^{\infty}\left(1-\frac{2}{10^i}\right)\to 1$, $m\to\infty$ за необхідною умовою збіжності нескінченного добутку.

Тому, у точках виду $A_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k-1}\beta_k}, \alpha_i\in\{0,1,2,3\}, i=1,2,...,k-1; \beta_k\in\{0,1\}$ і в точці A разом міститься вся ймовірнісна маса, розподілена на E і цих точок є зчисленна кількість. Отже, випадковий вектор ξ має дискретний розподіл на квадраті E за означенням.

Зауваження Наведений контрприклад показує наскільки суттєві відмінності у дослідженні лебегівської структури двовимірних ймовірнісних мір у порівнянні з одновимірними аналогами.

У той же час нам вдалось знайти загальні (без обмежень на виконання N-властивості) необхідні і достатні умови абсолютної неперервності ймовірнісних мір з досліджуваного класу.

Теорема 5. *Розподіл випадкового вектора ξ з незалежними символами W-розкладу є абсолютно неперервним (відносно міри Лебега) тоді і тільки тоді, коли*

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{p_{ik}q_i}\right)>0. \tag{4}$$

Доведення. Як вказувалось вище, ймовірнісна міра μ_ξ, що відповідає випадковому вектору ξ є образ-мірою при відображенні з нескінченного добутку ймовірнісних векторів на одиничний квадрат. Більш точно: нехай $\Omega_k = \{0, 1, ..., n-1\}$, $S_k = 2^{\Omega_k}$,

$$P_k(i) := p_{ik},\ \forall i \in \Omega_k, P_k(L) := \sum_{i \in L} P_k(i),\ \forall L \in S_k,$$

$$\nu_k(i) := q_i,\ \forall i \in \Omega_k, \nu_k(L) := \sum_{i \in L} \nu_k(i),\ \forall L \in S_k$$

і

$$(\Omega, S, P) := \prod_{k=1}^{\infty} (\Omega_k, S_k, P_k),$$

$$(\Omega, S, \nu) := \prod_{k=1}^{\infty} (\Omega_k, S_k, \nu_k).$$

Розглянемо вимірний простір $(\Omega^*, \mathcal{B})$, де Ω^*–одиничний квадрат, $\mathcal{B}$–борелівська σ-алгебра підмножин одиничного квадрата та відображення

$$\xi = \xi(\omega) = \Delta^W_{\omega_1\omega_2...\omega_k...} \in \Omega^*,\ \forall \omega \in \Omega : \omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, ...).$$

Вище доводилось, що вказане відображення ξ є вимірним. Більше того, оскільки образами циліндрів простору Ω є циліндри W-зображення, то це відображення є бівимірним (тобто, образом довільної множини з σ-алгебри S є борелівська множина). Крім того, двовимірна міра Лебега на одиничному квадраті співпадає з образом міри ν при відображенні ξ, а ймовірнісна міра $P^* = \mu_\xi$, що відповідає випадковому вектору ξ, є образом міри P при відображенні ξ:

$$P^*(U) = \mu_\xi(U) = P(\xi^{-1}(U)),\ \forall U \in \mathcal{B},$$

$$\lambda(U) = \nu^*(U) = \nu(\xi^{-1}(U)),\ \forall U \in \mathcal{B}.$$

В роботі [5] міститься наступне узагальнення теореми Какутані. Нехай

$$(\Omega, A, \mu) = \prod_{k=1}^{\infty} (\Omega_k, A_k, \mu_k),$$

$$(\Omega, A, \nu) = \prod_{k=1}^{\infty} (\Omega_k, A_k, \nu_k).$$

Теорема *Припустимо, що ν_k є абсолютно неперервною відносно міри μ_k. Тоді міра μ є або чисто абсолютно неперервною відносно міриμ або чисто сингулярною (включаючи дискретний випадок). Більше того,*

$$\nu \ll \mu \text{ тоді і тільки тоді, коли} \prod_{k=1}^{\infty} \rho(\mu_k, \nu_k) > 0, \tag{5}$$

де $\rho(\mu_k, \nu_k) = \int\limits_{\Omega_k} \sqrt{\frac{d\nu_k}{d\mu_k}} d\mu_k$.

Зауваження. Вираз $\int\limits_{\Omega_k} \sqrt{\frac{d\nu_k}{d\mu_k}} d\mu_k$ співпадає з інтегралом Хеллінгера [9].

У нашому випадку $\mu_k = P_k$ і $\mu_k << \nu_k$, оскільки $q_i > 0$, а $\int\limits_{\Omega_k} \sqrt{\frac{d\nu_k}{d\mu_k}} d\mu_k = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{p_{ik}q_i}$.

Отже, $\mu << \nu$ тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{p_{ik}q_i} \right) > 0. \tag{6}$$

.

В роботі [5] доведено, що якщо $\mu << \nu$, то для образ-мір μ та ν також має місце співвідношення $\mu^* << \nu^*$. Отже, виконання умови (4) є достатнім для абсолютної неперервності міри μ_ξ відносно міри Лебега.

Покажемо, що умова (4) є також і необхідною для абсолютної неперервності міри μ_ξ відносно міри Лебега. Отже, нехай $\mu_\xi^* << \nu^* = \lambda$. Доведемо, що $\mu << \nu$ (у загальній постановці для довільних мір та їх образів така імплікація, як показано в роботі [5], є неправильною).

Позначимо через Ω_0^* множину тих точок одиничного квадрата, які мають не єдине W-зображення. З конструкції W-зображення випливає, що якщо точка має не єдине W-зображення, то вона належить межі циліндра деякого рангу. Нагадаємо, що на систему подрібнюючих розбиттів одиничного квадрата накладалось 4 умови. З умови 2 випливає, що межа кожного циліндра має нульову міру Лебега (двовимірну), звідки випливає, що $\lambda(\Omega_0^*) = 0$.

Нехай $\Omega_0 := \xi^{-1}(\Omega_0^*)$. Тоді

$$\nu(\Omega_0) = \nu(\xi^{-1}(\Omega_0^*)) = \nu^*(\Omega_0^*) = \lambda(\Omega_0^*) = 0. \tag{7}$$

Нехай M- довільна множина з σ-алгебри S така, що $\nu(M) = 0$. Доведемо, що $\mu(M) = 0$.

Позначимо $M_1 := M \bigcap \Omega_0$, $\quad M_2 := M \bigcap \overline{\Omega_0}$. З умови (7) випливає, що $\nu(M_1) = 0$, $\nu(M_2) = 0$.

Нехай $M^* = \xi(M)$, $\quad M_1^* := M^* \bigcap \Omega_0^*$, $\quad M_2^* := M^* \bigcap \overline{\Omega_0^*}$.

Відображення ξ, яке діє з M_2 в M_2^* є бієктивним. Тому $\xi^{-1}(M_2^*) = M_2$ і $\nu^*(M_2^*) = \nu(M_2) = 0$.

З іншого боку, $\xi^{-1}(M_1^*) \subset \Omega_0$. Тому $\nu(\xi^{-1}(M_1^*)) = 0$, і, отже, $\nu^*(M_1^*) = 0$. Отже, $\nu^*(M^*) = 0$.

Оскільки $\mu_\xi^* << \nu^* = \lambda$, то $\mu^*(M^*) = 0$.

Оскільки $\mu^*(M^*) = \mu(\xi^{-1}(M^*)) = 0$ і $\xi^{-1}(M^*) = \xi^{-1}(\xi(M)) \supset M$, то $\mu(M) = 0$. Отже, міра μ абсолютно неперервна відносно міри ν, що у свою чергу еквівалентно виконанню умови (4). □

Наслідок 2. *Розподіл випадкового вектора ξ з незалежними символами W-розкладу є сингулярним (відносно міри Лебега) тоді і тільки тоді, коли*

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{p_{ik}q_i}\right)=0. \tag{8}$$

Зауваження. З доведених результатів випливає, що випадковий вектор з незалежними символами W-розкладу має або чисто абсолютно неперервний, або чисто сингулярний тип розподілу (включаючи дискретність). У випадку сингулярності розподіл може бути сумішшю дискретного та сингулярно непервного розподілу.

Зауваження. Наведені у статті результати та методи їх доведення допускають очевидні узагальнення на інші класи ймовірнісних розподілів (як двовимірних, так і інших розмірностей).

Подяка. Ця робота була частково підтримана науково-дослідними проектами «Spectral Structures and Topological Methods in Mathematics» (SFB-701, Bielefeld University),
STREVCOMS FP-7-IRSES 612669 (ЄС), «Багаторівневий аналіз сингулярних ймовірнісних мір та його застосування» (МОН України).

Література

[1] Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G. On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent $\widetilde{Q}$-symbols. Methods of functional analysis and topology, 2003, 97 - 111.

[2] Albeverio S., Koshmanenko V., Torbin G. Fine structure of the singular continuous spectrum Methods Funct. Anal.Topology., 9(2003), No. 2, 101-119.

[3] Albeverio S., Gontcharenko Ya., Pratsiovytyi M., Torbin G. Jessen-Wintner type random variables and fractal properties of their distributions Mathematische Nachrichten, Vol.279 (2006), No.15, 1619 - 1633.

[4] Albeverio S., Torbin G. Image measures of infinite product measures and generalized Bernoulli convolutions. Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2004. — № 5. — С. 248-264.

[5] Erdös P. On a family of symmetric Bernoulli convolutions. *Amer. J. Math.* **61** (1939), 974-975.

[6] Jessen B., Wintner A. Distribution function and Riemann Zeta-function. *Trans.Amer.Math.Soc.* **38**(1935), 48-88.

[7] Kac M. Probability methods in some problems of analysis and number theory.Bull. Amer. Math. Soc. 55 (1949), 641-665

[8] Kakutani S. Equivalence of infinite product measures, Ann. of Math., 49(1948), 214-224.

[9] Kershner R., Wintner A. On symmetric Bernoulli convolutions. Amer J. Math. **57** (1935), 541-548.

[10] Lévy P. Sur les séries dont les termes sont des variables indépendantes. Studia Math. **3**(1931), 119-155.

[11] Peres Y., Schlag W., Solomyak B. Sixty years of Bernoulli convolutions. In Fractal Geometry and Stochastics II, Progress in Probab. vol.46 (Birkhäuser, 2000), 39–65.

[12] Peres Y., Solomyak B. Absolute continuity of Bernoulli convolutions, a simple proof. Math. Res. Lett. **3** (1996), no. 2, 231–239.

[13] Peres, Y., Simon K., Solomyak B. Absolute continuity for random iterated function systems with overlaps. J. London Math. Soc. **74** (2006), no. 3, 739–756.

[14] Reich J. Some results on distributions arising from coin tossing. Ann. Probab. **10** (1982), no. 3, 780–786.

[15] Reich J. When do weighted sums of independent random variables have a density—some results and examples. Ann. Probab. **10** (1982), no. 3, 787–798.

[16] Solomyak B. On the random series $\sum \pm\lambda^n$ (an Erdös problem). Annals of Mathematics, 1995.— **142**.— P.611-625.

[17] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. - М.: Наука, 1989. - 496с.

[18] М.В. Працьовитий. Фрактальний підхід до дослідження сингулярних розподілів. Національний педагогічний університет, Київ, 1998. — 296с.

[19] Працьовитий М.В. Розподіли сум випадкових степеневих рядів. Доповіді НАН України, 1996. - №5. - С.32-37.

[20] Працьовитий М.В., Торбін Г.М. Один клас випадкових величин типу Джессена-Вінтнера. Доп. НАН України. — 1998. — $N^{\underline{o}}$ 4. — С. 48-54.

[21] Турбин А.Ф., Працевитый М.В. Фрактальные множества, функции, распределения. - Киев:Наук. думка, 1992. - 208с.

[22] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. - М.:Мир, 1984.-т.2.- 752с.

[23] Хеннекен П.Л., Тортра А. Теория вероятностей и некоторые ее приложения. - М.: Наука, 1974. - 472с.

[24] Школьний О.В. Випадкові вектори, задані системами подрібнюючих розбиттів на площині. Фрактальний аналіз та суміжні питання. - Київ: IМ НАН України - НПУ імені Драгоманова. - 1998, №2. - С.129-141.

[25] Школьний О.В. Випадкові величини, задані розподілами своїх цифр в системі числення з комплексною основою. Укр. мат. журнал, 1998. - 50, №12. С. 1715-1720.

[26] Школьний О.В. Комплекснозначні випадкові величини типу Джессена-Вінтнера: дис. на здоб. ступ. канд. фіз.-мат. наук. НАН України, IМ, Київ, 2000 – 115 с.

[27] Школьний О.В., Працьовитий М.В. Один клас сингулярних комплекснозначних випадкових величин типу Джессена-Вінтнера. Укр. мат. журнал, 1997. - 49, №12. С.1653-1660.