Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2014, № 16 (1). — С. 153–163.

Про достатні умови довірчості системи циліндрів Q_∞-зображення

О. В. Сміян
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова,
Київський національний університет імені Тараса Шевченка)

Анотація. У роботі досліджується проблема довірчості системи покриттів, породженої Q_∞-зображенням, при обчисленні розмірності Хаусдорфа-Безиковича на $[0,1)$. У [1] та [2] було отримано деякі достатні умови довірчості такої системи покриттів. В даній роботі розглядається приклад системи Q_∞-циліндрів, для якої не виконуються умови з [1] та [2], але породжена система є довірчою при обчисленні розмірності Хаусдорфа-Безиковича на $[0,1)$. Крім того в роботі доведено ще одну достатню умову довірчості системи покриттів, породженої Q_∞-зображенням, для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича на $[0,1)$.

Abstract. We study a problem of faithfulness of covering systems generated by the Q_∞-expansion for the Hausdorff-Besicovitch dimension calculation on $[0,1)$. In [1] and [2] the authors have proved suffcient conditions for the faithfulness of such covering systems. In this paper we will construct the example of the family of Q_∞-cylinders such that conditions from [1] and [2] does not hold, but this family is faithful family of coverings for the Hausdorff-Besicovitch dimension calculation on unit interval. We also proved another sufficient condition for the faithfulness of covering systems generated by the Q_∞-expansion for the Hausdorff-Besicovitch dimension calculation on $[0,1)$.

AMS Subject Classifications (2010): 11K55, 28A78, 28A80.

Обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича деякої даної множини або сімейста множин зазвичай є складною та нетривіальною задачею. Для спрощення обчислень корисно мати можливість звузити клас допустимих покриттів до деякого вужчого сімейства покриттів Φ, яке є двірчим. Тому важливою задачею є дослідження довірчості систем покриттів та знаходження достатніх умов довірчості.

Нехай Φ локально тонка система покриттів одиничного півінтервала [3], тобто сімейство підмножин з $[0,1)$ таких, що для довільної множини $E \subset [0,1)$ та будь-якого $\varepsilon > 0$ існує не більш ніж зліченне ε-покриття $\{E_j\}$ множини E, де $E_j \in \Phi$.

Означення **1.** α-вимірна міра Хаусдорфа множини $E \subset [0,1)$ відносно даного сімейства покриттів Φ визначається наступним чином:

$$H^{\alpha}(E,\Phi)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\inf_{|E_j|\le\varepsilon}\left\{\sum_j |E_j|^{\alpha}\right\}\right]=\lim_{\varepsilon\to 0}H^{\alpha}_{\varepsilon}(E,\,\Phi), \tag{1}$$

де інфінум береться по всім не більш ніж зліченним ε-покриттям $\{E_j\}$ множини E, де $E_j \in \Phi$.

Означення **2.** Невід'ємне число

$$\dim_H(E,\,\Phi)=\inf\{\alpha:\ H^{\alpha}(E,\,\Phi)=0\} \tag{2}$$

називається розмірністю Хаусдорфа-Безиковича множини $E \subset [0,1)$ відносно сімейства Φ.

Якщо Φ є множиною всіх підмножин з $[0,1)$, то $\dim_H(E,\,\Phi)$ співпадає з класичною розмірністю Хаусдорфа-Безиковича $\dim_H(E)$.

Означення **3.** Локально тонка система покриттів Φ називається довірчою системою покриттів для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича на $[0,1)$, якщо

$$\dim_H(E,\Phi)=\dim_H(E),\quad \forall E\subseteq[0,1) \tag{3}$$

Нехай $Q_\infty=(q_0,q_1,...,q_n,...)$ нескінченний стохастичний вектор зі строго додатними координатами. Нехай

$$x=\Delta_{i_1(x)i_2(x)...i_k(x)...}\ - \tag{4}$$

Q_∞-зображення дійсного числа $x\in[0,1)$, а $\Delta_{i_1(x)i_2(x)...i_n(x)}$ - циліндр n-го рангу, що містить x (див. [1, 3] для детальнішого опису Q_∞-зображення дійсних чисел та аналізу різних підходів до його задання).

Надалі в якості Φ розглядаємо систему циліндрів породжену Q_∞-зображенням одиничного відрізка. Мають місце наступні теореми.

Теорема 1. [1] *Якщо існують дійсні числа q_* і q^* таке, що для довільного $i \in N$*

$$0<q_*<\frac{q_i}{q_{i-1}}\le q^*<1, \tag{5}$$

то $\Phi(Q_\infty)$ - довірча на $[0,1)$.

Теорема 2. [2] *Якщо $\forall\ \ \alpha>0\ \exists c=c(\alpha)>0$ таке, що*

$$\sum_{k=i+1}^{\infty} q_k^{\alpha}\le c q_i^{\alpha}\ \text{для всіх}\ i\in N\cup\{0\}\,, \tag{6}$$

то $\Phi(Q_\infty)$ - довірча на $[0,1)$.

Припустимо, що $\sum\limits_{i=1}^{\infty} q_i^\alpha < \infty$ для довільного $\alpha > 0$.

Введемо наступні позначення:

$$S(\alpha, i) := \sum_{k=i+1}^{\infty} q_k^\alpha$$

$$V(\alpha, i) := \frac{S(\alpha, i)}{q_i^\alpha}$$

$$F(\alpha, \beta, i) := V(\alpha, i)\beta^i, \quad \beta \in (0,1)$$

Тоді умову (6) теореми 2 можна переписати наступним чином

$$V(\alpha, i) = \frac{S(\alpha, i)}{q_i^\alpha} \leq c(\alpha). \tag{7}$$

Було висунуто припущення про те, що сімейство покриттів $\Phi(Q_\infty)$ довірче на $[0,1)$ тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{i\to\infty} F(\alpha, \beta, i) = \lim_{i\to\infty} V(\alpha, i)\beta^i = 0 \tag{8}$$

для $\forall \beta \in (0,1)$.

Контрприклад. Розглянемо наступний стохастичний вектор Q_∞ :

$$q_{i-1} = \begin{cases} \frac{K}{2^i}, \text{ при} & i = 2n-1; \\ \frac{K}{3^i}, \text{ при} & i = 2n; \end{cases} \tag{9}$$

де $K = \frac{24}{19}$ та $i \in N$.

Спочатку покажемо, що у цьому випадку сімейство $\Phi(Q_\infty)$ є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича на $[0,1)$.

Нехай $E \subset [0,1)$ та $\{E_j\}$ довільне ε-покриття множини E відрізками E_j, тобто

$$|E_j| \leq \varepsilon, \; E \subset \bigcup_j E_j.$$

Розглянемо $E_j = [a_j, b_j]$ - довільний відрізок розглядуваного покриття.

Нехай Δ_{n_j-1} - циліндр максимального (n_j-1)-го рангу, який містить E_j. Розіб'ємо циліндр Δ_{n_j-1} на підциліндри n_j-го рангу $\Delta_{n_j-1} = \bigcup\limits_i \Delta_{n_j}^i$, де i - порядковий номер підциліндра в розкладі.

Тоді очевидно, що $\exists k_j \in N \cup \{0\}$ та $\exists m_j \in N, m_j > k_j$ такі, що $a_j \in \Delta_{n_j}^{k_j}$ та $b_j \in \Delta_{n_j}^{m_j}$.

1. Розглянемо $\Delta_{n_j}^{k_j}$ і розіб'ємо його на підциліндри (n_j+1)-го рангу: $\Delta_{n_j}^{k_j} = \bigcup\limits_i \Delta_{n_j+1}^{i,k_j}$.

   Нехай $l_j \in N \cup \{0\}$ таке, що $a_j \in \Delta_{n_j+1}^{l_j,k_j}$. Розглянемо об'єднання циліндрів $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \Delta_{n_j+1}^{l_j+i,k_j} \ni a_j$.

1.1. Якщо порядковий номер l_j - парний, то $|\Delta_{n_j+1}^{l_j,k_j}| = 4|\Delta_{n_j+1}^{l_j+2,k_j}|$. Значить α-об'єм такого покриття:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{\infty}|\Delta_{n_j+1}^{l_j+i,k_j}|^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}|\Delta_{n_j+1}^{l_j+2n,k_j}|^\alpha + \sum_{n=0}^{\infty}|\Delta_{n_j+1}^{l_j+2n+1,k_j}|^\alpha = \\
&= |\Delta_{n_j+1}^{l_j,k_j}|^\alpha \sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2^{2n}}\right)^\alpha + |\Delta_{n_j+1}^{l_j+1,k_j}|^\alpha \sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{3^{2n}}\right)^\alpha = \\
&= 4^\alpha|\Delta_{n_j+1}^{l_j+2,k_j}|^\alpha\left(\tfrac{1}{1-\frac{1}{2^{2\alpha}}}\right) + |\Delta_{n_j+1}^{l_j+1,k_j}|^\alpha\left(\tfrac{1}{1-\frac{1}{3^{2\alpha}}}\right) = \\
&= 4^\alpha|\Delta_{n_j+1}^{l_j+2,k_j}|^\alpha\left(\tfrac{2^{2\alpha}}{2^{2\alpha}-1}\right) + |\Delta_{n_j+1}^{l_j+1,k_j}|^\alpha\left(\tfrac{3^{2\alpha}}{3^{2\alpha}-1}\right) \leq \\
&\leq |E_j|^\alpha\left(\tfrac{2^{4\alpha}}{2^{2\alpha}-1} + \tfrac{3^{2\alpha}}{3^{2\alpha}-1}\right).
\end{aligned}$$

Отже,

$$\sum_{i=0}^{\infty}|\Delta_{n_j+1}^{l_j+i,k_j}|^\alpha \leq c_1'|E_j|^\alpha, \tag{10}$$

де $c_1' = c_1'(\alpha) = \frac{2^{4\alpha}}{2^{2\alpha}-1} + \frac{3^{2\alpha}}{3^{2\alpha}-1}$.

1.2. Нехай порядковий номер l_j - непарний.
Тоді $|\Delta_{n_j+1}^{l_j,k_j}| = 9|\Delta_{n_j+1}^{l_j+2,k_j}|$. Значить α-об'єм такого покриття:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{\infty}|\Delta_{n_j+1}^{l_j+i,k_j}|^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}|\Delta_{n_j+1}^{l_j+2n,k_j}|^\alpha + \sum_{n=0}^{\infty}|\Delta_{n_j+1}^{l_j+2n+1,k_j}|^\alpha = \\
&= |\Delta_{n_j+1}^{l_j,k_j}|^\alpha \sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{3^{2n}}\right)^\alpha + |\Delta_{n_j+1}^{l_j+1,k_j}|^\alpha \sum_{n=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2^{2n}}\right)^\alpha = \\
&= 9^\alpha|\Delta_{n_j+1}^{l_j+2,k_j}|^\alpha\left(\tfrac{1}{1-\frac{1}{3^{2\alpha}}}\right) + |\Delta_{n_j+1}^{l_j+1,k_j}|^\alpha\left(\tfrac{1}{1-\frac{1}{2^{2\alpha}}}\right) = \\
&= 9^\alpha|\Delta_{n_j+1}^{l_j+2,k_j}|^\alpha\left(\tfrac{3^{2\alpha}}{3^{2\alpha}-1}\right) + |\Delta_{n_j+1}^{l_j+1,k_j}|^\alpha\left(\tfrac{2^{2\alpha}}{2^{2\alpha}-1}\right) \leq \\
&\leq |E_j|^\alpha\left(\tfrac{3^{4\alpha}}{3^{2\alpha}-1} + \tfrac{2^{2\alpha}}{2^{2\alpha}-1}\right).
\end{aligned}$$

Отже, отримали

$$\sum_{i=0}^{\infty}|\Delta_{n_j+1}^{l_j+i,k_j}|^\alpha \leq c_2'|E_j|^\alpha, \tag{11}$$

де $c_2' = c_2'(\alpha) = \frac{3^{4\alpha}}{3^{2\alpha}-1} + \frac{2^{2\alpha}}{2^{2\alpha}-1}$.

З пунктів 1.1 та 1.2 маємо, що

$$\sum_{i=0}^{\infty}|\Delta_{n_j+1}^{l_j+i,k_j}|^\alpha \leq c_1|E_j|^\alpha, \tag{12}$$

де $c_1 = c_1(\alpha) = \max\{c_1', c_2'\} = \frac{3^{4\alpha}}{3^{2\alpha}-1} + \frac{2^{2\alpha}}{2^{2\alpha}-1}$.

2. Нехай $m_j = k_j + 1$. Тоді $E_j \subset \left(\bigcup_{i=0}^{\infty}\Delta_{n_j+1}^{l_j+i,k_j}\right) \cup \Delta_{n_j}^{m_j}$.

Розглянемо $\Delta_{n_j}^{m_j} \ni b_j$. Розіб'ємо циліндр $\Delta_{n_j}^{m_j}$ на підциліндри (n_j+1)-го рангу: $\Delta_{n_j}^{m_j} = \bigcup_i \Delta_{n_j+1}^{i,m_j}$.

Якщо $b_j \notin \Delta_{n_j+1}^{0,m_j}$, то $\Delta_{n_j+1}^{0,m_j} \subset E_j$ та $|\Delta_{n_j}^{m_j}| = \frac{|\Delta_{n_j+1}^{0,m_j}|}{q_0} = \frac{2|\Delta_{n_j+1}^{0,m_j}|}{K} \leq \frac{19}{12}|E_j|$.

Якщо $b_j \in \Delta^{0,m_j}_{n_j+1}$, то розіб'ємо циліндр $\Delta^{0,m_j}_{n_j+1}$ на підциліндри (n_j+2)-го рангу: $\Delta^{0,m_j}_{n_j+1} = \bigcup\limits_i \Delta^{i0,m_j}_{n_j+2}$.

Тоді, якщо $b_j \notin \Delta^{00,m_j}_{n_j+2}$, то $\Delta^{00,m_j}_{n_j+2} \subset E_j$ та $|\Delta^{0,m_j}_{n_j+1}| = \frac{|\Delta^{00,m_j}_{n_j+2}|}{q_0} \le \frac{19}{12}|E_j|$.

Якщо $b_j \in \Delta^{00,m_j}_{n_j+2}$, то продовжуємо аналогічним чином, розбиваючи циліндр $\Delta^{00,m_j}_{n_j+2}$ на підциліндри наступного рангу і т.д.

В результаті прийдемо до деякого рангу (n_j+r_j) такого, що $b_j \in \Delta^{0\ldots0,m_j}_{n_j+r_j}$ та $b_j \notin \Delta^{0\ldots0,m_j}_{n_j+r_j+1}$.

Тоді $\Delta^{0\ldots0,m_j}_{n_j+r_j+1} \subset E_j$ та $|\Delta^{0\ldots0,m_j}_{n_j+r_j}| = \frac{|\Delta^{0\ldots0,m_j}_{n_j+r_j+1}|}{q_0} \le \frac{19}{12}|E_j|$.

Отже, можемо покрити E_j об'єднанням циліндрів $\left(\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \Delta^{l_j+i,k_j}_{n_j+1}\right) \cup \Delta^{0\ldots0,m_j}_{n_j+r_j}$.

Використовуючи нерівність (12), отримаємо α-об'єм такого покриття

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\Delta^{l_j+i,k_j}_{n_j+1}|^\alpha + |\Delta^{0\ldots0,m_j}_{n_j+r_j}|^\alpha \le c_1|E_j|^\alpha + \frac{|E_j|^\alpha}{q_0^\alpha} = \left(c_1 + \left(\frac{19}{12}\right)^\alpha\right)|E_j|^\alpha. \qquad (13)$$

3. Нехай $m_j = k_j + 2$.

Тоді очевидно, що $\Delta^{k_j+1}_{n_j} \subset E_j$ та $|\Delta^{k_j+1}_{n_j}| < |E_j|$.

Аналогічно до пункту 2 доведення можемо покрити E_j об'єднанням циліндрів $\left(\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \Delta^{l_j+i,k_j}_{n_j+1}\right) \cup \Delta^{k_j+1}_{n_j} \cup \Delta^{0\ldots0,m_j}_{n_j+r_j}$. Тоді α-об'єм такого покриття:

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\Delta^{l_j+i,k_j}_{n_j+1}|^\alpha + |\Delta^{k_j+1}_{n_j}|^\alpha + |\Delta^{0\ldots0,m_j}_{n_j+r_j}|^\alpha \le \left(c_1 + \left(\frac{19}{12}\right)^\alpha + 1\right)|E_j|^\alpha. \qquad (14)$$

4. Нехай $m_j > k_j + 2$.

Тоді очевидно, що $\Delta^{k_j+i}_{n_j} \subset E_j$ та $|\Delta^{k_j+i}_{n_j}| < |E_j|$ при $i \in \{1, 2\}$.

Отже, можемо покрити E_j об'єднанням циліндрів $\left(\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \Delta^{l_j+i,k_j}_{n_j+1}\right) \cup \left(\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \Delta^{k_j+1+i}_{n_j}\right)$.

Тоді, не залежно від парності порядкового номеру k_j+1, аналогічно до пункту 1, α-об'єм такого покриття

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\Delta^{l_j+i,k_j}_{n_j+1}|^\alpha + \sum_{i=0}^{\infty} |\Delta^{k_j+1+i}_{n_j}|^\alpha \le c_1|E_j|^\alpha + |E_j|^\alpha \left(\frac{2^{2\alpha}}{2^{2\alpha}-1} + \frac{3^{2\alpha}}{3^{2\alpha}-1}\right).$$

Отже,

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\Delta^{l_j+i,k_j}_{n_j+1}|^\alpha \le |E_j|^\alpha (c_1 + c_2), \qquad (15)$$

де $c_2 = c_2(\alpha) = \frac{2^{2\alpha}}{2^{2\alpha}-1} + \frac{3^{2\alpha}}{3^{2\alpha}-1}$.

З пунктів 2-4 маємо, що $\forall \varepsilon > 0, \forall E_j, \forall \alpha > 0$ існує скінченний чи злічений набір циліндричних відрізків, діаметри яких не перевищують 9ε і об'єднання яких містить E_j.

В кожному з можливих випадків, описаних вище, занумеруємо вказані циліндри і позначимо їх через $\Delta(i,j)$.

З нерівностей (13), (14) та (15) випливає, що $E_j \subset \bigcup\limits_i \Delta(i,j)$ та

$$\sum_i |\Delta(i,j)|^\alpha \leq c|E_j|^\alpha,$$

де $c = c(\alpha) = c_1(\alpha) + \max\{\left(\frac{19}{12}\right)^\alpha, \left(\frac{19}{12}\right)^\alpha + 1, c_2(\alpha)\} = c_1(\alpha) + \max\{\left(\frac{19}{12}\right)^\alpha + 1, c_2(\alpha)\}$.

Тоді

$$\sum_j \sum_i |\Delta(i,j)|^\alpha \leq c \sum_j |E_j|^\alpha$$

$$H^\alpha_{9\varepsilon}(E,\Phi) \leq c \sum_j |E_j|^\alpha$$

Оскільки покриття E_j довільне та $|E_j| \leq \varepsilon$, то

$$H^\alpha_{9\varepsilon}(E,\Phi) \leq cH^\alpha_\varepsilon(E).$$

Спрямуємо $\varepsilon \to 0$, тоді

$$H^\alpha(E,\Phi) \leq cH^\alpha(E).$$

Отже,

$$H^\alpha(E) \leq H^\alpha(E,\Phi) \leq cH^\alpha(E).$$

Тоді

$$\dim_H(E,\Phi) = \dim_H(E),\ \forall E \subset [0,1).$$

Отже, дане сімейство циліндричних відрізків $\Phi(Q_\infty)$ є довірчим для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича на $[0,1)$.

Перевіримо виконання умови (8) для послідовності (9).

Нехай $i = 2n+1$. Тоді

$$S(\alpha,i) = \sum_{k=i+1}^{\infty} q_k^\alpha = \left(q_{i+1}^\alpha + q_{i+3}^\alpha + ...\right) + \left(q_{i+2}^\alpha + q_{i+4}^\alpha + ...\right) =$$
$$= K^\alpha \left(\left(\tfrac{1}{2^{(i+2)\alpha}} + \tfrac{1}{2^{(i+4)\alpha}} + ...\right) + \left(\tfrac{1}{3^{(i+3)\alpha}} + \tfrac{1}{3^{(i+5)\alpha}} + ...\right)\right) = K^\alpha \left(\frac{\frac{1}{2^{(i+2)\alpha}}}{1-\frac{1}{2^{2\alpha}}} + \frac{\frac{1}{3^{(i+3)\alpha}}}{1-\frac{1}{3^{2\alpha}}}\right) =$$
$$= K^\alpha \left(\tfrac{2^{2\alpha}}{2^{(i+2)\alpha}(2^{2\alpha}-1)} + \tfrac{3^{2\alpha}}{3^{(i+3)\alpha}(3^{2\alpha}-1)}\right) = K^\alpha \left(\tfrac{1}{2^{i\alpha}(2^{2\alpha}-1)} + \tfrac{1}{3^{i\alpha}3^\alpha(3^{2\alpha}-1)}\right).$$

При цьому

$$V(\alpha,i) = \frac{S(\alpha,i)}{q_i^\alpha} = \left(\frac{3}{2}\right)^{i\alpha} \cdot \frac{3^\alpha}{2^{2\alpha}-1} + \frac{1}{3^{2\alpha}-1}.$$

Отже,

$$F(\alpha,\beta,i)=\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{i\alpha}\cdot\frac{3^\alpha}{2^{2\alpha}-1}+\frac{1}{3^{2\alpha}-1}\right)\beta^i=\left(\left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha}\beta\right)^i\frac{3^\alpha}{2^{2\alpha}-1}+\frac{\beta^i}{3^{2\alpha}-1}.$$

Нехай $i=2n$. Аналогічно до попереднього можна отримати

$$V(\alpha,i)=\left(\frac{2}{3}\right)^{i\alpha}\cdot\frac{2^\alpha}{3^{2\alpha}-1}+\frac{1}{2^{2\alpha}-1}.$$

Тоді

$$F(\alpha,\beta,i)=\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{i\alpha}\cdot\frac{2^\alpha}{3^{2\alpha}-1}+\frac{1}{2^{2\alpha}-1}\right)\beta^i=\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha}\beta\right)^i\frac{2^\alpha}{3^{2\alpha}-1}+\frac{\beta^i}{2^{2\alpha}-1}.$$

Очевидно, що у випадку $i=2n$ маємо $\lim\limits_{i\to\infty}F(\alpha,\beta,i)=0$.

Для того, щоб виконувалась умова (8) припущення при $i=2n+1$, тобто існувала границя $\lim\limits_{i\to\infty}F(\alpha,\beta,i)=0$, необхідно, щоб

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha}\beta<1.$$

Тоді маємо

$$\beta<\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha}$$

для кожного $\alpha>0$.

Отже, для послідовності (9) дане припущення не виконується, бо для будь-якого $\alpha>0$ існує $\beta_0\geq\left(\frac{2}{3}\right)^{\alpha}$ таке, що не існує $\lim\limits_{i\to\infty}F(\alpha,\beta_0,i)$.

Зауважимо, що умови теореми 1 та теореми 2 також не виконуються для послідовності (9). Справді, з попередніх обчислень очевидно, що при $i=2n$ порушується умова (7). Отже, для даного прикладу умова теореми 2 не виконується.

Перевіримо виконання умови теореми 1 для послідовності (9). Нехай $i=2n+1$, тоді

$$\frac{q_i}{q_{i-1}}=\frac{K}{3^{(i+1)}}\cdot\frac{2^i}{K}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^i.$$

Нехай $i=2n$. Тоді

$$\frac{q_i}{q_{i-1}}=\frac{K}{2^{(i+1)}}\cdot\frac{3^i}{K}=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^i.$$

Очевидно, що при парних i відношення $\frac{q_i}{q_{i-1}}$ приймає значення більші за 1. Отже, для даного прикладу умови теореми 1 також не виконуються. Розглянемо наступну теорему.

Теорема 3. *Припустимо, що існує обмежена послідовність* $\{n_i\}$ *така, що* $\forall\alpha>0$ $\exists c=c(\alpha)>1$ *для яких*

$$\sum_{k=0}^{\infty}q_{i+k}^{\alpha}\leq cq_{i+n_i}^{\alpha}\ \textit{для всіх}\ i\in N\cup\{0\}\,. \tag{16}$$

Тоді $\Phi(Q_\infty)$ *- довірча на* $[0,1)$.

Доведення. Розглянемо довільну множину $E \subset [0,1)$. Нехай $\{E_j\} = \{[a_j, b_j]\}$ - довільне ε-покриття множини E ($|E_j| \le \varepsilon$, $E \subset \bigcup_j E_j$).

Розглянемо довільний відрізок покриття $E_j = [a_j, b_j]$.

Нехай Δ_{n_j-1} - циліндр максимального (n_j-1)-го рангу, який повністю містить E_j. Розіб'ємо циліндр Δ_{n_j-1} на підциліндри n_j-го рангу $\Delta_{n_j-1} = \bigcup_i \Delta^i_{n_j}$, де i - порядковий номер підцилідра в розкладі. Тоді очевидно, що $\exists k_j \in N \cup \{0\}$ та $\exists m_j \in N, m_j > k_j$ такі, що $a_j \in \Delta^{k_j}_{n_j}$ та $b_j \in \Delta^{m_j}_{n_j}$. Позначимо $N = m_j - k_j - 1$ - кількість циліндрів n_j-го рангу, які знаходяться між циліндрами $\Delta^{k_j}_{n_j}$ та $\Delta^{m_j}_{n_j}$. Очевидно, що для будь-якого номеру $i \in [k_j+1, m_j-1]$ циліндр $\Delta^i_{n_j}$ повністю міститься в E_j.

1. Розглянемо $\Delta^{k_j}_{n_j} \ni a_j$.

   Розіб'ємо на підциліндри (n_j+1)-го рангу: $\Delta^{k_j}_{n_j} = \bigcup_i \Delta^{i,k_j}_{n_j+1}$.

   Нехай $l_j \in N \cup \{0\}$ таке, що $a_j \in \Delta^{l_j,k_j}_{n_j+1}$. Розглянемо $\bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta^{l_j+i,k_j}_{n_j+1} \ni a_j$.

   З умов теореми маємо, що $\exists c_1 = c_1(\alpha) > 0$ та $\exists n_{l_j} \in N$ такі, що

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\Delta^{l_j+i,k_j}_{n_j+1}|^\alpha \le c_1 |\Delta^{l_j+n_{l_j},k_j}_{n_j+1}|^\alpha \le c_1(\alpha)|E_j|^\alpha, \tag{17}$$

   бо для $\forall n_{l_j} \in N$: $\Delta^{l_j+n_{l_j},k_j}_{n_j+1} \subset E_j$.

2. Нехай $N = 0$. Тоді, аналогічно до пункту 2 доведення довірчості системи Q_∞-циліндрів (9), будуємо циліндр рангу $(n_j + r_j)$ такий, що $b_j \in \Delta^{0\ldots0,m_j}_{n_j+r_j}$ та $b_j \notin \Delta^{0\ldots0,m_j}_{n_j+r_j+1}$.

   При цьому $\Delta^{0\ldots0,m_j}_{n_j+r_j+1} \subset E_j$ та $|\Delta^{0\ldots0,m_j}_{n_j+r_j}| = \frac{|\Delta^{0\ldots0,m_j}_{n_j+r_j+1}|}{q_0} \le \frac{1}{q_0}|E_j|$.

   Тоді можемо покрити E_j об'єднанням циліндрів $\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta^{l_j+i,k_j}_{n_j+1}\right) \bigcup \Delta^{0\ldots0,m_j}_{n_j+r_j}$.

   Використовуючи нерівність (17), отримаємо α-об'єм такого покриття

$$\sum_{i=0}^{\infty} |\Delta^{l_j+i,k_j}_{n_j+1}|^\alpha + |\Delta^{0\ldots0,m_j}_{n_j+r_j}|^\alpha \le c_1|E_j|^\alpha + \frac{|E_j|^\alpha}{q_0^\alpha} = \left(c_1 + \frac{1}{q_0^\alpha}\right)|E_j|^\alpha. \tag{18}$$

3. Нехай $N \ge 1$.

   За умовою теореми існує номер n_{k_j} такий, що для довільного $\alpha > 0$ $\exists c_2 = c_2(\alpha) > 1$ для яких

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^\alpha_{k_j+1+k} \le c_2 q^\alpha_{k_j+1+n_{k_j}}.$$

   3.1. Нехай $k_j + 1 + n_{k_j} \le m_j - 1$.

   Тоді циліндр $\Delta^{k_j+1+n_{k_j}}_{n_j}$ повністю лежить в E_j, та $|\Delta^{k_j+1+n_{k_j}}_{n_j}| < |E_j|$.

   Отже, E_j можна покрити об'єднанням циліндрів $\left(\bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta^{l_j+i,k_j}_{n_j+1}\right) \bigcup \left(\bigcup_{i=0}^{\infty} \Delta^{k_j+1+i}_{n_j}\right)$.

Використовуючи пункт 1 доведення, отримаємо

$$\sum_{i=0}^{\infty}|\Delta^{l_j+i,k_j}_{n_j+1}|^\alpha+\sum_{i=0}^{\infty}|\Delta^{k_j+1+i}_{n_j}|^\alpha\le c_1|E_j|^\alpha+|\Delta_{n_j-1}|^\alpha\sum_{i=0}^{\infty}q^\alpha_{k_j+1+k}\le$$
$$\le c_1|E_j|^\alpha+c_2|\Delta_{n_j-1}|^\alpha q^\alpha_{k_j+1+n_{k_j}}=c_1|E_j|^\alpha+c_2|\Delta^{k_j+1+n_{k_j}}_{n_j}|^\alpha\le$$
$$\le c_1|E_j|^\alpha+c_2|E_j|^\alpha=(c_1+c_2)\,|E_j|^\alpha.$$

Значить, α-об'єм такого покриття

$$\sum_{i=0}^{\infty}|\Delta^{l_j+i,k_j}_{n_j+1}|^\alpha+\sum_{i=0}^{\infty}|\Delta^{k_j+1+i}_{n_j}|^\alpha\le(c_1(\alpha)+c_2(\alpha))\,|E_j|^\alpha. \tag{19}$$

3.2. Нехай $k_j+1+n_{k_j}\ge m_j$.

Тоді з умови обмеженості n_{k_j} випливає, що існує $c'>0$ таке, що $N=m_j-k_j-1\le 1+n_{k_j}\le 1+c'$. Позначимо $c_3:=1+c'$.

E_j можна покрити об'єднанням циліндрів $\left(\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}\Delta^{l_j+i,k_j}_{n_j+1}\right)\bigcup\left(\bigcup\limits_{i=k_j+1}^{m_j-1}\Delta^{i}_{n_j}\right)\bigcup\Delta^{0\ldots0,m_j}_{n_j+r_j}$.

Використовуючи пункти 1 та 2 доведення, отримаємо

$$\sum_{i=0}^{\infty}|\Delta^{l_j+i,k_j}_{n_j+1}|^\alpha+\sum_{i=k_j+1}^{m_j-1}|\Delta^{i}_{n_j}|^\alpha+|\Delta^{0\ldots0,m_j}_{n_j+r_j}|^\alpha\le c_1|E_j|^\alpha+N|E_j|^\alpha+\tfrac{|E_j|^\alpha}{q_0^\alpha}\le$$
$$\le\left(c_1+c_3+\tfrac{1}{q_0^\alpha}\right)|E_j|^\alpha.$$

Значить, α-об'єм такого покриття

$$\sum_{i=0}^{\infty}|\Delta^{l_j+i,k_j}_{n_j+1}|^\alpha+\sum_{i=k_j+1}^{m_j-1}|\Delta^{i}_{n_j}|^\alpha+|\Delta^{0\ldots0,m_j}_{n_j+r_j}|^\alpha\le\left(c_1(\alpha)+c_3+\frac{1}{q_0^\alpha}\right)|E_j|^\alpha. \tag{20}$$

Отже, з пунктів 2-3 маємо, що $\forall\varepsilon>0,\forall E_j,\forall\alpha>0$ існує скінченний чи злічений набір циліндричних відрізків, діаметри яких не перевищують $c'\varepsilon$, де $c'=\max\{c_1(1),c_2(1),\frac{1}{q_0}\}$, і об'єднання яких містить E_j.

В кожному з можливих випадків, описаних вище, занумеруємо вказані циліндри і позначимо їх через $\Delta(i,j)$.

З нерівностей (18), (19) та (20) випливає, що $E_j\subset\bigcup\limits_i\Delta(i,j)$ та

$$\sum_i|\Delta(i,j)|^\alpha<c|E_j|^\alpha,$$

де $c=c(\alpha)=\max\{c_1(\alpha)+\frac{1}{q_0^\alpha},c_1(\alpha)+c_2(\alpha),c_1(\alpha)+c_3+\frac{1}{q_0^\alpha}\}$.

Тоді

$$\sum_j\sum_i|\Delta(i,j)|^\alpha<c\sum_j|E_j|^\alpha$$

$$H^{\alpha}_{c'\varepsilon}(E,\Phi) < c\sum_{j}|E_j|^{\alpha}$$

Оскільки покриття E_j довільне та $|E_j| \leq \varepsilon$, то

$$H^{\alpha}_{c'\varepsilon}(E,\Phi) < cH^{\alpha}_{\varepsilon}(E).$$

Спрямуємо $\varepsilon \to 0$, тоді

$$H^{\alpha}(E,\Phi) \leq cH^{\alpha}(E).$$

Отже,

$$H^{\alpha}(E) \leq H^{\alpha}(E,\Phi) \leq cH^{\alpha}(E).$$

Тоді

$$\dim_H(E,\Phi) = \dim_H(E),\ \forall E \subset [0,1).$$

Отже, при виконанні умов теореми 3 система покриттів $\Phi(Q_{\infty})$ є довірчою на $[0,1)$.

□

Введемо наступні позначення:

$$S'(\alpha,i) := \sum_{k=0}^{\infty} q^{\alpha}_{i+k}$$

$$V'(\alpha,i,n_{k_i}) := \frac{S'(\alpha,i)}{q^{\alpha}_{i+n_{k_i}}}$$

Тоді умову (16) теореми 3 можна переписати наступним чином

$$V'(\alpha,i,n_{k_i}) = \frac{S'(\alpha,i)}{q^{\alpha}_{i+n_{k_i}}} \leq c(\alpha). \tag{21}$$

Покажемо виконання теореми 3 для послідовності (9):

$$q_{i-1} = \begin{cases} \frac{K}{2^i}, \text{ при} & i = 2n-1 \\ \frac{K}{3^i}, \text{ при} & i = 2n \end{cases}$$

Нехай $i = 2n+1$, тоді

$$\begin{aligned} S'(\alpha,i) &= \sum_{k=0}^{\infty} q^{\alpha}_{i+k} = \left(q^{\alpha}_{i} + q^{\alpha}_{i+2} + ...\right) + \left(q^{\alpha}_{i+1} + q^{\alpha}_{i+2} + ...\right) = \\ &= K^{\alpha}\left(\tfrac{1}{3^{(i+1)\alpha}} + \tfrac{1}{3^{(i+3)\alpha}} + ...\right) + K^{\alpha}\left(\tfrac{1}{2^{(i+2)\alpha}} + \tfrac{1}{2^{(i+4)\alpha}} + ...\right) = \\ &= K^{\alpha}\left(\tfrac{3^{2\alpha}}{3^{(i+1)\alpha}(3^{2\alpha}-1)} + \tfrac{2^{2\alpha}}{2^{(i+2)\alpha}(2^{2\alpha}-1)}\right) = K^{\alpha}\left(\tfrac{3^{\alpha}}{3^{i\alpha}(3^{2\alpha}-1)} + \tfrac{1}{2^{i\alpha}(2^{2\alpha}-1)}\right). \end{aligned}$$

Нехай $i = 2n$, тоді

$$\begin{aligned}S'(\alpha,i) &= \sum_{k=0}^{\infty} q_{i+k}^{\alpha} = \left(q_i^\alpha + q_{i+2}^\alpha + ...\right) + \left(q_{i+1}^\alpha + q_{i+2}^\alpha + ...\right) = \\ &= K^\alpha\left(\tfrac{1}{2^{(i+1)\alpha}} + \tfrac{1}{2^{(i+3)\alpha}} + ...\right) + K^\alpha\left(\tfrac{1}{3^{(i+2)\alpha}} + \tfrac{1}{3^{(i+4)\alpha}} + ...\right) = \\ &= K^\alpha\left(\tfrac{2^{2\alpha}}{2^{(i+1)\alpha}(2^{2\alpha}-1)} + \tfrac{3^{2\alpha}}{3^{(i+2)\alpha}(3^{2\alpha}-1)}\right) = K^\alpha\left(\tfrac{2^\alpha}{2^{i\alpha}(2^{2\alpha}-1)} + \tfrac{1}{3^{i\alpha}(3^{2\alpha}-1)}\right).\end{aligned}$$

Позначимо

$c_{11} := \frac{3^\alpha}{3^{2\alpha}-1}$, $c_{12} := \frac{1}{2^{2\alpha}-1}$

$c_{21} := \frac{1}{3^{2\alpha}-1}$, $c_{22} := \frac{2^\alpha}{2^{2\alpha}-1}$

Нехай

$$c = c(\alpha) = \max\left(c_{11}, c_{12}, c_{21}, c_{22}\right) = c_{22}(\alpha) = \frac{2^\alpha}{2^{2\alpha}-1}.$$

Тоді для будь-якого $i \in N \cup \{0\}$ маємо

$$S'(\alpha,i) \le cK^\alpha\left(\frac{1}{2^{i\alpha}} + \frac{1}{3^{i\alpha}}\right).$$

Покладемо

$$n_{k_i} = \begin{cases} 1, \text{ при} & i = 2n-1 \\ 2, \text{ при} & i = 2n \end{cases}$$

Тоді отримаємо

$$\begin{aligned}V'(\alpha,i,n_{k_i}) &\le cK^\alpha \tfrac{1}{q_{i+n_{k_i}}^\alpha}\left(\tfrac{1}{2^{i\alpha}} + \tfrac{1}{3^{i\alpha}}\right) = c2^{(i+n_{k_i})\alpha}\left(\tfrac{1}{2^{i\alpha}} + \tfrac{1}{3^{i\alpha}}\right) = \\ &= c\left(2^{n_{k_i}\alpha} + \left(\tfrac{2}{3}\right)^{i\alpha} 2^{n_{k_i}\alpha}\right) \le c2^{n_{k_i}\alpha}\cdot 2 \le 2c2^{2\alpha} = c',\end{aligned}$$

де $c' = 2\frac{2^{3\alpha}}{2^{2\alpha}-1} > 1$

Таким чином ми отримали, що існує послідовність $\{n_{k_i}\}$ така, що $\forall \alpha > 0$ $\exists c = c(\alpha) = 2\frac{2^{4\alpha}}{2^{2\alpha}-1} > 1$ та

$$V'(\alpha,i,n_{k_i}) = \frac{S'(\alpha,i)}{q_{i+n_{k_i}}^\alpha} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} q_{i+k}^\alpha}{q_{i+n_{k_i}}^\alpha} \le c(\alpha).$$

Тоді за теоремою 3 сімейство $\Phi(Q_\infty)$, що породжене стохастичним вектором (9), є довірчим на $[0,1)$.

Література

[1] *Р.О. Нікіфоров, Г.М. Торбін* Фрактальні властивості випадкових величин з незалежними Q_∞-символами // Теорія ймовір. та матем. статист.— 2012. — №86. — С. 150-162.

[2] *S. Albeverio, Y. Kondratiev, R. Nikiforov, G. Torbin* On new fractal phenomena connected with infinite linear IFS // Submitted to Acta Mathematica.

[3] *А.Ф. Турбин, Н.В.Працевитый* Фрактальные множества, функции, распределения, Наук.думка, Киев, 1992.