Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2014, № 16 (1).— С. 202–218.

УДК 511.7, 517.1

Про пакувальну довірчість, порівнянність та розмірність міри об'єктів, пов'язаних з рядами Кантора

О. В. Слуцький
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

Анотація. У статті розглядається представлення дійсних чисел рядами Кантора та об'єкти, з ним пов'язані. Наводиться приклад такого сімейства циліндрів, яка є довірчою відносно пакувальної розмірності, проте не є порівнянною. Доводиться формула для пакувальної розмірності міри, що відповідає випадковій величині з незалежними цифрами розкладу Кантора.

Ключові слова: пакувальна розмірність множини, розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини, довірчість відносно пакувальної розмірності.

Abstract. In this paper we consider the expansion of real numbers by Cantor series and objects, connected with it. We give an example of cylinder family which is faithful but not comparable (wrt the packing dimension). The exact formula for packing dimension of probability measure of random variable with independent Cantor digits is proving.

Key words: packing dimension of sets, Hausdorff-Besicovitch dimension of sets, Faithfulness, faithful families of sets with respect to packing dimension, comparable net measures.

AMS Subject Classifications (2010): 28A78, 28A80.

1. Вступ

Основним об'єктом, що розглядається у статті, є пакувальна розмірність $\dim_P$. Вона була введена C. Tricot у 1981 році [28]. Багато властивостей пакувальної розмірності $\dim_P$ співпадає з відповідними властивостями розмірності Хаусдорфа–Безиковича $\dim_H$. Зокрема, серед таких властивостей можна вказати монотонність, зчисленну стабільність [8], незмінність при біліпшицевих перетвореннях [20].

Широко відомою є нерівність $\dim_H E \leqslant \dim_P E, \forall E \subset \mathbb{R}^n$. Для багатьох множин (зокрема, множини Кантора) ця нерівність перетворюється на рівність [8, 23], і такі множини називаються «регулярними за Tricot». Регулярність множини є достатньою умовою для наявності багатьох важливих властивостей. Наприклад, для того, щоб $\dim_H(E \times F) = \dim_H E + \dim_H F$, достатньо, щоб хоча б одна з множин E та F була регулярною за Tricot (під $E \times F$ мається на увазі декартів добуток вказаних множин). Вивчення не лише розмірності Хаусдорфа–Безиковича, а й пакувальної розмірності дозволяє глибше пізнати геометричну природу та регулярність розглядуваних множин та мір. Саме тому в багатьох роботах (див., наприклад, [2, 3, 9, 10, 12, 13]) обчислюються і $\dim_H$, і $\dim_P$ розглядуваних множин та мір.

Для розмірності Хаусдорфа–Безиковича розроблено багато підходів, які спрощують її обчислення та дослідження. Серед таких підходів можна назвати використання розмірності Біллінгслі та теореми Біллінгслі [4], а також використання довірчості (суть цього підходу та його історія описані в [1]).

Природною є потреба розробити аналогічні підходи для дослідження та обчислення пакувальної розмірності. В цьому напрямі отримано багато результатів. Зокрема, M. Das у 2008 році довів частковий випадок аналогу теореми Біллінгслі для пакувальної розмірності [6], а О. Слуцький та Г. Торбін у 2011 році довели загальний випадок цього аналогу [21].

Означення поняття «довірчість сімейств куль для обчислення пакувальної розмірності» дано О. Слуцьким та Г. Торбіним у 2013 році в статті [22], хоча неявно використовувалося й раніше, наприклад, у роботах J.Li [17, 16]. У роботі [26] було доведено довірчість сімейства циліндрів $\tilde{Q}$-представлення (за умови відокремленості коефіцієнтів q_{ij} від нуля) для обчислення пакувальної розмірності, а в роботі [14] було доведено критерій пакувальної довірчості сімейства циліндрів представлення дійсних чисел рядами Кантора.

Отже, пакувальна фрактальна розмірність та довірчість відносно її обчислення є актуальними об'єктами, які активно досліджуються.

У книгах [7] та [24] описано поняття «comparable net measures», тобто порівнянних мережевих мір. Як відомо, дві міри μ, ν, які визначені на одному і тому ж вимірному просторі, називаються порівнянними, якщо $\exists C_2 > C_1 > 0 : C_1 \cdot \mu(A) \leqslant \nu(A) \leqslant C_2 \cdot \mu(A)$, для довільної вимірної множини A. Якщо Φ — деяка система пакувань на одиничному відрізку, то вона породжує пакувальну міру $\mathcal{P}^\alpha(\cdot, \Phi)$ (строге означення дивись нижче). Якщо існують додатні константи C_1 та C_2 ($C_1 < C_2$) такі, що

$$C_1 \cdot \mathcal{P}^\alpha(A) \leqslant \mathcal{P}^\alpha(A, \Phi) \leqslant C_2 \cdot \mathcal{P}^\alpha(A), \quad \forall A \in [0,1],$$

то $\mathcal{P}^\alpha(\cdot, \Phi)$ називається порівнянною (з класичною пакувальною мірою $\mathcal{P}^\alpha(\cdot)$ на одиничному відрізку.

Легко довести, що якщо Φ — деяке сімейство куль, і якщо пакувальні міри $\mathcal{P}^\alpha(\cdot, \Phi)$ та $\mathcal{P}^\alpha(\cdot)$ є порівнянними, то Φ — довірче сімейство куль. Але зворотнє твердження, взагалі кажучи, не є вірним: з довірчості сімейства Φ не випливає порівнянність пакувальних мір $\mathcal{P}^\alpha(\cdot, \Phi)$ та $\mathcal{P}^\alpha(\cdot)$. У роботі [15] наводиться приклад сімейства множин Φ, яке є довірчим (для обчислення $\dim_H$), проте породжує міру Хаусдорфа $H^\alpha(\cdot, \Phi)$, яка є непорівнянною з мірою Хаусдорфа $H^\alpha(\cdot)$ для $\alpha = \frac{1}{2}$.

У даній роботі буде показано, що пакувальна міра, породжена вищезгаданим сімейством множин Φ, також є непорівнянною з класичною пакувальною мірою.

Крім того, у роботі [1] доводиться формула для розмірності Хаусдорфа–Безиковича міри μ_ξ, породженої випадковою величиною ξ з незалежними символами розкладу Кантора.

Основним результатом даної роботи є формула для **пакувальної** розмірності міри μ_ξ.

2. Пакувальна розмірність відносно сімейства множин та неперервної міри

Нехай (M, ρ) — метричний простір, Φ — деяке сімейство куль, а μ — неперервна міра, визначена на M.

Означення **1.** Нехай $E \subset M$, $\varepsilon > 0$. Тоді не більш ніж зчисленне сімейство $\{E_i\}$ куль називається «нецентрованим ε-пакуванням множини E», якщо виконуються умови:

(1) $|E_i| \leqslant \varepsilon, \forall i$;
(2) $E_i \cap E \neq \varnothing$;
(3) Кулі E_i попарно не перетинаються.

Зауваження 1. *Порожня множина куль також вважається нецентрованим пакуванням.*

Означення **2.** Нехай $E \subset M$, $|E| < \infty$, $\alpha \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$. Тоді α-мірною пакувальною передмірою множини E з максимальним діаметром елементів пакування ε відносно системи Φ та міри μ називається число

$$\mathcal{P}^\alpha_\varepsilon(E, \Phi, \mu) := \sup\left\{\sum_i (\mu(E_i))^\alpha\right\},$$

де супремум береться по всеможливим нецентрованим ε-пакуванням кулями з Φ множини E (якщо існує лише порожнє пакування, то покладаємо за означенням $\mathcal{P}^\alpha_\varepsilon(E, \Phi, \mu) = 0$).

Зауваження 2. *Властивості пакувальної передміри відносно системи множин та міри:*

(1) ***Монотонність:*** *Якщо $E_1 \subset E_2$, то $\mathcal{P}^\alpha_\varepsilon(E_1, \Phi, \mu) \leqslant \mathcal{P}^\alpha_\varepsilon(E_2, \Phi, \mu)$;*
(2) ***Скінченна напівадитивність:*** *$\mathcal{P}^\alpha_\varepsilon(E_1 \cup E_2, \Phi, \mu) \leqslant \mathcal{P}^\alpha_\varepsilon(E_1, \Phi, \mu) + \mathcal{P}^\alpha_\varepsilon(E_2, \Phi, \mu)$;*
(3) Нехай $\varepsilon > 0$. Нехай $B(x, \varepsilon)$ — це куля з центром в x і діаметром ε. Введемо позначення:

$$c(\varepsilon) := \sup\{\mu(B(x, \varepsilon) : x \in M\}.$$

Тоді

$$\forall \delta > 0 : \mathcal{P}^{\alpha+\delta}_\varepsilon(E, \Phi, \mu) \leqslant \mathcal{P}^\alpha_\varepsilon(E, \Phi, \mu) \cdot (c(\varepsilon))^\delta.$$

Доведення. **1)** Якщо $E_1 \subset E_2$, то будь-яке пакування множини E_1 є також пакуванням множини E_2. Отже,

$$\mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(E_1, \Phi, \mu) \leqslant \mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(E_2, \Phi, \mu).$$

2) Нехай $\{E_i\}$ — довільне ε-пакування множини $A \cup B$ кулями з Φ. Позначимо через $\mathcal{A}$ сімейство тих куль із вказаного пакування, центри яких належать A, а через $\mathcal{B}$ — сімейство тих куль із вказаного пакування, центри яких належать $B \setminus A$ (одне з цих сімейств може виявитись порожнім). Тоді

$$\sum_i (\mu(E_i))^{\alpha} = \sum_{i: E_i \in \mathcal{A}} (\mu(E_i))^{\alpha} + \sum_{i: E_i \in \mathcal{B}} (\mu(E_i))^{\alpha} \leqslant \mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(A, \Phi, \mu) + \mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(B, \Phi, \mu).$$

Оскільки нерівність

$$\sum_i (\mu(E_i))^{\alpha} \leqslant \mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(A, \Phi, \mu) + \mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(B, \Phi, \mu)$$

виконується для довільного пакування $\{E_i\}$ множини $A \cup B$, то

$$\mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(A \cup B, \Phi, \mu) \leqslant \mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(A, \Phi, \mu) + \mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(B, \Phi, \mu).$$

3) Розглянемо довільне пакування A множини E, яке складається з куль E_i з системи Φ. Тоді

$$\sum_i (\mu(E_i))^{\alpha+\delta} = \sum_i (\mu(E_i))^{\alpha} \cdot (\mu(E_i))^{\delta} \leqslant \sum_i (\mu(E_i))^{\alpha} \cdot (c(\varepsilon))^{\delta}.$$

Оскільки отримана нерівність виконується для довільного пакування, то вона буде виконуватися і для супремума. Тобто

$$\mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha+\delta}(E, \Phi, \mu) \leqslant \mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(E, \Phi, \mu) \cdot (c(\varepsilon))^{\delta},$$

що й вимагалось довести. □

Означення **3.** α-мірною пакувальною квазімірою множини E відносно системи куль Φ та міри μ називається число

$$\mathcal{P}_0^{\alpha}(E, \Phi, \mu) := \lim_{\varepsilon \to 0} \mathcal{P}_{\varepsilon}^{\alpha}(E, \Phi, \mu).$$

Зауваження 3. *Властивості пакувальної квазіміри відносно системи куль та міри:*

(1) ***Монотонність:*** *Якщо $E_1 \subset E_2$, то $\mathcal{P}_0^{\alpha}(E_1, \Phi, \mu) \leqslant \mathcal{P}_0^{\alpha}(E_2, \Phi, \mu)$;*
(2) ***Скінченна напівадитивність:*** *$\mathcal{P}_0^{\alpha}(E_1 \cup E_2, \Phi, \mu) \leqslant \mathcal{P}_0^{\alpha}(E_1, \Phi, \mu) + \mathcal{P}_0^{\alpha}(E_2, \Phi, \mu)$;*
(3) Якщо $\mathcal{P}_0^{\alpha}(E, \Phi, \mu) < \infty$, то $\forall \delta > 0$ $\mathcal{P}_0^{\alpha+\delta}(E, \Phi, \mu) = 0$;
(4) Якщо $\mathcal{P}_0^{\alpha}(E) > 0$, то $\forall \delta \in (0; \alpha)$ $\mathcal{P}_0^{\alpha-\delta}(E, \Phi, \mu) = +\infty$.

Доведення. Перші два твердження отримуються з аналогічних тверджень для передміри за допомогою граничного переходу.

3) Нехай $\mathcal{P}_0^\alpha(E,\Phi,\mu) < \infty$. Зафіксуємо довільне $\delta > 0$. Як відомо з властивостей пакувальної передміри,

$$\mathcal{P}_\varepsilon^{\alpha+\delta}(E,\Phi,\mu) \leqslant \mathcal{P}_\varepsilon^\alpha(E,\Phi,\mu) \cdot (c(\varepsilon))^\delta.$$

Оскільки μ є неперервною мірою, то

$$\lim_{\varepsilon\to 0} c(\varepsilon) = 0.$$

Обчислюючи границю при $\varepsilon \to 0$ у обох частинах останньої нерівності, маємо:

$$\mathcal{P}_0^{\alpha+\delta}(E,\Phi,\mu) \leqslant \mathcal{P}_0^\alpha(E,\Phi,\mu) \cdot 0 = 0,$$

що й вимагалось довести.

4) Нехай $\alpha > 0$, $\mathcal{P}_0^\alpha(E,\Phi,\mu) > 0$, $\delta \in (0;\alpha)$. Від супротивного. Припустимо, що $\mathcal{P}_0^{\alpha-\delta}(E,\Phi,\mu) < \infty$. Тоді (згідно з властивістю 3) $\mathcal{P}_0^\alpha(E,\Phi,\mu) = 0$, що суперечить умові. Отже, припущення невірне, і $\mathcal{P}_0^{\alpha-\delta}(E,\Phi,\mu) = \infty$, що й вимагалось довести. □

Також важливою є ще одна властивість пакувальної квазіміри, яка буде сформульована як теорема.

Теорема 1. *Нехай* $(M,\rho) = \mathbb{R}^n$, $E \subset M$, μ *— неперервна міра. Тоді*

$$\mathcal{P}_0^\alpha(E,\Phi,\mu) = \mathcal{P}_0^\alpha(\overline{E},\Phi,\mu).$$

(тут і далі через $\overline{E}$ *позначатимемо замикання множини* E*).*

Доведення. Зафіксуємо деяке число $\varepsilon > 0$. Нехай $\{E_i\}$ є довільним нецентрованим ε-пакуванням множини $\overline{E}$ відкритими кулями з Φ. Тоді $\{E_i\}$ є нецентрованим ε-пакуванням множини E, оскільки якщо відкрита куля E_i має непустий перетин з $\overline{E}$, то вона має непустий перетин і з E. Отже,

$$\mathcal{P}_\varepsilon^\alpha(E,\Phi,\mu) = \mathcal{P}_\varepsilon^\alpha(\overline{E},\Phi,\mu),$$

а тому і

$$\mathcal{P}_0^\alpha(E,\Phi,\mu) = \mathcal{P}_0^\alpha(\overline{E},\Phi,\mu).$$

□

Означення **4.** α-мірною пакувальною мірою множини E відносно системи куль Φ та міри μ називається число

$$\mathcal{P}^\alpha(E,\Phi,\mu) := \inf\left\{\sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_j,\Phi,\mu) : E \subset \bigcup E_j\right\},$$

де інфімум береться по всеможливим не більш ніж зчисленним покриттям довільними множинами $\{E_j\}$ множини E.

Зауваження 4. *Властивості пакувальної міри відносно системи куль:*

(1) ***Монотонність:*** *Якщо* $E_1 \subset E_2$, *то* $\mathcal{P}^\alpha(E_1,\Phi,\mu) \leqslant \mathcal{P}^\alpha(E_2,\Phi,\mu)$*;*

(2) ***Зчисленна напівадитивність:*** *Для довільного не більш ніж зчисленного набору множин* $\{E_i\}$

$$\mathcal{P}^\alpha(\cup_i E_i, \Phi, \mu) \leqslant \sum_i \mathcal{P}^\alpha(E_i, \Phi, \mu).$$

(3) Якщо $\mathcal{P}^\alpha(E, \Phi, \mu) < \infty$*, то* $\forall\delta > 0$ $\mathcal{P}^{\alpha+\delta}(E, \Phi, \mu) = 0$*;*

(4) Якщо $\mathcal{P}^\alpha(E, \Phi, \mu) > 0$ *і* $\alpha > 0$*, то* $\forall\delta \in (0;\alpha)$ $\mathcal{P}^{\alpha-\delta}(E, \Phi, \mu) = +\infty$*.*

Доведення. **1)**. Нехай $E_1 \subset E_2$, $m_1 = \mathcal{P}^\alpha(E_1, \Phi, \mu)$, $m_2 = \mathcal{P}^\alpha(E_2, \Phi, \mu)$. Від супротивного. Припустимо, що $m_1 > m_2$. Тоді існує таке покриття $\{E_{2j}\}$ множини E_2, що

$$m_1 > \sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_{2j}, \Phi, \mu).$$

Оскільки $\{E_{2j}\}$ є покриттям множини E_1, то

$$m_1 \leqslant \sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_{2j}, \Phi, \mu).$$

Отримана суперечність показує, що припущення невірне. Отже, $m_1 \leqslant m_2$, що й вимагалось довести.

2). Введемо позначення:

$$m_i := \mathcal{P}^\alpha(E_i, \Phi, \mu),$$
$$E := \bigcup_i E_i,$$
$$m := \mathcal{P}^\alpha(E, \Phi, \mu).$$

Зафіксуємо довільне $\delta > 0$. Оскільки

$$m_i = \mathcal{P}^\alpha(E_i, \Phi, \mu) = \inf\left\{\sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_{ij}, \Phi, \mu) : E \subset \bigcup E_{ij}\right\},$$

то $\forall i \in \mathbb{N}$ існує таке покриття множини E_i множинами E_{ij}, що

$$\sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_{ij}, \Phi, \mu) \leqslant m_i + \frac{\delta}{2^i}.$$

Тому

$$\sum_i \sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_{ij}, \Phi, \mu) \leqslant \sum_i m_i + \delta.$$

Оскільки набір множин $\{E_{ij} : i \in \mathbb{N}, j \in \mathbb{N}\}$ є покриттям множини E, то

$$m = \mathcal{P}^\alpha(E, \Phi, \mu) \leqslant \sum_i \sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_{ij}, \Phi, \mu).$$

Отже,

$$m \leqslant \sum_i \sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_{ij}, \Phi, \mu) \leqslant \sum_i m_i + \delta.$$

Оскільки остання нерівність виконується $\forall\delta > 0$, то $m \leqslant \sum_i m_i$, що й вимагалось довести.

3) Нехай $\mathcal{P}^{\alpha}(E, \Phi, \mu) < \infty$. Тоді існує таке покриття $\{E_j\}$ множини E, що

$$\sum_j \mathcal{P}_0^{\alpha}(E_j, \Phi, \mu) < \infty,$$

і

$$\mathcal{P}_0^{\alpha}(E_j, \Phi, \mu) < \infty \forall j \in \mathbb{N}.$$

З властивості 4 пакувальної квазіміри випливає, що

$$\mathcal{P}_0^{\alpha+\delta}(E_j, \Phi, \mu) = 0 \forall j \in \mathbb{N}, \forall \delta > 0.$$

Тому

$$\mathcal{P}_0^{\alpha+\delta}(E, \Phi, \mu) \leqslant \sum_j \mathcal{P}_0^{\alpha+\delta}(E_j, \Phi, \mu) = 0.$$

Отже,

$$\mathcal{P}^{\alpha+\delta}(E, \Phi, \mu) = 0,$$

що й вимагалось довести.

4) Нехай $\mathcal{P}^{\alpha}(E, \Phi, \mu) > 0$ і $\alpha > 0$. Тоді для будь-якого покриття $\{E_j\}$ множини E існує така множина E_{j_0}, що

$$\mathcal{P}_0^{\alpha}(E_{j_0}, \Phi, \mu) > 0.$$

Зафіксуємо $\delta \in (0; \alpha)$. З властивості 5 пакувальної квазіміри випливає, що

$$\mathcal{P}_0^{\alpha-\delta}(E_{j_0}, \Phi, \mu) = \infty.$$

Отже,

$$\sum_j \mathcal{P}_0^{\alpha-\delta}(E_j, \Phi, \mu) = \infty.$$

Оскільки остання рівність виконується для довільного покриття $\{E_j\}$ множини E, то

$$\mathcal{P}^{\alpha-\delta}(E, \Phi, \mu) = \infty,$$

що й вимагалось довести. □

Надалі буде використовуватися ще одна властивість пакувальної міри. Ця властивість є узагальненням леми 5.3 зі статті [27]:

Теорема 2. *Нехай $(M, \rho) = \mathbb{R}^n$. Нехай E є компактною множиною, яка задовольняє таку властивість:*

$$\mathcal{P}_0^{\alpha}(E \cap V, \Phi, \mu) = +\infty, \qquad \text{для } \forall \text{ відкритої мн-ни } V \text{ такої, що } E \cap V \neq \varnothing.$$

Тоді $\mathcal{P}^{\alpha}(E, \Phi, \mu) = +\infty$.

Доведення. Розглянемо довільне розбиття множини E на зчисленну кількість множин $\{E_n\}$. Оскільки E — замкнена, то повинна існувати відкрита множина V_0 і множина $E_k \in \{E_n\}$ така, що $\overline{E_k} = E \cap V_0$. Покажемо це.

Від супротивного: якщо для множини E_k не існує множини V_0 для якої виконується попередня рівність, то множина E_k є ніде не щільною в E.

Якщо ж усі множини з $\{E_n\}$ є ніде не щільними в E, то множина E є об'єднанням зчисленної кількості ніде не щільних множин. Але оскільки множина E — замкнена, то метричний простір (E, ρ) є повним, а тому (за теоремою Бера) він не може бути об'єднанням зчисленної кількості ніде не щільних множин.

Отже, для довільного розбиття множини E на зчисленну кількість множин $\{E_n\}$ існує така відкрита множина V_0 і множина $E_k \in \{E_n\}$, що $\overline{E_k} = E \cap V_0$, а тому і $\mathcal{P}_0^\alpha(\overline{E_k}, \Phi, \mu) = +\infty$.

З теореми 1 випливає, що $\mathcal{P}_0^\alpha(E_k, \Phi, \mu) = +\infty$, а тому і $\mathcal{P}^\alpha(E, \Phi, \mu) = +\infty$. □

Означення **5.** Пакувальною розмірністю множини E відносно системи куль Φ та міри μ називається число

$$\dim_P(E, \Phi, \mu) := \inf\{\alpha : \mathcal{P}^\alpha(E, \Phi, \mu) = 0\}.$$

Зауваження 5. *Властивості пакувальної розмірності відносно системи куль та міри:*

(1) ***Монотонність:*** *Якщо $E_1 \subset E_2$, то $\dim_P(E_1, \Phi, \mu) \leqslant \dim_P(E_2, \Phi, \mu)$;*

(2) ***Зчисленна стабільність:*** *Для довільного не більш ніж зчисленного набору множин $\{E_i\}$*

$$\dim_P(\cup_i E_i, \Phi, \mu) = \sup_i \dim_P(E_i, \Phi, \mu).$$

Доведення. **1)** Введемо позначення: $\alpha_i := \dim_P(E_i, \Phi, \mu)$, де $i \in \{1, 2\}$. Нехай $\alpha > \alpha_2$. Тоді

$$\mathcal{P}^\alpha(E_2, \Phi, \mu) = 0,$$

а оскільки

$$\mathcal{P}^\alpha(E_1, \Phi, \mu) \leqslant \mathcal{P}^\alpha(E_2, \Phi, \mu),$$

то і

$$\mathcal{P}^\alpha(E_1, \Phi, \mu) = 0, \forall \alpha > \alpha_2$$

Отже,

$$\alpha_1 \leqslant \alpha_2,$$

що й вимагалось довести.

2) Нехай $\dim_P(E_i, \Phi, \mu) = \alpha_i$, а $\dim_P(E, \Phi, \mu) = \alpha$. Оскільки

$$E_i \subset E \forall i,$$

то і

$$\alpha_i \leqslant \alpha, \forall i.$$

Отже,

$$\alpha \geqslant \sup_i \alpha_i.$$

Покажемо, що

$$\alpha \leqslant \sup_i \alpha_i.$$

Від супротивного. Нехай

$$\exists \delta > 0 : \alpha > \alpha_i + \delta, \forall i.$$

Тоді

$$\mathcal{P}^{\alpha-\delta/2}(E_i, \Phi, \mu) = 0 \forall i,$$

і тому

$$\mathcal{P}^{\alpha-\delta/2}(E, \Phi, \mu) = 0,$$

тобто

$$\dim_P(E, \Phi, \mu) \leqslant \alpha - \delta/2,$$

що суперечить припущенню $\dim_P(E, \Phi, \mu) = \alpha$. Отже,

$$\alpha \leqslant \sup_i \alpha_i.$$

Тому $\alpha = \sup_i \alpha_i$, що й вимагалось довести. □

Зауваження 6. *Нехай $M = \mathbb{R}^n$.*

Якщо $\mu = \lambda$ (n-вимірній мірі Лебега), то $\dim_P(E, \Phi, \mu) = \dim_P(E, \Phi)$ (про розмірність $\dim_P(E, \Phi)$ детальніше можна прочитати в [22]).

Якщо $\mu = \lambda$ і Φ співпадає з множиною всіх куль з простору M, то $\dim_P(E, \Phi, \mu) = \dim_P(E)$, тобто класичній пакувальній розмірності.

3. Довірчість та порівнянність для обчислення пакувальної розмірності. Аналоги теорем Біллінгслі

Означення **6.** Нехай Φ — деяке сімейство куль, яке має таку властивість:

$$\forall E \subset M : \dim_P(E, \Phi) = \dim_P(E).$$

Тоді сімейство Φ називається довірчим для обчислення пакувальної розмірності.

Означення **7.** Нехай Φ — деяке сімейство куль, яке має таку властивість:

$$\forall E \subset M, \forall \alpha \geqslant 0 : \exists C > 0 : \mathcal{P}^\alpha(E, \Phi) \geqslant C \cdot \mathcal{P}^\alpha(E).$$

Тоді Φ називається порівнянним для обчислення пакувальної розмірності.

Теорема 3 ([17])**.** *Нехай зафіксовано деяке $\tilde{Q}$-представлення дійсних чисел.*

Нехай μ, ν — дві неперервні ймовірнісні міри на $[0;1]$, $\Delta_n(x)$ — $\tilde{Q}$-циліндричний інтервал n-го рангу, що містить точку x, Φ — сімейство циліндричних інтервалів всіх рангів заданого $\tilde{Q}$-представлення. Зафіксуємо число $\delta \geqslant 0$. Нехай

$$E \subset \left\{ x : \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln \mu(c_n(x))}{\ln \nu(c_n(x))} \geqslant \delta \right\} \quad i \quad \mu(E) > 0. \tag{1}$$

Тоді

$$\dim_P(E, \Phi, \nu) \geqslant \delta.$$

Теорема 4 ([14])**.** *Нехай зафіксовано деяке $\tilde{Q}$-представлення дійсних чисел.*

Нехай μ, ν — неперервні міри на $[0;1]$, $\Delta_n(x)$ — $\tilde{Q}$-циліндричний інтервал n-того рангу, що містить точку x, Φ — сімейство циліндричних інтервалів всіх рангів заданого $\tilde{Q}$-представлення. Зафіксуємо певне число $\delta > 0$. Нехай

$$E \subset \left\{ x : \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln \mu(c_n(x))}{\ln \nu(c_n(x))} \leqslant \delta \right\}. \tag{2}$$

Тоді

$$\dim_P(E, \Phi, \nu) \leqslant \delta \cdot \dim_P(E, \Phi, \mu).$$

4. Представлення дійсних чисел рядами Кантора

Означення **8.** Для заданої послідовності $(n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots)$, де $n_k \in \mathbb{N} \setminus 1$, запис довільного числа $x \in [0;1]$ у вигляді

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k} := \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k}, \quad \alpha_k \in \{0, 1, \ldots, n_k - 1\}$$

називається представленням числа x рядами Кантора.

Г. Кантор ввів такі представлення у 1869 році [5] як природні узагальнення класичного s-адичного представлення дійсних чисел.

Ці представлення та їх властивості інтенсивно досліджувалися багатьма математиками (див., наприклад, роботи [18, 19] та посилання в них).

Варто зауважити, що представлення чисел рядами Кантора є частковим випадком $\tilde{Q}$-представлення, а саме, коли $q_{ik} = \frac{1}{n_k}$.

У статті [1] було дано критерій довірчості сімейства циліндрів преставлення чисел рядами Кантора для обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича. В роботі [14] доведено його «пакувальний аналог»:

Теорема 5. *(*[14]*) Система Φ циліндричних інтервалів представлення дійсних чисел рядами Кантора є довірчою для обчислення пакувальної розмірності тоді і тільки тоді, коли*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\ln n_k}{\ln(n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_{k-1})} = 0. \tag{3}$$

Для сімейств циліндрів s-адичного, Q та $\tilde{Q}$ (за умови відділеності q_{ij} від нуля) представлень пакувальна довірчість була доведена разом із пакувальною порівнянністю. Наступний результат показує, що довірче сімейство циліндрів, породжених рядами Кантора, не завжди є порівнянним.

Теорема 6. *Нехай $n_k = 4^k$, а Φ — сімейство циліндрів відповідного представлення дійсних чисел рядами Кантора. Тоді Φ є довірчим для обчислення пакувальної розмірності на $[0;1]$, але не є порівнянним.*

Доведення. Обчислимо границю

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\ln n_k}{\ln(n_1n_2\dots n_{k-1})}=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln 4^k}{\ln(4^14^2\dots 4^{k-1})}=$$
$$\lim_{k\to\infty}\frac{k\ln 4}{(1+2+\dots+(k-1))\ln 4}=\lim_{k\to\infty}\frac{2k}{k^2+k}=0. \quad (4)$$

Отже, сімейство Φ задовольняє умови теореми 5 і тому є довірчим.

Для доведення непорівнянності сімейства Φ розглянемо множину

$$A=\left\{\Delta_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\dots}:\alpha_k\in\{0,2^k,2\cdot 2^k,3\cdot 2^k,\dots,(2^k-1)\cdot 2^k\}\right\}$$

і покажемо, що $\dim_P A=\frac{1}{2}$, $\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}(A,\Phi)\leqslant 1$, але $\mathcal{P}^{\frac{1}{2}}(A)=\infty$.

Нехай λ є мірою Лебега на $[0;1]$, а μ_ξ є ймовірнісною мірою випадкової величини

$$\xi=\Delta_{\xi_1\xi_2\dots\xi_k\dots},$$

де ξ_k — це незалежні дискретні випадкові величини, розподіл яких задано таблицею:

ξ_k	0	2^k	$2\cdot 2^k$	$\dots$	$(2^k-1)\cdot 2^k$
p_{ik}	$\frac{1}{2^k}$	$\frac{1}{2^k}$	$\frac{1}{2^k}$	$\dots$	$\frac{1}{2^k}$

Нехай $\Delta_n(x)$ — це циліндричний інтервал n-го рангу, який містить точку x. Тоді $\forall x\in A$ виконуються умови:

$$\mu_\xi(\Delta_n(x))=2^{-\frac{n(n+1)}{2}},\qquad \lambda(\Delta_n(x))=4^{-\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Отже,

$$\frac{\ln\mu_\xi(\Delta_n(x))}{\ln\lambda(\Delta_n(x))}=\frac{1}{2},\qquad \forall x\in A.$$

Очевидно, що $\mu_\xi(A)=1$, і тому $\dim_P(A,\Phi,\mu_\xi)=1$. Отже, за аналогом теореми Біллінгслі для пакувальної розмірності (теоремою 4) маємо:

$$\dim_P(A,\Phi,\lambda)=\frac{1}{2}.$$

Оскільки $\dim_P(A,\Phi,\lambda)=\dim_P(A,\Phi)$, причому Φ — довірча, то $\dim_P A=\frac{1}{2}$.

Зафіксуємо довільне число $r>0$. Виберемо таке $k_0(r)$, що $2^{k_0}\cdot\lambda(\Delta_{k_0})<r$, де Δ_{k_0} — це будь-який з циліндрів рангу k_0 (нагадаємо, що у представленні дійсних чисел рядами Кантора всі циліндри однакового рангу мають однакову міру Лебега).

Розглянемо множину циліндрів M_1, до якої входять всі циліндри рангу k_0, внутрішності яких мають непорожній перетин із множиною A. Розглянемо також множину відрізків M, до якої входять об'єднання по 2^{k_0} суміжних відрізків з множини M_1.

Нехай M^0 є множиною внутрішностей відрізків з M, тобто множиною інтервалів. Ці інтервали є попарно неперетинними, і кожен з них має довжину, яка не перевищує числа r. Тому M^0 є r-пакуванням (нецентрованим) множини A. Обчислимо α-об'єм цього пакування. Для цього врахуємо, що вказане пакування складається з інтервалів, кількість яких становить

$$2\cdot 2^2\cdot\ldots\cdot 2^{k_0},$$

а довжина кожного з інтервалів дорівнює

$$2^{k_0} \cdot \left(4 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot 4^{k_0}\right)^{-1}.$$

Таким чином, α-об'єм вказаного пакування дорівнює

$$V_\alpha(M^0) = 2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^{k_0} \cdot \left(\frac{2^{k_0}}{4 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot 4^{k_0-1} 4^{k_0}}\right)^\alpha.$$

Отже,

$$V_{1/2}(M^0) = 2 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^{k_0} \cdot \left(\frac{2^{k_0}}{4 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot 4^{k_0-1} 4^{k_0}}\right)^{1/2} = \\ = \sqrt{2^{k_0}}.$$

Оскільки

$$\mathcal{P}_r^{1/2}(A) \geqslant V_{1/2}(M^0),$$

і

$$\lim_{r \to 0} k_0(r) = \infty,$$

то

$$\mathcal{P}_0^{1/2}(A) = \lim_{k_0 \to \infty} V_{1/2}(M^0) = \infty.$$

Покажемо, що A задовольняє умови теореми 2. Очевидно, що A — компактна.

Нехай V — довільна відкрита множина. Тоді $A \cap V$ містить в собі множину $A_1 = A \cap \Delta_k$, де Δ_k — це деякий циліндр рангу k, який має непустий перетин з A.

З побудови множини A випливає, що A складається з 2^k множин, конгруентних множині A_1, і тому $\mathcal{P}_0^{1/2}(A_1) = \infty$.

Отже, A задовольняє умови теореми 2, і тому $\mathcal{P}^{1/2}(A) = \infty$.

Покажемо, що $\mathcal{P}^{1/2}(A, \Phi) \leqslant 1$.

Зафіксуємо деяке $r > 0$ і позначимо через $k_0(r)$ найменше таке k, що $|\Delta_k(x)| < r$. Тоді множину A можна покрити $2^1 \cdot 2^2 \cdot \cdots \cdot 2^{k_0}$ циліндрами рангу k_0. Довжина кожного такого циліндра дорівнює $(4^1 \cdot 4^2 \cdot \ldots 4^{k_0})^{-1}$. Якщо $\alpha = \frac{1}{2}$, то α-об'єм пакування множини A розглядуваними циліндрами дорівнює

$$2^1 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^{k_0} \cdot \left(4^1 \cdot 4^2 \cdot \ldots 4^{k_0}\right)^{-1/2} = 1.$$

Якщо розглянути один циліндр рангу k_0, то його α-об'єм (при $\alpha = \frac{1}{2}$) дорівнює

$$\left(4^1 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot 4^{k_0}\right)^{-1/2} = (2^1 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^{k_0})^{-1}.$$

Якщо замість цього циліндра розглядати 2^{k_0+1} циліндрів рангу $(k_0 + 1)$, то їх сумарний α-об'єм буде дорівнювати

$$2^{k_0+1} \cdot \left(4^1 \cdot 4^2 \cdot \ldots \cdot 4^{k_0} \cdot 4^{k_0+1}\right)^{-1/2} = (2^1 \cdot 2^2 \cdot \ldots \cdot 2^{k_0})^{-1}.$$

Отже, якщо у пакуванні множини A циліндрами рангу k_0 замінити один з циліндрів на циліндри наступного рангу, то α-об'єм пакування не зміниться. Це значить, що α-об'єм довільного пакування множини A циліндрами рангів $\geqslant k_0$ (не обов'язково рівних між собою) також дорівнює 1, а тому і $\mathcal{P}_r^{1/2}(A, \Phi) = 1$, і $\mathcal{P}_0^{1/2}(A, \Phi) = 1$.

Отже, $\mathcal{P}^{1/2}(A,\Phi) \leqslant 1$, що й вимагалось довести. □

5. Випадкова величина ξ з незалежними символами розкладів Кантора

Зафіксуємо певний розклад C дійсних чисел у ряди Кантора, заданий послідовністю (n_k).

Означення **9.** Нехай (ξ_k) є послідовністю незалежних дискретно розподілених випадкових величин, причому розподіл величини ξ_k задано таблицею:

x_m	0	1	$\ldots$	n_k-1
p_m	p_{0j}	p_{1j}	$\ldots$	$p_{(n_k-1)j}$

Під випадковою величиною з незалежними символами розкладів Кантора будемо мати на увазі випадкову величину

$$\xi = \Delta^C_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_k\ldots},$$

міру на відрізку $[0;1]$, яку породжує в.в. ξ, будемо позначати як μ_ξ, спектр цієї міри — як S_{μ_ξ}, а відповідну функцію розподілу — як F_ξ.

5.1. Пакувальна розмірність міри μ_ξ.

Означення **10.** Нехай μ — деяка ймовірнісна міра, визначена на $[0;1]$. Тоді пакувальною розмірністю міри μ називається число

$$\dim_P \mu = \inf\{\dim_P E : \mu(E) = 1\}.$$

Покладемо $0\ln 0 := 0$ у наступних позначеннях. Нехай

$$h_j := -\sum_{i=0}^{n_j-1} p_{ij}\ln p_{ij}, \qquad H_k = \sum_{j=1}^{k} h_j, \forall j,k \in \mathbb{N}.$$

Теорема 7. *Якщо*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\ln n_k}{\ln(n_1 n_2\ldots n_k)}\right)^2 < \infty, \tag{5}$$

то пакувальна розмірність міри μ_ξ в.в. ξ з незалежними символами розкладу Кантора дорівнює

$$\dim_P(\mu_\xi) = \limsup_{k\to\infty}\frac{H_k}{\ln(n_1 n_2\ldots n_k)}.$$

Доведення. За теоремою Джессена–Вінтнера [11] випадкова величина ξ має чистий розподіл, тобто її функція розподілу буде або чисто дискретною, або чисто абсолютно неперервною, або чисто сингулярною. Не порушуючи загальності, ми будемо вважати, що μ_ξ є неперервною, оскільки в іншому випадку розмірність міри дорівнює 0 та рівність (5) виконується.

Нехай $x \in S_{\mu_\xi} \setminus \{1\}$. Тоді існує циліндричний півінтервал $\Delta_k(x) = \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\dots\alpha_k(x)}$ такий, що $x \in \Delta_k(x)$. Позначимо міру Лебега на $[0;1]$ через λ. Тоді

$$\mu_\xi(\Delta_k(x)) = p_{\alpha_1(x)1} \cdot p_{\alpha_2(x)2} \cdot \dots \cdot p_{\alpha_k(x)k} > 0,$$
$$\lambda(\Delta_k(x)) = \frac{1}{n_1 n_2 \dots n_k}$$

Розглянемо вираз

$$\frac{\ln \mu_\xi(\Delta_k(x))}{\ln \lambda(\Delta_k(x))} = \frac{\sum_{j=1}^{k} \ln p_{\alpha_j(x)j}}{-\ln(n_1 n_2 \dots n_k)}$$

Побудуємо допоміжну послідовність дискретних незалежних випадкових величин на ймовірнісному просторі $([0;1], \mathcal{B}([0;1]), \mu_\xi)$, де $\mathcal{B}([0;1])$ є борелівською σ-алгеброю. Нехай η_k (при $k \in \mathbb{N}$) є незалежними випадковими величинами, розподіл яких задано таблицею:

Значення	$\ln p_{0k}$	$\ln p_{1k}$	$\dots$	$\ln p_{(n_k-1)k}$
Ймовірності	p_{0k}	p_{1k}	$\dots$	$p_{(n_k-1)k}$

Тоді

$$M\eta_k = \sum_{i=0}^{n_k-1} p_{ik} \ln p_{ik} = -h_k,$$

причому

$$|M_{\eta_k}| \leqslant \ln n_k.$$

Легко довести, що

$$M((\eta_k)^2) \leqslant \max\{4, \ln^2 n_k\}.$$

Отже,

$$D(\eta_k) = M\eta_k^2 - (M\eta_k)^2 \leqslant 2\max\{4, \ln^2 n_k\}.$$

З посиленого закону великих чисел [25] та умови теореми (5) випливає, що для μ_ξ-майже всіх точок $x \in [0;1]$ виконується співвідношення

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(\eta_1(x) + \eta_2(x) + \dots + \eta_k(x)) - M(\eta_1(x) + \eta_2(x) + \dots + \eta_k(x))}{\ln(n_1 n_2 \dots n_k)} = 0. \qquad (6)$$

Зазначимо, що

$$M(\eta_1(x) + \eta_2(x) + \dots + \eta_k(x)) = -H_k,$$

і

$$\lambda(\Delta_k(x)) = \frac{1}{n_1 n_2 \dots n_k}.$$

Нехай

$$D := \limsup_{k\to\infty} \frac{H_k}{\ln(n_1 n_2 \dots n_k)}.$$

Розглянемо множину

$$T = \left\{x : \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\eta_1(x) + \eta_2(x) + \dots + \eta_k(x)}{\ln \lambda(\Delta_k(x))} - \frac{H_k}{-\ln \lambda(\Delta_k(x))}\right) = 0\right\} =$$
$$= \left\{x : \lim_{k\to\infty} \left(\frac{\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_k - M(\eta_1 + \eta_2 + \dots + \eta_k)}{\ln(n_1 n_2 \dots n_k)}\right) = 0\right\}.$$

З $\mu_\xi(T)=1$ маємо $\dim_P(T,\Phi,\mu_\xi)=1$.

Введемо до розгляду такі множини:

$$T_1=\left\{x:\limsup_{k\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\cdots+\eta_k(x)}{\ln\lambda(\Delta_k(x))}-\frac{H_k}{-\ln\lambda(\Delta_k(x))}\right)=0\right\},$$

$$T_2=\left\{x:\limsup_{k\to\infty}\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\cdots+\eta_k(x)}{\ln\lambda(\Delta_k(x))}\leqslant\limsup_{k\to\infty}\frac{H_k}{-\ln\lambda(\Delta_k(x))}\right\}=$$
$$=\left\{x:\limsup_{k\to\infty}\frac{\ln\mu_\xi(\Delta_k(x))}{\ln\lambda(\Delta_k(x))}\leqslant D\right\},$$
$$T_3=\left\{x:\limsup_{k\to\infty}\frac{\ln\mu_\xi(\Delta_k(x))}{\ln\lambda(\Delta_k(x))}\geqslant D\right\}.$$

Очевидно, що $T\subset T_1$.

Доведемо, що $T_1\subset T_2$. Для цього використаємо відому нерівність

$$\limsup_{k\to\infty}(x_k-y_k)\geqslant\limsup_{k\to\infty}(x_k)-\limsup_{k\to\infty}(y_k),$$

яка виконується для довільних дійсних послідовностей (x_k) та (y_k), для яких права частина нерівності не має вигляд «$\infty-\infty$» або «$-\infty+\infty$».

Якщо $x\in T_1$, то

$$\limsup_{k\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\cdots+\eta_k(x)}{\ln\lambda(\Delta_k(x))}-\frac{H_k}{-\ln\lambda(\Delta_k(x))}\right)=0\geqslant$$
$$\geqslant\limsup_{k\to\infty}\frac{\ln\mu_\xi(\Delta_k(x))}{\ln\lambda(\Delta_k(x))}-D.$$

Отже,

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{\ln\mu_\xi(\Delta_k(x))}{\ln\lambda(\Delta_k(x))}-D\leqslant 0,$$

і тому $x\in T_3$.

Отже, $T\subset T_1\subset T_2$. Звідси випливає, що

$$\dim_P(T,\Phi,\lambda)\leqslant D\cdot\dim_P(T,\Phi,\mu_\xi)=D\cdot 1$$

(за теоремою 4).

Тепер покажемо, що $T\subset T_3$. Справді: якщо $x\in T$, то

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\cdots+\eta_k(x)}{\ln\lambda(\Delta_k(x))}-\frac{H_k}{-\ln\lambda(\Delta_k(x))}\right)=0,$$

звідси

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{H_k}{-\ln\lambda(\Delta_k(x))}-\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\cdots+\eta_k(x)}{\ln\lambda(\Delta_k(x))}\right)=0,$$

тому

$$\limsup_{k\to\infty}\left(\frac{H_k}{-\ln\lambda(\Delta_k(x))}-\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\cdots+\eta_k(x)}{\ln\lambda(\Delta_k(x))}\right)=0,$$

і тому (за вказаною вище нерівністю $\limsup_{k\to\infty}(x_k - y_k) \geqslant \limsup_{k\to\infty}(x_k) - \limsup_{k\to\infty}(y_k)$)

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{H_k}{-\ln\lambda(\Delta_k(x))} - \frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+\cdots+\eta_k(x)}{\ln\lambda(\Delta_k(x))} \leqslant 0,$$

тобто

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\ln\mu_\xi(\Delta_k(x))}{\ln\lambda(\Delta_k(x))} \geqslant D,$$

і $x \in T_3$.

Оскільки $T \subset T_3$ і $\mu_\xi(T) = 1 > 0$, то $\dim_P(T,\Phi,\lambda) \geqslant D$ (за теоремою 3).

Отже, $\dim_P(T,\Phi,\lambda) = D$. Оскільки λ є мірою Лебега на $[0;1]$, то $\dim_P(T,\Phi) = D$. Оскільки Φ є довірчою (бо зі збіжності ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ln n_k}{\ln(n_1 n_2 \ldots n_k)}\right)^2$$

випливає умова (3)), то $\dim_P T = D$.

Покажемо, що побудована множина T є «найменшим» носієм міри μ_ξ у сенсі пакувальної фрактальної розмірності. Нехай M — довільний носій міри μ_ξ. Тоді $M_1 := M \cap T$ теж є носієм міри μ_ξ, а тому $\dim_P M_1 \leqslant \dim_P M$.

З того, що $M_1 \subset T \subset T_3$, випливає, що M_1 задовольняє умови теореми 3, а отже, $\dim_P M_1 \geqslant D$.

Отже, $\dim_P M \geqslant D$, і T справді є «найменшим» носієм міри μ_ξ в сенсі $\dim_P$. Тому $\dim_P \mu_\xi = D$, що й вимагалось довести. □

Література

[1] Albeverio S., Ivanenko G., Lebid M., Torbin G. On the Hausdorff dimension faithfulness and the Cantor series expansion // http://arxiv.org/pdf/1305.6036.pdf.

[2] Anckar A. Dimension bounds for invariant measures of bi-lipschitz iterated function systems // http://arxiv.org/abs/1410.5927.

[3] Attia N., Barral J. Hausdorff and packing spectra, large deviations, and free energy for branching random walks in r^d // http://arxiv.org/pdf/1305.2034v2.pdf.

[4] Billingsley P. Hausdorff dimension in probability theory ii // Illinoys Journal of Mathematics. — 1961. — Vol. 5, no. 1. — P. 291–298.

[5] Cantor G. Über die einfachen zahlensysteme // Zeitschrift f. Math. u. Physik. — 1869. — Vol. 14, no. 1. — P. 121–128.

[6] Das M. Billingsley's packing dimension // Proceedings of the American mathematical society. — 2008. — Vol. 136, no. 1. — P. 273–278.

[7] Falconer K. The geometry of fractal sets. — London : Cambridge Unversity Press, 2002.

[8] Falconer K. Fractal geometry: mathematical foundations and Applications. — Chichester : Wiley, 2003. — 367 p.

[9] Fassler K., Orponen T. On restricted families of projections in r^3 // Proc. London Math. Soc. — 2014. — Vol. 109, no. 2. — P. 56.

[10] Holland M., Zhang Y. Dimension results for inhomogeneous moran set constructions // http://arxiv.org/pdf/1407.6597.pdf.

[11] Jessen B. W. A. Distribution function and riemann zeta-function // Trans. Amer. Math. Soc. — 1935. — Vol. 38, no. 1. — P. 48–88.

[12] Jordan T., Rams M. Increasing digit subsystems of infinite iterated function systems // Proceedings of the American mathematical society. — 2012. — Vol. 140, no. 4. — P. 1267–1279.

[13] Joyce H. Conditions for equality of hausdorff and packing measures on $\mathbb{R}^n$ // Real Analysis Exchange. — 1996. — Vol. 22, no. 1. — P. 142–152.

[14] Kondratiev Yu., Lebid M., Slutskyi O., Torbin G. Cantor series expansion and packing dimension faithfulness // (submitted to Advances of Mathematics).

[15] Lebid M., Torbin G. About comparable and not comparable Hausdorff measures // Reports of NASU. — 2014. — Vol. 8, — P. 35–40.

[16] Li J. A class of probability distribution functions preserving the packing dimension // Statistics and Probability Letters. — 2011. — Vol. 81, no. 1. — P. 1782–1791.

[17] Li J. Packing dimension of measures associatedwith $\tilde{Q}$-representation // Mediterranean Journal of Mathematics. — 2011. — Vol. 18, no. 1. — P. 182–194.

[18] Mance B. Normal numbers with respect to cantor series expansion // Thesis (Ph. D.). — Vol. The Ohio State University.

[19] Marstrand J. The dimension of cartesian product sets // Proc. Cambridge Philosofical Society. — 1954. — Vol. 1, no. 50. — P. 198–202.

[20] Mattila P. Geometry of sets and measures in euclidean spaces. — Cambridge : Cambridge university press, 1995. — 356 p.

[21] Slutskyi O., Torbin G. Analog of the billingsley theorem for the packing dimension // Transactions of the National Pedagogical University of Ukraine (Mathematics). — 2012. — Vol. 1. — P. 192–199.

[22] Slutskyi O., Torbin G. The families of sets faithfulness with respect to packing dimension // Transactions of the National Pedagogical University of Ukraine (Mathematics). — 2013. — Vol. 1. — P. 268–277.

[23] Raimond X. S., Tricot C. Packing regularity of sets in n-space // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 1988. — Vol. 103, no. 1. — P. 133–145.

[24] Rogers C. Hausdorff measures. — London : Cambridge Unversity Press, 1970.

[25] Shiryaev A. Probability. — New York : Springer-Verlag, 1996.

[26] Slutskyi O. On packing dimension preservation by distribution functions of random variables with independent $\tilde{Q}$-digits // Modern Stochastics: Theory and Applications (in publication).

[27] Taylor S. J., Tricot C. Packing measure and its evaluation for a brownian path // Trans. Amer. Math. Soc. — 1985. — Vol. 288, no. 1. — P. 679–699.

[28] Tricot C. Two definitions of fractional dimension // Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 1982. — Vol. 91, no. 1. — P. 57–74.