Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2014, № 16 (1). — С. 144–152.

Про один клас сингулярних розподілів, породжених підсімейством двійково-лакунарних послідовностей

Л. О. Сінельник, Г. М. Торбін
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

Анотація. Робота присвячена вивченню нескінченних згорток Бернуллі, породжених спеціальним підкласом множини двійково лакунарних дійсних чисел. Досліджується асимптотика перетворення Фур'є-Стілт'єса відповідних згорток Бернуллі і доводиться, що у випадку неперервності для кожного значення параметра a з досліджуваної континуальної ніде не щільної множини, модуль характеристичної функції $f_\xi(t)$ породженої випадкової величини $\xi = \xi(a)$ має максимальну асимптотичну амплітуду, тобто

$$\varliminf_{|t|\to\infty} |f_\xi(t)| = 0 \quad \text{і} \quad \varlimsup_{|t|\to\infty} |f_\xi(t)| = 1.$$

Ключові слова: перетворення Фур'є-Стілт'єса, згортки Бернуллі, сингулярно неперервні ймовірнісні міри, фрактали, двійково-лакунарні дійсні числа.

Abstract. The paper is devoted to the study of infinite Bernoulli convolutions generated by a special subclass of the set of binary lacunary real numbers.

Let $\{\xi_k\}$ be a sequence of independent random variables taking values -1 and 1 with probabilities p_{0k} and p_{1k} respectively, let $\{a_k\}$ be a sequence of real number such that the series $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ converges absolutely. Then the distribution function of the random variable

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi_k$$

is said to be the infinite Bernoulli convolution. There are a lot of research papers devoted to the study of this object (see, e.g., [13] and references therein).

For the case, where the condition $a_k \geq r_k = \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$ holds for all sufficiently large k, fine fractal analysis of such probability measures has been done in [5]. At the same time, even for the case of hyperexponential convergent series $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ conditions for the probability measure μ_ξ to be a Reichman measure (i.e., if $f_\xi(t) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\xi} d\left(F_\xi(x)\right) = M\left(e^{it\xi}\right) \to 0, (t \to \infty)$) are still unknown.

Abstract. A real number a is said to be s-adic-lacunary, if its s-adic expansion $a = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(a)}{s^k}$ has the following property:

$$\forall m \in N, \forall l \in N, \quad \exists k = k(m,l) > m : \alpha_{k+i}(a) = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, ..., l\}.$$

For $s = 2$ we get the definition of a binary-lacunary number.

Let

$$A = \{k : k = 2^{n+1} - n, k = 2^{n+1} - n + 1, \ldots, k = 2^{n+1}, n \in N\} =$$
$$= \{3, 4, 6, 7, 8, 13, 14, 15, 16, \ldots, 2^{n+1} - n, \ldots, 2^{n+1} - 1, 2^{n+1}, \ldots\} \subset N,$$

Consider the set of real number:

$$L = \left\{ x : x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(x)}{2^k} \right\},$$

where

$$\alpha_k(x) = \begin{cases} 0, & \text{if} \quad k \notin A, \\ 0 \ \text{or} \ 1, & \text{if} \quad k \in A. \end{cases}$$

That is, each number x from the set L has the following binary expansion:

$$x = 0,00\alpha_3\alpha_4 0\alpha_6\alpha_7\alpha_8 0000\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{15}\alpha_{16}0\ldots00\ldots0\alpha_{2^{n+1}-n},\ldots\alpha_{2^{n+1}-1}\alpha_{2^{n+1}}\ldots$$

Let L^* be the set, which is obtained from L by deleting of a countable set of points having zeros in periods.

We study asymptotics of the Fourier-Stiltjes transform of the corresponding Bernoulli convolutions and prove that in the case of continuity for any parameter $a \in L^*$ from the considered nowhere dense set of continuum cardinality, the modulus of the characteristic function $f_\xi(t)$ of generated random variables $\xi = \xi(a)$ has the maximal asymptotic amplitude, i.e.,

$$\underline{\lim}_{|t|\to\infty} |f_\xi(t)| = 0 \quad \text{and} \quad \overline{\lim}_{|t|\to\infty} |f_\xi(t)| = 1.$$

Key words: Fourier–Stieltjes transform, Bernoulli convolutions, singularly continuous probability measures, fractals, binary-lacunary real numbers.

Mathematics Subject Classification (2010): 11K55, 26A30, 28A80, 60E10.

1. Вступ

Нехай $\{\xi_k\}$ - послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень -1 та 1 з ймовірностями p_{0k} та p_{1k} відповідно; $\{a_k\}$ - послідовність дійсних чисел таких, що ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, абсолютно збігається. Тоді функція розподілу випадкової величини

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k \tag{2}$$

називається нескінченною згорткою Бернуллі. Дослідженню даного математичного об'єкта присвячено велику кількість статей (див.[13] для огляду літератури станом на кінець 20-го століття). Його вивчали, використовуючи різні підходи, Джессен (Jessen B.) і Вінтнер (Wintner A.) [8], Кершнер (Kershner R.), Ердеш (Erdos P.) [5], Кахане (Kahane J.P.) і Салем (Salem R.), Гарсіа (Garsia A.M.) [6], Перес (Peres Y.) і Солом'як

(Solomyak B.) [14, 15], Альбеверіо (Albeverio S.) [2], Працьовитий М. (Pratsiovytyi M.) [1, 7, 16, 22], Торбін Г. (Torbin G.) [1, 2, 5, 7], Гончаренко Я. (Gontcharenko Ya.) [7] та ін. Для випадку, коли умова $a_k \geq r_k := \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} a_n$ для всіх достатньо великих k, в роботі [5] здійснено тонкий фрактальний аналіз властивостей таких ймовірнісних мір, включаючи конструктивний опис мінімальних розмірнісних носіїв з додатковими алгебраїчними властивостями. У той же час навіть для для випадку гіперекспоненційно збіжних рядів $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ залишаються нез'ясованими умови при яких ймовірнісна міра μ_ξ є мірою Райхмана (тобто, коли $f_\xi(t) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{it\xi} d\left(F_\xi(x)\right) = M\left(e^{it\xi}\right) \to 0, (t \to \infty)$). Відомо, що коли $f_\xi(t)$ є характеристичною функцією чисто дискретного розподілу, то $L_\xi := \overline{\lim} |f_\xi(t)| = 1$. Якщо $f_\xi(t)$ відповідає деякому абсолютно неперервному розподілу, то $L_\xi = 0$. Якщо $f_\xi(t)$ - характеристична функція сингулярного розподілу, то величина L_ξ може бути будь-яким числом між 0 і 1. У цьому розумінні близькість L_ξ до 1 у певній мірі характеризує близькість сингулярно неперервного розподілу до дискретного. Зауважимо, що навіть у відносно простих випадках, коли члени послідовності $\{a_k\}$ є елементами розкладів Остроградського 2-го виду чи розкладів Сільвестра (у цьому випадку $a_k = \frac{1}{b_k}$, де послідовність *натуральних* чисел $\{b_k\}$ гіперекспоненційно зростає) на сьогодні все ще невідомі необхідні і достатні умови того щоб $L_\xi = 1$.

У даній роботі досліджуються властивості нескінченних згорток Бернуллі, що породжені спеціальним континуальним підкласом множини двійково-лакунарних дійсних чисел. Вивчається асимптотика перетворення Фур'є-Стілт'єса відповідних згорток Бернуллі і доводиться, що у випадку неперервності для кожного значення параметра a з досліджуваної континуальної ніде не щільної множини, модуль характеристичної функції $f_\xi(t)$ породженої випадкової величини $\xi = \xi(a)$ має максимальну асимптотичну амплітуду, тобто

$$\underline{\lim}_{|t|\to\infty} |f_\xi(t)| = 0 \quad \text{і} \quad \overline{\lim}_{|t|\to\infty} |f_\xi(t)| = 1.$$

Зауважимо, що у випадку класичних згорток Бернуллі ($a_k = \lambda^k$) множина тих значень параметра λ, для яких міра μ_ξ не є мірою Райхмана, є зчисленною.

2. Про асимптотичні властивості перетворення Фур'є – Стілт'єса нескінченних згорток Бернуллі, породжених одним класом двійково лакунарних чисел

Означення **1.** Дійсне число a називається s-адично лакунарним, якщо його s-адичний розклад $a = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(a)}{s^k}$ має наступну властивість:

$$\forall m \in N, \forall l \in N, \quad \exists k = k(m,l) > m : \alpha_{k+i}(a) = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, ..., l\}.$$

При $s = 2$ отримуємо означення двійково лакунарного числа.

Нехай

$$A = \{k : k = 2^{n+1} - n, k = 2^{n+1} - n + 1, \dots, k = 2^{n+1}, n \in N\} =$$
$$= \{3, 4, 6, 7, 8, 13, 14, 15, 16, \dots, 2^{n+1} - n, \dots, 2^{n+1} - 1, 2^{n+1}, \dots\} \subset N,$$

Розглянемо множину дійсних чисел:

$$L = \left\{ x : x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k(x)}{2^k} \right\},$$

де

$$\alpha_k(x) = \begin{cases} 0, \quad \text{якщо} \quad k \notin A, \\ 0 \quad \text{або} \quad 1, \quad \text{якщо} \quad k \in A. \end{cases}$$

Тобто, кожне число x з множини L такий двійковий запис:

$$x = 0,00\alpha_3\alpha_4 0\alpha_6\alpha_7\alpha_8 0000\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{15}\alpha_{16}0\dots 00\dots 0\alpha_{2^{n+1}-n}, \dots \alpha_{2^{n+1}-1}\alpha_{2^{n+1}}\dots$$

Зрозуміло, що множина L має потужність континуум і кожне число з цієї множини є двійково лакунарним.

Нехай L^* - множина, яка утворена з L шляхом вилучення зчисленної множини точок, які мають нуль в періоді.

Нехай a довільне число з множини L^* . Тоді фіксованому числу

$$a = 0,00\alpha_3\alpha_4 0\alpha_6\alpha_7\alpha_8 0000\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{15}\alpha_{16}0\dots 00\dots 0\alpha_{2^{n+1}-n}, \dots \alpha_{2^{n+1}-1}\alpha_{2^{n+1}}\dots$$

поставимо у відповідність наступну числову послідовність:

$$a_1 = 0,00000\alpha_6\alpha_7\alpha_8 0000\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{15}\alpha_{16}0\dots$$

$$a_2 = 0,000000000000\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{15}\alpha_{16}0\dots$$

$$\dots$$

$$a_n = \frac{\left\{a \cdot 2^{2^{n+1}}\right\}}{2^{2^{n+1}}}.$$

Очевидно, що ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається. Нехай ξ_k - послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень -1 та 1 з ймовірностями p_{0k} та p_{1k} відповідно. Розглянемо випадкову величину

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k.$$

Оскільки для даного випадку виконується умова $a_k > r_k$, $\forall k \in N$, то, застосувавши результати роботи [5], отримаємо наступну теорему.

Теорема 1. *1) Для довільного $a \in L^*$ відповідна випадкова величина $\xi = \xi(a)$ має сингулярний відносно міри Лебега розподіл, причому ξ має дискретний розподіл, якщо*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0,$$

і сингулярно неперервний розподіл у всіх інших випадках;

2) Розмірність Хаусдорфа-Безиковича спектра S_ξ розподілу випадкової величини ξ (а, отже, і розмірність самої міри μ_ξ) дорівнює нулю.

Наступна теорема характеризує асимптотичні властивості модуля характеристичної функції випадкової величини ξ.

Теорема 2. *Для довільного вибору числа a з множини L^* має місце рівність*

$$L_\xi = \overline{\lim_{|t|\to\infty}} |f_\xi(t)| = 1.$$

Якщо $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} = 0$, *то*

$$\underline{\lim}_{|t|\to\infty} |f_\xi(t)| = 0.$$

Доведення. Нехай

$$a = 0,00\alpha_3\alpha_4 0\alpha_6\alpha_7\alpha_8 0000\alpha_{13}\alpha_{14}\alpha_{15}\alpha_{16}0\ldots00\ldots0\alpha_{2^{n+1}-n},\ldots\alpha_{2^{n+1}-1}\alpha_{2^{n+1}}\ldots \in L^*$$

Поставимо у відповідність числу a послідовність $\{a_n\}$, $a_n = \frac{\left\{a\cdot 2^{2^{n+1}}\right\}}{2^{2^{n+1}}}$.

Оскільки (див., наприклад, [18])

$$|f_\xi(t)| = \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k}\sin^2(a_k t)},$$

то

$$|f_\xi(t)| \geq \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \sin^2(a_k t)\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \cos^2(a_k t).$$

Виберемо підпослідовність $t_n = l_n \cdot \pi$, де $l_n = 2^{2^n}$. Тоді

$$t_n \cdot a_1 = \pi \cdot [l_n a_1] + \pi \cdot 0,\underbrace{00\ldots0}_{2^n-n-1}\alpha_{2^{n+1}-n}\ldots\alpha_{2^{n+1}-1}\alpha_{2^{n+1}}0\ldots;$$

$$t_n \cdot a_2 = \pi \cdot [l_n a_2] + \pi \cdot 0,\underbrace{00\ldots0}_{2^n-n-1}\alpha_{2^{n+1}-n}\ldots\alpha_{2^{n+1}-1}\alpha_{2^{n+1}}0\ldots;$$

$$\ldots$$

$$t_n \cdot a_{n-1} = \pi \cdot [l_n a_{n-1}] + \pi \cdot 0,\underbrace{00\ldots0}_{2^n-n-1}\alpha_{2^{n+1}-n}\ldots\alpha_{2^{n+1}-1}\alpha_{2^{n+1}}0\ldots;$$

$$t_n \cdot a_n = \pi \cdot 2^{2^n} \cdot \frac{\left\{a \cdot 2^{2^{n+1}}\right\}}{2^{2^{n+1}}} = \pi \cdot \frac{\left\{a \cdot 2^{2^{n+1}}\right\}}{2^{2^n}} \leq \frac{\pi}{2^{2^n}};$$

$$\ldots$$

$$t_n \cdot a_{n+1} = \pi \cdot 2^{2^n} \cdot \frac{\left\{a \cdot 2^{2^{n+2}}\right\}}{2^{2^{n+2}}} \leq \frac{\pi}{2^{2^{n+1}}};$$
$$\dots$$
$$t_n \cdot a_{n+k} = \pi \cdot 2^{2^n} \cdot \frac{\left\{a \cdot 2^{2^{n+k+1}}\right\}}{2^{2^{n+k+1}}} \leq \frac{\pi}{2^{2^{n+k}}}, \forall k \geq 0.$$
$$\dots$$

Оскільки $\{t_n a_1\} = \{t_n a_1\} = \ldots = \{t_n a_{n-1}\}$, то

$$\sin(t_n a_1) = \sin(t_n a_2) = \ldots = \sin(t_n a_{n-1}) = \sin\left(\pi \cdot 0, \underbrace{00\ldots0}_{2^n-n-1}\alpha_{2^{n+1}-1}\ldots\alpha_{2^{n+1}}\ldots\right) \leq$$
$$\leq \pi \cdot 0, \underbrace{00\ldots0}_{2^n-n-1}\alpha_{2^{n+1}-1}\ldots\alpha_{2^{n+1}}\ldots \leq \pi \cdot 0, \underbrace{00\ldots0}_{2^n-n-1}11\ldots1\ldots =$$
$$= \pi \cdot 0, \underbrace{00\ldots0}_{2^n-n-2}11\ldots1\ldots = \frac{\pi}{2^{2^n-n-2}}, \forall n \in N.$$

Тобто

$$\cos^2(t_n a_1) = \cos^2(t_n a_2) = \ldots = \cos^2(t_n a_{n-1}) \geq 1 - \left(\frac{\pi}{2^{2^n-n-2}}\right)^2.$$

Таким чином, $\prod\limits_{k=1}^{n-1} \cos^2(t_n a_k) \geq \left(1 - \left(\frac{\pi}{2^{2^n-n-2}}\right)^2\right)^{n-1} \to 1$ при $n \to \infty$.

Крім того,

$$\cos^2(t_n a_n) \geq 1 - \left(\frac{\pi}{2^{2^n}}\right)^2;$$
$$\cos^2(t_n a_{n+1}) \geq 1 - \left(\frac{\pi}{2^{2^{n+1}}}\right)^2;$$
$$\dots$$
$$\cos^2(t_n a_{n+k}) \geq 1 - \left(\frac{\pi}{2^{2^{n+k}}}\right)^2, \ \forall k \geq 0.$$

Оцінимо нескінченний добуток

$$\prod_{k=n}^{\infty} \cos^2(t_n a_k) \geq \prod_{k=0}^{\infty}\left(1 - \left(\frac{\pi}{2^{2^{n+k}}}\right)^2\right) = \prod_{s=n}^{\infty}\left(1 - \left(\frac{\pi}{2^{2^s}}\right)^2\right) = P_{n-1}.$$

З цією метою розглянемо нескінченний добуток

$$\prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \left(\frac{\pi}{2^{2^k}}\right)^2\right). \tag{3}$$

Такий добуток збігається, оскільки збігається ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\frac{\pi}{2^{2^k}})^2$.

Тому $(n-1)$-й залишок добутку (3) прямує до 1. З іншого боку $(n-1)$-й залишок добутку (3) співпадає з P_{n-1}. Тому $P_{n-1} \to 1$ при $n \to \infty$.

Оскільки $\prod\limits_{k=1}^{n-1} \cos^2(t_n a_k) \to 1$ і $\prod\limits_{k=n}^{\infty} \cos^2(t_n a_k) \to 1$ при $n \to \infty$, то

$$|f_\xi(t_n)| \geq \prod_{k=1}^{n} \cos^2(t_n a_k) \cdot \prod_{k=n+1}^{\infty} \cos^2(t_n a_k) \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Оскільки $\overline{\lim\limits_{|t|\to\infty}}|f_\xi(t)| \geq \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}|f_\xi(t_n)|$, то $L_\xi = 1$.

Для доведення другої частини теореми зауважимо, що для довільної характеристичної функції $f(t)$ існує

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2dt = \sum_k p_k^2, \tag{1}$$

де p_k-величини стрибків відповідної функції розподілу, а підсумовування ведеться по всім стрибкам (див. [9]). Тому, у випадку неперервності розподілу маємо

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2dt = 0. \tag{2}$$

З обмеженості $|f(t)|$ та рівності (2) випливає, що $\underline{\lim\limits_{|t|\to\infty}}|f_\xi(t)| = 0$. Справді, якщо б існувало таке додатне число c_0, що для всіх достатньо великих $|t|$ ($|t| > t_0$) виконувалась умова $|f(t)| \geq c_0$, то

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T}|f(t)|^2dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}(\int_{-T}^{-t_0}|f(t)|^2dt + \int_{-t_0}^{t_0}|f(t)|^2dt + \int_{t_0}^{T}|f(t)|^2dt) \geq c_0^2 \neq 0.$$

Отже, для довільного неперервного розподілу характеристична функція $f(t)$ має властивість

$$\underline{\lim_{|t|\to\infty}}|f_\xi(t)| = 0, \tag{3}$$

яка, разом з доведеною вище рівністю

$$\overline{\lim_{|t|\to\infty}}|f_\xi(t)| = 1 \tag{4}$$

і означає максимальну асимптотичну амплітуду для модуля характеристичної функції досліджуваної випадкової величини.

$\square$

Зауваження 1. *У доведенні теореми явно використовувалась двійково лакунарна структура чисел з множини L^*. Покажемо, що наявність двійково лакунарної структури числа a не є необхідною умовою виконання рівності $L_\xi = 1$ для розподілу випадкової величини $\xi = \sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{\xi_k\{a\cdot 2^{2^k}\}}{2^{2^k}}$.*

Розглянемо, наприклад, число

$$a = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{2k}} =: \Delta^2_{01010101...01...}.$$

Очевидно, що дане число не належить до множини L^* і взагалі не є двійково лакунарним (у його двійковому розкладі немає жодної лакуни, яка б містила блок "00"). Розглянувши для відповідної характеристичної функції ту ж послідовність $t_n = l_n \cdot \pi$, де $l_n = 2^{2^n}$, що і при доведенні останньої теореми, отримаємо

$$t_n \cdot a_1 = \pi \cdot [l_n a_1] + \pi \cdot 0,010101...;$$

$$t_n \cdot a_2 = \pi \cdot [l_n a_2] + \pi \cdot 0,010101\ldots;$$
$$\ldots$$
$$t_n \cdot a_{n-1} = \pi \cdot [l_n a_{n-1}] + \pi \cdot 0,010101\ldots;$$

$$t_n \cdot a_n = \qquad\qquad \pi \cdot 0,010101\ldots = \frac{\pi}{3}.$$

Тому $\prod_{k=1}^{n-1} \cos^2(t_n a_k) = (\cos^2(\frac{\pi}{3}))^n = \frac{1}{4^n}$ *і, отже,*

$$\lim_{n\to\infty} |f_\xi(t_n)| = 0.$$

Не зважаючи на це, покажемо, що і у цьому випадку також має місце рівність $L_\xi = 1$. *З цією метою зауважимо, що* $a = \frac{1}{3}$ *і* $\{a \cdot 2^{2^n}\} = \frac{1}{3}, \quad \forall n \in N$. *Тому у цьому випадку* $a_n = \frac{1}{3\cdot 2^{2^n}}$ *і тому*

$$\xi = \frac{1}{3} \cdot \psi, \text{де} \quad \psi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{2^{2^k}}.$$

Розглянувши для характеристичної фуункції випадкової величини ту ж послідовність $t_n = 2^{2^n}\pi$ *і повторивши міркування, які проводились у попередній теоремі, отримаємо висновок про те, що* $L_\psi := \overline{\lim\limits_{t\to\infty}} |f_\psi(t)| = 1$.

Оскільки $\xi = 3\psi$, *то з властивостей характеристичних функцій випливає, що* $f_\xi(t) = f_\psi(\frac{t}{3})$. *Оскільки* $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} |f_\psi(t)| = 1$, *то* $\overline{\lim\limits_{t\to\infty}} |f_\xi(t)| = 1$.

Подяка. Ця робота була частково підтримана науково-дослідними проектами «Spectral Structures and Topological Methods in Mathematics» (SFB-701, Bielefeld University),
STREVCOMS FP-7-IRSES 612669 (ЄС), «Багаторівневий аналіз сингулярних ймовірнісних мір та його застосування» (МОН України).

Література

[1] *Albeverio S., Baranovskyi O., Pratsiovytyi M., Torbin G.* The set of incomplete sums of the first Ostrogradsky series and anomalously fractal probability distributions on it // Rev. Roum. Math. Pures Appl.—2009—54, №2—85-115 pp.

[2] *Albeverio S., Torbin G.* Image measures of infinite product measures and generalized Bernoulli convolutions // Naukov. Chasopys Nats. Dragomanov Pedagog. Univ. Ser. 1, Fiz. Mat. Nauky—2004—5—248-264 pp.

[3] *Albeverio S., Torbin G.* On fine fractal properties of generalized infinite Bernoulli convolutions // Bull. Sci. Math.—2008—132, no. 8—711–727.

[4] *Cooper M.* Dimension, measure and infinite Bernoulli convolutions// Math. Proc. Cambr. Phil. Soc. – 1998. - **124**. – P. 135 - 149.

[5] *Erdos P.* On a family of symmetric Bernoulli convolutions//Amer. J. Math.—1939—61 —974 - 976 pp..

[6] *Garsia A. M.* Arithmetic properties of Bernoulli convolutions // Trans. Amer. Math. Soc.—1962—102—409-432 pp..

[7] *Гончаренко Я. В., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Фрактальні властивості деяких згорток Бернуллі // Теорія ймовірностей та математична статистика—2008—79— С. 34-49.

[8] *Jessen B., Wintner A.* Distribution function and Riemann Zeta-function// Trans. Amer. Math. Soc.—1938—38—48-88 pp..

[9] *Королюк В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф.* Справочник по теории вероятностей и математической статистике. М.: Наука—1985—641 с.

[10] *Lebid' M. V., Torbin G. M., Singularity and fine fractal properties of a certain class of infinite Bernoulli convolutions with essential intersections. Theory Probab. Math. Statist. No. 87 (2013), 99–115.*

[11] *Levy P.* Sur les series dont les termes sont des variables independantes // Studia Math—1931—3—119-155 pp..

[12] *Лукач Е.* Характеристические функции. М.: Наука—1979—424 с.

[13] *Peres Y., Schlag W., Solomyak B.* Sixty years of Bernoulli convolutions, Fractal geometry and stochastics, II (Greifswald/Koserow, 1998), Progr. Probab., 46, Birkhaeuser, Basel—2000—39–65 pp..

[14] *Peres Y., Solomyak B.* Absolute continuity of Bernoulli convolutions, a simple proof // Math. Res. Lett.—1996—3, no.2—231–239 pp..

[15] *Peres Y., Solomyak B.* Self-similar measures and intersections of Cantor sets// Trans.Amer.Math.Soc.—1998—350, no.10—4065-4087 pp..

[16] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — К.: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова—1998— 296с.

[17] *Працьовитий М. В, Торбін Г. М.* Один клас випадкових величин типу Джессена-Вінтнера// Доповіді НАН України – 1998. – С. 48 - 54.

[18] *Сінельник Л., Торбін Г.* Асимптотичні властивості перетворень Фур'є-Стілт'єса для деяких класів нескінченних згорток Бернуллі// Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки—К.: НПУ імені М.П.Драгоманова—2012—№13—324-341pp..

[19] *Solomyak B.* On the random series $\sum \pm\lambda$(an Erdos problem)// Ann. of Math.— 1995—142, no. 3—611–625 pp..

[20] *Torbin G.* Probability distributions with independent Q-symbols and transformations preserving the Hausdorff dimension // Theory of Stochastic Processes—2007—13—281-293 pp..

[21] *Торбін Г.М.* Мультифрактальний аналіз сингулярно неперевних ймовірнісних мір. // Український математичний журнал—2005—57, №5—С. 837–857.

[22] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества функции распределения.— К.: Наук.думка—992— 208 с.