*Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2014, № 16 (1). — С. 296–302.

# Нормальні та квазінормальні ланцюгові дроби Данжуа

Ю. В. Кулиба, Г. М. Торбін
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

Анотація. У роботі досліджуються властивості множин дійсних чисел, заданих своїми ланцюговими розкладами Данжуа. Доведено, що довільного для дійсного числа $a \in [0, \frac{1}{2}]$ існує $x \in [0, 1]$ таке, що асимптотична частота $\widetilde{\nu}_0(x)$ цифри 0 в ланцюговому розкладі Данжуа числа $x$ дорівнює $a$; обгрунтовано континуальність множин

$$\{x : \ \widetilde{\nu}_0(x) = a\}.$$

Доведено також, що для майже всіх (в сенсі міри Лебега) дійсних чисел асимптотична частота цифри 0 у ланцюговому розкладі Данжуа дорівнює $\frac{1}{2}$.

**Ключові слова:** елементарні ланцюгові дроби, ланцюгові дроби Данжуа, нормальні ланцюгові дроби Данжуа, квазінормальні ланцюгові дроби Данжуа.

Abstract. We study properties of subsets of real numbers defined via their canonical Denjoy's continued fractions. We prove that for any real number $a \in [0, \frac{1}{2}]$ there exists $x \in [0, 1]$ such that the asymptotic frequency $\widetilde{\nu}_0(x)$ of the digit 0 in the canonical Denjoy's continued fraction expansion of $x$ is equal to $a$. Moreover, we show that the set

$$\{x : \ \widetilde{\nu}_0(x) = a\}$$

is of continuum cardinality for any $a \in [0, \frac{1}{2}]$. In the paper it is also proven that for Lebesgue almost all real numbers $x$ from the unit interval the asymptotic frequency of the digit 0 in the canonical Denjoy's continued fraction expansion of $x$ is equal to $\frac{1}{2}$.

**Key words:** elementary continued fractions, Denjoy's continued fractions, normal Denjoy's continued fractions, quasinormal Denjoy's continued fractions.

AMS Subject Classifications (2010): 11K55, 28A80, 60G30.

## 1. Вступ

Як добре відомо, будь-яке дійсне число $x$ можна представити у вигляді елементарного ланцюгового дробу

$$x = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}}},$$

де $a_0 \in Z$, таке, що $x - a_0 \in [0, 1)$ і $a_n \in N$, $n \in N$.

Скорочено позначають

$$x = [a_0; a_1, a_2, a_3, ...].$$

Якщо елементарний ланцюговий дріб скінченний, якщо число $x$ раціональне. Якщо ж елементарний ланцюговий дріб нескінченний, якщо число $x$ ірраціональне.

Позначимо через $N_i(x, n)$ кількість чисел "$i$" серед перших $n$ знаків у представленні числа $x$ елементарним ланцюговим дробом. Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_i(x, n)}{n} = \nu_i(x),$$

то вона називається асимптотичною частотою числа "$i$" серед елементів розкладу числа $x$ в елементарний ланцюговий дріб.

Відомо [6], що для $\lambda$-майже всіх $x \in [0, 1]$ асимптотична частота числа "$i$" в ланцюговому представленні дорівнює

$$\nu_i(x) = \frac{1}{\ln 2} \ln \frac{(i+1)^2}{i(i+2)}.$$

Розглянемо ще один важливий вид ланцюгових дробів, в розкладі якого дозволеними символами є лише 0 і 1.

Відомо [8], що довільне дійсне число можна представити у вигляді ланцюгового дробу Данжуа

$$x = [d_0; d_1, d_2, ..., d_n, ...].$$

де $d_0 \in Z$ таке, що $x - d_0 \geq 0$ і $d_n = \{0, 1\}$, $n \in N$. Цей дріб є скінченним, якщо число $x$ раціональне, і нескінченним, якщо число $x$ ірраціональне.

Ланцюгові дроби Данжуа утворюються подібним чином як і елементарні ланцюгові дроби, але на відміну від класичного об'єкта, тільки дійсні числа $x \in [0, 1)$ можуть бути представлені єдиним чином у вигляді ланцюгового дробу Данжуа. Це пов'язано з умовою $x - d_0 \geq 0$. Покладемо $k = a_0 - d_0$, $k > 0$.

Розглянемо вираз $a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \xi}$, де $a_0 \in Z$, $a_1 \in N$, $0 < \xi < 1$. Тобто $a_0 + \dfrac{1}{a_1 + \xi} = [a_0; a_1, a_2, a_3, ...] = x$.

Тоді

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \xi} = a_0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{a_1 - 1 + \xi}}} \tag{1}$$

і

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1+\xi} = a_0 - 1 + \cfrac{1}{0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{a_1+\xi}}}. \tag{2}$$

Таким чином $\forall k > 0$

$$x = [a_0 - k; (0,1)^k, a_1, a_2, ...] = [d_0; (0,1)^k, a_1, a_2, ...],$$

де позначення $(0,1)^k$ означає послідовність з $k$ пар чисел 0 та 1, тобто $\underbrace{0,1,0,1,...,0,1}_{2k}$.

Якщо $k = 0$, то

$$x = [a_0 - 0; (0,1)^0, a_1, a_2, ...] = [d_0; a_1, a_2, ...].$$

Якщо починаючи з деякого $i$, $i \geq 1$, $a_i > 1$, то, застосовуючи перетворення (1) один раз, матимемо:

$$x = [d_0; (0,1)^k, 1^{i-1}, 1, 0, a_i - 1, a_{i+1}, ...].$$

Повторюючи перетворення $(a_i - 2)$ рази, отримаємо:

$$x = [d_0; (0,1)^k, 1^{i-1}, (1,0)^{a_i-1}, 1, a_{i+1}, ...].$$

Повторюючи цей процес для всіх $a_i > 1$, отримаємо представлення числа $x$ у вигляді ланцюгового дробу Данжуа

$$x = [d_0; (0,1)^{a_0-d_0}, (1,0)^{a_1-1}, 1, (1,0)^{a_2-1}, 1, ...].$$

Якщо $x \in Z$, то його розклад в ланцюговий дріб Данжуа має вигляд:

$$x = [d_0; (0,1)^{x-d_0}],$$

де $d_0 \in Z$, $d_0 \leq x$.

Нехай $x \in [0,1)$. Тоді

$$x = [0; a_1, a_2, ..., a_k, ...], \tag{3}$$

де $a_n \in N$, $n \in N$.

а відповідний розклад числа $x$ в дріб Данжуа матиме вигляд

$$x = [0; (1,0)^{a_1-1}, 1, (1,0)^{a_2-1}, 1, ..., (1,0)^{a_k-1}, 1, ...], \tag{4}$$

де позначення $(1,0)^{a_i-1}$ означає послідовність з $a_i - 1$ пар чисел 0 та 1, тобто $\underbrace{1010...10}_{2(a_i-1)}$.

Для ланцюгових дробів Данжуа також має місце поняття підхідних дробів [8]. Їх легко обчислювати за допомогою матриць $A_n$, які задаються наступним чином

$$A_0 = \begin{pmatrix} 1 & d_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, ..., A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & d_n \end{pmatrix},$$

тоді $M = A_0 \cdot A_1 \cdot ... \cdot A_n$, де

$$M_n = \begin{pmatrix} p_{n-1} & p_n \\ q_{n-1} & q_n \end{pmatrix}$$

і $p_{n-1}$ — знаменник, $p_{n-1}$ — чисельник підхідного дробу.

Основна мета даної роботи - вивчення властивостей множин дійсних чисел, заданих асимптотичними частотами своїх цифр у ланцюговому розкладі Данжуа.

## 2. Нормальні, квазінормальні та анормальні ланцюгові дроби Данжуа

Позначимо через $\widetilde{N}_0(x,n)$— кількість нулів серед перших $n$ знаків у представленні числа $x \in [0,1]$ ланцюговим дробом Данжуа, а через $\widetilde{N}_1(x,n)$ — кількість одиниць, відповідно.

Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\widetilde{N}_i(x,n)}{n} = \widetilde{\nu}_i(x),$$

то вона називається асимптотичною частотою цифри "$i \in \{0,1\}$" серед елементів розкладу числа $x$ в ланцюговий дріб Данжуа.

*Означення* **1.** Множина

$$M = \{x : \lim_{n\to\infty} \frac{\widetilde{N}_i(x,n)}{n} = \frac{1}{2} \quad \forall i \in \{0,1\}\}$$

називається множиною нормальних ланцюгових дробів Данжуа.

*Означення* **2.** Множина

$$M_a = \{x : \lim_{n\to\infty} \frac{\widetilde{N}_0(x,n)}{n} \text{ існує } \quad \text{і } \widetilde{\nu}_0(x) \neq \frac{1}{2}\}$$

називається множиною квазінормальних ланцюгових дробів Данжуа.

*Означення* **3.** Множина

$$N_s = \{x : \lim_{n\to\infty} \frac{N_i(x,n)}{n} \text{ не існує } \forall i \in \{0,1\}\}$$

називається множиною суттєво анормальних ланцюгових дробів Данжуа.

**Теорема 1.** *Для довільного дійсного числа* $a \in [0, \frac{1}{2}]$ *існує дійсне число* $x \in [0,1]$ *таке, що* $\widetilde{\nu}_0(x) = a$.

*Доведення.* Виберемо довільне число $a \in [0, \frac{1}{2}]$ і доведемо існування числа $x$ такого, щоб $\widetilde{\nu}_0(x) = a$. Розглянемо можливі варіанти

**I.:** $a = 0$. Якщо $a_k = 1 \forall k \in N$, в розкладі числа $x \in [0,1]$ в елементарний ланцюговий дріб, то відповідний розклад Данжуа матиме також вигляд $x = [0; 111...]$ і $\widetilde{\nu_0}(x) = 0$ відповідно.

**II.:** $a = \frac{1}{2}$. Даний випадок буде розглянуто в наступній теоремі, де буде доведено, що для майже всіх (в сенсі міри Лебега) дійсних чисел має місце рівність $\widetilde{\nu_0}(x) = \frac{1}{2}$.

**III.:** $a \in (0, \frac{1}{2})$. Розглянемо дійсне число $x$, розклад в ланцюговий дріб Данжуа якого має наступний вигляд:

$$x = [0; \underbrace{(1,0), 1, 1, ..., \underbrace{1}_{n_1}}_{\text{1-ша серія}}, \underbrace{(1,0), 1, 1, ..., \underbrace{1}_{n_2}}_{\text{2-га серія}}, ..., \underbrace{(1,0), 1, 1, ..., \underbrace{1}_{n_k}}_{\text{k-та серія}}, ...], \tag{5}$$

де $n_k$ — номер позиції в розкладі (5) такий, що $\forall k \in N$ :

$$\begin{cases} \frac{\widetilde{N}_0(x, n_k)}{n_k} > a, \\ \frac{\widetilde{N}_0(x, n_k+1)}{n_k+1} \le a. \end{cases}$$

З (5) слідує, що $\forall k \in N$ :

$$\widetilde{N}_0(x, n_{k-1}+2) = ... = \widetilde{N}_0(x, n_k - 1) = \widetilde{N}_0(x, n_k) = \widetilde{N}_0(x, n_k + 1)$$

і

$$\frac{\widetilde{N}_0(x, n_k + 2)}{n_k + 2} = \frac{\widetilde{N}_0(x, n_k) + 1}{n_k + 2}.$$

(1) Якщо $m \notin \{n_k + 1\}$, то $m$ попадає в проміжок між двома деякими позиціями $\{n_{k-1} + 1\}$ і $\{n_k + 1\}$, де $k = k(m)$.

Тоді

$$|\frac{\widetilde{N}_0(x,m)}{m} - a| \le |\frac{\widetilde{N}_0(x, n_{k-1}+2)}{n_{k-1}+2} - a| \le |\frac{\widetilde{N}_0(x, n_{k-1}+2)}{n_{k-1}+2} - \frac{\widetilde{N}_0(x, n_{k-1}+1)}{n_{k-1}+1}| =$$

$$= |\frac{\widetilde{N}_0(x, n_{k-1}+1)+1}{n_{k-1}+2} - \frac{\widetilde{N}_0(x, n_{k-1}+1)}{n_{k-1}+1}| = |\frac{n_k - \widetilde{N}_0(x, n_k+1)+1}{(n_k+2)(n_k+1)}| \le$$

$$\le \frac{n_{k-1}+1}{(n_{k-1}+2)(n_{k-1}+1)} = \frac{1}{(n_k+2)}.$$

(2) Якщо $m \in \{n_k + 1\}$, то $\dfrac{\widetilde{N}_0(x,m)}{k} = \dfrac{\widetilde{N}_0(x, n_k+1)}{n_k+1}$.

Тоді

$$|\frac{\widetilde{N}_0(x,m)}{m} - a| \le |\frac{\widetilde{N}_0(x, n_k+1)}{n_k+1} - \frac{\widetilde{N}_0(x, n_k+2)}{n_k+2}| \le \frac{1}{(n_k+2)}$$

Якщо $m \to \infty$, то $k = k(m) \to \infty$ і це означає що $\dfrac{1}{(n_k+2)} \to 0$.

Отже,

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\widetilde{N}_0(x,m)}{m}=a.$$

□

**Зауваження 1.** *Використовуючи метод, який запропонований при доведенні даної теореми та той факт, що вставлення блоку* (01) *на місцях* $2^{2^n}$ *не впливає на існування та значення асимптотичної частоти, нескладно показати, що для довільного дійсного числа* $a\in[0,\frac{1}{2}]$ *множина тих* $x\in[0,1]$, *для яких* $\widetilde{\nu_0}(x)=a$, *має потужність континуум.*

**Теорема 2.** *Для майже всіх (в смислі міри Лебега) дійсних чисел* $x$ *частота* $\widetilde{\nu_0}(x)$ *цифри "0"ланцюговому розкладі Данжуа існує і дорівнює* $\frac{1}{2}$.

*Доведення.* $\widetilde{N}_0(x,n)$— кількість чисел "0"серед перших $n$ знаків у представленні числа $x$ у вигляді (4). Тоді

$$\widetilde{N}_0(x,n)=(a_1-1)+(a_2-1)+...+(a_n-1)=(a_1+a_2+...+a_n)-n,$$

і

$$n=2(a_1-1)+1+2(a_2-1)+1+...+2(a_n-1)+1=2(a_1+a_2+...+a_n)-n.$$

Розглянемо

$$\frac{\widetilde{N}_0(x,n)}{n}=\frac{(a_1+a_2+...+a_n)-n}{2(a_1+a_2+...+a_n)-n}=\frac{\frac{(a_1+a_2+...+a_n)}{n}-1}{2\cdot\frac{(a_1+a_2+...+a_n)}{n}-1}.$$

Відомо [6], що для $\lambda$-майже всіх $x\in[0,1)$ :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(a_1+a_2+...+a_n)}{n}=\infty.$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\widetilde{N}_0(x,n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(a_1+a_2+...+a_n)}{n}-1}{2\cdot\frac{(a_1+a_2+...+a_n)}{n}-1}=\frac{1}{2}.$$

Отже, для $\lambda$-майже всіх $x\in[0,1)$ :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\widetilde{N}_0(x,n)}{n}=\widetilde{\nu_0}(x)=\frac{1}{2}.$$

□

**Зауваження 2.** *З доведеної теореми випливає, що* $\lambda(M)=1$, $\lambda(M_a)=0$, *і* $\lambda(N_s)=0$.

**Зауваження 3.** *Фрактальні властивості множин квазінормальних та анормальних чисел, заданих в різних системах числення, інтенсивно вивчались протягом останніх років* [1, 2, 4, 3, 7, 9, 10, 11, 12]. *У той же час як для класичних ланцюгових дробів, так і для ланцюгових дробів Данжуа відповідна проблема все ще залишається відкритою.*

**Подяка.** Ця робота була частково підтримана науково-дослідними проектами «Spectral Structures and Topological Methods in Mathematics» (SFB-701, Bielefeld University),
STREVCOMS FP-7-IRSES 612669 (ЄС), «Багаторівневий аналіз сингулярних ймовірнісних мір та його застосування» (МОН України).

## Література

[1] S. Albeverio, Yu. Kondratiev, R. Nikiforov, G. Torbin, On fractal properties of non-normal numbers with respect to Rényi $f$-expansions generated by piecewise linear functions, *Bull. Sci. Math.*, **138** (2014), no. 3, 440 – 455.

[2] S.Albeverio, I. Garko, M.Ibragim, G.Torbin, Non-normal numbers: full Hausdorff dimensionality vs zero dimensionality. submitted to Bulletin des Sciences Mathematiques.

[3] S.Albeverio, M.Pratsiovytyi, G.Torbin, Singular probability distributions and fractal properties of sets of real numbers defined by the asymptotic frequencies of their s-adic digits, *Ukr.Math.J.*, **57** (2005), no.9, 1361-1370.

[4] S.Albeverio, M.Pratsiovytyi, G.Torbin, Topological and fractal properties of subsets of real numbers which are not normal. *Bull.Sci.Math.*, **129** (2005), no. 8, 615–630.

[5] S. Albeverio, G. Torbin, On fine fractal properties of generalized infinite Bernoulli convolutions, Bull. Sci. Math., **132**(2008), no. 8. 711-727.

[6] *P. Billingsley*, Ergodic theory and information, John Willey and Sons, New York, 1965.

[7] І.І.Гарко, Г.М.Торбін, Про залежність фрактальних властивостей множини суттєво анормальних чисел від системи числення, *Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1: Фізико-математичні науки*, **13**(2012), №1, С. 78-85.

[8] *M. Iosifescu, C. Kraaikamp* On Denjoy's canonical continued fraction expansion, *Osaka J. Math.*, **40**(2003), 235-244.

[9] L. Olsen, Applications of multifractal divergence points to some sets of d-tuples of numbers defined by their N-adic expansion. *Bull.Sci.Math.*, **128** (2004), 265-289.

[10] L. Olsen, Applications of multifractal divergence points to sets of numbers defined by their $N$-adic expansion. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **136** (2004), no. 1, 139–165.

[11] L. Olsen, S. Winter, Normal and non-normal points of self-similar sets and divergence points of self-similar measures. *J. London Math. Soc.* (2) **67** (2003), no. 1, 103–122.

[12] M. Pratsiovytyi, G. Torbin, Superfractality of the set of numbers having no frequency of n-adic digits, and fractal probability distributions. *Ukrainian Math. J.* **47**(1995),No. 7, 971-975.

[13] G. Torbin, Probability distributions with independent Q-symbols and transformations preserving the Hausdorff dimension, *Theory of Stochastic Processes*,**13(2007)**, 281-293.

[14] *А. Я. Хичин* Цепные дроби. - М.: Физматгиз, 1961. — 112 с.