Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13 (2).— С. 284–306.

Побудова асимптотики розв'язку задачі Коші для лінійної сингулярно збуреної системи у випадку кратного спектра головного оператора

В. П. Яковець

Університет менеджменту освіти НАПН України

Анотація. Запропоновано оригінальний метод побудови асимптотики розв'язку задачі Коші для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь у випадку, коли головна матриця системи має кратне власне значення, якому відповідає елементарний дільник такої самої кратності.

Метод грунтується на використанні відповідного рівняння розгалуження, діаграм Ньютона та спеціальних векторно-матричних позначень, які значно спрощують процедуру визначення коефіцієнтів відповідних асимптотичних розвинень.

Ключові слова: Задача Коші, лінійна сингулярно збурена система диференціальних рівнянь.

The constructing of the asymptotic solution of the Cauchy problem for the linear singularly perturbed system in case of multiple spectrum of the main operator

V. P. Yakovets,

University of Educational Management

Abstract. It is proposed an original method of constructing of asymptotic solution of the Cauchy problem for the linear singularly perturbed system of differential equations when the main matrix of the system has multiple eigenvalue, which is corresponding to elementary divisor of the same multiplicity

This method is based on the idea of using the corresponding equation of branching, method of Newton's diagrams and special denotation, which simplify the process of determination of coefficients for the corresponding asymptotic series.

AMS Subject Classifications (2010): 34A30

Key words: Cauchy problem, linear singular perturbed system of differential equations.

Вступ

У даній роботі розглядається задача Коші

$$\varepsilon^h \frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + f(t,\varepsilon), t \in [t_0;T], \tag{1}$$

$$x(t_0,\varepsilon) = x_0(\varepsilon), \tag{2}$$

де $x(t,\varepsilon)$, $f(t,\varepsilon)$ — n-вимірні вектори, $A(t,\varepsilon)$ — квадратна матриця n- го порядку з дійсними або комплекснозначними елементами, $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$− малий дійсний параметр, h — натуральне число.

Передбачається, що виконуються такі умови:

1° Матриця $A(t,\varepsilon)$ і вектор $f(t,\varepsilon)$ допускають на заданому відрізку $[t_0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра:

$$A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k A_k(t); \tag{3}$$

$$f(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k f_k(t); \tag{4}$$

2° Коефіцієнти розвинень (3), (4) нескінченно диференційовні на відрізку $[t_0;T]$;

3° Головна матриця $A_0(t)$ має при всіх $t \in [t_0;T]$ єдине власне значення $\lambda_0(t)$ кратності n і йому відповідає один елементарний дільник такої самої кратності;

4° Початковий вектор $x_0(\varepsilon)$ зображається у вигляді розвинення за степенями ε:

$$x_0(\varepsilon) = \sum_{k\geq 0} \varepsilon^k x_{0k}. \tag{5}$$

На даний час добре розвинута теорія побудови асимптотики загального розв'язку системи (1). Як відомо, перший результат отримав у 1908 р. Д. Біркгоф [1], вивівши асимптотичні формули, якими зображаються лінійно незалежні розв'язки скалярного диференціального рівняння n-го порядку у випадку простих коренів відповідного характеристичного рівняння. У 1917 р. Тамаркіним Я.Д. [2] цей результат було узагальнено на систему вигляду (1).

Асимптотичні формули, отримані цими вченими, виявились настільки ефективними, що з'явився інтерес щодо їх узагальнення й на випадок кратного спектра головної матриці $A_0(t)$. Однак ця задача виявилась дуже складною і довгий час залишалась нерозв'язаною.

У 1936 р. японський математик Хукухара [3], а пізніше, незалежно від нього — С.Ф. Фещенко [4,5] довели теореми про асимптотичне розщеплення системи вигляду (1), головна матриця якої має на заданому відрізку кілька ізольованих одна від одної груп власних значень, на відповідну кількість підсистем меншої розмірності, головні матриці яких мають лише власні значення цих груп. Ці теореми дозволяють звести задачу побудови асимптотичних розв'язків системи (1) за наявності в матриці A_0 кількох ізольованих власних значень до системи з одним власним значенням головного оператора. Однак проблема побудови асимптотики загального розв'язку цих систем у випадку, коли головна матриця має кратне власне значення, залишалась невирішеною.

У 1956 р. Х. Л. Территін [6] для вирішення проблеми кратного спектра головного оператора запропонував застосовувати так зване зрізаюче перетворення, за допомогою якого при певних умовах система з кратним спектром головного оператора може бути зведена до системи, головна матриця якої має простий спектр. Такий же метод пропонує і В. Вазов у монографії [7].

І лише в 1960-х рр. М. І. Шкілем було розроблено метод побудови асимптотичних розвинень лінійно незалежних розв'язків однорідної системи вигляду

$$\varepsilon^h \frac{dx}{dt} = A(t, \varepsilon)x \tag{6}$$

у випадку, коли головна матриця $A_0(t)$ має кратне власне значення, якому відповідають кратні елементарні дільники [8-12]. Виявилось, що, на відміну від випадку простого спектра головного оператора, у випадку кратного спектра відповідні розвинення необхідно будувати за дробовими степенями малого параметра. Зокрема, за певних обмежень на збурювальну матрицю $A_1(t)$ всі n шуканих розв'язків можна побудувати у вигляді розвинень за степенями $\varepsilon^{\frac{1}{p}}$, де p — кратність власного значення матриці $A_0(t)$.

У зв'язку з цим виникла проблема визначення дробових степенів, за якими слід будувати відповідні розвинення, в залежності від структури збурювальних матриць $A_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$. Ця проблема в 1980-х рр. була розв'язана Г. С. Жуковою, яка, розглянувши дану проблему в найбільш загальній постановці і використовуючи операторні методи, вивела відповідне рівняння розгалуження і застосувала до нього метод діаграм Ньютона [13-14].

Коефіцієнти рівняння розгалуження, виведеного Г. С. Жуковою для випадку, коли головна матриця $A_0(t)$ системи (6) має кратне власне значення, якому відповідає елементарний дільник такої самої кратності, у випадку їх стабільної поведінки (відмінності від нуля чи тотожної рівності нулю) при всіх значеннях t із заданого відрізка містять повну інформацію щодо дробових показників степенів параметра, за якими можна побудувати асимптотичні розвинення усіх необхідних лінійно незалежних розв'язків системи (6).

Пізніше в наших роботах, у яких теорія М. І. Шкіля і Г. С. Жукової узагальнена на лінійні сингулярно збурені системи з матрицею $B(t, \varepsilon)$ при похідній, що тотожно вироджується при $\varepsilon \to 0$, були виведені більш компактні і зручніші для практичного використання формули, якими виражаються коефіцієнти рівняння розгалуження [15,16].

Паралельно з розвитком теорії асимптотичного аналізу загального розв'язку системи (1) окремими авторами досліджувалося питання побудови асимптотики розв'язку початкової задачі (1), (2). Зокрема, в роботах С. О. Ломова та його учнів для цього використовується розроблений ним метод регуляризації, за допомогою якого сингулярно збурена задача зводиться до регулярно збуреної задачі з частинними похідними [17]. Однак, цей метод виявився ефективним лише у випадку простого спектра головної матриці. Спроба застосувати його у випадку кратного спектра граничного оператора, здійснена у роботі [18], призводить до надзвичайної громіздкості і величезних труднощів технічного характеру.

У [19-21] побудова асимптотики розв'язку задачі (1), (2) здійснюється з використанням асимптотики загального розв'язку системи (1), але й у цих роботах у випадку кратного власного значення матриці $A_0(t)$ застосовується досить складна і громіздка техніка.

У даній роботі пропонується більш загальний і, на наш погляд, більш раціональний підхід до побудови розв'язку даної задачі з використанням відповідного рівняння розгалуження, діаграм Ньютона та спеціальних векторно-матричних методів.

1. Рівняння розгалуження і асимптотика загального розв'язку

З умови 4° випливає, що власному значенню $\lambda_0(t)$ матриці $A_0(t)$ відповідає жорданів ланцюжок завдовжки n, який складається із власного вектора $\varphi_1(t)$ та приєднаних векторів $\varphi_i(t)$, $i=\overline{2,n}$, які задовольняють співвідношення

$$(A_0(t)-\lambda_0(t)E)\varphi_1(t)=0;$$
$$(A_0(t)-\lambda_0(t)E)\varphi_i(t)=\varphi_{i-1}(t), i=\overline{2,n}; \tag{7}$$

де E — одинична $(n\times n)$- матриця. При цьому рівняння

$$(A_0(t)-\lambda_0(t)E)y=\varphi_n(t) \tag{8}$$

нерозв'язне при всіх $t\in[t_0;T]$.

Визначивши власний вектор $\varphi_1(t)$ так, щоб усі його координати були нескінченно диференційовними, що цілком можливо завдяки нескінченній диференційовності матриці $A_0(t)$ [22], і позначивши його для зручності символом $\varphi(t)$, приєднані вектори виразимо через нього за формулою $\varphi_i(t)=(H(t))^{i-1}\varphi(t)$, $i=\overline{2,n}$, де $H(t)$ — напівобернена матриця до матриці $A_0(t)-\lambda_0(t)E$, яку також визначимо так, щоб усі її елементи були нескінченно диференційовними [23].

Із розв'язності рівнянь (7) і нерозв'язності рівняння (8) випливає, що скалярні добутки $(H^{i-1}\varphi, \psi) \equiv 0$ при $i = \overline{1, n-1}$, а $(H^{n-1}\varphi, \psi) \neq 0$ $\forall t \in [t_0; T]$, де $\psi(t)$ — власний вектор матриці $A_0^*(t)$, спряженої з $A_0(t)$. Користуючись тим, що вектор $\psi(t)$ визначається з точністю до довільного скалярного множника, визначимо його так, щоб $(H^{n-1}\varphi, \psi) = 1$ і $\psi(t) \in C^\infty[t_0; T]$. Тоді, взявши до уваги, що

$$H^k = 0, \text{ при } k \geq n \tag{9}$$

[23,с.36], маємо

$$(H^{i-1}\varphi, \psi) = \delta_{i,n}, i = 1, 2, \ldots, \tag{10}$$

де δ_{ij} — символ Кронекера.

Виходячи з цього, у [16, с.123] доведено, що однорідна система рівнянь (6) має формальний розв'язок вигляду

$$x_i(t, \varepsilon) = u_i(t, \varepsilon) \exp \varepsilon^{-h} \int_{t_0}^{t} (\lambda_0(\tau) + \lambda^{(i)}(\tau, \varepsilon)) d\tau \tag{11}$$

тоді і тільки тоді, коли функції $\lambda^{(i)}(t, \varepsilon)$ формально задовольняють рівняння розгалуження

$$(\lambda^{(i)})^n + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{0s} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s L_{ks}[(\lambda^{(i)})^k] = 0, \tag{12}$$

коефіцієнти якого виражаються формулами

$$L_{ks}[(\lambda^{(i)})^k] = (\widetilde{L}_{ks}[(\lambda^{(i)})^k]\varphi, \psi); \tag{13}$$

$$\widetilde{L}_{0s} = \sum_{j=1}^{s} (-1)^j P_j^s(H\Gamma), s = 1, 2, \ldots; \tag{14}$$

$$\widetilde{L}_{ks}[(\widetilde{\lambda}^{(i)})^k] = \sum_{j=0}^{[\frac{s}{h}]} \sum_{r=0}^{s-jh} (-1)^r D^j[(\lambda^{(i)})^k] P_{j+k,r}^{s-jh}(H, H\Gamma), k = 1, 2, \ldots, s = 0, 1, \ldots. \tag{15}$$

Символом $P_{j,r}^s(H, H\Gamma)$ тут позначається сума всеможливих "добутків"(з перестановками) j матричних множників H і r операторних множників $H\Gamma_{k_1}, H\Gamma_{k_2}, \ldots H\Gamma_{k_j}$ з натуральними індексами, сума яких дорівнює s. При цьому перший множник H у всіх цих множників "відбирається а

$$\Gamma_k(t) = A_k(t) - \delta_{k,h} \frac{d}{dt}, k = 1, 2, \ldots. \tag{16}$$

$P_j^s(H\Gamma)$ — утворена аналогічним чином сума всіх можливих "добутків"j операторних множників $H\Gamma_{k_1}, H\Gamma_{k_2}, \ldots H\Gamma_{k_j}$, сума індексів яких дорівнює s, з усіх доданків яких "відбирається"перший множник H. За означенням покладається $P_0^s(H\Gamma) = 0$ при

$s > 0$, $P_0^0(H\Gamma) = E$ і аналогічно $P_{0,0}^s(H, H\Gamma) = 0$ при $s > 0$, $P_{0,0}^0(H, H\Gamma) = E$. Наприклад, $P_1^1(H\Gamma) = \Gamma_1$; $P_2^3(H\Gamma) = \Gamma_2 H\Gamma_1 + \Gamma_1 H\Gamma_2$; $P_{1,1}^1(H, H\Gamma) = H\Gamma_1 + \Gamma_1 H$; $P_{2,2}^3(H, H\Gamma) = H^2\Gamma_1 H\Gamma_2 + \Gamma_1 H^2\Gamma_2 + \Gamma_1 H\Gamma_2 H + H^2\Gamma_2 H\Gamma_1 + \Gamma_2 H^2\Gamma_1 + \Gamma_2 H\Gamma_1 H$.

$D^j[\lambda^k]$ — це скалярний вираз, що являє собою суму всеможливих "добутків"k функцій $\lambda(t,\varepsilon)$ і j операторів диференціювання $D = \frac{d}{dt}$, причому останнім множником у всіх доданках цього виразу має бути λ. Наприклад, $D^2[\lambda^2] = D^2\lambda^2 + D\lambda D\lambda + \lambda D^2\lambda = (\lambda^2)'' + (\lambda\lambda')' + \lambda\lambda'' = 3(\lambda\lambda')' + \lambda\lambda'' = 3(\lambda')^2 + 4\lambda\lambda''$.

У [16] також встановлено, що коли функція $\lambda^{(i)}(t,\varepsilon)$ задовольняє рівняння розгалуження (12), то відповідний вектор $u_i(t,\varepsilon)$ зображається у вигляді формального розвинення

$$u_i(t,\varepsilon) = \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} H\widetilde{L}_{k0}[(\lambda^{(i)})^k]\varphi + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s H\widetilde{L}_{0s}\varphi + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s H\widetilde{L}_{ks}[(\lambda^{(i)})^k]\varphi. \tag{17}$$

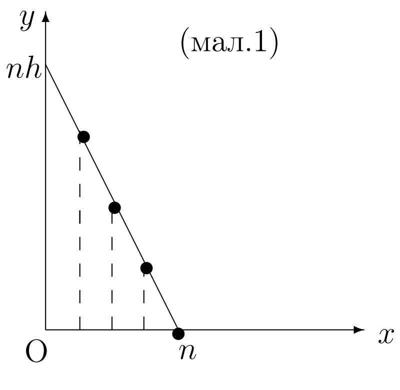
Оскільки згідно з (15)

$$\widetilde{L}_{k0}[(\widetilde{\lambda}^{(i)})^k] = (\lambda^{(i)})^k P_{k,0}^0(H, H\Gamma) = (\lambda^{(i)})^k H^{k-1},$$

то, взявши до уваги (9), розвинення (17) подамо у вигляді

$$u_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda^{(i)})^k H^k\varphi + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s H\widetilde{L}_{0s}\varphi + \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k H\widetilde{L}_{ks}[(\lambda^{(i)})^k]\varphi. \tag{18}$$

Застосувавши до рівняння розгалуження (12) метод діаграм Ньютона, описаний в [13,24], наносячи на координатну площину цілочисельні координати точок $(k;s)$, що відповідають відмінним від нуля коефіцієнтам L_{ks} даного рівняння, встановлюємо, що це рівняння завжди має n малих розв'язків. Це випливає з того, що незалежно від поведінки елементів матриць $A_k(t), k = 1, 2, \dots$, які входять до складу операторів $\Gamma_k(t)$, на координатній площині завжди присутня точка $(n;0)$, а також точки $(k;(n-k)h)$, $k = \overline{1, n-1}$, розміщені на прямій $h(x-n) + y = 0$ (мал.1),



(мал.1)

оскільки згідно з (15), (13), (10) відповідні коефіцієнти виражаються формулою

$$L_{k,h(n-k)}[\lambda^k] = \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{r=0}^{(n-k-j)h} (-1)^r D^j[\lambda^k] P_{j+k,r}^{(n-k-j)h}(H; H\Gamma) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-k} D^j[\lambda^k](P_{j+k,0}^{(n-k-j)h}(H; H\Gamma)\varphi, \psi) + \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{r=1}^{(n-k-j)h} (-1)^r [\lambda^k](P_{j+k,r}^{(n-k-j)h}(H; H\Gamma)\varphi, \psi) =$$

$$= D^{n-k}[\lambda^k] + \sum_{j=0}^{n-k} \sum_{r=1}^{(n-k-j)h} (-1)^r [\lambda^k](P_{j+k,r}^{(n-k-j)h}(H; H\Gamma)\varphi, \psi),$$

в якій перший доданок не залежить від збурювальних операторів. Тому згідно з методом діаграм Ньютона рівняння (12) завжди має n різних розв'язків $\lambda_i(t,\varepsilon)$, лише один з яких може бути нульовим (коли всі $L_{0s} = 0$ і, отже, на осі ординат не буде жодної точки). Оскільки $\lambda_0(t) + \lambda^{(i)}(t,\varepsilon)$ є власними значеннями оператора $A_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \Gamma_k(t)$, а $u_i(t,\varepsilon)$ — відповідними їм власними векторами, то ці вектори будуть лінійно незалежними. Отже, знайдені таким чином розв'язки (11) системи (6) утворюють фундаментальну систему її розв'язків.

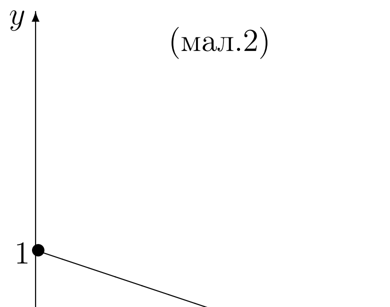
Побудова цих розв'язків здійснюється шляхом знаходження функцій $\lambda^{(i)}(t,\varepsilon)$ і відповідних їм векторів $u_i(t,\varepsilon)$ у вигляді формальних розвинень за дробовими показниками параметра ε. Показники цих степенів залежать від коефіцієнтів рівняння розгалуження і визначаються за допомогою діаграм Ньютона.

Для прикладу розглянемо два найпростіші випадки.

1. Припустимо, що

$$L_{01}(t) = -(\Gamma_1(t)\varphi(t), \psi(t)) = -(A_1(t)\varphi(t), \psi(t)) + (\varphi'(t), \psi(t)) \neq 0, \forall t \in [t_0; T]. \quad (19)$$

Тоді відповідна діаграма Ньютона являє собою відрізок, що з'єднує точки $(0; 1)$ і $(n; 0)$ (мал.2), оскільки точки, зображені на мал.1, лежать вище цього відрізка.



(мал.2)

Тангенс кута, який утворює цей відрізок з від'ємним напрямом осі абсцис дорівнює $\frac{1}{n}$. Тому відповідно до методу Ньютона рівняння розгалуження (12) має n

розв'язків, які можна побудувати у вигляді розвинень за степенями $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{n}}$:

$$\lambda^{(i)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \lambda_k^{(i)}(t). \tag{20}$$

При цьому перший коефіцієнт цих розвинень має задовольняти визначальне рівняння, яке в даному випадку має вигляд

$$(\lambda_1^{(j)}(t))^n + L_{01}(t) = 0. \tag{21}$$

Завдяки умові (19) воно має n різних відмінних від нуля коренів

$$\lambda_1^{(j)}(t) = \sqrt[n]{|L_{01}|}\left(\cos\frac{arg(-L_{01}) + 2\pi(j-1)}{n} + i\sin\frac{arg(-L_{01}) + 2\pi(j-1)}{n}\right), j = \overline{1,n}. \tag{22}$$

Згідно з (18) за степенями μ можна побудувати й відповідні розвинення для векторів $u_i(t,\varepsilon)$:

$$u_i(t,\varepsilon) = \varphi + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k u_k^{(i)}(t). \tag{23}$$

Коефіцієнти розвинень (20), (23) можна знайти так, як це робилось у багатьох згаданих вище роботах — підставити вираз (11) у вихідну систему, прирівняти в одержаній тотожності коефіцієнти при однакових степенях μ і розв'язати утворену в такий спосіб нескінченну систему алгебраїчних рівнянь. Однак, маючи виведене рівняння розгалуження і готовий вираз (18) для векторів $u_i(t,\varepsilon)$, доцільніше поступити інакше — функції $\lambda_k^{(i)}(t)$, $k = 1, 2, \ldots$ знайти методом невизначених коефіцієнтів, підставивши (20) у рівняння розгалуження, а вектори $u_k^{(i)}(t)$ — підставивши знайдене розвинення (20) у (18) і, перегрупувавши доданки, зібрати вирази з однаковими степенями μ.

Підставивши розвинення (20) у рівняння (12) і врахувавши, що

$$(\mu\lambda_1^{(i)} + \mu^2\lambda_2^{(i)} + \ldots)^k = \sum_{j=k}^{\infty} \mu^k P_k^j(\lambda^{(i)}),$$

де

$$P_k^j(\lambda^{(i)}) = \sum_{s_1+\ldots+s_k=j} \lambda_{s_1}^{(i)}\lambda_{s_2}^{(i)}\ldots\lambda_{s_k}^{(i)}$$

— сума всеможливих добутків k множників $\lambda_{s_1}^{(i)}\lambda_{s_2}^{(i)}\ldots\lambda_{s_k}^{(i)}$, сума індексів яких дорівнює j, дістанемо

$$\sum_{k=n}^{\infty} \mu^k P_n^k(\lambda^{(i)}) + \sum_{s=1}^{\infty} \mu^{ns} L_{0s} + \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=k}^{\infty} \mu^{ns+j} L_{ks}[P_k^j(\lambda^{(i)})] = 0. \tag{24}$$

Поклавши в третьому доданку цієї рівності $ns+j=r$ замість j, перетворимо його до вигляду

$$\sum_{s=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{r=ns+k}^{\infty}\mu^r L_{ks}[P_k^{r-ns}(\lambda^{(i)})].$$

Змінивши порядок сумування, отримаємо

$$\sum_{r=n+1}^{\infty}\sum_{s=1}^{[\frac{r-1}{n}]}\sum_{k=1}^{r-ns}\mu^r L_{ks}[P_k^{r-ns}(\lambda^{(i)})].$$

Помінявши в цьому виразі індекси (r на k, а k на j), рівність (24) запишемо у вигляді

$$\sum_{k=n}^{\infty}\mu^k P_n^k(\lambda^{(i)})+\sum_{k=n}^{\infty}\mu^k L_{0,\frac{k}{n}}+\sum_{k=n+1}^{\infty}\mu^k\sum_{s=1}^{[\frac{k-1}{n}]}\sum_{j=1}^{k-ns}L_{js}[P_j^{k-ns}(\lambda^{(i)})]=0, \tag{25}$$

де $L_{0,\frac{k}{n}}=0$, якщо k не ділиться на n, а оператор L_{js} діє на кожний доданок виразу $P_j^{k-ns}(\lambda^{(i)})$ за таким самим правилом, що й на $(\lambda^{(i)})^k$ згідно з (13), (15).

Прирівнявши в (25) вирази при однакових степенях μ, дістанемо нескінченну систему рівнянь

$$P_n^k(\lambda^{(i)})+L_{0,\frac{k}{n}}+\sum_{s=1}^{[\frac{k-1}{n}]}\sum_{j=1}^{k-ns}L_{js}[P_j^{k-ns}(\lambda^{(i)})]=0, k=n,n+1,\ldots. \tag{26}$$

Перше рівняння цієї системи (при $k=n$) збігається з визначальним рівнянням (21). Поклавши в ній $n+k$ замість k, маємо

$$P_n^{n+k}(\lambda^{(i)})+L_{0,\frac{k+n}{n}}+\sum_{s=1}^{[\frac{n+k-1}{n}]}\sum_{j=1}^{n+k-ns}L_{js}[P_j^{n+k-ns}(\lambda^{(i)})]=0.$$

Неважко переконатися, що третій доданок у лівій частині цієї рівності містить тільки ті $\lambda_j^{(i)}$, індекси яких j не перевищують k. Що ж стосується першого доданку, то його можна подати у вигляді

$$P_n^{n+k}(\lambda^{(i)})=n(\lambda_1^{(i)})^{n-1}\lambda_{k+1}^{(i)}+\widetilde{P}_n^{n+k}(\lambda^{(i)}), \tag{27}$$

де $\widetilde{P}_n^{n+k}(\lambda^{(i)})$ також містить лише ті $\lambda_j^{(i)}$, індекси яких $j\le k$. Звідси, врахувавши (27), дістанемо таку рекурентну формулу для визначення коефіцієнтів $\lambda_{k+1}^{(i)}, k=1,2,\ldots$:

$$\lambda_{k+1}^{(i)}(t)=-\frac{1}{n(\lambda_1^{(i)})^{n-1}}\left[\widetilde{P}_n^{n+k}(\lambda^{(i)})+L_{0,\frac{k+n}{n}}+\sum_{s=1}^{[\frac{n+k-1}{n}]}\sum_{j=1}^{n+k-ns}L_{js}[P_j^{n+k-ns}(\lambda^{(i)})]\right]. \tag{28}$$

Підставивши розвинення (20) у вираз (18) і згрупувавши в ньому доданки з однаковими степенями μ, отримаємо

$$u_i(t,\varepsilon) = \varphi + \sum_{k=1}^{n-1} \mu^k \sum_{j=1}^{k} P_j^k(\lambda^{(i)}) H^j \varphi +$$

$$+ \sum_{k=n}^{\infty} \mu^k \left[\sum_{j=1}^{n-1} P_j^k(\lambda^{(i)}) H^j \varphi + H\widetilde{L}_{0,\frac{k}{n}}\varphi + \sum_{s=1}^{[\frac{k-1}{n}]} \sum_{j=1}^{k-sn} H\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-sn}(\lambda^{(i)})]\varphi \right],$$

звідки випливає, що коефіцієнти ряду (23) виражаються через власний вектор $\varphi(t)$ за формулами

$$u_k^{(i)}(t) = \sum_{j=1}^{k} P_j^k(\lambda^{(i)}) H^j \varphi, k = \overline{1, n-1}; \tag{29}$$

$$u_k^{(i)}(t) = \sum_{j=1}^{n-1} P_j^k(\lambda^{(i)}) H^j \varphi + H\widetilde{L}_{0,\frac{k}{n}}\varphi + \sum_{s=1}^{[\frac{k-1}{n}]} \sum_{j=1}^{k-sn} H\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-sn}(\lambda^{(i)})]\varphi, k = n, n+1, \dots. \tag{30}$$

Зазначимо, що цей результат збігається з теоремою М.І. Шкіля, доведеною іншим способом [25, с.124-140, 26, с.131-141].

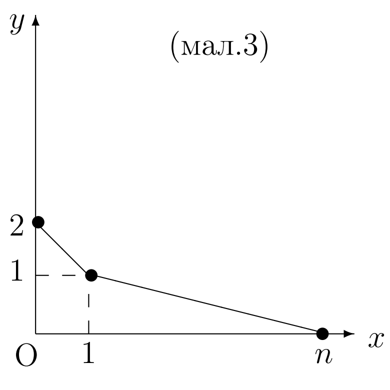
2. Припустимо, що $n > 2$ і

$$L_{01}(t) = -(\Gamma_1\varphi, \psi) \equiv 0; \tag{31}$$

$$L_{02}(t) = -(\Gamma_2\varphi, \psi) + (\Gamma_1 H \Gamma_1 \varphi, \psi) \neq 0, \forall t \in [t_0; T]; \tag{32}$$

$$L_{11}(t) = ((H\Gamma_1 + \Gamma_1 H)\varphi, \psi) \neq 0, \forall t \in [t_0; T]. \tag{33}$$

У цьому випадку відповідна діаграма складається з двох ланок — відрізків, що з'єднують точки $(0;2)$ і $(1;1)$ та $(1;1)$ і $(n;0)$ (мал. 3).



(мал.3)

Оскільки нахил першої ланки дорівнює 1, а другої — $\frac{1}{p}$, де $p = n-1$, то p розв'язків рівняння розгалуження можна побудувати у вигляді розвинення (20) за степенями $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{p}}$, а один — за цілими степенями ε:

$$\lambda_n(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon^k \lambda_k^{(n)}(t). \tag{34}$$

При цьому перші коефіцієнти цих розвинень знаходяться з відповідних визначальних рівнянь

$$\lambda_1^{(i)}(t)L_{11} + (\lambda_1^{(i)}(t))^n = 0, \tag{35}$$

$$L_{02}(t) + \lambda_1(t)L_{11}(t) = 0. \tag{36}$$

Завдяки умовам (32), (33) з цих рівнянь знайдемо n різних функцій $\lambda_1^{(j)}(t)$:

$$\lambda_1^{(j)}(t) = \sqrt[p]{|L_{11}|}\left(\cos\frac{arg(-L_{11}) + 2\pi(j-1)}{p} + i\sin\frac{arg(-L_{11}) + 2\pi(j-1)}{p}\right), j = \overline{1,p}, \tag{37}$$

$$\lambda_1^{(n)}(t) = -\frac{L_{02}}{L_{11}}. \tag{38}$$

Для знаходження наступних коефіцієнтів відповідних розвинень застосуємо той же метод, що і в попередньому випадку. Підставивши ряд (20) у рівняння розгалуження, отримаємо тотожність, яка відрізняється від (25) тільки тим, що в другому і третьому доданках у лівій частині число n заміняється на p:

$$\sum_{k=n}^{\infty}\mu^k P_n^k(\lambda^{(i)}) + \sum_{k=p}^{\infty}\mu^k L_{0,\frac{k}{p}} + \sum_{k=p+1}^{\infty}\mu^k \sum_{s=1}^{[\frac{k-1}{p}]}\sum_{j=1}^{k-sp} L_{js}[P_j^{k-sp}(\lambda^{(i)})] = 0. \tag{39}$$

Прирівнявши в цій тотожності вирази при однакових степенях μ і взявши до уваги (31), прийдемо до нескінченної системи рівнянь, перше з яких збігається з (35), а наступні мають вигляд

$$P_n^k(\lambda^{(i)}) + L_{0,\frac{k}{p}} + \sum_{s=1}^{[\frac{k-1}{p}]}\sum_{j=1}^{k-sp} L_{js}[P_j^{k-sp}(\lambda^{(i)})] = 0, k = p+2, p+3, \dots .$$

Поклавши в них $k+p$ замість k і взявши до уваги, що $n = p+1$, дістанемо

$$P_{p+1}^{p+k}(\lambda^{(i)}) + L_{0,\frac{p+k}{p}} + \sum_{s=1}^{[\frac{p+k-1}{p}]}\sum_{j=1}^{p+k-sp} L_{js}[P_j^{p+k-sp}(\lambda^{(i)})] = 0.$$

Виокремлюючи доданки, які містять $\lambda_k^{(i)}$, маємо

$$(p+1)(\lambda_1^{(i)})^p\lambda_k^{(i)} + \lambda_k^{(i)}L_{11} + \widetilde{P}_{p+1}^{p+k}(\lambda^{(i)}) + L_{0,\frac{p+k}{p}} +$$

$$+ \sum_{s=2}^{[\frac{p+k-1}{p}]}\sum_{j=1}^{p+k-sp} L_{js}[P_j^{p+k-sp}(\lambda^{(i)})] + \sum_{j=2}^{k} L_{j1}[P_j^k(\lambda^{(i)})] = 0.$$

Враховуючи, що згідно з (35) $(\lambda_1^{(i)})^p = -L_{11}$, звідси знайдемо

$$\lambda_k^{(i)}(t) = \frac{1}{pL_{11}}\left[\widetilde{P}_{p+1}^{p+k}(\lambda^{(i)}) + L_{0,\frac{p+k}{p}} + \sum_{j=2}^{k} L_{j1}[P_j^k(\lambda^{(i)})] + \right.$$

$$+\sum_{s=2}^{[\frac{p+k-1}{p}]}\sum_{j=1}^{p+k-sp} L_{js}[P_j^{p+k-ps}(\lambda^{(i)})\Bigg], k=2,3,\dots. \quad (40)$$

Аналогічно, підставивши в рівняння (12) розвинення (34), дістанемо

$$\sum_{k=n}^{\infty}\varepsilon^k P_n^k(\lambda^{(n)})+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k L_{0k}+\sum_{k=2}^{\infty}\varepsilon^k\sum_{s=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-s}L_{js}[P_j^{k-s}(\lambda^{(n)})]=0.$$

Ця тотожність одержується з (39), якщо в останній покласти $p=1$ і μ замінити на ε. Прирівнявши в ній вирази при однакових степенях ε і взявши до уваги (31), прийдемо до нескінченної системи рівнянь, перше з яких (при $k=2$) збігається з визначальним рівнянням (36), а наступні мають вигляд

$$P_n^k(\lambda^{(n)})+L_{0k}+\sum_{s=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-s}L_{js}[P_j^{k-s}(\lambda^{(n)})]=0,\ k=3,4,\dots. \quad (41)$$

Поклавши в них $k+1$ замість k і виділивши доданки, які містять $\lambda_k^{(n)}$, отримаємо

$$\lambda_k^{(n)}(t)=-\frac{1}{L_{11}}\Bigg[P_n^{k+1}(\lambda^{(n)})+L_{0,k+1}+\sum_{j=2}^{k}L_{j1}[P_j^k(\lambda^{(n)})]+$$

$$+\sum_{s=2}^{k}\sum_{j=1}^{k+1-s}L_{js}[P_j^{k+1-s}(\lambda^{(n)})]\Bigg],\ k=2,3,\dots. \quad (42)$$

Підставивши розвинення (20) у вираз (18) і перегрупувавши доданки, як і в попередньому випадку, отримаємо відповідні розвинення для векторів $u_i(t,\varepsilon)$:

$$u_i(t,\varepsilon)=\varphi+\sum_{k=1}^{p-1}\mu^k\sum_{j=1}^{k}P_j^k(\lambda^{(i)})H^j\varphi+$$

$$+\sum_{k=p}^{\infty}\mu^k\left[\sum_{j=1}^{p}P_j^k(\lambda^{(i)})\right]H^j\varphi+$$

$$+H\widetilde{L}_{0,\frac{k}{p}}\varphi+\sum_{s=1}^{[\frac{k-1}{p}]}\sum_{j=1}^{k-sp}H\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-sp}(\lambda^{(i)})]\varphi,\ i=\overline{1,p}.$$

Так само, підставивши у (18) розвинення (34), дістанемо відповідне розвинення для вектора $u_n(t,\varepsilon)$:

$$u_n(t,\varepsilon)=\varphi+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\Bigg[\sum_{j=1}^{min(k,n-1)}P_j^k(\lambda^{(n)})H^j\varphi+H\widetilde{L}_{0k}\varphi+$$

$$+\sum_{s=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-s}H\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-s}(\lambda^{(n)})]\varphi\Bigg]. \quad (43)$$

Аналогічно можна розглянути будь-який інший випадок, пов'язаний з поведінкою коефіцієнтів рівняння розгалуження (12). Методами [16,27] можна довести, що коли функція $Re\lambda_0(t)$ зберігає сталий знак на заданому відрізку $[t_0; T]$, то формальні розв'язки системи (6), які будуються описаним способом, є асимптотичними розвиненнями при $\varepsilon \to 0$ фундаментальної системи точних розв'язків системи (6).

Для побудови загального розв'язку неоднорідної системи (1) необхідно ще знайти її частинний розв'язок. Припустивши для спрощення викладок, що

$$\det A_0(t) \neq 0, \ \forall t \in [t_0; T], \tag{44}$$

цей розв'язок легко побудуємо у вигляді розвинення

$$v(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k v_k(t). \tag{45}$$

Підставивши його в систему (1) і прирівнявши вирази при однакових степенях ε, дістанемо такі рекурентні формули для визначення коефіцієнтів $v_k(t)$:

$$v_0(t) = -A_0^{-1}(t) f_0(t),$$
$$v_k(t) = -A_0^{-1}[f_k - \sum_{s=1}^{k} A_s v_{k-s} - v'_{k-h}], \ k = 1, 2, \ldots. \tag{46}$$

2. Побудова асимптотики розв'язку задачі Коші

Покажемо тепер, як, користуючись отриманими вище асимптотичними розвиненнями розв'язків системи (6), (1), побудувати асимптотику розв'язку початкової задачі (1), (2).

1. Розглянемо перший випадок, коли виконується умова (19).

Розв'язок задачі (1), (2) будемо шукати у вигляді суми лінійної комбінації побудованих вище розв'язків однорідної системи і частинного розв'язку (45) неоднорідної:

$$x(t, \varepsilon) = \frac{1}{\mu^{n-1}} \sum_{i=1}^{n} u_i(t, \varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_{t_0}^{t} (\lambda_0(\tau) + \lambda^{(i)}(\tau, \varepsilon)) d\tau\right) c_i(\varepsilon) + v(t, \varepsilon), \tag{47}$$

де $c_i(\varepsilon)$ — скалярні множники, які підлягають визначенню. Наявність множника $\mu^{-(n-1)}$ обумовлена тим, що вектори $u_i(t, \varepsilon)$ будуть лінійно незалежними, якщо у їх відповідних розвиненнях (23) береться не менше ніж n членів. Як показано в [27], обернена матриця до матриці, складеної з цих векторів, має полюс $n-1$-го порядку в точці $\mu = 0$.

Підставивши вектор (47) у початкову умову (2), дістанемо

$$\sum_{i=1}^{n} u_i(t_0, \varepsilon) c_i(\varepsilon) = \mu^{n-1}(x_0(\varepsilon) - v(t_0, \varepsilon)). \tag{48}$$

Підставивши сюди вирази (18), якими зображаються вектори $u_i(t,\varepsilon)$, маємо

$$\left(\Phi(t_0)\Lambda(t_0,\varepsilon)+\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s\left[\sum_{k=0}^{\infty}H\widetilde{L}_{ks}[(\lambda^{(1)})^k]\varphi,\ldots,\sum_{k=0}^{\infty}H\widetilde{L}_{ks}[(\lambda^{(n)})^k]\varphi\right]\right)c(\varepsilon)=$$
$$=\mu^{n-1}(x_0(\varepsilon)-v(t_0,\varepsilon)), \tag{49}$$

де

$$c(\varepsilon)=col(c_1(\varepsilon),\ldots,c_n(\varepsilon)),$$
$$\Phi(t)=[\varphi,H\varphi,\ldots,H^{n-1}\varphi],$$
$$\Lambda(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}1&\ldots&1\\ \lambda^{(1)}(t,\varepsilon)&\ldots&\lambda^{(n)}(t,\varepsilon)\\ \ldots&\ldots&\ldots\\ (\lambda^{(1)}(t,\varepsilon))^{n-1}&\ldots&(\lambda^{(n)}(t,\varepsilon))^{n-1}\end{pmatrix}. \tag{50}$$

Розкладемо матриці біля $c(\varepsilon)$ в ряд за степенями параметра μ. Підставляючи знайдені вище розвинення (20) для функцій $\lambda_i(t,\varepsilon)$, отримаємо

$$\Lambda(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix}1&\ldots&1\\ \sum_{k=1}^{\infty}\mu^kP_1^k(\lambda^{(1)})&\ldots&\sum_{k=1}^{\infty}\mu^kP_1^k(\lambda^{(n)})\\ \ldots&\ldots&\ldots\\ \sum_{k=n-1}^{\infty}\mu^kP_{n-1}^k(\lambda^{(1)})&\ldots&\sum_{k=n-1}^{\infty}\mu^kP_{n-1}^k(\lambda^{(n)})\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1&0&\ldots&0\\ 0&\mu&\ldots&0\\ \ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\ 0&0&\ldots&\mu^{n-1}\end{pmatrix}(\Lambda_0+\mu\Lambda_1+\mu^2\Lambda_2+\ldots),$$
$$\Lambda_0(t)=\begin{pmatrix}1&\ldots&1\\ \lambda_1^{(1)}(t)&\ldots&\lambda_1^{(n)}(t)\\ \ldots&\ldots&\ldots\\ (\lambda_1^{(1)}(t))^{n-1}&\ldots&(\lambda_1^{(n)}(t))^{n-1}\end{pmatrix}; \tag{51}$$
$$\Lambda_s(t)=\begin{pmatrix}0&\ldots&0\\ P_1^{s+1}(\lambda^{(1)})&\ldots&P_1^{s+1}(\lambda^{(n)})\\ \ldots&\ldots&\ldots\\ P_{n-1}^{n-1+s}(\lambda^{(1)})&\ldots&P_{n-1}^{n-1+s}(\lambda^{(n)})\end{pmatrix};s=1,2,\ldots; \tag{52}$$
$$\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s\left[\sum_{k=0}^{\infty}H\widetilde{L}_{ks}[(\lambda^{(1)})^k]\varphi,\ldots,\sum_{k=0}^{\infty}H\widetilde{L}_{ks}[(\lambda^{(n)})^k]\varphi\right]=$$

$$= \sum_{k=n}^{\infty} \mu^k \left[\sum_{s=1}^{[\frac{k}{n}]} \sum_{j=0}^{k-sn} H \widetilde{L}_{js} [P_j^{k-sn}(\lambda^{(1)})] \varphi, \ldots, \sum_{s=1}^{[\frac{k}{n}]} \sum_{j=0}^{k-sn} H \widetilde{L}_{js} [P_j^{k-sn}(\lambda^{(n)})] \varphi \right].$$

Помноживши рівність (49) зліва на матриці $\Phi^{-1}(t_0, \varepsilon)$ і $diag\{1, \mu^{-1}, \ldots, \mu^{-(n-1)}\}$, запишемо її у вигляді

$$\left(\Lambda_o + \ldots + \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu^{-1} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \mu^{-(n-1)} \end{pmatrix} \Phi^{-1} H \sum_{k=n}^{\infty} \mu^k \left[\sum_{s=1}^{[\frac{k}{n}]} \sum_{j=0}^{k-sn} \widetilde{L}_{js} [P_j^{k-sn}(\lambda^{(1)})] \, \varphi, \right.\right.$$

$$\left.\left. \ldots, \sum_{s=1}^{[\frac{k}{n}]} \sum_{j=0}^{k-sn} \widetilde{L}_{js} [P_j^{k-sn}(\lambda^{(n)})] \varphi \right] \right) c(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \mu^{n-1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \mu^{n-2} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix} \Phi^{-1}(x_0(\varepsilon) - v(t_0, \varepsilon)). \tag{53}$$

Введемо вектори

$$b_k^{(i)}(t) = \Phi^{-1} H \sum_{s=1}^{[\frac{k}{n}]} \sum_{j=0}^{k-sn} \widetilde{L}_{js} [P_j^{k-sn}(\lambda^{(i)})] \varphi, i = \overline{1, n}, k = n, n+1, \ldots, \tag{54}$$

позначивши їх координати $(b_k^{(i)})_j$, $j = \overline{1, n}$. Використовуючи ці позначення і змінюючи індекси, другий матричний вираз у лівій частині рівності (53) подамо у вигляді

$$\begin{pmatrix} \sum_{k=n}^{\infty} \mu^k [(b_k^{(1)})_1 \ldots (b_k^{(n)})_1] \\ \\ \sum_{k=n}^{\infty} \mu^{k-1} [(b_k^{(1)})_2 \ldots (b_k^{(n)})_2] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{k=n}^{\infty} \mu^{k-(n-1)} [(b_k^{(1)})_n \ldots (b_k^{(n)})_n] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{s=n}^{\infty} \mu^s [(b_s^{(1)})_1 \ldots (b_s^{(n)})_1] \\ \\ \sum_{s=n-1}^{\infty} \mu^s [(b_{s+1}^{(1)})_2 \ldots (b_{s+1}^{(n)})_2] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum_{s=1}^{\infty} \mu^s [(b_{s+n-1}^{(1)})_n \ldots (b_{s+n-1}^{(n)})_n] \end{pmatrix} =$$

$$= \sum_{s=1}^{\infty} \mu^s B_s(t_0),$$

де

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \\ (b_n^{(1)})_n & \ldots & (b_n^{(n)})_n \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 \\ (b_n^{(1)})_{n-1} & \ldots & (b_n^{(n)})_{n-1} \\ (b_{n+1}^{(1)})_n & \ldots & (b_{n+1}^{(n)})_n \end{pmatrix}, \ldots,$$

$$B_{n-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ (b_n^{(1)})_2 & \dots & (b_n^{(n)})_2 \\ \dots & \dots & \dots \\ (b_{2n-2}^{(1)})_n & \dots & (b_{2n-2}^{(n)})_n \end{pmatrix},$$

$$B_s = \begin{pmatrix} (b_s^{(1)})_1 & \dots & (b_s^{(n)})_1 \\ \dots & \dots & \dots \\ (b_{s+n-1}^{(1)})_n & \dots & (b_{s+n-1}^{(n)})_n \end{pmatrix}, s = n, n+1, \dots.$$

Позначивши вектор у правій частині (53) через $d(\varepsilon)$ і врахувавши (5), (45), аналогічним чином подамо його у вигляді розвинення

$$d(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k d_k, \tag{55}$$

де

$$d_k = col((a_{\frac{k-(n-1)}{n}})_1, (a_{\frac{k-(n-2)}{n}})_2, \dots, (a_{\frac{k-1}{n}})_{n-1}, (a_{\frac{k}{n}})_n)$$

$$a_s = \Phi^{-1}(x_{0s} - v_s(t_0)), s = 0, 1, \dots; \tag{56}$$

$(a_s)_j$ — j-та координата вектора a_s. Зокрема, $d_0 = col(0, \dots, 0, (a_0)_n)$.

У результаті рівність (53) набуває вигляду

$$(\Lambda_0(t_0) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k U_k(t_0))c(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k d_k(t_0), \tag{57}$$

де

$$U_k(t) = \Lambda_k(t) + B_k(t), k = 1, 2, \dots.$$

Подавши вектор $c(\varepsilon)$ у вигляді розвинення

$$c(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k c^{(k)},\ c^{(k)} = col(c_1^{(k)}, \dots, c_n^{(k)}), \tag{58}$$

підставивши його в (57) і прирівнявши в одержаній тотожності вирази при однакових степенях μ, дістанемо

$$\Lambda_0(t_0)c^{(0)} = d_0(t_0),$$

$$\Lambda_0(t_0)c^{(k)} = d_k(t_0) - \sum_{j=1}^{k} U_j c^{(k-j)}, k = 1, 2, \dots.$$

Оскільки завдяки (19), (22) матриця Вандермонда $\Lambda_0(t)$ неособлива, то звідси знайдемо

$$c^{(0)} = \Lambda_0^{-1}(t_0)d_0(t_0);$$

$$c^{(k)} = \Lambda_0^{-1}(t_0)\left(d_k(t_0) - \sum_{j=1}^{k} U_j(t_0)c^{(k-j)}\right), k = 1, 2, \dots. \tag{59}$$

Підставивши знайдені розвинення

$$c_i(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k c_i^{(k)}$$

у (47), отримаємо формальний ряд, яким зображається розв'язок задачі (1), (2).

2. Припустимо, що виконуються умови (31)-(33) і $n > 2$.

Розв'язок початкової задачі (1), (2), як і в попередньому випадку, будемо шукати у вигляді (47), маючи на увазі, що в даному випадку $\mu = \frac{1}{\varepsilon^{n-1}}$ і функції $\lambda^{(i)}(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1, n-1}$, зображаються формальними розвиненнями вигляду (20) за степенями μ, а $\lambda^{(n)}(t,\varepsilon)$ — за степенями ε.

Підставивши вектор (47) у початкову умову (2) і скориставшись формулою (18), прийдемо до рівності (49) з такими самими матрицями $\Phi(t_0)$ і $\Lambda(t,\varepsilon)$, що й у попередньому випадку. Але розвинення для матриці $\Lambda(t,\varepsilon)$ тепер буде іншим. Підставивши в (50) відповідні розвинення функцій $\lambda_i(t,\varepsilon)$, $i = \overline{1, n}$ дістанемо

$$\Lambda(t,\varepsilon) =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k P_1^k(\lambda^{(1)}) & \dots & \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k P_1^k(\lambda^{(n-1)}) & \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{k(n-1)} P_1^k(\lambda^{(n)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sum_{k=n-1}^{\infty} \mu^k P_{n-1}^k(\lambda^{(1)}) & \dots & \sum_{k=n-1}^{\infty} \mu^k P_{n-1}^k(\lambda^{(n-1)}) & \sum_{k=n-1}^{\infty} \mu^{k(n-1)} P_{n-1}^k(\lambda^{(n)}) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \mu^{n-1} \end{pmatrix} (\Lambda_0 + \mu\Lambda_1 + \dots),$$

де

$$\Lambda_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \lambda_1^{(1)} & \dots & \lambda_1^{(n-1)} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\lambda_1^{(1)})^{n-1} & \dots & (\lambda_1^{(n-1)})^{n-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Lambda_s(t) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ P_1^{s+1}(\lambda^{(1)}) & \dots & P_1^{s+1}(\lambda^{(n-1)}) & P_1^{\frac{s+1}{n-1}}(\lambda^{(n)}) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ P_{n-1}^{s+n-1}(\lambda^{(1)}) & \dots & P_{n-1}^{s+n-1}(\lambda^{(n-1)}) & P_{n-1}^{\frac{s+n-1}{n-1}}(\lambda^{(n)}) \end{pmatrix}, s = 1, 2, \dots$$

(елементи останнього стовпця цих матриць відмінні від нуля тільки в тому разі, коли в них верхні символи є цілими числами, більшими за нижні).

Аналогічно, підставивши розвинення функцій $\lambda_i(t,\varepsilon)$, $i=\overline{1,n}$, у другий матричний вираз рівності (49) маємо

$$\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s\left[\sum_{k=0}^{\infty}H\widetilde{L}_{ks}[(\lambda^{(1)})^k]\varphi,\ldots,\sum_{k=0}^{\infty}H\widetilde{L}_{ks}[(\lambda^{(n)})^k]\varphi\right]=$$

$$=\left(\sum_{k=n-1}^{\infty}\mu^k\sum_{s=1}^{[\frac{k}{n-1}]}\sum_{j=0}^{k-s(n-1)}H\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-s(n-1)}(\lambda^{(1)})]\varphi,\ldots,\right.$$

$$\sum_{k=n-1}^{\infty}\mu^k\sum_{s=1}^{[\frac{k}{n-1}]}\sum_{j=0}^{k-s(n-1)}H\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-s(n-1)}(\lambda^{(n-1)})]\varphi,$$

$$\left.\sum_{k=1}^{\infty}\mu^{(n-1)k}\left[H\widetilde{L}_{0k}+\sum_{s=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-s}H\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-s}(\lambda^{(n)})]\varphi\right]\right).$$

Позначивши

$$b_k^{(i)}=\Phi^{-1}H\sum_{s=1}^{[\frac{k}{n-1}]}\sum_{j=0}^{k-s(n-1)}\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-s(n-1)}(\lambda^{(i)})],i=\overline{1,n-1},k=n-1,n,\ldots;\tag{60}$$

$$b_k^{(n)}=\Phi^{-1}H\left[\widetilde{L}_{0k}\varphi+\sum_{s=1}^{k-1}\sum_{j=1}^{k-s}\widetilde{L}_{js}[P_j^{k-s}(\lambda^{(n)})]\varphi\right],k=1,2,\ldots,\tag{61}$$

цей вираз подамо у вигляді

$$\Phi\left[\sum_{k=n-1}^{\infty}\mu^k b_k^{(1)},\ldots,\sum_{k=n-1}^{\infty}\mu^k b_k^{(n-1)},\sum_{k=1}^{\infty}\mu^{(n-1)k}b_k^{(n)}\right].$$

Помноживши рівність (49) зліва на матриці $\Phi^{-1}(t_0)$ та $diag\{1,\mu^{-1},\ldots,\mu^{-(n-1)}\}$ і проробивши такі самі перетворення, як і в попередньому випадку, зведемо її до вигляду

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k\Lambda_k(t_0)+\sum_{k=0}^{\infty}\mu^kB_k(t_0)\right)c(\varepsilon)=d(\varepsilon),$$

де

$$B_0=\begin{pmatrix}0&\ldots&0&0\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\0&\ldots&0&0\\(b_{n-1}^{(1)})_n&\ldots&(b_{n-1}^{(n-1)})_n&(b_1^{(n)})_n\end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ (b_{n-1}^{(1)})_{n-1} & \dots & (b_{n-1}^{(n-1)})_{n-1} & (b_1^{(n)})_{n-1} \\ (b_n^{(1)})_n & \dots & (b_n^{(n-1)})_n & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{n-2} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ (b_{n-1}^{(1)})_2 & \dots & (b_{n-1}^{(n-1)})_2 & (b_1^{(n)})_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (b_{2n-3}^{(1)})_n & \dots & (b_{2n-3}^{(n-1)})_n & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_k = \begin{pmatrix} (b_k^{(1)})_1 & \dots & (b_k^{(n-1)})_1 & (b_{\frac{k}{n-1}}^{(n)})_1 \\ (b_{k+1}^{(1)})_2 & \dots & (b_{k+1}^{(n-1)})_2 & (b_{\frac{k+1}{n-1}}^{(n)})_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (b_{k+n-1}^{(1)})_n & \dots & (b_{k+n-1}^{(n-1)})_n & (b_{\frac{k+n-1}{n-1}}^{(n)})_n \end{pmatrix}, k = n-1, n, \dots,$$

а вектор $d(\varepsilon)$ зображається у вигляді розвинення (55), коефіцієнти якого виражаються через координати векторів (56):

$$d_k = col\left((a_{\frac{k-(n-1)}{n-1}})_1, (a_{\frac{k-(n-2)}{n-1}})_2, \dots, (a_{\frac{k}{n-1}})_n\right), k = 0, 1, \dots.$$

Зокрема, як і в попередньому випадку $d_0 = col(0, \dots, 0, (a_0)_n)$.

Таким чином, для визначення вектора $c(\varepsilon)$ маємо рівняння

$$\left(U_0(t_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k U_k(t_0)\right) c(\varepsilon) = d(\varepsilon), \tag{62}$$

де $U_k(t) = \Lambda_k(t) + B_k(t), k = 0, 1, \dots$.

З'ясуємо, що являє собою матриця $U_0(t)$. Оскільки згідно з (60), (61)

$$b_{n-1}^{(i)}(t) = \Phi^{-1} H \widetilde{L}_{01} \varphi, i = \overline{1, n-1}, b_1^{(n)} = \Phi^{-1} H \widetilde{L}_{01} \varphi,$$

то всі елементи останнього рядка матриці $B_0(t_0)$ рівні між собою. Позначивши їх символом b і, взявши до уваги, що згідно з (35) $(\lambda_1^{(i)}(t))^{n-1} = -L_{11}(t)$, маємо

$$U_0(t) = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \\ \lambda_1^{(1)} & \dots & \lambda_1^{(n-1)} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\lambda_1^{(1)})^{n-2} & \dots & (\lambda_1^{(n-1)})^{n-2} & 0 \\ b - L_{11} & \dots & b - L_{11} & b \end{pmatrix}.$$

Розклавши визначник цієї матриці за елементами останнього стовпця, знайдемо

$$\det U_0(t) = (-1)^{n+1} \begin{vmatrix} \lambda_1^{(1)} & \dots & \lambda_1^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ (\lambda_1^{(1)})^{n-2} & \dots & (\lambda_1^{(n-1)})^{n-2} \\ b - L_{11} & \dots & b - L_{11} \end{vmatrix} +$$

$$+b \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1^{(1)} & \dots & \lambda_1^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ (\lambda_1^{(1)})^{n-2} & \dots & (\lambda_1^{(n-1)})^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= [(-1)^{2n-1}(b - L_{11}) + b] \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1^{(1)} & \dots & \lambda_1^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ (\lambda_1^{(1)})^{n-2} & \dots & (\lambda_1^{(n-1)})^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1^{(1)} & \dots & \lambda_1^{(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots \\ (\lambda_1^{(1)})^{n-2} & \dots & (\lambda_1^{(n-1)})^{n-2} \end{vmatrix} L_{11},$$

звідки випливає, що $\det U_0(t) \neq 0, \forall t \in [t_0; T]$, завдяки умові (33). Отже, матриця $U_0(t_0)$ має обернену.

Подавши вектор $c(\varepsilon)$ у вигляді розвинення (58), його коефіцієнти знайдемо з рівняння (62) за формулами вигляду (59), у яких $\Lambda_0(t_0)$ заміняється на $U_0(t)$. Підставивши знайдені розвинення у (47), одержимо формальний ряд, яким зображається шуканий розв'язок задачі (1), (2).

Якщо $Re\lambda_0(t) < 0, \forall t \in [t_0; T]$, то формальні ряди, побудовані в обох розглянутих випадках, будуть асимптотичними розвиненнями точного розв'язку задачі (1), (2) при $\varepsilon \to 0$.

Зазначимо, що у більш складних випадках, коли відповідна діаграма Ньютона складається з кількох ланок різної довжини і відповідні розв'язки рівняння розгалуження зображаються розвиненнями за різними дробовими степенями параметра $\varepsilon^{\frac{1}{p_1}}$, $\varepsilon^{\frac{1}{p_2}}$,...$\varepsilon^{\frac{1}{p_s}}$, розв'язок початкової задачі (1), (2) будуватиметься у вигляді розвинення за степенями $\varepsilon^{\frac{1}{p}}$, де p — найбільший спільний дільник чисел $p_1, \dots, p_s$.

Алгоритм знаходження коефіцієнтів цього розвинення такий самий, як і в розглянутих нами випадках. Подібний алгоритм можна застосувати і до більш складних крайових задач.

Література

[1] *Birkhoff G.D.* On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter / G.D. Birkhoff // Trans. Amer. Math. Soc. – 1908. – №9. – P. 219-231.

[2] *Тамаркин Я.Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды / Я.Д. Тамаркин. – Петроград, 1917. – 308 с.

[3] *Hukuhara* Sur les points singuliers des equations differentielles linearires / Hukuhara // J. Fac. Sci. Univ. Hokkaido Math. – 1934-1936. – 2. – P.13-81.

[4] *Фещенко С.Ф.* Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений / С.Ф. Фещенко // Укр. мат. журн. – 1995. – 7,№2. – С. 167-179.

[5] *Фещенко С.Ф.* Об асимптотическом расщеплении системы линейных дифференциальных уравнений / С.Ф. Фещенко // Укр. мат. журн. – 1955. – 7,№4. – С. 252-443.

[6] *Turritin H.L.* Asymptotic expansions of solutions systems of ordinary linear differential equations containing a parameter / H.L. Turritin // Contrib. Theory nonlinear oscillations. – 1952. – 2. – P.1-116.

[7] *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений / В. Вазов. – М.: Мир, 1968. – 464 с.

[8] *Шкиль Н.И.* Асимптотическое поведение линейных систем в случае кратных корней характеристического уравнения / Н.И. Шкиль // Укр. мат. журн. – 1962. – 16, №4. – с.383-392.

[9] *Шкіль М.І.* Асимптотичне поводження лінійних систем у випадку кратних коренів характеристичного рівняння / М.І. Шкіль // Доп. АН УРСР. – 1962. – №9. – с.1138-1141.

[10] *Шкиль Н.И.* Асимптотическое решение системы линейных дифференциальных уравнений в случае кратных корней характеристического уравнения / Н.И. Шкиль // Изв. вузов. математика. – 1964. – 39, №2. – с.176-185.

[11] *Шкіль М.І.* Про асимптотичний розв'язок системи лінійних рівнянь у випадку кратних коренів характеристичного рівняння / М. І. Шкіль // Доп. АН УРСР. – 1965. – №6. – с. 699-703.

[12] *Шкиль Н.И.* Построение общего асимптотического решения системы линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / Н.И. Шкиль // Изв. вузов. математика. – 1966. – №1. – с.163-169.

[13] *Жукова Г.С.* Асимптотическое интегрирование обыкновенных линейных дифференциальных уравнений / Г.С. Жукова – Воронеж: Изд-во Воронеж. ун-та, 1988. – 200 с.

[14] *Жукова Г.С.* Метод общего анализа линейных сингулярно возмущённых дифференциальных уравнений и систем: дис. ... докт. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Жукова Галина Севастьяновна. – М., 1990. – 296 с.

[15] *Яковець В.П.* Асимптотичне інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженнями: дис. ... докт. фіз.-мат. наук: 01.01.02 / Яковець Василь Павлович. – К., 1993. – 318 с.

[16] *Самойленко А.М.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А.М. Самойленко, М.І. Шкіль, В.П. Яковець. – К.: Вища школа, 2000. – 294 с.

[17] *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений / С.А. Ломов. – М.: Наука, 1981. – 398 с.

[18] *Ломов С.А.* Асимптотическое интегрирование сингулярно возмущённых задач / С.А. Ломов, А.Г. Елисеев // Успехи мат. наук. – 1988. – Т.43, вып. 3(261). – С. 3-53.

[19] *Кочерга О.І.* Асимптотичне розв'язання задачі Коші для виродженої сингулярно збуреної лінійної системи у випадку кратного спектра головного оператора / О.І. Кочерга, В.П. Яковець // Нелінійні коливання. – 1999. – 2, №1. – С.19-29.

[20] *Яковець В.П.* Асимптотика розв'язку задачі Коші для виродженої сингулярно збуреної лінійної системи / В.П. Яковець, О.І. Кочерга // Доп. НАН України. – 1999. – №5. – С.34-39.

[21] *Kocherga O.I.* The Cauchy problem for the degenerated singularly perturbed linear system in case of the multiple spectrum of the limit bundle of matrixes / O.I. Kocherga, V.P. Yakovets // Non-linear oscilations. – 2001. – 4, №2. – P.226-233.

[22] *Sibuya Y.* Some global properties of matrixes of functions of one variable / Y. Sibuya // Math. Anal. – 1965. – 161, №1. – P.67-77.

[23] *Шкиль Н.И.* Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.И. Шкиль, И.И. Старун, В.П. Яковец. – К.: Вища шк., 1989. – 287 с.

[24] *Вайнберг М.М.* Теория ветвления решений нелинейных уравнений / М.М. Вайнберг, В.А. Треногин. – М.: Наука, 1969. – 528 с.

[25] *Фещенко С.Ф.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений / С.Ф. Фещенко, Н.И. Шкиль, Л.Д. Николенко. – К.: Наук. думка, 1966. – 249 с.

[26] *Шкіль М.І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях / М.І. Шкіль. – К.: Вища шк., 1971. – 226 с.

[27] *Шкиль Н.И.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями / Н.И. Шкиль, И.И. Старун, В.П. Яковец. – К.: Вища шк., 1991. – 207 с.

References

[1] Birkhoff G.D. *On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter* - 1908, pp. 219-231.

[2] Tamarkin Ja.D. *O nekotoryh obshhih zadachah teorii obyknovennyh differencial'nyh uravnenij i o razlozhenii proizvol'nyh funkcij v rjady (Some general problems of the theory of ordinary differential equations and expansion of arbitrary functions in series)* - 1917, 308 p.

[3] Hukuhara *Sur les points singuliers des equations differentielles linearires* - 1934-1936, 2, pp. 13-81.

[4] Feshhenko S.F. *Ukr. mat. zhurn. (Ukrain. mat. Journal.)* - 1995, 7, pp. 167-179.

[5] Feshhenko S.F. *Ukr. mat. zhurn. (Ukrain. mat. Journal.)* - 1955, 7, pp. 252-443.

[6] Turritin H.L. *Contrib. Theory nonlinear oscillations.* - 1952, 2, pp. 1-116.

[7] Vazov V. *Asimptoticheskie razlozhenija reshenij obyknovennyh differencial'nyh uravnenij (Asymptotic expansions for ordinary differential equations)* - 1968, 464 p.

[8] Shkil N.I. *Ukr. mat. zhurn. (Ukrain. mat. Journal.)* - 1962, 16, pp. 383-392.

[9] Shkil N.I. *Dop. AN URSR. (USSR AS Reports)* - 1962, 9, pp. 1138-1141.

[10] Shkil N.I. *Izv. vuzov. matematika. (Universities news. mathematics.)* - 1964, 39, pp. 176-185.

[11] Shkil N.I. *Dop. AN URSR. (USSR AS Reports)* - 1965, 6, pp.699-703.

[12] Shkil N.I. *Izv. vuzov. matematika. (Universities news. mathematics.)* - 1966,1, pp.163-169.

[13] Zhukova G.S. *Asimptoticheskoe integrirovanie obyknovennyh linejnyh differencial'nyh uravnenij (Asymptotic integration of linear ordinary differential equations)* - 1988, 200 p.

[14] Zhukova G.S. *Metod obshhego analiza linejnyh singuljarno vozmushhjonnyh differencial'nyh uravnenij i sistem (General method of analysis of linear singularly perturbed differential equations and systems)* - 1990, 296 p.

[15] Yakovets V.P. *Asymptotychne integruvannja synguljarno zburenyh system dyferencial'nyh rivnjan' z vyrodzhennjamy (Asymptotic integration of singularly perturbed systems of differential equations with degeneracy)* - 1993, 318p.

[16] A.M. Samoilenko, M.I. Shkil, V.P. Yakovets, *Linijni sistemi diferencial'nih rivnjan' z virodzhennjami (Linear systems of differential equations with degeneracy)* - 2000, 294 p.

[17] Lomov S.A. *Vvedenie v obshhuju teoriju singuljarnyh vozmushhenij (Introduction to the general theory of singular perturbations)* - 1981, 398 p.

[18] S.A. Lomov, A.G. Eliseev *Uspehi mat nauk. (The successes of Mathematical Sciences.)* - 1988,261,pp, 3-53.

[19] O.I. Kocherga, V.P. Yakovets, *Nelinijni kolyvannja. (Nonlinear Oscillations.)* - 1999, 1, pp. 19-29.

[20] O.I. Kocherga, V.P. Yakovets, *Dop. NAN Ukrainy. (Ukraine NAS Reports)* - 1999,5,pp. 34-39.

[21] O.I. Kocherga, V.P. Yakovets *Non-linear oscilations* - 2001,2, pp.226-233.

[22] Sibuya Y. *Math. Anal.* - 1965, 1, p. 67-77.

[23] N.I. Shkil, I.I. Starun, V.P. Yakovets, *Asimptoticheskoe integrirovanie linejnyh sistem obyknovennyh differencial'nyh uravnenij (Asymptotic integration of linear systems of ordinary differential equations)* - 1989, 287 p.

[24] M.M. Vajnberg, V.A. Trenogin. *Teorija vetvlenija reshenij nelinejnyh uravnenij (The theory of branching of solutions of nonlinear equations)* - 1969, 528 p.

[25] S.F. Feshhenko, N.I. Shkil, L.D. Nikolenko. *Asimptoticheskie metody v teorii linejnyh differencial'nyh uravnenij (Asymptotic methods in the theory of linear differential equations)* - 1966, 249 p.

[26] M.I. Shkil *Asymptotychni metody v dyferencial'nyh rivnjannjah (Asymptotic methods in differential equations)* - 1971, 226 p.

[27] N.I. Shkil, I.I. Starun, V.P. Yakovets, *Asimptoticheskoe integrirovanie linejnyh sistem differencial'nyh uravnenij s vyrozhdenijami (Asymptotic integration of linear systems of differential equations with degenerations)* - 1991, 207 p.