Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13(2).— С. 9–22.

УДК 511.7, 517.1

Обернені числа Фібоначчі: властивості та застосування

Н. М. Василенко

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

Анотація. У роботі встановлено деякі співвідношення між оберненими числами Фібоначчі, та між членами і залишками ряду, ними утвореного. Наведено результати дослідження тополого-метричних і фрактальних властивостей множин чисел відрізка $[0,S]$, $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$, $u_1=1,\ u_2=2,\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n, n\in\mathbb{N}$, з обмеженнями на вживання символів у їх Ф-представленні.

Ключові слова: послідовність Фібоначчі, обернені числа Фібоначчі, розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини.

The reciprocals of Fibonacci numbers: properties and applications

N. Vasylenko,

National Pedagogical Dragomanov University

Abstract. We investigate connection between the reciprocals of Fibonacci numbers and between members and the remnants of the series, they formed. We study topological, metric and fractal properties of sets of numbers of the interval $[0,S]$, $S=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{u_n}$, $u_1=1,\ u_2=2,\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n, n\in\mathbb{N}$, with restrictions of symbols in their Φ-expansion.

AMS Subject Classifications (2010): 11B39, 28A80, 60G30.

Key words: Fibonacci sequence, the reciprocals of Fibonacci numbers, Hausdorff dimension of sets.

Вступ

Класична послідовність Фібоначчі є, мабуть, однією з найвідоміших та найбільш досліджуваних числових послідовностей. Це, насамперед, обумовлено тим, що числа Фібоначчі виникають у результаті розв'язання багатьох математичних задачах і тісно пов'язані з не менш відомим «золотим відношенням». Сьогодні широко досліджуються узагальнені послідовності Фібоначчі [**6, 8**]. Разом з цим, поза увагою не залишається послідовність обернених чисел Фібоначчі: $\left(\frac{1}{u_n}\right)$, $n\in\mathbb{N}$. Інтерес до неї значно посилився у другій половині XX століття і не згасає до цього часу. Про це свідчить велика кількість публікацій, присвячених в основному підсумованню рядів утворених з обернених чисел Фібоначчі та їх добутків з обмеженнями на номери (членів) [**1, 2, 3, 5, 7**].

У даній роботі, ми пропонуємо доведення ряду співвідношень між оберненими числами Фібоначчі та між членами і залишками ряду, ними утвореного. Наведені результати були отримані нами в процесі розробки метричної теорії Ф-зображень дійсних чисел [**9**], [**10**] і можуть бути корисними для дослідження властивостей множин чисел з обмеженнями на вживання символів у їх Ф-представленні та підсумовування вище зазначених рядів.

1. Послідовність обернених чисел Фібоначчі

Нехай $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ — класична послідовність Фібоначчі, без першого члена, тобто

$$u_1 = 1,\ u_2 = 2,\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n, n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Формула Біне загального члена послідовності (1) дає вираз загального члена послідовності обернених чисел Фібоначчі:

$$c_n \equiv \frac{1}{u_n} = \frac{\sqrt{5}}{\varphi^{n+1} - \widehat{\varphi}^{n+1}}, \tag{2}$$

де $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \widehat{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2},\ n \in \mathbb{N}$.

Далі послідовність $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ будемо називати Ф-*послідовністю.*

Сформулюємо та доведемо ряд важливих відношень для членів Ф-послідовності.

Лема 1. *Для довільного $n \in \mathbb{N}$ має місце рівність*

$$\frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_{n+2}} + \frac{(-1)^{n+1}}{u_n u_{n+1} u_{n+2}}. \tag{3}$$

Доведення. Для доведення даного твердження скористаємося відомою тотожністю Касіні [**11**]:

$$u_n^2 - u_{n-1}u_{n+1} = (-1)^n. \tag{4}$$

З того, що

$$\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_{n+2}} = \frac{u_{n+1}}{u_n u_{n+2}} - \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1}^2 - u_n u_{n+2}}{u_n u_{n+1} u_{n+2}} = \frac{(-1)^{n+1}}{u_n u_{n+1} u_{n+2}},$$

випливає істинність рівності (3). □

Наслідок 1. *Для довільного натурального k мають місце нерівності:*

$$\frac{1}{u_{2k-1}} > \frac{1}{u_{2k}} + \frac{1}{u_{2k+1}}, \tag{5}$$

$$\frac{1}{u_{2k}} < \frac{1}{u_{2k+1}} + \frac{1}{u_{2k+2}}. \tag{6}$$

Зауваження 1. *Оскільки*

$$\left|\frac{1}{u_n}-\left(\frac{1}{u_{n+1}}+\frac{1}{u_{n+2}}\right)\right|=\frac{1}{u_n u_{n+1} u_{n+2}}\to 0 \quad (n\to\infty),$$

то послідовність обернених чисел Фібоначчі має асимптотичну властивість:

$$c_n \approx c_{n+1}+c_{n+2}.$$

Зауважимо, що існує, з точністю до сталого множника, єдина додатна нескінченно мала послідовність (c_n), яка має наступну властивість однорідності $c_n = c_{n+1} + c_{n+2}$ для довільного $n \in \mathbb{N}$. Це послідовність $\left(\varphi^{-(n+1)}\right)_{n=1}^{\infty}$.

Лема 2. *Для довільного $n \in \mathbb{N}$ виконуються нерівності:*

$$\frac{1}{u_{n+1}}+\frac{1}{u_{n+3}}<\frac{1}{u_n}<\frac{1}{u_{n+1}}+\frac{1}{u_{n+2}}+\frac{1}{u_{n+3}}. \tag{7}$$

Доведення. Для доведення лівої з нерівностей (7) розглянемо різницю

$$\left(\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+1}}\right)-\frac{1}{u_{n+3}}=\frac{u_{n-1}}{u_n u_{n+1}}-\frac{1}{u_{n+3}}=\frac{u_{n-1}u_{n+3}-u_n u_{n+1}}{u_n u_{n+1} u_{n+3}},$$

знак якої визначається знаком чисельника останнього дробу. Оскільки

$$u_{n-1}u_{n+3}-u_n u_{n+1}=u_{n-1}(u_{n+1}+u_{n+2})-u_n u_{n+1}=$$
$$=u_{n-1}u_{n+1}+u_{n-1}(u_n+u_{n+1})-u_n u_{n+1}=$$
$$=u_{n-1}u_{n+1}+u_{n-1}u_{n+1}+(u_{n-1}u_n-u_n u_{n+1})=u_{n-1}u_{n+1}+(u_{n-1}u_{n+1}-u_n^2)=$$
$$=u_{n-1}u_{n+1}+(-1)^{n+1}>0$$

для довільного $n \in \mathbb{N}$ (тут ми знову використали тотожність Касіні), то ліву з нерівностей (7) доведено.

Права з нерівностей (7) рівносильна нерівності

$$\frac{1}{u_n}-\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_{n+2}}<\frac{1}{u_{n+3}},$$

яку можна переписати у вигляді

$$\frac{u_{n+1}^2-u_n u_{n+2}}{u_n u_{n+1} u_{n+2}}<\frac{1}{u_{n+3}}.$$

Використовуючи тотожність Касіні, одержимо

$$\frac{(-1)^{n+1}}{u_n u_{n+1} u_{n+2}}<\frac{1}{u_{n+3}}.$$

Оскільки $u_{n+3} = u_{n+2} + u_{n+1}$, то $u_{n+3} < u_{n+2}u_{n+1}$. Звідки

$$u_{n+3}<u_{n+2}u_{n+1}u_n \quad \text{і} \quad \frac{1}{u_{n+2}u_{n+1}u_n}<\frac{1}{u_{n+3}}.$$

Отже, права з нерівностей (7) має місце для довільного $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Наслідок 2. *Для довільного натурального n мають місце нерівності:*

$$\frac{1}{u_n} > \frac{1}{u_{n+2}} + \frac{1}{u_{n+3}}, \tag{8}$$

$$\frac{1}{u_n} < r_n \equiv \frac{1}{u_{n+1}} + \frac{1}{u_{n+2}} + \frac{1}{u_{n+3}} + \cdots . \tag{9}$$

Знайдемо оцінки n-го члена послідовності обернених чисел Фібоначчі через його порядковий номер.

З (2) випливає, що для довільного $n \in \mathbb{N}_0$ мають місце нерівності:

$$\frac{\sqrt{5}}{\varphi^{n+2}} < \frac{1}{u_n} < \frac{\sqrt{5}}{\varphi^n}. \tag{10}$$

Оцінка (10) є досить «грубою», і для того, щоб мати, в подальшому, ширші межі для застосування, потребує уточнення.

Лема 3. *Для довільного натурального k мають місце нерівності:*

$$\frac{\sqrt{5}}{\varphi^{2k}} < \frac{1}{u_{2k-1}} < \frac{\sqrt{5}}{\varphi^{2k-1}}, \tag{11}$$

$$\frac{\sqrt{5}}{\varphi^{2k+2}} < \frac{1}{u_{2k}} < \frac{\sqrt{5}}{\varphi^{2k+1}}. \tag{12}$$

Доведення. Використовуючи рівність (2), можемо записати

$$\frac{\sqrt{5}}{\varphi^{2k}} < \frac{1}{u_{2k-1}} = \frac{\sqrt{5}}{\varphi^{2k} - \widehat{\varphi}^{2k}} = \frac{\sqrt{5}\varphi^{2k}}{\varphi^{4k} - 1} < \frac{\sqrt{5}\varphi^{2k}}{\varphi^{4k-1}} = \frac{\sqrt{5}}{\varphi^{2k-1}}.$$

Отже, нерівність (11) має місце для довільного $k \in \mathbb{N}$.

Міркуючи аналогічно, можемо виконати оцінку загального члена послідовності $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ з парним номером. Оскільки

$$\frac{\sqrt{5}}{\varphi^{2k+2}} = \frac{\sqrt{5}\varphi^{2k+1}}{\varphi^{4k+3}} < \frac{1}{u_{2k}} = \frac{\sqrt{5}}{\varphi^{2k+1} - \widehat{\varphi}^{2k+1}} = \frac{\sqrt{5}\varphi^{2k+1}}{\varphi^{4k+2} + 1} < \frac{\sqrt{5}}{\varphi^{2k+1}},$$

то нерівність (12) виконується для довільного $k \in \mathbb{N}$. □

2. Ф-ряд

Розглянемо знакододатний ряд, елементами якого є обернені числа Фібоначчі,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{u_n} = \frac{1}{u_1} + \cdots + \frac{1}{u_n} + r_n = S_n + r_n = S, \tag{13}$$

де S — ірраціональне число, наближено рівне $2,35988566...$ [**1, 12, 13**].

Далі ряд (13) будемо називати Ф-*рядом*.

Лема 4. *Правильні наступні нерівності:*

$$\frac{\sqrt{5}}{\varphi} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{u_{2k-1}} < \sqrt{5}, \quad \frac{\sqrt{5}}{\varphi^3} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{u_{2k}} < \frac{\sqrt{5}}{\varphi^2}.$$

Доведення. З нерівностей (11) маємо

$$\sqrt{5}\left(\frac{1}{\varphi^2} + \ldots + \frac{1}{\varphi^{2k}} + \ldots\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{u_{2k-1}} < \sqrt{5}\left(\frac{1}{\varphi} + \ldots \frac{1}{\varphi^{2k-1}} + \ldots\right),$$

тобто

$$\frac{\sqrt{5}}{\varphi} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{u_{2k-1}} < \sqrt{5}.$$

Аналогічно, з нерівностей (12) маємо

$$\sqrt{5}\left(\frac{1}{\varphi^4} + \ldots + \frac{1}{\varphi^{2k+2}} + \ldots\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{u_{2k}} < \sqrt{5}\left(\frac{1}{\varphi^3} + \ldots + \frac{1}{\varphi^{2k+1}} + \ldots\right),$$

тобто

$$\frac{\sqrt{5}}{\varphi^3} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{u_{2k}} < \frac{\sqrt{5}}{\varphi^2}.$$

□

Наслідок 3. *Для суми S ряду* (13) *мають місце нерівності:*

$$\sqrt{5}\frac{2+\varphi}{1+2\varphi} = \sqrt{5}\frac{1+\varphi^2}{\varphi^3} < S < \sqrt{5}\frac{1+\varphi^2}{\varphi^2} = \sqrt{5}\frac{2+\varphi}{1+\varphi}.$$

Розглянемо нерівності, які є базовими для побудови метричної теорії представлень дійсних чисел підсумами ряду (13).

Теорема 1. *Для довільних натуральних k і n мають місце наступні нерівності:*

$$\frac{1}{u_{2k-1}} > r_{2k}, \tag{14}$$

$$\frac{1}{u_{2k}} < r_{2k+1}, \tag{15}$$

$$\frac{1}{u_n} < \frac{1}{u_{n+1}} + r_{n+2}, \tag{16}$$

$$\frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}} > r_{n+1}. \tag{17}$$

Доведення. Перепишемо нерівність (14) у еквівалентній формі

$$y_k \equiv \frac{1}{u_{2k-1}} - r_{2k} > 0$$

і розглянемо послідовність $(y_k)_{k=1}^{\infty}$. Очевидно, що $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = 0$. Покажемо, що послідовність $(y_k)_{k=1}^{\infty}$ є монотонно спадною. Для цього розглянемо різницю

$$y_k - y_{k+1} = \frac{1}{u_{2k-1}} - \frac{1}{u_{2k+1}} - r_{2k} + r_{2k+2} = \frac{1}{u_{2k-1}} - \frac{1}{u_{2k+2}} - \frac{2}{u_{2k+1}} =$$

$$= 2\left(\frac{u_{2k}}{u_{2k-1}u_{2k+2}} - \frac{1}{u_{2k+1}}\right) = 2\left(\frac{u_{2k}u_{2k+1} - u_{2k+1}u_{2k-1} - u_{2k-1}u_{2k}}{u_{2k-1}u_{2k+1}u_{2k+2}}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{u_{2k}^2 - u_{2k-1}u_{2k+1}}{u_{2k-1}u_{2k+1}u_{2k+2}}\right) = 2\frac{(-1)^{2k}}{u_{2k-1}u_{2k+1}u_{2k+2}} > 0.$$

З останніх міркувань випливає, що $y_k > 0$ для довільного $k \in \mathbb{N}$, тобто має місце нерівність (14).

Міркуючи аналогічно, перепишемо нерівність (15) у вигляді

$$x_k \equiv r_{2k+1} - \frac{1}{u_{2k}} > 0$$

і розглянемо послідовність $(x_k)_{k=1}^{\infty}$. Очевидно, що $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0$. Покажемо, що $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ — монотонно спадна послідовність. З цією метою розглянемо різницю

$$x_k - x_{k+1} = r_{2k+1} - \frac{1}{u_{2k}} - r_{2k+3} + \frac{1}{u_{2k+2}} = \frac{2}{u_{2k+2}} + \frac{1}{u_{2k+3}} - \frac{1}{u_{2k}} =$$

$$= 2\left(\frac{1}{u_{2k+2}} - \frac{u_{2k+1}}{u_{2k+3}u_{2k}}\right) = 2\left(\frac{u_{2k+2}u_{2k} + u_{2k+1}u_{2k} - u_{2k+1}u_{2k+2}}{u_{2k}u_{2k+2}u_{2k+3}}\right) =$$

$$= 2\left(\frac{u_{2k+2}u_{2k} - u_{2k+1}^2}{u_{2k}u_{2k+2}u_{2k+3}}\right) = 2\frac{(-1)^{2k+2}}{u_{2k}u_{2k+2}u_{2k+3}} > 0.$$

Отже, $x_k > 0$ для довільного $k \in \mathbb{N}$, тобто має місце нерівність (15).

Доведення нерівності (16) проведемо для парних і непарних n.

Нехай $n = 2k$. Покажемо, що

$$\frac{1}{u_{2k}} < \frac{1}{u_{2k+1}} + \sum_{i=2k+3}^{\infty} \frac{1}{u_i}. \tag{18}$$

Враховуючи нерівність (6), можемо записати

$$\frac{1}{u_{2k}} - \frac{1}{u_{2k+1}} < \frac{1}{u_{2k+2}}.$$

З нерівності (9) відомо, що
$$\frac{1}{u_{2k+2}} < \sum_{i=2k+3}^{\infty} \frac{1}{u_i}.$$
Таким чином, нерівність (18) має місце для довільного $k \in \mathbb{N}$.

Нехай $n = 2k+1$. Покажемо, що
$$\frac{1}{u_{2k+1}} < \frac{1}{u_{2k+2}} + \sum_{i=2k+4}^{\infty} \frac{1}{u_i}. \tag{19}$$
Припустимо супротивне, нехай
$$\frac{1}{u_{2k+1}} > \frac{1}{u_{2k+2}} + \sum_{i=2k+4}^{\infty} \frac{1}{u_i}.$$
Останню нерівність можемо переписати у вигляді
$$\frac{1}{u_{2k+1}} - \frac{1}{u_{2k+2}} > \sum_{i=2k+4}^{\infty} \frac{1}{u_i}.$$
Оскільки
$$\frac{1}{u_{2k+1}} < \frac{2}{u_{2k+2}},$$
то
$$\frac{1}{u_{2k+1}} - \frac{1}{u_{2k+2}} < \frac{2}{u_{2k+2}} - \frac{1}{u_{2k+2}} = \frac{1}{u_{2k+2}}.$$
Тобто
$$\frac{1}{u_{2k+2}} > \sum_{i=2k+4}^{\infty} \frac{1}{u_i},$$
що суперечить нерівності (15). Отримане протиріччя доводить нерівність (19). Отже, нерівність (16) виконується для довільного $n \in \mathbb{N}$.

З нерівності (14) слідує, що нерівність (17) має місце для довільного натурального $n = 2k-1,\ \ k \in \mathbb{N}$. Істинність нерівності (17) при $n = 2k$ випливає з того, що
$$\frac{1}{u_{2k+1}} > r_{2k+2} \quad \text{і} \quad \frac{1}{u_{2k}} > \frac{1}{u_{2k+2}}.$$
□

Наслідок 4. *Для довільного натурального k мають місце нерівності:*
$$\frac{1}{u_{2k-1}} r_{2k} > \frac{1}{u_{2k}} r_{2k-1}, \qquad \frac{1}{u_{2k}} r_{2k+1} < \frac{1}{u_{2k+1}} r_{2k}.$$
Доведення. Для доведення наслідку 4 визначимо знак різниці
$$\frac{1}{u_n} r_{n+1} - \frac{1}{u_{n+1}} r_n = \frac{1}{u_n}\left(r_n - \frac{1}{u_{n+1}}\right) - \frac{1}{u_{n+1}} r_n =$$

$$= \left(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}}\right) r_n - \frac{1}{u_n u_{n+1}} = \frac{u_{n-1}}{u_n u_{n+1}} \left(r_n - \frac{1}{u_{n-1}}\right).$$

З останніх перетворень зрозуміло, що її знак визначається знаком різниці $r_n - \frac{1}{u_{n-1}}$. З нерівностей (15) і (14) випливає, що при $n = 2k-1$

$$r_n - \frac{1}{u_{n-1}} > 0$$

і при $n = 2k$

$$r_n - \frac{1}{u_{n-1}} < 0.$$

Отже, наслідок 4 має місце. □

3. Застосування властивостей Ф-послідовності та Ф-ряду до дослідження властивостей множин чисел з обмеженнями на вживання символів у їх Ф-представленні

Відомо [**9**], що для довільного дійсного числа $x \in [0, S]$ існує $L \subseteq \mathbb{N}$ така, що має місце розклад

$$x = \sum_{k \in L} \frac{1}{u_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{f_k}{u_k} = \frac{f_1}{u_1} + \frac{f_2}{u_2} + \cdots + \frac{f_k}{u_k} + \cdots, \tag{20}$$

де $f_k = \begin{cases} 1, & \text{при} \quad k \in L, \\ 0, & \text{при} \quad k \in \mathbb{N} \backslash L. \end{cases}$

Подання дійсного числа $x \in [0, S]$ у вигляді ряду (20) називається Ф-*представленням* (Ф-*розкладом*) цього числа. Символічно воно записується у вигляді

$$x = \Delta_{f_1 f_2 \ldots f_k \ldots} \tag{21}$$

і називається Ф-*зображенням* дійсного числа x. При цьому f_k називається k-ою цифрою Ф-зображення x.

Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_k)$ — фіксований набір символів, $c_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{1, k}$. *Циліндром рангу k з основою $c_1 c_2 \ldots c_k$*, що відповідає Ф-розкладу (20) і Ф-зображенню (21), називається множина всіх чисел $x \in [0, S]$, які можуть бути подані у вигляді (20) і при цьому $f_i = c_i$, $i = \overline{1, k}$. Будемо її позначати $\Delta_{c_1 \ldots c_k}$, тобто

$$\Delta_{c_1 \ldots c_k} = \left\{ x : \ x = \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{u_i} + \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{f_j}{u_j}, \ f_j \in \{0, 1\} \right\}. \tag{22}$$

Теорема 2. *Множина всіх чисел $[0, S]$, Ф-зображення яких має властивість $\Delta_{c_1 c_1 c_2 c_2 \ldots c_n c_n c_{n+1} c_{n+1} \ldots}$, $c_n \in \{0, 1\}$, є множиною:*

(1) досконалою;

(2) ніде не щільною;

(3) нульової міри Лебега;

(4) розмірність Хаусдорфа–Безиковича якої рівна $\log_{\varphi^2} 2$.

Доведення. З ряду (13) утворимо знакододатний ряд

$$\left(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2}\right)+\left(\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{u_{2k-1}}+\frac{1}{u_{2k}}\right)+\dots=$$
$$=\frac{u_3}{u_1u_2}+\frac{u_5}{u_3u_4}+\dots+\frac{u_{2k+1}}{u_{2k-1}u_{2k}}+\dots,$$

з загальним членом

$$b_k=\frac{u_{2k+1}}{u_{2k-1}u_{2k}}.$$

Оскільки, згідно з нерівністю (14)

$$\frac{1}{u_{2k-1}}+\frac{1}{u_{2k}}=b_k>R_k=\sum_{i=k+1}^{\infty}b_i=r_{2k},$$

то множина E неповних сум ряду $\sum\limits_{i=1}^{\infty}b_k$, є досконалою ніде не щільною множиною [**4**]. Її міра Лебега дорівнює

$$\lambda\left(E\right)=\lim_{n\to\infty}2^kR_k=\lim_{n\to\infty}2^kr_{2k}. \tag{23}$$

З правої частини нерівностей (10) випливає, що

$$\frac{1}{u_{2k+1}}<\frac{\sqrt{5}}{\varphi^{2k+1}},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Тоді одержимо

$$r_{2k}<\sqrt{5}\left(\frac{1}{\varphi^{2k+1}}+\frac{1}{\varphi^{2k+2}}+\cdots\right)=\frac{\varphi\sqrt{5}}{\varphi^{2k}}.$$

Тому

$$2^kr_{2k}<\frac{2^k\sqrt{5}}{\varphi^{2k}\cdot(\varphi-1)}=\varphi\sqrt{5}\left(\frac{2}{\varphi^2}\right)^k.$$

Перейдемо до границі в обох частинах останньої нерівності, одержимо

$$\lim_{k\to\infty}\left(2^kr_{2k}\right)\le\varphi\sqrt{5}\lim_{k\to\infty}\left(\frac{2}{\varphi^2}\right)^k=0,$$

оскільки $\dfrac{2}{\varphi^2}<1$. Отже, остання нерівність може бути переписана у вигляді

$$\lim_{k\to\infty}\left(2^kr_{2k}\right)\le 0.$$

Тоді з рівності (23) та властивостей міри Лебега слідує, що $\lambda\left(E\right)=0$.

Обчислимо розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини E. Зрозуміло, що

$$H^{\alpha}\left(E\right)=\lim_{k\to\infty}2^k\cdot\left(r_{2k}\right)^{\alpha}=$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(2\cdot r_{2k}^{\alpha/k}\right)^k = \begin{cases} 0, & \text{якщо } 2\cdot r_{2k}^{\alpha/k} < 1, \\ 1, & \text{якщо } 2\cdot r_{2k}^{\alpha/k} = 1, \\ \infty, & \text{якщо } 2\cdot r_{2k}^{\alpha/k} > 1. \end{cases}$$

Розглянемо випадок $2\cdot r_{2k}^{\alpha/k} = 1$. Звідки

$$\alpha(k) = \frac{-k\cdot\ln 2}{\ln r_{2k}}.$$

Оскільки, в останній рівності маємо залежність від k, то зрозуміло, що

$$\alpha = \lim_{k\to\infty}\alpha(k) = \lim_{k\to\infty}\frac{-k\cdot\ln 2}{\ln r_{2k}}.$$

Використовуючи оцінки (11) та (12) можна довести, що

$$\sqrt{5}\left(\frac{1}{\varphi^{2k+1}} + \frac{1}{\varphi^{2k+3}}\right) < r_{2k} < \sqrt{5}\left(\frac{1}{\varphi^{2k}} + \frac{1}{\varphi^{2k+2}}\right).$$

А тому, правильними є наступні нерівності

$$\ln\frac{\sqrt{5}\,(1+\varphi^2)}{\varphi^{2k+3}} < \ln r_{2k} < \ln\frac{\sqrt{5}\,(1+\varphi^2)}{\varphi^{2k+2}},$$

$$\frac{\ln 2}{\ln\frac{\sqrt{5}(1+\varphi^2)}{\varphi^{2k+2}}} < \frac{\ln 2}{\ln r_{2k}} < \frac{\ln 2}{\ln\frac{\sqrt{5}(1+\varphi^2)}{\varphi^{2k+3}}}.$$

Отже,

$$\frac{-k\cdot\ln 2}{\ln\frac{\sqrt{5}(1+\varphi^2)}{\varphi^{2k+3}}} < \frac{-k\cdot\ln 2}{\ln r_{2k}} < \frac{-k\cdot\ln 2}{\ln\frac{\sqrt{5}(1+\varphi^2)}{\varphi^{2k+2}}}.$$

Обчислимо границі лівої та правої частини останньої системи нерівностей. Будемо мати

$$\lim_{k\to\infty}\frac{-k\cdot\ln 2}{\ln\frac{\sqrt{5}(1+\varphi^2)}{\varphi^{2k+3}}} = \lim_{k\to\infty}\frac{-k\cdot\ln 2}{\ln\sqrt{5}\,(1+\varphi^2) - (2k+3)\ln\varphi} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{-\ln 2}{\frac{\ln\sqrt{5}(1+\varphi^2)}{k} - \left(2+\frac{3}{k}\right)\ln\varphi} = \frac{\ln 2}{2\ln\varphi} = \log_{\varphi^2} 2;$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{-k\cdot\ln 2}{\ln\frac{\sqrt{5}(1+\varphi^2)}{\varphi^{2k+2}}} = \lim_{k\to\infty}\frac{-k\cdot\ln 2}{\ln\sqrt{5}\,(1+\varphi^2) - (2k+2)\ln\varphi} =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{-\ln 2}{\frac{\ln\sqrt{5}(1+\varphi^2)}{k} - \left(2+\frac{2}{k}\right)\ln\varphi} = \frac{\ln 2}{2\ln\varphi} = \log_{\varphi^2} 2.$$

Тоді, за теоремою про границю проміжної послідовності, можемо стверджувати, що

$$\lim_{k\to\infty}\alpha(k) = \lim_{k\to\infty}\frac{-k\cdot\ln 2}{\ln r_{2k}} = \log_{\varphi^2} 2.$$

Отже, розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини E дорівнює $\log_{\varphi^2} 2$. $\square$

Нехай

$$W_n = \begin{cases} \{c, 1-c\}, & \text{при} \quad n = 2k-1, \\ c, & \text{при} \quad n = 2k, \end{cases}$$

$$W'_m = \begin{cases} c, & \text{при} \quad m = 2k-1, \\ \{c, 1-c\}, & \text{при} \quad m = 2k, \end{cases}$$

де $c \in \{0,1\}$, $k \in \mathbb{N}$. Через $C\left[\Phi, W_n\right]$ $\left(C\left[\Phi, W'_m\right]\right)$ будемо позначати множину всіх чисел з відрізка $[0, S]$, для яких $n(m)$-ий символ їх Φ-зображення набуває значень з множини W_n $\left(W'_m\right)$.

Теорема 3. *$C\left[\Phi, W_n\right] = H_1$ та $C\left[\Phi, W'_m\right] = H_2$ — нульмірні (в розумінні Лебега) множини, розмірність Хаусдорфа–Безиковича яких дорівнює $\log_{\varphi^2} 2$, де $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.*

Доведення. Покажемо, що $\lambda\left(H_1\right) = 0$.

Зрозуміло, що

$$H_1 \subset \bigcup_{(f_1,\ldots,f_{2k-1})} \Delta_{f_1 c f_3 c \ldots f_{2k-1} c},$$

де $f_i, c \in \{0,1\}$, $i = \{1, 3, \ldots, 2k-1\}$, причому виконується нерівність

$$\lambda\left(H_1\right) \leq 2^k \left|\Delta_{f_1 c f_3 c \ldots f_{2k-1} c}\right|.$$

З неперервності міри Лебега та рівності (23) слідує, що

$$\lambda\left(H_1\right) = \lim_{k\to\infty} 2^k \left|\Delta_{f_1 c f_3 c \ldots f_{2k-1} c}\right| = \lim_{k\to\infty} \left(2^k r_{2k}\right) = 0.$$

Тоді, зрозуміло, що

$$H^\alpha\left(H_1\right) = \varliminf_{k\to\infty} 2^k \cdot \left(\left|\Delta_{f_1 c f_3 c \ldots f_{2k-1} c}\right|\right)^\alpha = \varliminf_{n\to\infty} 2^k \cdot \left(r_{2k}\right)^\alpha$$

і, як випливає з міркувань наведених у теоремі 2, $\alpha = \log_{\varphi^2} 2$.

Аналогічно, маємо

$$H_2 \subset \bigcup_{(f_2,\ldots,f_{2k-2})} \Delta_{c f_2 c f_4 \ldots f_{2k-2} c},$$

де $f_i, c \in \{0,1\}$, $i = \{2, 4, \ldots, 2k-2\}$, причому виконується нерівність

$$\lambda\left(H_2\right) \leq 2^{k-1} \left|\Delta_{c f_2 c f_4 \ldots f_{2k-2} c}\right|.$$

З неперервності міри Лебега слідує, що

$$\lambda\left(H_2\right) = \lim_{k\to\infty} 2^{k-1} \left|\Delta_{c f_2 c f_4 \ldots f_{2k-2} c}\right| = \lim_{k\to\infty} \left(2^{k-1} r_{2k-1}\right).$$

Використовуючи ті ж міркування, що й при доведенні теореми 2, нескладно переконатися, що

$$\lim_{k\to\infty} \left(2^{k-1} r_{2k-1}\right) = 0.$$

А, отже, $\lambda(H_2)=0$.

Обчислимо розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини H_2. Зрозуміло, що

$$H^\alpha(H_2)=\lim_{k\to\infty}2^{k-1}\cdot\left(|\Delta_{cf_2cf_4\ldots f_{2k-2}c}|\right)^\alpha=\lim_{k\to\infty}2^{k-1}\cdot(r_{2k-1})^\alpha=$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(2^{\frac{k-1}{k}}\cdot r_{2k-1}^{\alpha/k}\right)^k=\begin{cases}0, & \text{якщо } 2^{\frac{k-1}{k}}\cdot r_{2k-1}^{\alpha/k}<1,\\ 1, & \text{якщо } 2^{\frac{k-1}{k}}\cdot r_{2k-1}^{\alpha/k}=1,\\ \infty, & \text{якщо } 2^{\frac{k-1}{k}}\cdot r_{2k-1}^{\alpha/k}>1.\end{cases}$$

З того, що $H^\alpha(H_2)=1$ при умові, що $2^{\frac{k-1}{k}}\cdot r_{2k-1}^{\alpha/k}=1$, одержуємо

$$r_{2k-1}^{\alpha/k}=2^{-\frac{k-1}{k}},$$

$$(r_{2k-1})^\alpha=2^{-(k-1)}.$$

Звідки

$$\alpha(k)=\frac{(1-k)\cdot\ln 2}{\ln r_{2k-1}}.$$

Оскільки, в останній рівності маємо залежність від k, то

$$\alpha=\lim_{k\to\infty}\alpha(k)=\lim_{k\to\infty}\frac{(1-k)\cdot\ln 2}{\ln r_{2k-1}}.$$

Використовуючи оцінки (11) та (12) нескладно показати, що

$$\frac{2\sqrt{5}}{(\varphi-1)\varphi^{2k+1}}<r_{2k-1}<\frac{2\sqrt{5}}{(\varphi-1)\varphi^{2k}},\quad k\in\mathbb{N}.$$

Тоді

$$\ln\frac{2\sqrt{5}}{\varphi^{2k}}<\ln r_{2k-1}<\ln\frac{2\sqrt{5}}{\varphi^{2k-1}},$$

$$\frac{\ln 2}{\ln\frac{2\sqrt{5}}{\varphi^{2k-1}}}<\frac{\ln 2}{\ln r_{2k-1}}<\frac{\ln 2}{\ln\frac{2\sqrt{5}}{\varphi^{2k}}},$$

$$\frac{(1-k)\ln 2}{\ln\frac{2\sqrt{5}}{\varphi^{2k}}}<\frac{(1-k)\ln 2}{\ln r_{2k-1}}<\frac{(1-k)\ln 2}{\ln\frac{2\sqrt{5}}{\varphi^{2k-1}}}.$$

Покажемо, що границі лівої та правої частин останньої нерівності рівні. Обчислюємо

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(1-k)\ln 2}{\ln\frac{2\sqrt{5}}{\varphi^{2k}}}=\lim_{k\to\infty}\frac{(1-k)\ln 2}{\ln 2\sqrt{5}-2k\ln\varphi}=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln 2}{\frac{2k}{k-1}\ln\varphi}=\frac{\ln 2}{2\ln\varphi}=\log_{\varphi^2}2;$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{(1-k)\ln 2}{\ln\frac{2\sqrt{5}}{\varphi^{2k-1}}}=\lim_{k\to\infty}\frac{(1-k)\ln 2}{\ln 2\sqrt{5}-(2k-1)\ln\varphi}=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln 2}{\frac{2k-1}{k-1}\ln\varphi}=\frac{\ln 2}{2\ln\varphi}=$$
$$=\log_{\varphi^2}2.$$

Тоді, за теоремою про границю проміжної послідовності, маємо

$$\lim_{k\to\infty}\alpha(k)=\lim_{k\to\infty}\frac{(1-k)\cdot\ln 2}{\ln r_{2k-1}}=\log_{\varphi^2}2.$$

Отже, розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини H_2 дорівнює $\log_{\varphi^2} 2$. $\square$

Література

[1] *R. André-Jeannin R,* Irrationalite de la somme des inverses de certaines suites recurrentes / R. André-Jeannin // C. R. Acad. Sci. Paris. — Ser. I Math. — 1989. — **308**. — P. 539-541.

[2] *Bundschuh P., Väänänen K.* Arithmetical investigations of a certain infinite product // Compositio Math. — 1994. — **91**, no. 2. — P. 175-199.

[3] *Duverney D.* Irrationalite de la somme des inverses de la suite de Fibonacci / D. Duverney // Elem. Math. — 1997. — **52**. — P. 31-36.

[4] *Kakeya S.* On the partial sums of an infinite series / S. Kakeya // Science Reports Tôhoku Imp. Univ. — 1914. — **1**, № 3. — P. 159–163.

[5] *Melham R.S.* On some reciprocal sums of Brousseau: An alternative approach to that of Carlitz // Fibonacci Quart., 2003. — **41**. — P. 59-62.

[6] *Miller M. D.* On generalized Fibonacci numbers / M. D. Miller // Amer. Math. Monthly, 1971. — **78**. — P. 1108-1109.

[7] *Rabinowitz S.* Algorithmic summation of reciprocals of products of fibonacci numbers / S. Rabinowitz // Reprinted from The Fibonacci Quarterly. — 1999. — **37**. — P. 122-127.

[8] *Rachidi M.* Extending generalized Fibonacci sequences and their Binet-type formula / M. Rachidi, O. Saeki // Advances in Difference Equations, 2006. — **2006**, № 5. — P. 1-11. (Article ID 23849)

[9] *Василенко Н. М.* Фібоначчієві подання дійсних чисел / Н. М. Василенко // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2005. — **6.** — С. 261-271.

[10] *Василенко Н. М.* Деякі метричні співвідношення, породжені Ф-зображенням дійсних чисел / Н. М. Василенко // Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз.-мат. науки. — Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2006. — **7.** — С. 190-203.

[11] *Ядренко М. Й.* Дискретна математика: навчальний посібник / М.Й. Ядренко. — К.: МП "ТВiМС 2004. — 245 с.

[12] http://www.numericana.com/answer/constants.htm

[13] http://en.wikipedia.org/wiki/Reciprocal_Fibonacci_constant

References

[1] André-Jeannin R., *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I Math.*, 1989, №308, pp. 539-541.

[2] Bundschuh P., Väänänen K., *Compositio Math.*, 1994, 91, №2, pp. 175-199.

[3] Duverney D., *Elem. Math.*, 1997, №52, pp. 31-36.

[4] Kakeya S., *Science Reports Tôhoku Imp. Univ.*, 1914, №3, pp. 159–163.

[5] Melham R., *Fibonacci Quart.*, 2003, №41, pp. 59-62.

[6] Miller M., *Amer. Math. Monthly*, 1971, №78, pp. 1108-1109.

[7] Rabinowitz S., *Reprinted from The Fibonacci Quarterly.*, 1999, №37, pp. 122-127.

[8] Rachidi M., *Advances in Difference Equations*, 2006, №5, pp. 1-11. (Article ID 23849)

[9] Vasylenko N., *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)*, 2005, №6, pp. 261-271.

[10] Vasylenko N., *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)*, 2006, №7, pp. 190-203.

[11] Yadrenko M., *Dyskretna matematyka (Discrete mathematics)*, 2004, 245 p.

[12] http://www.numericana.com/answer/constants.htm

[13] http://en.wikipedia.org/wiki/Reciprocal_Fibonacci_constant