Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13 (2).— С. 69–76.

Інтегральні рівняння із узагальненими функціями Лежандра

О. М. Лисецька,

Національний технічний університет України «КПІ»

Анотація. У даній статті побудовано нові інтегральні зображення для узагальнених функцій Лежандра першого роду різної структури. Знайдено розв'язки інтегральних рівнянь із узагальненими функціями Лежандра.r

Ключові слова: узагальнені функції Лежандра, інтегральні рівняння.

Integral equations for generalized Legendre functions

O. M. Lisetska,

National Technical University of Ukraine "KPI"

Abstract. In this paper new integral representations for generalized Legendre functions of the first kind with different structure are constructed. Solutions of integral equations with generalized Legendre functions are established.

AMS Subject Classifications (2010): 46F30, 65R20

Key words: generalized Legendre functions, differential equations.

Вступ

При розв'язувані різноманітних задач, зокрема при вирішенні диференціальних рівнянь, крайових задач математичної фізики, астрономії, прикладної математики та ін. виникає потреба розгляду спеціальних функцій. Особливе місце серед спеціальних функцій посідає гіпергеометрична функція Гаусса, її частинні та вироджені випадки. Найвідомішими серед них є функції Лежандра. Існують різні узагальнення звичайних та приєднаних функцій Лежандра. В [1] були запроваджені узагальнені приєднані функції Лежандра, що залежать від трьох параметрів. Дослідженню різноманітних властивостей цих функцій присвячена [2].

Використовуючи (τ, β)-узагальнену за Райтом гіпергеометричну функцію в [3] було розглянуто (τ, β)-узагальнені функції Лежандра:

$$ {}^{\tau,\beta}P_k^{m,n}(z) = \frac{1}{\Gamma(1-m)} \frac{(z+1)^{n/2}}{(z-1)^{m/2}} \times $$

$$\times {}_2F_1^{\tau,\beta}\left(k-\frac{m-n}{2}+1,-k-\frac{m-n}{2};1-m;\frac{1-z}{2}\right), \qquad (1)$$

$$\left(|arg(z\pm 1)|<\pi;|z-1|<2;k+\frac{m+n}{2}\neq -1,-2,...,k-\frac{m-n}{2}\neq 0,\pm 1,\pm 2,...,\right.$$

$$\left.m\neq 1,2,...,Re\left(\frac{m-n}{2}-k\right)<1,Re\left(\frac{m+n}{2}-k\right)<1,\tau>0,\beta>0,\tau-\beta\leq 1\right),$$

де ${}_2F_1^{\tau,\beta}$ — (τ,β)-узагальнена гіпергеометрична функція [4]:

$${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}{}_1\Psi_1\left[\begin{array}{ll}(a,1), & (c,\tau)\\ (c,\beta) & \end{array}\middle| zt^{\tau}\right]dt, \qquad (2)$$

де ${}_p\Psi_q$ — узагальнена гіпергеометрична функція Райта [5].

Зображення рядом для функції (2) має вигляд [4]:

$${}_2F_1^{\tau,\beta}(a,b;c;z)=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(b+n\tau)}{\Gamma(c+n\beta)}\frac{z^n}{n!}. \qquad (3)$$

В [6] було здійснено подальше узагальнення функцій Лежандра за допомогою r-узагальненої гіпергеометричної функції, яке має наступний вигляд:

$${}_r^{\tau,\beta}P_k^{m,n}(z)=\frac{1}{\Gamma(1-m)}\frac{(z+1)^{n/2}}{(z-1)^{m/2}}\times$$

$$\times {}_rF^{\tau,\beta}\left(k-\frac{m-n}{2}+1,-k-\frac{m-n}{2};1-m;\frac{1-z}{2}\right), \qquad (4)$$

$$\left(k+\frac{m+n}{2}\neq -1,-2,...,k-\frac{m-n}{2}\neq 0,\pm 1,\pm 2,...,m\neq 1,2,...,|z-1|<2\right)$$

де ${}_rF^{\tau,\beta}$ — r-узагальнена гіпергеометрична функція [7]:

$${}_rF^{\tau,\beta}(a,b;c;z)=\frac{1}{B(b,c-b)}\int_0^1 t^{b-1}(1-b)^{c-b-1}(1-zt)^{-a}{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t(1-t)}\right)dt, \qquad (5)$$

де $Re(c)>Re(b)>0,r>0;r=0,|z|<1;Re\gamma>Re\alpha>0,\{\tau,\beta\}\subset\mathbb{R},\tau>0,\tau-\beta<1,B(...)$ — звичайна бета-функція [8], ${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}$ — (τ,β)-узагальнена конфлюентна гіпергеометрична функція [9]:

$${}_1\Phi_1^{\tau,\beta}(a;c;z)=\frac{1}{B(a,c-a)}\int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{c-a-1}{}_1\Psi_1\left[\begin{array}{l}(c,\tau)\\ (c,\beta)\end{array}\middle| zt^{\tau}\right]dt. \qquad (6)$$

Тут знову ${}_p\Psi_q$ — узагальнена гіпергеометрична функція Райта [5].

Зображення рядом для (5) має вигляд [6]:

$${}_rF^{\tau,\beta}(a,b;c;z)=\frac{1}{B(b,c-b)}\sum_{n=0}^{\infty}(a)_{n\tau,\beta}B_{\alpha}^{\gamma}(b+n,c-b;r)\frac{z^n}{n!}, \qquad (7)$$

$$(r>0,Rec>Reb>0;\tau,\beta\subset\mathbb{R},\tau>0,\tau-\beta<1,Re\gamma>Re\alpha>0)$$

де $(a)_n$ — символ Похгаммера, ${}_{\tau,\beta}B^{\gamma}_{\alpha}$ — (τ,β)-узагальнена бета функція [4]:

$$ {}_{\tau,\beta}B^{\gamma}_{\alpha}(x,y;r;\sigma;\omega)=\int_0^1 t^{x-1}(1-x)^{y-1}{}_1\Phi_1^{\tau,\beta}\left(\alpha;\gamma;-\frac{r}{t^{\sigma}(1-t)^{\omega}}\right)dt, $$

тут $Rex>0, Rey>0, \sigma>0, \omega>0, {}_1\Phi_1^{\tau,\beta}$ — узагальнена конфлюентна гіпергеометрична функція (6).

При $k=-\nu-1, m=n=\mu$ в (1) і (4) отримаємо відповідно (τ,β)- і r-узагальнені приєднані функції Лежандра першого роду.

При $r=0$ в (4) матимемо узагальнену приєднану функцію Лежандра першого роду [2].

[6] містить дослідження основних рекурентних, диференціальних, інтегральних, граничних співвідношень для r-узагальнених функцій Лежандра.

Дана стаття присвячена подальшому розвитку теорії узагальнених функцій Лежандра, а саме: побудові інтегральних зображень цих функцій та розв'язку інтегральних рівнянь із узагальненими функціями Лежандра першого роду.

1. Інтегральні зображення узагальнених функцій Лежандра

Інтегральні зображення є важливим і зручним інструментом при розв'язку різноманітних крайових та змішаних задач математичної фізики, інтегральних рівнянь із цими функціями під інтегралом та ін. Інтегральні зображення (τ,β)- та r-узагальнених функцій Лежандра містяться в наступних лемах.

Лема 1. *При виконанні умов існування функції ${}^{\tau}P^{\mu}_{\nu}$ справедливі наступні інтегральні зображення:*

$$ {}^{\tau}P^{\mu}_{\nu}(z)=\frac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\lambda+1)\Gamma(-\lambda-\mu-\nu)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\int_0^1\frac{t^{\lambda}}{(1-t)^{\mu+\nu+\lambda+1}}\times $$
$$ \times{}_2F_1(-\nu,-\mu-\nu;-\mu-\nu-\lambda;1-t){}_2F_1^{\tau}\left(-\nu,1;\lambda+1;\frac{(1-z)t^{\tau}}{2}\right)dt, \tag{8} $$
$$ (Re\lambda>-1, Re(\lambda+\mu+\nu)<0)\,; $$

$$ {}^{\tau}P^{\mu}_{\nu}(z)=\frac{\Gamma(d)}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(\nu+d-\lambda+1)\Gamma(\lambda-\mu-\nu-1)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\times $$
$$ \times\int_0^1\frac{t^{d+\nu-\lambda}}{(1-t)^{\mu+\nu-\lambda+2}}{}_2F_1(d-\nu-1,-\mu-\nu;\lambda-\mu-\nu-1;1-t)\times $$
$$ \times{}_2F_1^{\tau}\left(-\nu,d;\nu+d-\lambda-1;\frac{(1-z)t^{\tau}}{2}\right)dt, \tag{9} $$
$$ (Re(\nu+d-\lambda)>-1, Re(\lambda-\mu-\nu)>1, Red>0, Re(d-\nu)>1)\,. $$

Лема 2. *Якщо виконуються умови існування функцій ${}_rP_\nu^\mu$ та ${}_rP_k^{m,n}$, то:*

$$
{}_rP_\nu^\mu(z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\alpha')}{\Gamma(1-\mu)\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma+\lambda-\alpha)\Gamma(\alpha+\alpha'-\lambda)}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^{\frac{\mu}{2}}\times
$$

$$
\int_0^1 t^{\alpha+\alpha'-\lambda}(1-t)^{\gamma+\lambda-\alpha-1}{}_2F_1(\alpha',\gamma-\alpha;\gamma+\lambda-\alpha;1-t)\times
$$

$$
\times{}_rF\left(\begin{array}{cccc} -\nu, & \nu+1; & 1-\mu; & \frac{1-z}{2} \\ \alpha+\alpha', & \alpha+\alpha'-\lambda; & & rt \end{array}\right)dt, \tag{10}
$$

$$
(Re\alpha'>0, Re(\gamma+\lambda-\alpha)>0, Re(\alpha+\alpha'-\lambda)>0)\,;
$$

$$
{}^\tau P_k^{m,n}(z) = \frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(\alpha+\alpha')}{\Gamma(1-m)\Gamma(\alpha)\Gamma(\gamma+\lambda-\alpha)\Gamma(\alpha+\alpha'-\lambda)}\frac{(z+1)^{n/2}}{(z-1)^{m/2}}\times
$$

$$
\times\int_0^1 t^{\alpha+\alpha'-\lambda}(1-t)^{\gamma+\lambda-\alpha-1}{}_2F_1(\alpha';\gamma-\alpha;\gamma+\lambda-\alpha;1-t)\times
$$

$$
\times{}_rF\left(\begin{array}{cccc} k-\frac{m-n}{2}+1, & -k-\frac{m-n}{2}; & 1-m; & \frac{1-z}{2} \\ \alpha+\alpha', & \alpha+\alpha'-\lambda; & & rt \end{array}\right)dt, \tag{11}
$$

$$
(Re(\alpha+\alpha')>0, Re(\alpha+\alpha'-\lambda)>0, Re(\gamma+\lambda-\alpha)>0)\,,
$$

де через ${}_rF\left(\begin{array}{cccc} a, & b; & c; & z \\ \alpha, & \gamma; & & r \end{array}\right) = {}_rF(a,b;c;z)$ *позначена r-узагальнена функція Гаусса ((5) при $\tau=\beta=1$).*

Доведення. Для доведення співвідношень (8)–(11) використовується означення функцій Лежандра, зображення рядом гіпергеометричних функцій та елементи теорії дробового диференціювання. Всі доведення виконуються аналогічно. Доведемо, наприклад, (8). Для цього, використовуючи означення дробової похідної [10]

$$
\frac{d^\nu\omega^{\mu-1}}{d\omega^\nu} = \frac{\Gamma(\mu)\omega^{\mu-\nu-1}}{\Gamma(\mu-\nu)},
$$

перетворимо наступні вирази:

$$
(1-zt^\tau)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}z^nt^{n\tau} = \frac{d^\lambda}{dt^\lambda}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n}{n!}\frac{\Gamma(n\tau+1)}{\Gamma(\lambda+n\tau+1)}z^nt^{\lambda+n\tau}\right) =
$$

$$
= \frac{1}{\Gamma(\lambda+1)}\frac{d^\lambda}{dt^\lambda}\left(t^\lambda{}_2F_1\left(a,1;\lambda+1;zt^\tau\right)\right),
$$

$$
\frac{d^\lambda}{d(1-t)^\lambda}\left(t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\right) = \frac{d^\lambda}{d(1-t)^\lambda}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-b)_n}{n!}(1-t)^{c-b+n-1}\right) =
$$

$$
= \frac{\Gamma(c-b)}{\Gamma(c-b-\lambda)}(1-t)^{c-b-\lambda-1}{}_2F_1(1-b,c-b;c-b-\lambda;1-t).
$$

Скориставшись останніми двома рівностями та формулою дробового інтегрування частинами, запишемо:

$$
{}_2F_1^{\tau}(a,b;c;z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-zt^{\tau})^{-a}dt =
$$

$$
= \frac{1}{B(b,c-b)\Gamma(\lambda+1)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1} \frac{d^{\lambda}}{dt^{\lambda}} \left(t^{\lambda}{}_2F_1^{\tau}(a,1;\lambda+1;zt^{\tau})\right) dt =
$$

$$
= \frac{1}{B(b,c-b)\Gamma(\lambda+1)} \int_0^1 t^{\lambda}{}_2F_1^{\tau}(a,1;\lambda+1;zt^{\tau}) \frac{d^{\lambda}}{d(1-t)^{\lambda}} \left(t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}\right) dt =
$$

$$
= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(\lambda+1)\Gamma(c-b-\lambda)} \int_0^1 t^{\lambda}(1-t)^{c-b-\lambda-1}{}_2F_1(1-b,c-b;c-b-\lambda;1-t)\times
$$

$$
\times{}_2F_1^{\tau}(a,1;\lambda+1;zt^{\tau})dt.
$$

Далі, використавши означення τ-узагальненої функції Лежандра, отримаємо шукане інтегральне зображення (8). $\square$

2. Інтегральні рівняння із узагальненими функціями Лежандра

У даному розділі подамо розв'язки двох інтегральних рівнянь, що містять τ- та r-узагальнені функції Лежандра першого роду відповідно. Справедливі наступні теореми.

Теорема 1. *Інтегральне рівняння*

$$
\int_t^1 \frac{\Gamma(1-m)(-1)^{m/2}2^{\frac{m-n}{2}}\lambda^{m/2}}{(\mu-\lambda)^{\frac{m-n}{2}}(u-t)^{m/2}(\mu-\lambda-\lambda(u-t))^{n/2}}\times
$$

$$
\times{}_rP_k^{m,n}\left(1-\frac{2\lambda(u-t)}{\mu-\lambda}\right) f(u,t)du = \phi(t), \tag{12}
$$

де $f(u,t)$ — шукана функція, $\phi(t)$ визначена на $I=\{t: c\le t\le 1\}$, $\phi'(t)$ — кусково-неперервна на I, $\phi(1)=0$, $Re(\sigma+m)>1$, ${}_rP_k^{m,n}(z)$ — r-узагальнена функція Лежандра першого роду ((4) при $\tau=\beta=1$),

має розв'язок:

$$
f(u,t) = -C\int_u^1 \frac{A(v,u)}{B(v,t)}d\phi(v),
$$

де $C = \frac{\Gamma(k-\frac{m-n}{2})}{\Gamma(\sigma+m-1)}B(-k-\frac{m-n}{2}, k-\frac{m+n}{2}+1)$,

$$
A(v,u) = \Gamma(\sigma+m-1)\frac{(-\mu)^{1-\frac{\sigma+m}{2}}(v-u)^{\frac{\sigma+m}{2}+1}(\mu-\lambda)^{k+\frac{\sigma}{2}}}{2^{k+\frac{\sigma}{2}}(\mu-\lambda-\mu(v-u))^{k+1-\frac{m}{2}}}\times
$$

$$
\times P_{\frac{n-m-\sigma}{2}}^{2-\sigma-m,2k-m+2}\left(1-\frac{2\mu(v-u)}{\mu-\lambda}\right),
$$

$$
B(v,t) = \frac{(v-t)^{\frac{\sigma-1}{2}}}{2^{k+\frac{\sigma}{2}}}(\mu-\lambda)^{k+\frac{\sigma}{2}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(k-\frac{m-n}{2}+l+1\right)\mu^{\frac{1-\sigma-l}{2}}(t-v)^{l/2}\lambda^{l}}{(\mu-\lambda)^{l}l!(\mu-\lambda-\mu(v-t))^{k+\frac{1-l}{2}}}\times
$$

$$\times B_\alpha^\gamma\left(l-k+\frac{m-n}{2};k-\frac{m+n}{2}+1;r\right)P_{\frac{n-m-\sigma}{2}}^{1-\sigma-l,2k-l+1}\left(1-\frac{2\mu(v-t)}{\mu-\lambda}\right).$$

Доведення. Вагому роль при доведенні теореми відіграватиме так звана «інтегральна теорема додавання» для r-узагальненої гіпергеометричної функції:

$$\int_0^1 x^{c-1}(1-x)^{\sigma-c-1}{}_2F_1(a,\sigma-b;\sigma-c;\mu y(1-x))_rF(a,b;c;\lambda xy)dx=$$

$$=\frac{\Gamma(\sigma-c)}{\Gamma(a)B(b,c-b)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(a+n)\Gamma(c+n)}{\Gamma(\sigma+n)}B_\alpha^\gamma(b+n;c-b;r)\frac{\lambda^n y^n}{n!}{}_2F_1(a,\sigma-b;\sigma+n;\mu y). \quad (13)$$

Для перевірки цієї формули використовуються розвинення в ряд для звичайної та r-узагальненої гіпергеометричних функцій.

Щоб довести теорему підставимо розв'язок $f(u,t)$ у ліву частину рівняння та змінимо порядок інтегрування:

$$\int_t^1 \frac{\Gamma(1-m)(-1)^{m/2}2^{\frac{m-n}{2}}\lambda^{m/2}}{(\mu-\lambda)^{\frac{m-n}{2}}(u-t)^{m/2}(\mu-\lambda-\lambda(u-t))^{n/2}}\times$$

$$\times{}_rP_k^{m,n}\left(1-\frac{2\lambda(u-t)}{\mu-\lambda}\right)f(u,t)du=-C\int_t^1\frac{\Gamma(1-m)(-1)^{m/2}2^{\frac{m-n}{2}}}{(u-t)^{m/2}(\mu-\lambda-\lambda(u-t))^{n/2}}\times$$

$$\times\frac{\lambda^{m/2}}{(\mu-\lambda)^{\frac{m-n}{2}}}{}_rP_k^{m,n}\left(1-\frac{2\lambda(u-t)}{\mu-\lambda}\right)du\int_u^1\frac{A(v,u)}{B(v,t)}d\phi(v)=$$

$$=-C\int_t^1\frac{d\phi(v)}{B(v,t)}\int_t^v\frac{\Gamma(1-m)(-1)^{m/2}2^{\frac{m-n}{2}}\lambda^{m/2}}{(\mu-\lambda)^{\frac{m-n}{2}}(u-t)^{m/2}(\mu-\lambda-\lambda(u-t))^{n/2}}\times$$

$$\times{}_rP_k^{m,n}\left(1-\frac{2\lambda(u-t)}{\mu-\lambda}\right)A(v,u)du.$$

Зауважимо, що після підстановок

$$u-t=x(\mu-\lambda)^{1/\tau}y^{1/\tau},v-u=(\mu-\lambda)^{1/\tau}y^{1/\tau}(1-x)$$

згідно формули для $A(v,u)$ та означення r-узагальненої функції Лежандра, внутрішній інтеграл дає результат вигляду (13). Врахувавши умови теореми, формулу (13), після перетворень переконуємося у правильності представленого розв'язку.

□

Теорема 2. *Інтегральне рівняння*

$$\int_t^1\frac{\Gamma(1-m)(-1)^{m/2}2^{\frac{m-n}{2}}\lambda^{m/2}(u-t)^{\frac{m(\tau-2)}{2}}}{(\mu-\lambda)^{\frac{m-n}{2}}(\mu-\lambda-\lambda(u-t)^\tau)^{n/2}}\times$$

$$\times{}^\tau P_k^{m,n}\left(1-\frac{2\lambda(u-t)^\tau}{\mu-\lambda}\right)f(u,t)du=\phi(t), \quad (14)$$

де $f(u,t)$ — *шукана функція,* $\phi(t)$ *визначена на* $I = \{t : c \le t \le 1\}$, $\phi'(t)$ — *кусково-неперервна на* $I, \phi(1) = 0, Re(\sigma+m) > 1, Re(\sigma+k-\frac{m-n}{2}) > 0$ ${}_rP_k^{m,n}(z)$ — r*-узагальнена функція Лежандра першого роду ((1) при* $\tau = \beta$*),*

має розв'язок:

$$f(u,t) = -C \int_u^1 \frac{A(v,u)}{B(v,t)} d\phi(v),$$

де $C = \frac{\Gamma(k-\frac{m-n}{2}+1)\Gamma(\sigma+k+\frac{m-n}{2})}{\Gamma(1-m)\Gamma(\sigma+m-1)}$,

$$A(v,u) = \Gamma(\sigma+m-1)\frac{(-1)^{\frac{\sigma+m}{2}}\mu^{1+\frac{\sigma+m}{2}}(\mu-\lambda)^{k+\frac{\sigma}{2}}(v-u)^{\frac{(\sigma+m-2)(\tau-2)}{2}}}{2^{k+\frac{\sigma}{2}}(\mu-\lambda-\mu(v-u)^{\tau})^{k+1-\frac{m}{2}}}\times$$

$$\times {}^{\tau}P_{\frac{n-m-\sigma}{2}}^{2-\sigma-m,2k-m+2}\left(1-\frac{2\mu(v-u)^{\tau}}{\mu-\lambda}\right),$$

$$B(v,t) = \frac{(-1)^{\frac{1-\sigma}{2}}}{(\mu-\lambda)^{\frac{m-n}{2}}}(v-t)^{\frac{(1-\sigma)(\tau-2)}{2}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k-\frac{m-n}{2}+l+1)\Gamma(\sigma+k-\frac{m-n}{2}+l\tau)}{(-1)^{\frac{l\tau}{2}}(\mu-\lambda-\lambda(v-t)^t au)^{\frac{n-m-\sigma,a-l\tau+1}{2}}}\times$$

$$\times\frac{\mu^l}{(\mu+\lambda)^l l!}(v-t)^{\frac{l\tau(2-\tau)}{2}}\,{}^{\tau}P_k^{1-\sigma-l\tau,n-m-\sigma-l\tau+1}.$$

Доведення. Доведення теореми 2 здійснюється аналогічно до теореми 1.

□

3. Висновки

У даній статті побудовано низку інтегральних зображень для узагальнених функцій Лежандра першого роду і розв'язано два інтегральних рівняння, які містять ці функції, що дає можливість зробити ще один крок у розвитку теорії спеціальних функцій. Отримані результати можуть бути застосовані при розв'язку задач математичної фізики та інших прикладних задач. Існує можливість побудови інших видів інтегральних зображень та розширення області їх застосування.

Література

[1] *Kuipers L., Meulenbeld B.* On a generalization of Legendre's associated differential equation // Proc. Kon. Nederl. Ak. Wet. A. — 1957. — 60, 4. — pp. 436–450.

[2] *Virchenko N.A., Fedotova I.A.* Generalized Associated Legendre Functions and Their Applications // World Scientific/ Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. — 2001. — 215 p.

[3] *Virchenko N.O., Rumiantseva O.V.* On the generalized Legendre functions // Intern. J. "Fractional Calculus and Appl. Analysis". — 2008. — v.11, №2. — pp. 175–185.

[4] *Virchenko N.* On the generalized confluent hypergeometric function and its application // J. "Fract. Calculus and Appl. Anal." — 2006. — 9, №2. — pp. 101-108.

[5] *Kilbas A.A., Saigo M.* H–Transforms. – Chapman and Hall / CRC. — 2004. — 390 p.

[6] *Kalla S. L., Virchenko N., Lisetska O.* Some results involving generalized associated Legendre functions // Integral Transforms and Special Functions — 2011. — 22, №9. — pp. 631–645.

[7] *Вірченко Н.О., Лисецька О.М., Овчаренко О.В.* До теорії узагальнених функцій гіпергеометричного типу та їх застосування // Доп. НАН України. — 2009. — №5. — С. 7–15.

[8] *Erdelyi A.,Magnus W., Oberhettinger F., and Tricomi F.G.* Higher Transcendental Function, Vol. 1, McGraw-Hill, NewYork. — 1953.

[9] *Virchenko N.* On the generalized confluent hypergeometric function and its application // Fract. Calc. Appl. Anal. — 2006. — 9, №2. — C. 101-–108.

[10] *Erdelyi A.* Transformation of hypergeometric integrals by means of fractional integration by parts // Quart. J. Math. (Oxford) — 1939. — 10. — C. 176–189.

[11] *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции: гипергеометрическая функция, функции Лежандра. — М.: Наука. — 1973. — Т.1. — 296 с.

References

[1] Kuipers L., Meulenbeld B. *Proc. Kon. Nederl. Ak. Wet. A.*, 1957, **60**, 4, pp. 436–450.

[2] Virchenko N.A., Fedotova I.A. *Generalized Associated Legendre Functions and Their Applications*, 2001, 215 p.

[3] Virchenko N.O., Rumiantseva O.V. *Intern. J. "Fractional Calculus and Appl. Analysis"*, 2008, **11**, pp. 175–185.

[4] Virchenko N. *Intern. J. "Fract. Calculus and Appl. Anal."*, 2006, **9**, pp. 101–108.

[5] Kilbas A.A., Saigo M. *H–Transforms.*, 2004, 390 p.

[6] Kalla S. L., Virchenko N., Lisetska O. *Integral Transforms and Special Functions*, 2011, **22**, pp. 631–645.

[7] Virchenko N.O., Lysecka O.M., Ovcharenko O.V. *Dop. NAN Ukrainy. (Reports of NAS of Ukraine)*, 2009, **5**, pp. 7–15.

[8] Erdelyi A., Magnus W., Oberhettinger F., Tricomi F.G. *Higher Transcendental Function*, 1953, vol. 1.

[9] Virchenko N. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 2006, **9**, pp. 101–108.

[10] Erdelyi A. *Quart. J. Math. (Oxford)*, 1939, **10**, pp. 176–189.

[11] Bateman H., Erdelyi A. *Vysshie transcendentnye funkcii: gipergeometricheskaja funkcija, funkcii Lezhandra. (Higher transcendental functions: hypergeometric function, Legendre functions.)*, 1973, vol. 1, 296 p.