Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13 (2).— С. 97–103.

Задача оптимального керування лінійною параболічною системою

М. М. Копець

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»

Анотація. В цій статті розглядається задача оптимального керування системою, що описується лінійними параболічними рівняннями. Використовуючи метод множників Лагранжа, отримано систему рівнянь Ейлера–Лагранжа. Для дослідження цих рівнянь виведене матричне диференціальне рівняння Ріккаті з частинними похідними. Доведено також єдиність оптимального керування.

Ключові слова: оптимальне керування, квадратична функція, рівняння Ейлера–Лагранжа, лінійне параболічне диференціальне рівняння, метод множників Лагранжа, матричне рівняння Ріккаті.

The problem of optimal control by the system governed by linear parabolic PDEs

M. Kopets

The National Technical University of Ukraine "KPI"

Abstract. In this paper the problem of optimal control by the system governed by linear parabolic partial differential equations is considered. Using Lagrange multiplier method the system of Euler–Lagrange equations is obtained. For investigation of these equations the matrix partial differential Riccati equation is derived. The uniqueness of optimal control also is proved.

AMS Subject Classifications (2010): 35K67, 35K99.

Key words: optimal control, quadratic functional, singular system of linear partial differential equations, Lagrange multiplier method, Euler-Lagrange equations, matrix Riccati equation.

Вступ

В теорії оптимального керування важливе місце займає лінійно-квадратична задача. Цей термін означає, що потрібно знайти екстремальне значення квадратичного функціонала на множині розв'язків деякої системи лінійних диференціальних рівнянь, праві частини яких певним чином залежать від одного або декількох параметрів (керувань). Якщо поведінка керованого об'єкта описується системою звичайних диференціальних рівнянь, то мова йде про системи із зосередженими параметрами. У випадку диференціальних рівнянь з частинними похідними маємо систему із розподіленими параметрами. Існує досить широкий бібліографічний список по теорії оптимального керування системами із зосередженими параметрами (наприклад, деяку частину цього списку можна знайти в монографіях [1] або [4]. Задачі оптимального керування системами із розподіленими параметрами більш складні і, можливо тому, менш досліджені в порівнянні з аналогічними задачами для систем із зосередженими параметрами. Зокрема, аналізу задач оптимального керування системами із розподіленими параметрами присвячені монографії [2], [3], [5]. В даній статті розглядається задача оптимального керування процесом, поведінка якого описується системою лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу. Приклади таких систем можна знайти в [6].

1. Постановка задачі

Нехай поведінка об'єкта керування описується наступною системою лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними

$$\frac{\partial \mathbf{z}(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}\frac{\partial^2 \mathbf{z}(t,x)}{\partial x^2} + \mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{z}(t,x)}{\partial x} + \mathbf{C}\mathbf{z}(t,x) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t,x), \tag{1}$$

де $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ — задані матриці розміру $n \times n$, $\mathbf{D}$ — задана матриця розміру $n \times m$, причому всі ці чотири матриці — сталі (їх елементами є дійсні числа).Змінна t асоціюється з часом, змінна x — просторова змінна, $\mathbf{z}(t,x)$ — дійсний n-вимірний вектор-стовпець, який в подальшому називається станом системи (1), дійсний m-вимірний вектор-стовпець $\mathbf{u}(t,x)$ називається керуванням. Вважаємо, що керування належать до класу кусково-неперервних вектор-функцій. Для системи (1) задано початкову умову

$$\mathbf{z}(t_0,x) = \mathbf{z}_0(x) \tag{2}$$

і крайові умови

$$\mathbf{z}(t,0) = \mathbf{f}(t), \mathbf{z}(t,l) = \mathbf{g}(t). \tag{3}$$

Дійсні числа $t_0 \geq 0, t_1 > t_0, l > 0$, та n-вимірні вектор-стовпці $\mathbf{z}_0(x), \mathbf{f}(t), \mathbf{g}(t)$ задані. Будемо припускати, що для кожного заданого керування $\mathbf{u}(t,x)$ система рівнянь (1) має єдиний розв'язок , який задовольняє умовам (2) і (3). Розглянемо наступний критерій оптимальності

$$\begin{gathered} I(\mathbf{u},\mathbf{z}) = \frac{1}{2}\int_0^l \mathbf{z}^{\mathbf{T}}(t_1,x)\mathbf{M}\mathbf{z}(t_1,x)dx+ \\ +\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [\mathbf{z}^{\mathbf{T}}(t,x)\mathbf{F}\mathbf{z}(t,x) + \mathbf{u}^{\mathbf{T}}(t,x)\mathbf{G}\mathbf{u}(t,x)]dxdt, \end{gathered} \tag{4}$$

де символ $\mathbf{a}^{\mathbf{T}}\mathbf{b}$ означає скалярний добуток векторів $\mathbf{a}$ і $\mathbf{b}$, тобто $\mathbf{a}^{\mathbf{T}}\mathbf{b} = \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, $\mathbf{G}$ — задана симетрична додатно визначена матриця розміру $m \times m$ (отже, існує матриця $\mathbf{G}^{-1}$), $\mathbf{M}$ і $\mathbf{F}$ також задані дійсні симетричні невід'ємно визначені матриці розміру $n \times n$. Задача оптимального керування об'єктом, що описується системою співвідношень (1)-(3), полягає в знаходженні такого керування $\mathbf{u}(t, x)$, на якому функціонал (4) приймає найменше значення. Якщо таке керування існує, то воно називається оптимальним керуванням.

2. Виведення рівнянь Ейлера–Лагранжа

Для знаходження розв'язку розглянутої вище задачі застосуємо метод множників Лагранжа [5, с.31]. Суть методу полягає в тому, що замість функціонала (4) розглядаємо наступний функціонал

$$J(\mathbf{p}, \mathbf{u}, \mathbf{z}) = \frac{1}{2} \int_0^l \mathbf{z}^{\mathbf{T}}(t_1, x)\mathbf{M}\mathbf{z}(t_1, x)dx+ \tag{5}$$

$$+\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \left[\mathbf{z}^{\mathbf{T}}(t, x)\mathbf{F}\mathbf{z}(t, x) + \mathbf{u}^{\mathbf{T}}(t, x)\mathbf{G}\mathbf{u}(t, x)\right] dxdt+$$

$$+\int_{t_0}^{t_1} \int_0^l \mathbf{p}^{\mathbf{T}}(t, x)[\mathbf{A}\frac{\partial^2 \mathbf{z}(t, x)}{\partial x^2} + \mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial x}+$$

$$+\mathbf{C}\mathbf{z}(t, x) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t, x) - \frac{\partial \mathbf{z}(t, x)}{\partial t}]dxdt,$$

де $\mathbf{p}(t, x)$ — невідома $n \times 1$ вектор-функція. Очевидно, що при виконанні співвідношень (1) значення функціоналів (4) і (5) співпадають. Тому задача на умовний екстремум для функціонала (4) зводиться до задачі на безумовний екстремум для функціонала (5). Далі знаходимо вираз для приросту $\triangle J$ функціонала (5).

$$\triangle J = J(\mathbf{p} + \varepsilon\delta\mathbf{p}, \mathbf{u} + \varepsilon\delta\mathbf{u}, \mathbf{z} + \varepsilon\delta\mathbf{z}) - J(\mathbf{p}, \mathbf{u}, \mathbf{z}). \tag{6}$$

Очевидно, мають місце наступні співвідношення

$$\mathbf{z}^{\mathbf{T}}(t_1, x)\mathbf{M}\delta\mathbf{z}(t_1, x) + \delta\mathbf{z}^{\mathbf{T}}(t_1, x)\mathbf{M}\mathbf{z}(t_1, x) = 2\mathbf{z}^{\mathbf{T}}(t_1, x)\mathbf{M}\delta\mathbf{z}(t_1, x), \tag{7}$$

$$\mathbf{z}^{\mathbf{T}}(t, x)\mathbf{F}\delta\mathbf{z}(t, x) + \delta\mathbf{z}^{\mathbf{T}}(t, x)\mathbf{F}\mathbf{z}(t, x) = 2\mathbf{z}^{\mathbf{T}}(t, x)\mathbf{F}\delta\mathbf{z}(t, x), \tag{8}$$

$$\mathbf{u}^{\mathbf{T}}(t, x)\mathbf{G}\delta\mathbf{u}(t, x) + \delta\mathbf{u}^{\mathbf{T}}(t, x)\mathbf{G}\mathbf{u}(t, x) = 2\mathbf{u}^{\mathbf{T}}(t, x)\mathbf{G}\delta\mathbf{u}(t, x), \tag{9}$$

$$\mathbf{A}\frac{\partial^2 \delta\mathbf{z}(t, x)}{\partial x^2} + \mathbf{B}\frac{\partial \delta\mathbf{z}(t, x)}{\partial x} + \mathbf{C}\delta\mathbf{z}(t, x) + \mathbf{D}\delta\mathbf{u}(t, x) - \frac{\partial \delta\mathbf{z}(t, x)}{\partial t} = \mathbf{0}, \tag{10}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \mathbf{p^T}(t,x)\frac{\partial\delta\mathbf{z}(t,x)}{\partial t}dxdt = \int_0^l \mathbf{p^T}(t_1,x)\delta\mathbf{z}(t_1,x)dx- \\ -\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \frac{\partial\mathbf{p^T}(t,x)}{\partial t}\delta\mathbf{z}(t,x)dxdt, \tag{11}$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \mathbf{p^T}(t,x)\mathbf{A}\frac{\partial^2\mathbf{z}(t,x)}{\partial x^2}dxdt = -\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \frac{\partial\mathbf{p^T}(t,x)}{\partial t}\mathbf{A}\frac{\partial\delta\mathbf{z}(t,x)}{\partial x}dxdt = \\ = \int_{t_0}^{t_1}\int_0^l \frac{\partial^2\mathbf{p^T}(t,x)}{\partial x^2}\mathbf{A}\delta\mathbf{z}(t,x)dxdt. \tag{12}$$

У співвідношеннях (11) та (12) враховано, що справедливі такі рівності: $\delta\mathbf{z}(t_0,x) = \mathbf{z_0}(x) - \mathbf{z_0}(x) = \mathbf{0}$, $\delta\mathbf{z}(t,0) = \mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(t) = \mathbf{0}$, $\delta\mathbf{z}(t,l) = \mathbf{g}(t) - \mathbf{g}(t) = \mathbf{0}$. Також припускаємо, що $\mathbf{p}(t,0) = \mathbf{0}$ та $\mathbf{p}(t,l) = \mathbf{0}$. На підставі зроблених зауважень формула для приросту $\triangle J$ функціонала (5) матиме вигляд

$$\triangle J = \varepsilon\int_0^l \left[\mathbf{z^T}(t_1,x)\mathbf{M} - \mathbf{p^T}(t_1,x)\right]\delta\mathbf{z}(t_1,x)dx+ \\ +\varepsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [(\mathbf{z^T}(t,x)\mathbf{F} + \mathbf{p^T}(t,x)\mathbf{C} - \frac{\partial\mathbf{p^T}(t,x)}{\partial x}\mathbf{B} + \frac{\partial^2\mathbf{p^T}(t,x)}{\partial x^2}\mathbf{A}+ \\ +\frac{\partial\mathbf{p^T}(t,x)}{\partial t})\delta\mathbf{z}(t,x) + (\mathbf{u^T}(t,x)\mathbf{G} + \mathbf{p^T}(t,x)\mathbf{D})\delta\mathbf{u}(t,x)+ \\ +\delta\mathbf{p^T}(t,x)(\mathbf{A}\frac{\partial^2\mathbf{z}(t,x)}{\partial x^2} + \mathbf{B}\frac{\partial\mathbf{z}(t,x)}{\partial x} + \mathbf{Cz}(t,x) + \mathbf{Du}(t,x)- \\ -\frac{\partial\mathbf{z}(t,x)}{\partial t})]dxdt + \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l \delta\mathbf{z^T}(t_1,x)\mathbf{M}\delta\mathbf{z}(t_1,x)dx+ \\ +\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [\delta\mathbf{z^T}(t,x)\mathbf{F}\delta\mathbf{z}(t,x) + \delta\mathbf{u^T}(t,x)\mathbf{G}\delta\mathbf{u}(t,x)]dxdt. \tag{13}$$

Отримана рівність (13) дозволяє сформулювати наступне твердження.

Теорема 1. *Якщо задача оптимального керування (1)-(4) має розв'язок, то його можна знайти із таких співвідношень*

$$\frac{\partial\mathbf{z}(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}\frac{\partial^2\mathbf{z}(t,x)}{\partial x^2} + \mathbf{B}\frac{\partial\mathbf{z}(t,x)}{\partial x} + \mathbf{Cz}(t,x) + \mathbf{Du}(t,x), \tag{14a}$$

$$\mathbf{z}(t_0,x) = \mathbf{z}_0(x), \mathbf{z}(t,0) = \mathbf{f}(t), \mathbf{z}(t,l) = \mathbf{g}(t), \tag{14b}$$

$$\frac{\partial\mathbf{p}(t,x)}{\partial t} = -\mathbf{A^T}\frac{\partial^2\mathbf{p}(t,x)}{\partial x^2} + \mathbf{B^T}\frac{\partial\mathbf{p}(t,x)}{\partial x} - \mathbf{C^T}\mathbf{p}(t,x) - \mathbf{Fz}(t,x). \tag{14c}$$

$$\mathbf{p}(t_1,x) = \mathbf{Mz}(t_1,x), \mathbf{p}(t,0) = \mathbf{0}, \mathbf{p}(t,l) = \mathbf{0}, \tag{14d}$$

$$\mathbf{Gu}(t,x) + \mathbf{D^T}\mathbf{p}(t,x) = \mathbf{0}. \tag{14e}$$

Цей розв'язок є единим.

Доведення. Необхідною умовою екстремуму функціонала (5) є рівність нулю його першої варіації. Ця умова буде виконаною, якщо коефіцієнти при $\delta\mathbf{p}^{\mathbf{T}}(t,x)$, $\delta\mathbf{z}(t,x)$, $\delta\mathbf{z}(t_1,x)$,$\delta\mathbf{u}(t,x)$ одночасно дорівнюють нулю. Враховуючи це зауваження, а також умови (2) і (3), в результаті отримуємо систему рівнянь (14.a)-(14.e). Систему рівнянь такого типу називають рівняннями Ейлера–Лагранжа. Єдиність оптимального керування встановлюється наступними міркуваннями. Припустимо, що існує ще одне оптимальне керування $\widetilde{\mathbf{u}}(t,x) = \mathbf{u}(t,x) + \varepsilon\delta\mathbf{u}(t,x)$. В цьому випадку повинна виконуватись рівність $\triangle J = 0$. Беручи до уваги систему рівнянь Ейлера–Лагранжа (14.a)-(14.e), остання рівність можлива, якщо виконується таке співвідношення

$$\triangle J = \frac{\varepsilon^2}{2}\int_0^l \delta\mathbf{z}^{\mathbf{T}}(t_1,x)\mathbf{M}\delta\mathbf{z}(t_1,x)dx + \tag{15}$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_0^l [\delta\mathbf{z}^{\mathbf{T}}(t,x)\mathbf{F}\delta\mathbf{z}(t,x) + \delta\mathbf{u}^{\mathbf{T}}(t,x)\mathbf{G}\delta\mathbf{u}(t,x)]dxdt.$$

Оскільки $\triangle J = 0$, то, із врахуванням властивостей матриць $\mathbf{M}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$, приходимо до висновку, що з рівності (15) випливає співвідношення $\delta\mathbf{u}(t,x) = \mathbf{0}$. Це означає, що $\widetilde{\mathbf{u}}(t,x) = \mathbf{u}(t,x)$. Таким чином, теорема 1 повністю доведена. □

3. Виведення матричного диференціального рівняння Ріккаті з частинними похідними

З рівняння (14.) знаходимо $\mathbf{u}(t,x) = -\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}^{\mathbf{T}}\mathbf{p}(t,x)$. Підставляючи цей вираз в рівняння (1), отримаємо

$$\frac{\partial\mathbf{z}(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}\frac{\partial^2\mathbf{z}(t,x)}{\partial x^2} + \mathbf{B}\frac{\partial\mathbf{z}(t,x)}{\partial x} + \mathbf{C}\mathbf{z}(t,x) - \mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}^{\mathbf{T}}\mathbf{p}(t,x). \tag{16}$$

Співвідношення $\mathbf{p}(t_1,x) = \mathbf{M}\mathbf{z}(t_1,x)$ дає підстави вважати, що має місце наступна рівність $\mathbf{p}(t,x) = \mathbf{R}(t,x)\mathbf{z}(t,x)$. Звідси безпосередньо знаходимо

$$\frac{\partial\mathbf{p}(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial\mathbf{R}(t,x)}{\partial t}\mathbf{z}(t,x) + \mathbf{R}(t,x)\frac{\partial\mathbf{z}(t,x)}{\partial t}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial\mathbf{p}(t,x)}{\partial x} = \frac{\partial\mathbf{R}(t,x)}{\partial x}\mathbf{z}(t,x) + \mathbf{R}(t,x)\frac{\partial\mathbf{z}(t,x)}{\partial x}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{p}(t,x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\mathbf{R}(t,x)}{\partial x^2}\mathbf{z}(t,x) + 2\frac{\partial\mathbf{R}(t,x)}{\partial x}\frac{\partial\mathbf{z}(t,x)}{\partial x} + \mathbf{R}(t,x)\frac{\partial^2\mathbf{z}(t,x)}{\partial x^2}. \tag{19}$$

Рівняння (16) тепер можна переписати наступним чином

$$\frac{\partial\mathbf{z}(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}\frac{\partial^2\mathbf{z}(t,x)}{\partial x^2} + \mathbf{B}\frac{\partial\mathbf{z}(t,x)}{\partial x} + \mathbf{C}\mathbf{z}(t,x) - \mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}(t,x)\mathbf{z}(t,x), \tag{20}$$

З рівностей (17) та (20) безпосередньо отримаємо

$$\frac{\partial \mathbf{p}(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{R}(t,x)}{\partial t}\mathbf{z}(t,x) + \mathbf{R}(t,x)\mathbf{A}\frac{\partial^2 \mathbf{z}(t,x)}{\partial x^2} + \tag{21}$$

$$+\mathbf{R}(t,x)\mathbf{B}\frac{\partial \mathbf{z}(t,x)}{\partial x} + \mathbf{R}(t,x)\mathbf{C}\mathbf{z}(t,x) -$$

$$-\mathbf{R}(t,x)\mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}(t,x)\mathbf{z}(t,x).$$

Тепер, беручи до уваги рівняння

$$\frac{\partial \mathbf{p}(t,x)}{\partial t} = -\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\frac{\partial^2 \mathbf{p}(t,x)}{\partial x^2} + \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\frac{\partial \mathbf{p}(t,x)}{\partial x} - \mathbf{C}^{\mathbf{T}}\mathbf{p}(t,x) - \mathbf{F}\mathbf{z}(t,x)$$

та співвідношення (18) і (19), аналогічно знаходимо

$$\frac{\partial \mathbf{p}(t,x)}{\partial t} = -\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\frac{\partial^2 \mathbf{R}(t,x)}{\partial x^2}\mathbf{z}(t,x) - 2\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\frac{\partial \mathbf{R}(t,x)}{\partial x}\frac{\partial \mathbf{z}(t,x)}{\partial x} - \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}(t,x)\frac{\partial^2 \mathbf{z}(t,x)}{\partial x^2} + \tag{22}$$

$$+\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\frac{\partial \mathbf{R}(t,x)}{\partial x}\mathbf{z}(t,x) + \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}(t,x)\frac{\partial \mathbf{z}(t,x)}{\partial x} - \mathbf{C}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}(t,x)\mathbf{z}(t,x) - \mathbf{F}\mathbf{z}(t,x).$$

Порівняння рівностей (21) та (22) веде до наступних співвідношень

$$\frac{\partial \mathbf{R}(t,x)}{\partial t} + \mathbf{R}(t,x)\mathbf{C} - \mathbf{R}(t,x)\mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}(t,x) = \tag{23}$$

$$= -\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\frac{\partial^2 \mathbf{R}(t,x)}{\partial x^2} + \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\frac{\partial \mathbf{R}(t,x)}{\partial x} - \mathbf{C}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}(t,x) - \mathbf{F},$$

$$\mathbf{R}(t,x)\mathbf{B} = -2\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\frac{\partial \mathbf{R}(t,x)}{\partial x} + \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}(t,x), \tag{24}$$

$$\mathbf{R}(t,x)\mathbf{A} = -\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}(t,x). \tag{25}$$

Систему співвідношень (23)-(25) перепишемо в більш зручній формі

$$\frac{\partial \mathbf{R}(t,x)}{\partial t} + \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\frac{\partial^2 \mathbf{R}(t,x)}{\partial x^2} + \mathbf{C}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}(t,x) + \mathbf{R}(t,x)\mathbf{C} - \tag{26}$$

$$-\mathbf{B}^{\mathbf{T}}\frac{\partial \mathbf{R}(t,x)}{\partial x} - \mathbf{R}(t,x)\mathbf{D}\mathbf{G}^{-1}\mathbf{D}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}(t,x) + \mathbf{F} = \mathbf{0},$$

$$2\mathbf{A}^{\mathbf{T}}\frac{\partial \mathbf{R}(t,x)}{\partial x} - \mathbf{B}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}(t,x) + \mathbf{R}(t,x)\mathbf{B} = \mathbf{0}, \tag{27}$$

$$\mathbf{R}(t,x)\mathbf{A} + \mathbf{A}^{\mathbf{T}}\mathbf{R}(t,x) = \mathbf{0}. \tag{28}$$

Рівність $\mathbf{p}(t,x) = \mathbf{R}(t,x)\mathbf{z}(t,x)$ та умови $\mathbf{p}(t_1,x) = \mathbf{M}\mathbf{z}(t_1,x)$, $\mathbf{p}(t,0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{p}(t,l) = \mathbf{0}$ породжують наступні співвідношення

$$\mathbf{R}(t_1,x) = \mathbf{M}, \mathbf{R}(t,0) = \mathbf{0}, \mathbf{R}(t,l) = \mathbf{0}. \tag{29}$$

Таким чином, справедливе таке твердження.

Теорема 2. *Якщо розв'язок* $\mathbf{u}(t,x)$ *задачі оптимального керування (1)-(4) існує, то його можна знайти з допомогою формули* $\mathbf{u}(t,x) = \mathbf{R}(t,x)\mathbf{z}(t,x)$, *де матричнозначна функція* $\mathbf{R}(t,x)$ *задовольняє співвідношенням (26)-(28) та додатковим умовам (29), а функція* $\mathbf{z}(t,x)$ *є розв'язком рівняння (20) і задовольняє початковій умові (2) та крайовим умовам (3).*

Література

[1] *Андреев Ю. Н.* Управление конечномерными линейными объектами. - М.: Наука, 1976. - 424 с.

[2] *Лионс Ж.-Л.* Оптимальное управление системами, описываемыми уравнениями с частными производными. - М.: Мир, 1972.- 414 с.

[3] *Лурье К. А.* Оптимальное управление в задачах математической физики. - М.: Наука, 1975. - 480 с.

[4] *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление. - М.: Наука, 1978. - 551 с.

[5] *Сиразетдинов Т. К.*Оптимизация систем с распределенными параметрами.- М.: Наука, 1977.- 480 с.

[6] *Marszalek W., Trzaska Z.* A boundary-value problem for linear PDAEs. // Int. J. Appl. Math. Comput. Sci., 2002, Vol.12, No.4, 487–491

References

[1] Andreev Ju. N., *Upravlenie konechnomernymi linejnymi obektami (Control of finite dimensional linear objects)*, 1976, 424 p.

[2] Lions J.-L., *Optimalnoe upravlenie sistemami, opisyvaemymi uravnenijami s chastnymi proizvodnymi (Optimal control of systems governed by partial differential equations)*, 1972, 414 p.

[3] Lurie K. A., *Optimalnoe upravlenie v zadachah matematicheskoj fiziki (Optimal Control in Problems of Mathematical Physics)*, 1975, 480 p.

[4] Rojtenberg Ja. N., *Avtomaticheskoe upravlenie (Automatic Control Theory)*,1978, 551 p.

[5] Sirazetdinov T. K., *Optimizacija sistem s raspredelennymi parametrami (Optimizations of distributed parameters systems)*, 1977, 480 p.

[6] Marszalek W., Trzaska Z., *Int. J. Appl. Math. Comput. Sci.*, 2002, **12**, №4, pp. 487–491