Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13 (2).— С. 84–96.

УДК 517.947

Гіперболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндричних шарах

І. М. Конет

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Анотація. Методом інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків побудовано точні аналітичні розв'язки гіперболічних крайових задач в кусково-однорідних циліндричних шарах.

Ключові слова: метод інтегральних перетворень, диференціальне рівняння, гіперболічна крайова задача.

Hyperbolic boundary value problems in piecewise-homogeneous cylindrical layers

I. Konet,

Kamyanets-Podilsky Ivan Ohienko National University

Abstract. The method of integral transforms in combination with the method of principal solutions the exact analytical solutions of hyperbolic boundary value problems in piecewise homogeneous cylindrical layers.

AMS Subject Classifications (2010): 35A99.

Key words: singularly perturbed differential equations, hyperbolic boundary value problem, differential equation, method of integral transforms.

Вступ

Теорія крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними – важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в теперішній час інтенсивно розвивається. Її актуальність обумовлена як значимістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ фізики, механіки, біології, медицини, економіки та техніки.

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить від коефіцієнтів рівнянь (різні види вироджeностей і особливостей) та геометрії області (гладкість її межі, наявність в неї кутових точок, тощо) в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків крайових задач для лінійних, квазілінійних та певних класів нелінійних рівнянь в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач для тих чи інших областей [1-5].

Водночас багато важливих прикладних задач теплофізики, термомеханіки, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань приводять до крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в кусково-однорідних та неоднорідних середовищах, коли коефіцієнти рівняння є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [6-9].

Окрім методу відокремлення змінних [10] одним з важливих і ефективних методів вивчення лінійних крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними є метод інтегральних перетворень, який дає можливість будувати в аналітичному вигляді розв'язки тих чи інших крайових задач через їх інтегральне зображення. Варто також зауважити, що для досить широкого класу задач (в кусково-однорідних середовищах) ефективним виявився метод гібридних інтегральних перетворень, які породженні диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [11-18].

Гіперболічні крайові задачі в необмежених (двоскладових і тришарових) та напівобмежених кусково-однорідних циліндричних областях розглянуто у працях автора [19-21].

У цій статті ми пропонуємо точні аналітичні розв'язки гіперболічних крайових задач 2-го порядку для обмежених за декартовою координатою кусково-однорідних областей, які описуються циліндричною системою координат.

1. Постановка задачі

Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D = \{(t, r, \varphi, z);\ t > 0;\ (r, \varphi) \in \Omega_2 = \langle a; b\rangle \times [0; 2\pi);\ z \in K_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv$$

$$\equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (l_{j-1}; l_j),\ l_0 \geq 0; l_k < l_{k+1};\ l_{n+1} \equiv l < +\infty\}$$

2π-періодичного щодо кутової змінної φ розв'язку диференціальних рівнянь гіперболічного типу 2-го порядку [10]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right) + a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t,r,\varphi,z), \tag{1}$$

де $z \in I_j$; $j = \overline{1,\, n+1}$ з початковими умовами

$$u_j\big|_{t=0} = g_j^1(r,\varphi,z);\ \left.\frac{\partial u_j}{\partial t}\right|_{t=0} = g_j^2(r,\varphi,z);\ z \in I;\ j = \overline{1, m+1}, \tag{2}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right)u_1\Bigg|_{z=l_0} = g_0(t,r,\varphi);\ \left(\alpha_{22}^{n+1}\frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1}\right)u_{n+1}\Bigg|_{z=l} = g_l(t,r,\varphi), \tag{3}$$

умовами спряження [11]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k\right)u_k - \left(\alpha_{j2}^2\frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k\right)u_{k+1}\right]\Bigg|_{z=l_k} = 0;\ \ j = 1,2;\ k = \overline{1,n} \tag{4}$$

та відповідними крайовими умовами на межі проміжку $\langle a;b\rangle$, де $a_{rj}, a_{zj}, \chi_j, \alpha_{js}^k, \beta_{js}^k$ — деякі невід'ємні сталі; $c_{jk} = \alpha_{2j}^k\beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k\beta_{2j}^k \neq 0$; $c_{1k}c_{2k} > 0$; $|\alpha_{11}^0| + |\beta_{11}^0| \neq 0$; $|\alpha_{22}^{n+1}| + |\beta_{22}^{n+1}| \neq 0$; $f(t,x,y,z) = \{f_1(t,r,\varphi,z), f_2(t,r,\varphi,z), \ldots, f_{n+1}(t,r,\varphi,z)\}$;
$g^1(r,\varphi,z) = \{g_1^1(r,\varphi,z), g_2^1(r,\varphi,z), \ldots, g_{n+1}^1(r,\varphi,z)\}$;
$g^2(r,\varphi,z) = \{g_1^2(r,\varphi,z), g_2^2(r,\varphi,z) \ldots, g_{n+1}^2(r,\varphi,z)\}$;
$g_0(t,r,\varphi), g_l(t,r,\varphi)$ — задані обмежені неперервні функції;
$u(t,r,\varphi,z) = \{u_1(t,r,\varphi,z), u_2(t,r,\varphi,z), \ldots, u_{n+1}(t,r,\varphi,z)\}$ — шукана функція.

2. Основна частина

Побудуємо розв'язок розглянутої задачі в залежності від структури проміжку $\langle a;b\rangle$.

1. $\langle a;b\rangle = (0;+\infty)$. У цьому випадку вважаємо, що виконуються крайові умови

$$u_j\big|_{r=0} = 0;\ \left.\frac{\partial u_j}{\partial r}\right|_{r=+\infty} = 0;\ z \in I_j;\ j = \overline{1,n+1}. \tag{5}$$

Припустимо, що розв'язок задачі (1)-(5) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [22, 23, 11].

До задачі (1)-(5) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ [23]:

$$F_m[g(\varphi)] = \int_0^{2\pi} g(\varphi)e^{-im\varphi}d\varphi \equiv g_m,\ i = \sqrt{-1}, \tag{6}$$

$$F_m^{-1}[g_m] = \frac{1}{2\pi}\mathrm{Re}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_m g_m e^{im\varphi}\right) \equiv g(\varphi), \tag{7}$$

$$F_m\left[\frac{d^2g}{d\varphi^2}\right] = -m^2F_m[g(\varphi)] \equiv -m^2g_m, \tag{8}$$

де $\mathrm{Re}(\cdot)$ — дійсна частина виразу $(\cdot)$ щодо φ, $\varepsilon_0 = 1$, $\varepsilon_k = 2$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Інтегральний оператор Фур'є F_m за правилом (6) внаслідок тотожності (8) початково-крайовій задачі (1)-(5) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D' = \{(t, r, z);\ t > 0;\ r \in (0; +\infty);\ z \in K_n^+\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 u_{jm}}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2}\right) + a_{zj}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u_{jm} + \chi_j^2 u_{jm} = f_{jm}(t, r, z), \tag{9}$$

де $z \in I_j$, $j \in \overline{1, n+1}$ з початковими умовами

$$u_{jm}\Big|_{t=0} = g_{jm}^1(r, z);\ \ \frac{\partial u_{jm}}{\partial t}\Big|_{t=0} = g_{jm}^2(r, z);\ z \in I_j;\ j = \overline{1, n+1}, \tag{10}$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0\frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0\right)u_{1m}\Big|_{z=l_0} = g_{0m}(t, r);\ \ \left(\alpha_{22}^2\frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1}\right)u_{n+1,m}\Big|_{z=l} = g_{lm}(t, r), \tag{11}$$

$$u_{jm}\Big|_{r=0} = 0;\ \frac{\partial u_{jm}}{\partial r}\Big|_{r=+\infty} = 0;\ z \in I_j;\ j = \overline{1, n+1} \tag{12}$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k\frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k\right)u_{km} - \left(\alpha_{j2}^k\frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k\right)u_{k+1,m}\right]\Big|_{z=l} = 0;\ j = 1, 2;\ k = \overline{1, n.} \tag{13}$$

До задачі (9)-(13) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є-Бесселя щодо радіальної змінної r [23]:

$$H_\nu[g(r)] = \int_0^{+\infty} g(r)J_\nu(\lambda r)r dr \equiv \tilde{g}(\lambda), \tag{14}$$

$$H_\nu[\tilde{g}(\lambda)] = \int_0^{+\infty} \tilde{g}(\lambda)J_\nu(\lambda r)\lambda d\lambda \equiv g(r), \tag{15}$$

$$H_\nu\left[\frac{d^2g}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dg}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2}g\right] = -\lambda^2H_\nu[g(r)] \equiv -\lambda^2\tilde{g}(\lambda), \tag{16}$$

де $J_\nu(x)$ — циліндрична функція дійсного аргументу 1-го роду ν-го порядку.

Інтегральний оператор H_m за правилом (14) внаслідок тотожності (16) крайовій задачі (9)-(13) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині

$$D'' = \{(t, z):\ t > 0,\ z \in K_n^+\}$$

розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_{jm}}{\partial t^2} - a_{zj}^2\frac{\partial^2 \tilde{u}_{jm}}{\partial z^2} + (a_{rj}^2\lambda^2 + \chi_j^2)\tilde{u}_{jm} = \tilde{f}_{jm}(t, \lambda, z);\ z \in I_j;\ j = \overline{1, n+1} \tag{17}$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_{jm}\Big|_{t=0} = \tilde{g}^1_{jm}(\lambda, z);\ \frac{\partial \tilde{u}_{jm}}{\partial t}\Bigg|_{t=0} = \tilde{g}^2_{jm}(\lambda, z);\ z \in I_j;\ j = \overline{1, n+1}, \tag{18}$$

крайовими умовами

$$\Big(\alpha^0_{11}\frac{\partial}{\partial z} + \beta^0_{11}\Big)\tilde{u}_{1m}\Big|_{z=l_0} = \tilde{g}_{0k}(t, \lambda);\ \Big(\alpha^{n+1}_{22}\frac{\partial}{\partial z} + \beta^{n+1}_{22}\Big)\tilde{u}_{n+1,m}\Big|_{z=l} = \tilde{g}_{lm}(t, \lambda) \tag{19}$$

та умовами спряження

$$\Big[\Big(\alpha^k_{j1}\frac{\partial}{\partial z} + \beta^k_{j1}\Big)\tilde{u}_{km} - \Big(\alpha^k_{j2}\frac{\partial}{\partial z} + \beta^k_{j2}\Big)\tilde{u}_{k+1,m}\Big]\Big|_{z=l_m} = 0;\ j = 1, 2;\ k = \overline{1, n}. \tag{20}$$

До задачі (17)–(20) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[l_0; l]$ з n точками спряження щодо змінної z [11]:

$$F_{sn}[g(z)] = \int\limits_{l_0}^{l} g(z)V(z, \lambda_s)\sigma(z)dz \equiv g_s, \tag{21}$$

$$F^{-1}_{sn}[g_s] = \sum_{s=1}^{\infty} g_s \frac{V(z, \lambda_s)}{||V(z, \lambda_s)||^2} \equiv g(z), \tag{22}$$

$$-\sum_{i=1}^{n+1} k_i^2 \int\limits_{l_{j-1}}^{l_j} g(z)V_i(z, \lambda_s)\sigma_i dz - \sigma_1 a^2_{z1}(\alpha^0_{11})^{-1}V_1(l_0, \lambda_s)\Big(\alpha^0_{11}\frac{dg}{dz} + \beta^0_{11}g\Big)\Big|_{z=l_0} + \tag{23}$$

$$+\sigma_{n+1}a^2_{z,n+1}(\alpha^{n+1}_{22})^{-1}V_{n+1}(l, \lambda_s)\Big(\alpha^{n+1}_{22}\frac{dg}{dz} + \beta^{n+1}_{22}g\Big)\Big|_{z=l}.$$

У формулах (21)-(23) беруть участь величини і функції:

$$V(z, \lambda_s) = \sum_{i=1}^{n+1} V_i(z, \lambda_s)\theta(z - l_{i-1})\theta(l_i - z);\quad \sigma(z) = \sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i\theta(z - l_{i-1})\theta(l_i - z);$$

$$\sigma_k = \frac{a_{z,k+1}}{a^2_{zk}}\prod_{m=k}^{n} c_{1m}c_{2m};\quad \sigma_{n+1} = \frac{1}{a_{z,n+1}};\quad k = \overline{1, n};$$

$$V_m(z, \lambda_s) = \prod_{i=m}^{n} c_{2i}q_{i+1,s}G_m(z, \lambda_s);\quad m = \overline{1, n};$$

$$V_{n+1}(z, \lambda_s) = \omega_{n2}(\lambda_s)\cos(q_{n+1,s}z) - \omega_{n1}(\lambda_s)\sin(q_{n+1,s}z);$$

$$G_m(z, \lambda_s) = \omega_{m-1,2}(\lambda_s)\cos(q_{ms}z) - \omega_{m-1,1}(\lambda_s)\sin(q_{ms}z);$$

$$||V(z, \lambda_s)||^2 = \int\limits_{l_0}^{l} V^2(z, \lambda_s)\sigma(z)dz = \sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_{l_{k-1}}^{l_k} V_k^2(z, \lambda_s)\sigma_k dz;$$

$$q_j \equiv q_j(\lambda) = a^{-1}_{z,s}(\lambda^2 + k^2_s)^{\frac{1}{2}};\quad q_{js} = q_j(\lambda_s);$$

$$\nu^{k1}_{ip}(q_{js}l_m) = -\alpha^k_{ip}q_{sj}\sin(q_{js}l_m) + \beta^k_{ip}\cos(q_{js}l_m);$$

$$\nu_{ip}^2(q_{js}l_m) = \alpha_{ip}^k q_{js}\cos(q_{js}l_m) + \beta_{ip}^k \sin(q_{js}l_m);$$
$$\omega_{01}(\lambda_s) = \nu_{11}^{01}(q_{1s}l_0); \quad \omega_{02}(\lambda_s) = \nu_{11}^{02}(q_{1s}l_0);$$
$$\psi_{pm}^k(x,y) = \nu_{11}^{kp}(x)\nu_{22}^{km}(y) - \nu_{21}^{kp}(x)\nu_{12}^{km}(y);$$
$$\omega_{pm}(\lambda_s) = \omega_{p-1,2}(\lambda_s)\psi_{1m}^p(q_{pj}l_p, q_{p+1,s}l_p) - \omega_{p-1,1}(\lambda_s)\psi_{2m}^p(q_{ps}l_p, q_{p+1,j}l_p).$$

λ_s — корені трансцендентного рівняння

$$\Delta_n(\lambda) \equiv \nu_{22}^{n+1,2}(q_{n+1}l)\omega_{n1}(\lambda) - \nu_{22}^{n+1,1}(q_{n+1}l)\omega_{n2}(\lambda) = 0,$$

які утворюють дискретний спектр.

Запишемо систему диференціальних рівнянь (17) та початкові умови (18) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z1}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + a_{r1}^2\lambda^2 + \chi_1^2\right)\tilde{u}_{1m} \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z2}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + a_{r2}^2\lambda^2 + \chi_2^2\right)\tilde{u}_{2m} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z,n+1}^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} + a_{r,n+1}^2\lambda^2 + \chi_{n+1}^2\right)\tilde{u}_{n+1,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{1m}(t,\lambda,z) \\ \tilde{f}_{2m}(t,\lambda,z) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \tilde{f}_{n+1,m}(t,\lambda,z) \end{bmatrix}, \tag{24}$$

$$\left.\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m} \\ \tilde{u}_{2m} \\ \dots\dots \\ \tilde{u}_{n+1,m} \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1m}^1(\lambda,z) \\ \tilde{g}_{2m}^1(\lambda,z) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \tilde{g}_{n+1,m}^1(\lambda,z) \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\left.\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m} \\ \tilde{u}_{2m} \\ \dots\dots \\ \tilde{u}_{n+1,m} \end{bmatrix}\right|_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1m}^2(\lambda,z) \\ \tilde{g}_{2m}^2(\lambda,z) \\ \dots\dots\dots\dots \\ \tilde{g}_{n+1,m}^2(\lambda,z) \end{bmatrix}. \tag{25}$$

Інтегральний оператор F_{sn}, який діє за правилом (21), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{sn}[\cdot] = \left[\int_{l_0}^{l_1}(\cdot)V_1(z,\lambda_s)\sigma_1 dz \int_{l_1}^{l_2}(\cdot)V_2(z,\lambda_s)\sigma_2 dz \dots \int_{l_n}^{l_{n+1}}(\cdot)V_{n+1}(z,\lambda_s)\sigma_{n+1}dz\right] \tag{26}$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (24), (25). Внаслідок тотожності (23) одержуємо задачу Коші

$$\sum_{j=1}^{n+1}\left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda_s^2 + a_{rj}^2\lambda^2 + \chi_j^2 = k_j^2\right)\tilde{u}_{jms} = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{f}_{jms}(t,\lambda) -$$
$$- \sigma_1 a_{z1}^2(\alpha_{11}^0)^{-1}V_1(l_0,\lambda_s)\tilde{g}_{0m}(t,\lambda) + \sigma_{n+1}a_{z,n+1}^2(\alpha_{22}^{n+1})^{-1}V_{n+1}(l,\lambda_s)\tilde{g}_{lm}(t,\lambda), \tag{27}$$

$$\left.\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{u}_{jms}\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{g}_{jms}^1(\lambda), \quad \frac{d}{dt}\left.\sum_{j=1}^{n+1}\tilde{u}_{jms}\right|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1}\tilde{g}_{jms}^2(\lambda), \tag{28}$$

де

$$\tilde{u}_{jms}(t,\lambda) = \int_{l_{j-1}}^{l_j}\tilde{u}_{jm}(t,\lambda,z)V_j(z,\lambda_s)\sigma_j dz; \ j = \overline{1,n+1},$$
$$\tilde{f}_{jms}(t,\lambda) = \int_{l_{j-1}}^{l_j}\tilde{f}_{jm}(t,\lambda,z)V_j(z,\lambda_s)\sigma_j dz; \ j = \overline{1,n+1}$$

і аналогічно $\tilde{g}^1_{jms}(\lambda), \tilde{g}^2_{jms}(\lambda)$; $l_{n+!} \equiv l$.

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\max\limits_{1\le j\le n+1}\{a^2_{rj}, \lambda^2 + \chi^2_j\} = a^2_{r1}\lambda^2 + \chi^2_1$ і покладемо всюди $k^2_j = (a^2_{r1}\lambda^2 + \chi^2_1) - (a^2_{rj}\lambda^2 + \chi^2_j)$. Задача Коші (27), (28) набуває вигляду

$$\frac{d^2\tilde{u}_{ms}}{dt^2} + \Delta^2(\lambda,\lambda_s)\tilde{u}_{ms} = \tilde{f}_{ms}(t,\lambda) - \sigma_1 a^2_{z1}(\alpha^0_{11})^{-1}V_1(l_0,\lambda_s)\tilde{g}_{0m}(t,\lambda) + \\ + \sigma_{n+1}a^2_{z,n+1}(\alpha^{n+1}_{22})^{-1}V_{n+1}(l,\lambda_s)\tilde{g}_{lm}(t,\lambda), \quad (29)$$

$$\tilde{u}_{ms}(t,\lambda)\Big|_{t=0} = \tilde{g}^1_{ms}(\lambda), \ \frac{d\tilde{u}_{ms}}{dt}\Big|_{t=0} = \tilde{g}^2_{ms}(\lambda), \quad (30)$$

де $\tilde{u}_{ms}(t,\lambda) = \sum\limits_{j=1}^{n+1}\tilde{u}_{jms}(t,\lambda)$, $\Delta^2(\lambda,\lambda_j) = \lambda^2_s + a^2_{r1}\lambda^2 + \chi^2_1$, $\tilde{f}_{ms}(t,\lambda) = \sum\limits_{j=1}^{n+1}\tilde{f}_{jms}(t,\lambda)$, $\tilde{g}^1_{ms}(\lambda) = \sum\limits_{j=1}^{n+1}\tilde{g}^1_{jms}(\lambda)$, $\tilde{g}^2_{ms}(\lambda) = \sum\limits_{j=1}^{n+1}\tilde{g}^2_{jms}(\lambda)$. Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв'язком неоднорідної задачі Коші (29), (30) є функція

$$\tilde{u}_{ms}(t,\lambda) = \frac{\sin(\Delta(\lambda,\lambda_j)t)}{\Delta(\lambda,\lambda_s)}\tilde{g}^2_{ms}(\lambda) + \frac{d}{dt}\frac{\sin(\Delta(\lambda,\lambda_s)t)}{\Delta(\lambda,\lambda_s)}\tilde{g}^1_{ms}(\lambda) + \\ + \int_0^t \frac{\sin(\Delta(\lambda,\lambda_s)(t-\tau))}{\Delta(\lambda,\lambda_s)}\Big[\tilde{f}_{ms}(\tau,\lambda) - \sigma_1 a^2_{z1}(\alpha^0_{11})^{-1}V_1(l_0,\lambda_s)\tilde{g}_{0m}(\tau,\lambda) + \\ + \sigma_{n+1}a^2_{z,n+1}(\alpha^{n+1}_{22})^{-1}V_{n+1}(l,\lambda_s)\tilde{g}_{lm}(\tau,\lambda)\Big]d\tau. \quad (31)$$

Оскільки суперпозиція операторів F_{sn} та F^{-1}_{sn} є одиничним оператором, то оператор F^{-1}_{sn} зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$F^{-1}_{sn}[\cdot] = \begin{bmatrix} \sum\limits_{s=1}^{\infty}(\cdot)\frac{V_1(z,\lambda_s)}{||V(z,\lambda_s)||^2} \\ \sum\limits_{s=1}^{\infty}(\cdot)\frac{V_2(z,\lambda_s)}{||V(z,\lambda_s)||^2} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sum\limits_{s=1}^{\infty}(\cdot)\frac{V_{n+1}(z,\lambda_s)}{||V(z,\lambda_s)||^2} \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (32) до матриці-елемента $[\tilde{u}_{ms}(t,\lambda)]$, де функція $\tilde{u}_{ms}(t,\lambda)$ визначається формулою (31). Одержуємо єдиний розв'язок задачі (17)-(20):

$$\tilde{u}_{jm}(t,\lambda,z)=\sum_{s=1}^{\infty}\Big\{\frac{\sin(\Delta(\lambda,\lambda_s)t)}{\Delta(\lambda,\lambda_s)}\tilde{g}^2_{ms}(\lambda)+\frac{d}{dt}\frac{\sin(\Delta(\lambda,\lambda_s)t)}{\Delta(\lambda,\lambda_s)}\tilde{g}^1_{ms}(\lambda)\Big\}\frac{V_j(z,\lambda_s)}{||V(z,\lambda_s)||^2}+$$
$$+\sum_{s=1}^{\infty}\Big\{\int_0^t\frac{\sin(\Delta(\lambda,\lambda_s)(t-\tau))}{\Delta(\lambda,\lambda_s)}\Big[\tilde{f}_{ms}(\tau,\lambda)-\sigma_1a^2_{z1}(\alpha^0_{11})^{-1}V_1(l_0,\lambda_s)\tilde{g}_{0m}(\tau,\lambda)+$$
$$+\sigma_{n+1}a^2_{z,n+1}(\alpha^{n+1}_{22})^{-1}V_{n+1}(l,\lambda_s)\tilde{g}_{lm}(\tau,\lambda)\Big]d\tau\Big\}\frac{V_j(z,\lambda_s)}{||V(z,\lambda_s)||^2};\; j=\overline{1,n+1}. \quad (33)$$

До функцій $\tilde{u}_{im}(t,\lambda,z)$, визначених формулами (33), послідовно застосуємо обернені оператори H_m^{-1} за правилом (15) та F_m^{-1} за правилом (7). Виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$u_j(t,r,\varphi,z)=\sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_0^t\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{l_{k-1}}^{l_k}E_{jk}(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)f_k(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_k\rho\,d\xi\,d\alpha\,d\rho\,d\tau+$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{l_{k-1}}^{l_k}E_{jk}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)g^1_k(\rho,\alpha,\xi)\sigma_k\rho\,d\xi\,d\alpha\,d\rho+$$
$$+\sum_{k=1}^{n+1}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{l_{k-1}}^{l_k}E_{jk}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)g^2_k(\rho,\alpha,\xi)\sigma_k\rho\,d\xi\,d\alpha\,d\rho+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{2\pi}[W^0_j(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z)g_0(\tau,\rho,\alpha)+$$
$$+W^l_j(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z)g_l(\tau,\rho,\alpha)]\rho\,d\alpha\,d\rho\,d\tau;\; j=\overline{1,n+1}, \quad (34)$$

які визначають єдиний розв'язок гіперболічної крайової задачі (1)-(5).

У формулах (34) застосовано компоненти

$$E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi)=\sum_{m=0}^{\infty}\varepsilon_mE_{jk,m}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi)\cos(m\varphi)$$

матриці впливу (функції впливу), компоненти

$$W^0_j(t,r,\rho,\varphi,z)=-\sigma_1a^2_{z1}(\alpha^0_{11})^{-1}E_{j1}(t,r,\rho,\varphi,z,l_0)$$

нижньої аплікатної матриці Гріна (функції Гріна) та компоненти

$$W^l_j(t,r,\rho,\varphi,z)=\sigma_{n+1}a^2_{z,n+1}(\alpha^{n+1}_{22})^{-1}E_{j,n+1}(t,r,\rho,\varphi,z,l)$$

верхньої аплікатної матриці Гріна розглянутої задачі, де

$$E_{jk,m}(t,r,\rho,z,\xi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{\infty}\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin(\Delta(\lambda,\lambda_s)t)}{\Delta(\lambda,\lambda_s)}J_m(\lambda r)J_m(\lambda\rho)\lambda\,d\lambda\frac{V_j(z,\lambda_s)V_k(\xi,\lambda_s)}{||V(z,\lambda_s)||^2}.$$

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi)$ і функцій Гріна $W_j^0(t,r,\rho,\varphi,z)$, $W_j^l(t,r,\rho,\varphi,z)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_j(t,r,\varphi,z)$, визначені формулами (34), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (5) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [24].

Єдиність розв'язку (34) випливає із його структури та єдиності головних розв'язків задачі (функцій впливу і функцій Гріна).

Можна довести [25], що при певних обмеженнях на вихідні дані задачі (1)-(5), узагальнений розв'язок (34) буде також її класичним розв'язком.

Зауваження 1. *У випадку $a_{rj} = a_{zj} \equiv a_j > 0$ формули (34) визначають структуру розв'язку гіперболічної крайової задачі (1)-(5) в ізотропному кусково-однорідному циліндричному шарі.*

Зауваження 2. *Параметри $\alpha_{11}^0, \beta_{11}^0, \alpha_{22}^{n+1}, \beta_{22}^{n+1}$ дозволяють виділяти із формул (34) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхнях $z = l_0,\ z = l$ крайових умов 1-го, 2-го й 3-го роду та їх можливих комбінацій.*

Зауваження 3. *Аналіз розв'язку (34) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(t,r,\varphi,z)$, $g_j^1(r,\varphi,z)$, $g_j^2(r,\varphi,z)$, $g_0(t,r,\varphi)$, $g_l(t,r,\varphi)$ проводиться безпосередньо.*

2. $\langle a;b\rangle \equiv (R_0;+\infty), R_0 > 0$. У цьому випадку вважаємо, що виконуються крайові умови

$$\Big(-\frac{\partial}{\partial r}+h\Big)u_j\Big|_{r=R_0} = \theta_j(t,\varphi,z); \quad \frac{\partial u_j}{\partial z}\Big|_{r=+\infty} = 0;\ z\in I_j;\ j=\overline{1,n+1}, \qquad (35)$$

де h — деяка невід'ємна стала; $\theta(t,\varphi,z) = \{\theta_1(t,\varphi,z),\theta_2(t,\varphi,z),\ldots,\theta_{n+1}(t,\varphi,z)\}$ — задана обмежена неперервна функція.

Припустимо, що розв'язок задачі (1)-(4), (35) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [22, 23, 11].

До задачі (1)-(4), (35) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ. Інтегральний оператор F_m за правилом (6) внаслідок тотожності (8) початково-крайовій задачі (1)-(4), (35) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D' = \{(t,r,z):\ t>0,\ r\in(R_0;+\infty),\ z\in K_n^+\}$ розв'язку диференціальних рівнянь (9) з початковими умовами (10), крайовими умовами (11), крайовими умовами

$$\Big(-\frac{\partial}{\partial r}+h\Big)u_{jm}\Big|_{r=R_0}=\theta_{jm}(t,z);\quad \frac{\partial u_{jm}}{\partial r}\Big|_{r=+\infty}=0;\ z\in I_j;\ j=\overline{1,n+1} \tag{36}$$

та умовами спряження (13).

До задачі (9)-(11), (36), (13) застосуємо інтегральне перетворення Вебера щодо радіальної змінної r [23]:

$$H_{\nu,0}[g(r)]=\int_0^{+\infty}g(r)f_{\nu,0}(r,\lambda)r\,dr\equiv\tilde g(\lambda), \tag{37}$$

$$H^{-1}_{\nu,0}[\tilde g(\lambda)]=\int_0^{+\infty}\tilde g(\lambda)\frac{f_{\nu,0}(r,\lambda)\lambda\,d\lambda}{A^2_{\nu,0}(\lambda)+B^2_{\nu,0}(\lambda)}\equiv g(r), \tag{38}$$

$$H_{\nu,0}\Big[\frac{d^2g}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dg}{dr}-\frac{\nu^2}{r^2}g\Big]=-\lambda^2\tilde g(\lambda)+R_0f_{\nu,0}(R_0,\lambda)\Big(-\frac{dg}{dr}+hg\Big)\Big|_{r=R_0}, \tag{39}$$

де

$$f_{\nu,0}(r,\lambda)=B_{\nu,0}(\lambda)N_\nu(\lambda r)-A_{\nu,0}(\lambda)J_\nu(\lambda R),$$
$$B_{\nu,0}(\lambda)=\Big(\frac{\nu}{R_0}+h\Big)J_\nu(\lambda R_0)-\lambda J_{\nu-1}(\lambda R_0),$$
$$A_{\nu,0}(\lambda)=\Big(\frac{\nu}{R_0}+h\Big)N_\nu(\lambda R_0)-\lambda N_{\nu-1}(\lambda R_0),$$

$N_\nu(x)$ — циліндрична функція дійсного аргументу 2-го роду ν-го порядку.

Інтегральний оператор $H_{m,0}$ за правилом (37) внаслідок тотожності (39) крайовій задачі (9)-(11), (36), (13) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині $D''=\{(t,z):\ t>0;\ z\in K_n^+\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2\tilde u_{jm}}{\partial t^2}-a^2_{zj}\frac{\partial^2\tilde u_{jm}}{\partial z^2}+(a^2_{rj}\lambda^2+\chi^2_j)\tilde u_{jm}=\tilde F_{jm}(t,\lambda,z);\ z\in I_j;\ j=\overline{1,n+1} \tag{40}$$

з початковими умовами (18), крайовими умовами (19) та умовами спряження (20), де

$$\tilde F_{jm}(t,\lambda,z)=\tilde f_{jm}(t,\lambda,z)+a^2_{rj}R_0f_{m,0}(R_0,\lambda)\theta_{jm}(t,z);\ j=\overline{1,n+1}.$$

З точністю до позначень початково-крайова задача на спряження (40), (18)-(20) збігається із задачею (17)-(20). Отже, відповідно до формул (33), єдиний розв'язок задачі (40), (18)-(20) визначають функції

$$\tilde u_{jm}(t,\lambda,z)=\sum_{s=1}^{\infty}\Big[\frac{\sin(\Delta(\lambda,\lambda_s)t)}{\Delta(\lambda,\lambda_s)}\tilde g^2_{ms}(\lambda)+\frac{d}{dt}\frac{\sin(\Delta(\lambda,\lambda_s)t)}{\Delta(\lambda,\lambda_s)}\tilde g^1_{ms}(\lambda)\Big]\frac{V_j(z,\lambda_s)}{||V(z,\lambda_s)||^2}+$$
$$+\sum_{s=1}^{\infty}\Big[\int_0^t\frac{\sin(\Delta(\lambda,\lambda_s)(t-\tau))}{\Delta(\lambda,\lambda_s)}\big[\tilde F_{ms}(\tau,\lambda)-\sigma_1a^2_{z1}(\alpha^0_{11})^{-1}V_1(l_0,\lambda_s)\tilde g_{0m}(\tau,\lambda)+$$
$$+\sigma_{n+1}a^2_{z,n+1}(\alpha^{n+1}_{22})^{-1}V_{n+1}(l,\lambda_s)\tilde g_{lm}(\tau,\lambda)\big]d\tau\Big]\frac{V_j(z,\lambda_s)}{||V(z,\lambda_s)||^2};\ j=\overline{1,n+1}. \tag{41}$$

Застосувавши послідовно до функцій $\tilde{u}_{jm}(t,\lambda,z)$, визначених формулами (41), обернені оператори $H_{m,0}^{-1}$ та F_m^{-1}, одержуємо функції

$$u_j(t,r,\varphi,z)=\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_{R_0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{l_{k-1}}^{l_k}E_{jk}(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)f_k(\tau,\rho,\alpha,\xi)\sigma_k\rho\,d\xi\,d\alpha\,d\rho\,d\tau+$$
$$+\frac{\partial}{\partial t}\sum_{k=1}^{n+1}\int_{R_0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{l_{k-1}}^{l_k}E_{jk}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)g_k^1(\rho,\alpha,\xi)\sigma_k\rho\,d\xi\,d\alpha\,d\rho+$$
$$+\sum_{k=1}^{n+1}\int_{R_0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}\int_{l_{k-1}}^{l_k}E_{jk}(t,r,\rho,\varphi-\alpha,z,\xi)g_k^2(\rho,\alpha,\xi)\sigma_k\rho\,d\xi\,d\alpha\,d\rho+$$
$$+\int_0^t\int_{R_0}^{+\infty}\int_0^{2\pi}[W_j^0(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z)g_0(\tau,\rho,\alpha)+$$
$$+W_j^l(t-\tau,r,\rho,\varphi-\alpha,z)g_l(\tau,\rho,\alpha)]\rho\,d\alpha\,d\rho\,d\tau+$$
$$+a_{rj}^2\sum_{k=1}^{n+1}\int_0^t\int_0^{2\pi}\int_{l_{k-1}}^{l_k}W_{jk}(t-\tau,r,\varphi-\alpha,z,\xi)\theta_k(\tau,\alpha,\xi)\sigma_k\,d\xi\,d\alpha\,d\tau;\ j=\overline{1,n+1},\quad(42)$$

які визначають єдиний розв'язок гіперболічної крайової задачі (1)-(4), (35).

У формулах (42) застосовано компоненти $E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi)$ матриці впливу, компоненти $W_j^0(t,r,\rho,\varphi,z)$ нижньої аплікатної матриці Гріна, компоненти $W_j^l(t,r,\rho,\varphi,z)$ верхньої аплікатної матриці Гріна та компоненти

$$W_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi)=R_0E_{jk}(t,r,R_0,\varphi,z,\xi)$$

радіальної матриці Гріна розглянутої задачі, де

$$E_{jk,m}(t,r,\rho,z,\xi)=\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\Delta(\lambda,\lambda_s)t)}{\Delta(\lambda,\lambda_s)}\times$$
$$\times\frac{f_{m,0}(r,\lambda)f_{m,0}(\rho,\lambda)\lambda\,d\lambda}{A_{m,0}^2(\lambda)+B_{m,0}^2(\lambda)}\times\frac{V_j(z,\lambda_s)V_k(\xi,\lambda_s)}{||V(z,\lambda_s)||^2};\ j,k=\overline{1,n+1}.$$

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}(t,r,\rho,\varphi,z,\xi)$ і функцій Гріна $W_j^0(t,r,\rho,\varphi,z)$, $W_j^l(t,r,\rho,\varphi,z)$, $W_{jk}(t,r,\varphi,z,\xi)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_j(t,r,\varphi,z)$, визначені формулами (42), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (35) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [24].

Єдиність розв'язку (42) випливає із його структури та єдиності головних розв'язків задачі (функцій впливу та функцій Гріна).

Можна довести [25], що при певних обмеженнях на вихідні дані задачі (1)-(4), (35), узагальнений розв'язок (42) буде також її класичним розв'язком.

Зазначимо, що: 1) зауваження 1-2 поширюються на випадок розглянутої крайової задачі; 2) параметр h дозволяє виділяти із формул (42) розв'язки крайових задач у випадках задання на радіальній поверхні $r = R_0$ крайової умови 1-го роду ($h \to \infty$) та 2-го роду ($h \to 0$); 3) аналіз розв'язку (42) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(t, r, \varphi, z)$, $g_j^1(r, \varphi, z)$, $g_j^2(r, \varphi, z)$, $g_0(t, r, \varphi)$, $g_l(t, r, \varphi)$, $\theta_j(t, \varphi, z)$ проводиться безпосередньо.

3. Висновки

Методом інтегральних та гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано точні аналітичні розв'язки гіперболічних крайових задач в кусково-однорідних циліндричних шарах. Одержані розв'язки носять алгоритмічний характер, неперервно залежать від параметрів і даних задачі й можуть бути використані як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами математичної фізики неоднорідних середовищ (задачі акустики, гідродинаміки, теорії коливань механічних систем).

Література

[1] *Адамар Ж.* Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа.— М.: Наука, 1978. — 352 с.

[2] *Городецький В. В.* Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу.— Чернівці: Рута, 1998.— 225 с.

[3] *Миранда К.* Уравнения с частными производными элиптического типа.— М.: ИЛ, 1957.— 256 с.

[4] *Матійчук М. І.* Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями.— Чернівці: Прут, 2003.— 248 с.

[5] *Смирнов М. М.* Вырождающиеся элиптические и гиперболические уравнения.— М.: Наука, 1966.— 292 с.

[6] *Подстригач Я. С., Ломакин В. А., Коляно Ю. М.* Термоупругость тел неоднородной структуры.— М.: Наука, 1984.— 368 с.

[7] *Дейнека В. С., Сергиенко И. В., Скопецкий В. В.* Модели и методы решения задач с условиями сопряжения.— К.: Наукова думка, 1998.— 614 с.

[8] *Сергиенко И. В., Скопецкий В. В., Дейнека В. С.* Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах.— К.: Наукова думка, 1991.— 432 с.

[9] *Коляно Ю. М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднордного тела.— К.: Наукова думка, 1992.— 280 с.

[10] *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математичской физики.— М.: Наука, 1972.— 735 с.

[11] *Ленюк М. П.* Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних сферичних областях.— К.: Інститут математики НАН України, 1997.— 188 с.

[12] *Конет І. М.* Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в ортотропних сферичних областях.— К.: Інститут математики НАН України, 1998.— 209 с.

[13] *Конет І. М., Ленюк М. П.* Стаціонарні та нестаціонарні температурні поля в циліндрично-кругових областях.— Чернівці: Прут, 2001.— 312 с.

[14] *Конет І. М., Ленюк М. П.* Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях.— Чернівці: Прут, 2004.— 276 с.

[15] *Громик А. П., Конет І. М.* Стаціонарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових середовищах.— Кам'янець–Подільський: Абетка–Світ, 2008.— 120 с.

[16] *Громик А. П., Конет І. М.* Нестаціонарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових середовищах.— Кам'янець–Подільський: Абетка–Світ, 2009.— 120 с.

[17] *Громик А. П., Конет І. М., Ленюк М. П.* Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах.— Кам'янець–Подільський: Абетка–Світ, 2011.— 200 с.

[18] *Конет І. М.* Гіперболічні крайові задачі в необмежених двоскладових циліндричних областях // Математичний вісник НТШ.— 2010.— **7**,— С. 71–92.

[19] *Конет І. М., Ленюк М. П.* Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових циліндричних областях // Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових областях.— Львів, 2011.— 48 с.— (Препр./ НАН України Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача; 01.11).— Чернівці: Прут, 2011.— С. 5–17.

[20] *Конет І. М.* Гіперболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндричних півпросторах // Волинський математичний вісник Серія: Прикладна математика.— 2011.— **8**(17),— С. 93–108.

[21] *Трантер К. Дж.* Интегральные преобразования в математической физике.— М.: Гостехтеориздат., 1956.— 204 с.

[22] *Ленюк М. П.* Интегральные преобразования с разделёнными переменными (Вебера, Фурье–Бесселя, Лежандра–Фурье).— К., 1983.— 56 с.— (Препр./ АН УССР. Институт математики; 83.18).

[23] *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс.— М.: Наука, 1965.— 328 с.

[24] *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений.— М.: Физматгиз., 1958.— 274 с.