Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13 (2).— С. 115–127.

УДК 517.51

Лінійні фрактали типу Безиковича–Егглстона

М. В. Працьовитий,

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова, Інститут математики НАН України

С. О. Климчук,

Інститут математики НАН України

Анотація. Вивчаються тополого-метричні і фрактальні властивості множини чисел $[0;1]$ з заданим асимптотичним середнім значенням цифр у їх трійковому зображенні (поданні). Встановлюється зв'язок таких чисел з числами із заданою частотою цифр.

Ключові слова: частота цифри числа, асимптотичне середнє значення цифр, нормальні числа, слабо нормальні числа, розмірність Хаусдорфа–Безиковича, множини Безиковича–Егглстона.

Linear fractals of the Besicovitsh–Egglestone type

M. Pratsiovytyi,

National Pedagogical Dragomanov University, Institute for Mathematics of NASU

S. Klymchyk,

Institute for Mathematics of NASU

Abstract. We study topological, metric and fractal properties of set of numbers $[0;1]$ with given asymptotic mean of digits in their ternary expansion. We investigate connection of these numbers and numbers with a given frequency of digits.

AMS Subject Classifications (2010): 28A80, 60G30.

Key words: asymptotic frequency of symbols, asymptotic mean of digits in their ternary expansion, Hausdorff–Besicovitch dimension of sets, fractal.

Вступ

Добре відомо, що для *довільного дійсного числа* $x \in [0;1]$ *існує послідовність* (α_n) *така, що* $\alpha_n \in \mathcal{A} = \{0, 1, \dots, s-1\}$ *і*

$$x = \frac{\alpha_1}{s} + \frac{\alpha_2}{s^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{s^n} + \dots \equiv \Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n\dots}.$$

Останній запис називається *s-ковим зображенням*, а $\alpha_k = \alpha_k(x)$ — *k-тою s-ковою цифрою числа x*. Взагалі кажучи, k-та цифра числа як його функція, є некоректно визначеною, оскільки має місце рівність

$$\Delta^s_{c_1\dots c_{k-1}c_k(0)} = \Delta^s_{c_1\dots c_{k-1}[c_k-1](s-1)},$$

де (i) — період у зображенні числа. Числа такого виду називаються *s-ково-раціональними*, вони мають рівно два s-кових зображення. Решта чисел мають лише одне зображення і називаються *s-ково-ірраціональними.* Для коректності означення k-тої цифри досить домовитись використовувати лише перше s-кове зображення, а саме: те, що має період (0). Тепер $\alpha_n(x)$ є функцією, коректно визначеною на $[0;1]$.

Нехай $N_i(x,k)$ — кількість цифр $i \in \mathcal{A} = \{0,1,\dots,s-1\}$ у s-ковому зображенні $\Delta^s_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_k\dots}$ числа $x \in [0;1]$ до k-го місця включно, тобто

$$N_i(x,k) = \#\{j : \alpha_j(x) = i, \, j \leqslant k\}.$$

Число $k^{-1}N_i(x,k)$ є відносною частотою цифри i в s-ковому зображенні числа x.

Означення 1. *Частотою (асимптотичною частотою) цифри i у s-ковому зображенні числа $x \in [0;1]$* називається границя

$$\nu_i(x) = \lim_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k},$$

якщо вона існує.

Зрозуміло, що функція частоти $\nu_i(x)$ цифри i у s-ковому зображенні числа $x \in [0;1]$ є коректно визначеною для s-ково-ірраціональних чисел, а для s-ково-раціональних — після домовленості, яку зроблено вище, використовувати лише зображення з періодом нуля.

З початку XX століття ведуться дослідження властивостей множин дійсних чисел, визначених в термінах частоти символів (цифр) в зображенні у тій чи іншій системі числення. Варто відзначити оригінальні результати Е. Бореля та А. Лебега стосовно нормальних та слабо нормальних чисел, а також дослідження А. С. Безиковича, Г. Еgглстона, П. Біллінгслі, О. Я. Хінчина, М. М. Постнікова, І. Й. П'ятецького, М. В. Працьовитого, Л. Олсена, Г. М. Торбіна та інших стосовно властивостей множин, визначених в термінах частот символів або комбінацій символів у тому чи іншому зображенні.

Добре відомим є той факт (теорема Бореля [**3**]), що *для майже всіх (у розумінні міри Лебега) чисел* $[0;1]$ *має місце рівність*

$$\nu_0(x) = \nu_1(x) = \ldots = \nu_{s-1}(x) = \frac{1}{s}.$$

Такі числа називаються *слабо нормальними або нормальними за основою s*. Множина ненормальних чисел (які не є нормальними) є множиною нульової міри Лебега, а отже, потенційно є фрактальною. Континуальний клас фрактальних підмножин цієї множини утворюють множини Безиковича–Егглстона, а саме: множини виду

$$E \equiv E[\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{s-1}] = \{x : \nu_i(x) = \tau_i,\ i = 0, 1, \ldots, s-1\}.$$

Фрактальна розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини E обчислюється за формулою

$$\alpha_0(E) = -\frac{\ln \tau_0^{\tau_0} \tau_1^{\tau_1} \ldots \tau_{s-1}^{\tau_{s-1}}}{\ln s}.$$

Як доведено у роботах **[1]**, **[9]**, множина ненормальних та суттєво ненормальних чисел (чисел, у яких не існує хоча б однієї або жодної з частот цифр) є суперфрактальною множиною, тобто має розмірність Хаусдорфа–Безиковича рівну 1.

Означення 2. *Асимптотичним середнім значенням цифр (або просто середнім значенням цифр)* числа $x \in [0;1]$ будемо називати число

$$r(x) \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x),$$

де $A \ni \alpha_i$ – i-та цифра s-кового зображення числа x (якщо остання границя існує).

Асимптотичне середнє значення цифр є певним аналогом частоти s-кової цифри числа. Більше того, при $s = 2$ має місце рівність $r(x) = \nu_1(x)$. Очевидно, що ця рівність має місце і для довільного числа, s-кове зображення якого використовує лише цифри «0» та «1» або навіть скінченну кількість інших цифр. Тому для таких чисел відсутність частоти цифри «1» (а приклад такого числа не складно навести) рівносильна відсутності асимптотичного середнього значення цифр.

Ми цікавимося множинами чисел з наперед заданим середнім асимптотичним значенням цифр, тобто множинами виду

$$S_a = \left\{ x : r(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) = a \geqslant 0 \right\},$$

де константа a — наперед заданий параметр з $[0;2]$, а саме: їх тополого-метричними і фрактальними властивостями. Зокрема, у даній статті ми досліджуємо тополого-метричні і фрактальні властивості множин чисел, зображених у трійковій системі числення з наперед заданим середнім значенням цифр, у яких існують частоти всіх трійкових цифр.

1. Зв'язок частоти і його середнього значення цифр

Лема 1. *Якщо основа системи числення $s > 2$ і $\nu_i(x) = 0$ для всіх $i > 1$, то $r(x)$ і $\nu_1(x)$ одночасно не існують або одночасно існують, причому $\nu_1(x) = r(x)$.*

Доведення. Оскільки $\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i(x) = \dfrac{0\cdot N_0(x,n)}{n} + \ldots + \dfrac{(s-1)\cdot N_{s-1}(x,n)}{n}$ і $\nu_2 = \nu_3 = \ldots = \nu_{s-1} = 0$, то

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x) = \frac{1\cdot N_1(x,n)}{n}.$$

Виконавши граничний перехід, отримаємо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{N_1(x,n)}{n}, \text{ тобто } r(x) = \nu_1(x),$$

якщо остання границя існує. □

Лема 2. *Якщо трійкове зображення числа x має частоти всіх цифр, то воно має асимптотичне середнє значення цифр $r(x)$, причому $r(x) = \nu_1(x) + 2\nu_2(x)$.*

Доведення. Оскільки

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x) = \frac{0\cdot N_0(x,n)}{n} + \frac{1\cdot N_1(x,n)}{n} + \frac{2\cdot N_2(x,n)}{n} = \frac{N_1(x,n)}{n} + 2\frac{N_2(x,n)}{n},$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{N_1(x,n)}{n} + 2\frac{N_2(x,n)}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{N_1(x,n)}{n} + 2\lim_{n\to\infty}\frac{N_2(x,n)}{n},$$

якщо останні границі існують. З останньої рівності маємо,

$$r(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x) = \nu_1(x) + 2\nu_2(x).$$ □

Лема 3. *Якщо трійкове зображення числа не має частоти однієї з цифр, то воно не має частоти принаймні ще однієї цифри.*

Доведення. Припустимо, що частота $\nu_k(x_0)$ не існує, тобто не існує $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{N_k(x_0,n)}{n}$. Оскільки $\frac{N_k(x_0,n)}{n} = 1 - \frac{N_j(x_0,n)}{n} - \frac{N_m(x_0,n)}{n}$, то не існує $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{N_j(x_0,n)}{n} + \frac{N_m(x_0,n)}{n}\right)$. Це означає, що границі $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{N_j(x_0,n)}{n}$ та $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{N_m(x_0,n)}{n}$ одночасно не існують, або $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{N_j(x_0,n)}{n}$ — існує, а границя $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{N_m(x_0,n)}{n}$ — не існує, $j,k,m = 0,1,2$, $j \neq k \neq m$. □

Лема 4. *Якщо для трійкового зображення числа існує частота $\nu_i(x)$, то $\nu_i(x) = \nu_{2-i}(1-x)$, де $i \in \{0,1,2\}$.*

Доведення. Якщо $x = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}$, то $1 - x = \Delta^3_{(2-\alpha_1)(2-\alpha_2)\ldots(2-\alpha_k)\ldots}$, тобто $\alpha_k(1-x) = 2 - \alpha_k(x)$. Тому $N_i(x,k) = N_{2-i}(1-x,k)$, а отже, $\nu_i(x) = \nu_{2-i}(1-x)$. □

Теорема 1. *Число x, трійкове зображення якого є періодичним з періодом $(s_1 \ldots s_m)$, має частоти всіх цифр, причому*

$$\nu_i(x) = \frac{m_i}{m},$$

де m_i — кількість цифр i в наборі цифр $(s_1 \ldots s_m)$.

Доведення. Оскільки частота цифри не залежить від довільної скінченної кількості початкових цифр, то доведення досить провести для числа $x_0 = \Delta^3_{(s_1 \ldots s_m)}$.

Нехай $b_n = n \cdot m$. Тоді

$$N_0(x_0, b_n) = n \cdot m_0, \;\; N_1(x_0, b_n) = n \cdot m_1, \;\; N_2(x_0, b_n) = n \cdot m_2,$$

і

$$\frac{N_i(x_0, b_n)}{b_n} = \frac{n \cdot m_i}{n \cdot m} = \frac{m_i}{m}, \;\; i = 0, 1, 2.$$

Якщо k — довільне натуральне число, $k > m$, то існує $n = n(k)$ таке, що

$$b_n \leqslant k < b_{n+1}.$$

Тому

$$N_i(x_0, b_n) \leqslant N_i(x_0, k) \leqslant N_i(x_0, b_{n+1}),$$

і

$$\frac{n \cdot m_0}{(n+1) \cdot m} = \frac{N_i(x_0, b_n)}{b_{n+1}} < \frac{N_i(x_0, k)}{k} \leqslant \frac{N_i(x_0, b_{n+1})}{b_n} = \frac{(n+1) \cdot m_0}{n \cdot m}.$$

Оскільки

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

то

$$\nu_i(x) = \lim_{k \to \infty} \frac{N_i(x_0, k)}{k} = \frac{m_i}{m}.$$

□

Наслідок 1. *Кожне раціональне число відрізка* $[0; 1]$ *має частоти всіх трійкових цифр.*

Наслідок 2. *Число x, трійкове зображення якого є періодичним з періодом $(s_1 \ldots s_m)$, завжди має асимптотичне средне значення цифр.*

2. Функція частоти трійкової цифри

Теорема 2. *(властивості функції частоти цифри).*

1. Функція частоти цифри $\nu_i(x)$, $i \in \mathcal{A}$, є обмеженою і набуває всіх значень з відрізка $[0; 1]$.

2. Множина точок, у яких функція частоти не визначена, є щільною в $[0; 1]$.

3. Функція частоти цифри $\nu_i(x)$, $i \in \mathcal{A}$, є розривною в кожній точці $[0; 1]$.

Доведення. 1. Оскільки $k^{-1}N_i(x,k) \leqslant 1$, то функція $\nu_i(x)$ не може набувати значень більших 1, а отже, є обмеженою.

Вкажемо число $x \in [0;1]$, для якого $\nu_i(x) = a \in [0;1]$.

Якщо $a = 1$, то таким є число $\Delta^3_{(i)}$, де $i \in \{0,1,2\}$.

Якщо $a = 0$, то $x = \Delta^3_{(j)}$, де $i \neq j \in \{0,1,2\}$.

Нехай тепер $0 < a < 1$. Якщо a — число раціональне, тобто $a = \dfrac{l}{m}$, причому останній дріб є нескоротним, то число

$$x = \Delta^3_{(\underbrace{i\ldots i}_{l}\underbrace{j\ldots j}_{m-l})},$$

згідно з попередньою теоремою, має частоту i–ї трійкової цифри рівну a.

Якщо a — ірраціональне, то означимо цілочисельну послідовність $(c_n) = [n \cdot a]$. Оскільки $0 < a < 1$, то $c_1 = 0$. Розглянемо різницю
$d_n = c_{n+1} - c_n = [(n+1)\cdot a] - [n \cdot a] = [n\cdot a + a] - [n \cdot a] = [[n \cdot a] + \{n \cdot a\} + a] - [n \cdot a]$.
Оскільки $[[A] + [B]] = [A] + [B]$, то

$$d_n = [n \cdot a] + [\{n \cdot a\} + a] - [n \cdot a] = [\{n \cdot a\} + a].$$

Враховуючи, що $\{n \cdot a\} \in [0;1)$ і $a \in (0;1)$ то $d_n \in \{0,1\}$.

Розглянемо число x_* таке, що $N_i(x_*, n) = c_n$. Очевидно, що таке існує. Справді, таким є число $x_* = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}$, де

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} i, & \text{якщо } d_n = 1,\\ j, & \text{якщо } d_n = 0,\end{cases}$$

де $j \in \{0,1,2\} \setminus \{i\}$. Оскільки $a - \dfrac{1}{n} = \dfrac{n\cdot a - 1}{n} < \dfrac{N_i(x_*, n)}{n} = \dfrac{[n \cdot a]}{n} \leqslant \dfrac{n \cdot a}{n} = a$, то

$$\nu_i(x_*) = \lim_{n\to\infty} \frac{N_i(x_*, n)}{n} = a.$$

2. Існують числа, що не мають частоти цифри принаймні двох трійкових цифр. Наприклад, таким є число

$$x^* = \Delta^3_{ijiijjiiiijjjj\ldots\underbrace{i\ldots i}_{2^n}\underbrace{j\ldots j}_{2^n}\ldots}$$

Справді, розглянемо послідовність (k_n), де k_n — номер місця останньої цифри i в $(n+1)$-ій серії «i». Очевидно, що
$N_i(x, k_n) = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^n = \dfrac{2^{n+1} - 1}{2-1} = 2^{n+1} - 1,$
$N_j(x, k_n) = 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{n-1} = \dfrac{2^n - 1}{2-1} = 2^n - 1,$

$$\begin{aligned} k_n &= (1+2+\ldots+2^n)+(1+2+\ldots+2^{n-1}) = 2(1+2+\ldots+2^{n-1})+2^n = \\ &= 2\cdot\frac{2^n-1}{2-1}+2^n = 2^{n+1}+2^n-2; \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_i(x,k_n)}{k_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}+2^n-2} = \frac{2}{3},$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_j(x,k_n)}{k_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n}-1}{2^{n+1}+2^n-2} = \frac{1}{3}.$$

Нехай тепер k'_n — номер місця останньої цифри j в $(n+1)$-ій серії «j». Очевидно, що
$N_i(x,k'_n) = 1+2+2^2+\ldots+2^n = \dfrac{2^{n+1}-1}{2-1} = 2^{n+1}-1 = N_j(x,k'_n)$,
$k'_n = 2\cdot(1+2+2^2+\ldots+2^n) = 2(2^{n+1}-1) = 2^{n+2}-2$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_i(x,k'_n)}{k'_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{N_j(x,k'_n)}{k'_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}-1}{2^{n+2}-2} = \frac{1}{2},\ \ i,j\in\{0,1,2\}.$$

Таким чином,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_i(x,k_n)}{k_n} = \frac{2}{3} \neq \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{N_i(x,k'_n)}{k'_n},$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_j(x,k_n)}{k_n} = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{N_j(x,k'_n)}{k'_n}.$$

А це є свідченням того, що число x не має ні частоти цифри «i», ні частоти цифри «j».

Оскільки частота не залежить від довільної скінченної кількості перших цифр трійкового зображення числа, то кожне число хвостової множини x^* не має частоти ні цифри «i» ні цифри «j». Оскільки хвостова множина є щільною в $[0;1]$, то функція частоти $\nu_i(x)$ має точку розриву у кожному як завгодно малому інтервалі.

3. Якщо частота $\nu_i(x_0)$ не існує, то зрозуміло, що функція ν_i в точці x_0 є розривною. Оскільки означення неперервності функції в точці вимагає визначеності в деякому околі цієї точки, то в силу твердження 2, функція ν_i не є неперервною в жодній точці $[0;1]$. □

Наступна властивість функції ν_i є деяким уточненням властивості розривності.

Лема 5. *Границя* $\lim\limits_{x\to x_0}\nu_i(x)$ *не існує, навіть тоді, коли існує частота* $\nu_i(x_0)$.

Доведення. Наведемо конструктивне доведення цього факту.

Якщо $\nu_i(x_0)\neq\frac{1}{3}$, то розглянемо послідовність (x_n):

$$x_n = \Delta^3_{\alpha_1(x_0)\ldots\alpha_n(x_0)(012)}.$$

Згідно з теоремою 1, $\nu_i(x_0)=\frac{1}{3}$. Очевидно, що $x_n\to x_0$ $(n\to\infty)$, але

$$\lim_{x_n\to x_0}\nu_i(x_n) = \frac{1}{3}\neq\nu_i(x_0).$$

Якщо $\nu_i(x_0) = \frac{1}{3}$, то розглянувши послідовність

$$x'_n = \Delta^3_{\alpha_1(x_0)\ldots\alpha_n(x_0)(i)},$$

отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} \nu_i(x'_n) = 1 = \lim_{x_n\to x_0} \nu_i(x'_n) \neq \nu_i(x_0),$$

Розглянемо випадок, коли частота $\nu_i(x)$ у зображенні числа x не існує. Оскільки $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ і $x'_n \to x_0$ $(n \to \infty)$, але

$$\frac{1}{3} = \lim_{n\to\infty} \nu_i(x_n) \neq \lim_{n\to\infty} \nu_i(x'_n) = 1,$$

отже, границя функції частоти $\lim\limits_{x\to x_0} \nu_i(x)$ не існує. □

3. Множина чисел із заданим середнім значенням цифр

Розглядається множина $S_a = \{x : r(x) = a \geqslant 0\}$ чисел із наперед заданим асимптотичним середнім значенням цифр, рівним a, де $0 \leqslant a \leqslant 2$.

Лема 6. *Якщо існує асимптотичне середнє значення цифр $r(x)$ і частота $\nu_0(x)$, то існують частоти $\nu_1(x)$ та $\nu_2(x)$. Якщо ж не існує частоти $\nu_0(x)$, але існує $r(x)$, то не існує і частот $\nu_1(x)$ та $\nu_2(x)$.*

Доведення. Нехай $v_j^{(n)} = n^{-1}N_j(x, n)$ — відносна частота цифри j у трійковому зображенні числа x, $r_n(x) = \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j(x)$ — відносне середнє значення цифр числа x. Тоді має місце система

$$\begin{cases} v_0^{(n)} + v_1^{(n)} + v_2^{(n)} = 1, \\ v_1^{(n)} + 2v_2^{(n)} = r_n. \end{cases}$$

Перепишемо її у вигляді

$$\begin{cases} v_2^{(n)} = r_n - 1 + v_0^{(n)}, \\ v_1^{(n)} = 2 - 2v_0^{(n)} - r_n. \end{cases}$$

Якщо існують $\lim\limits_{n\to\infty} r_n$ і $\lim\limits_{n\to\infty} v_0^{(n)}$, то з другої рівності системи випливає існування $\lim\limits_{n\to\infty} v_1^{(n)}$, а з першої — $\lim\limits_{n\to\infty} v_2^{(n)}$.

Якщо $\lim\limits_{n\to\infty} r_n$ існує, а $\lim\limits_{n\to\infty} v_0^{(n)}$ не існує, то не існує границь $\lim\limits_{n\to\infty} v_1^{(n)}$ і $\lim\limits_{n\to\infty} v_2^{(n)}$, тобто не існує частот $\nu_1(x)$ і $\nu_2(x)$. □

Очевидно, множина S_a є об'єднанням двох неперетинних множин:

$K_a = \{x : \nu_1(x) \text{ і } \nu_2(x) \text{ існують}\}$, $M_a = \{x : \nu_0(x) \text{ не існує}\}$.

Проведемо аналіз властивостей підмножини K_a множини S_a.

Теорема 3. *Множина K_a є континуальною, всюди щільною у відрізку $[0;1]$, нульової міри Лебега при $a \neq 1$ і повної міри Лебега при $a = 1$. Розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини K_a не менша, ніж число*

$$-\frac{1}{\ln 3}\ln\left[\left(\frac{t-1}{3}\right)^{\frac{t-1}{3}}\left(\frac{7-3a-t}{6}\right)^{\frac{7-3a-t}{6}}\left(\frac{1+3a-t}{6}\right)^{\frac{1+3a-t}{6}}\right],$$

де $t = \sqrt{1+6a-3a^2}$.

Доведення. 1. *Континуальність.* Оскільки для будь-якої точки x множини K_a має місце рівність $r(x) = \nu_1(x) + 2\nu_2(x)$, то множина K_a містить всі множини Безиковича–Еглстона $E \equiv E[\tau_0, \tau_1, \tau_2]$, для яких виконується

$$\tau_1 + 2\tau_2 = a,$$

тому континуальність K_a випливає з континуальності E.

Дамо безпосереднє доведення цього факту. Вкажемо ін'єктивне відображення f відрізка $[0;1]$ в множину E, тобто таке відображення, для якого з $x_1 \neq x_2$ випливає $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Якщо $\tau_i = 1$, $i \in \{0,1,2\}$, то $x_0 = \Delta^3_{(i)} \in E$. У цьому випадку очевидно, що таким відображенням є

$$f(x) = f(\Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots}) = \Delta^3_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots},$$

де $\beta_{3^n} = \alpha_n$, $n = 1,2,\ldots$, і $\beta_j = i$ при $j \notin \{3^n\}$.

Якщо $\tau_i \in [0;1)$, то число $x_0 = \Delta^3_{c_1c_2\ldots c_n\ldots}$ — трійково-ірраціональне, тобто містить нескінченну кількість серій нулів, одиниць і двійок, тобто має вигляд

$$x_0 = \Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\underbrace{2\ldots2}_{a_3}\ldots\underbrace{0\ldots0}_{a_{3k-2}}\underbrace{1\ldots1}_{a_{3k-1}}\underbrace{2\ldots2}_{a_{3k}}\ldots},$$

де $a_i \in N_0$. Довільному $x = \Delta^3_{d_1d_2\ldots d_n\ldots}$ з відрізка $[0;1]$ поставимо у відповідність $\widehat{x} = f(x) = x_0 * x$, де

$$\widehat{x} = \Delta^3_{\underbrace{0\ldots0}_{a_1}\underbrace{1\ldots1}_{a_2}\underbrace{2\ldots2}_{a_3}\alpha_1\underbrace{0\ldots0}_{a_4}\underbrace{1\ldots1}_{a_5}\underbrace{2\ldots2}_{a_6}\underbrace{0\ldots0}_{a_7}\underbrace{1\ldots1}_{a_8}\underbrace{2\ldots2}_{a_9}\alpha_2\underbrace{0\ldots0}_{a_{10}}\ldots}$$

тобто $f(x) = \Delta^3_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n\ldots}$, де

$$\beta_{s_{3^n}+n}(\widehat{x}) = d_n,\ n = 1,2,\ldots,\ \beta_j(\widehat{x}) = c_k(x_0) \text{ коли } j \notin (s_{3^n}+n).$$

Покажемо, що $\widehat{x} \in E$, а саме: $\nu_0(\widehat{x}) = \nu_0(x_0)$, $\nu_1(\widehat{x}) = \nu_1(x_0)$. Для цього досить показати, що це буде навіть у випадку, коли $x = \Delta^3_{(02)}$.

Введемо позначення: нехай a_{3k-2} — довжина k-ої серії нулів, a_{3k-1} — довжина k-ої серії одиниць, а a_{3k} — довжина k-ої серії двійок числа x_0.

$$\begin{aligned} u_k &= a_1 + a_4 + \ldots + a_{3k-2}, \\ v_k &= a_2 + a_5 + \ldots + a_{3k-1}, \\ w_k &= a_3 + a_6 + \ldots + a_{3k}. \end{aligned}$$

Тоді сума довжин k серій одиниць числа $\widehat{x}$ дорівнює v_k, а сума довжин k серій нулів і двійок дорівнюють відповідно

$$u'_k = a_1 + (a_4 + 1) + a_7 + a_{10} + \ldots + (a_{3^{2i-1}+1} + 1) + \ldots + a_{3k-2} = u_k + N,$$

$$w'_k = a_3 + a_6 + (a_9 + 1) + \ldots + (a_{3^{2i}+1} + 1) + \ldots + a_{3k} = w_k + N.$$

Знайдемо значення частот цифр нуля та двійки чисел x_0 та $\widehat{x}$.

$$\begin{aligned} \nu_0(x_0) &= \lim_{k\to\infty} \frac{u_k}{u_k + v_k + w_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{v_k}{u_k} + \frac{w_k}{u_k}}, \\ \nu_2(x_0) &= \lim_{k\to\infty} \frac{w_k}{u_k + v_k + w_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{u_k}{w_k} + \frac{v_k}{w_k}}, \\ \nu_0(\widehat{x}) &= \lim_{k\to\infty} \frac{u'_k}{u'_k + v'_k + w'_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{u_k + N}{u_k + v_k + w_k + 2N} = \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{v_k}{u_k} + \frac{w_k}{u_k} + \frac{2N(k)}{u_k}} + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\frac{u_k}{N} + \frac{v_k}{N} + \frac{w_k}{N} + 2}, \\ \nu_2(\widehat{x}) &= \lim_{k\to\infty} \frac{w'_k}{u'_k + v'_k + w'_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{w_k + N}{u_k + v_k + w_k + 2N} = \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{1 + \frac{u_k}{w_k} + \frac{v_k}{w_k} + \frac{2N}{w_k}} + \lim_{k\to\infty} \frac{1}{\frac{u_k}{N} + \frac{v_k}{N} + \frac{w_k}{N} + 2}. \end{aligned}$$

Оскільки

$\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{u_k}{N(k)} \geqslant \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{3^{2k-1}+1}{k} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3^{2x-1}+1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2 \cdot 3^{2x-1} \ln 3}{1} = \infty$, і

$\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{w_k}{N(k)} \geqslant \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{3^{2k}}{k} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3^{2x}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2 \cdot 3^{2x} \ln 3}{1} = \infty$, то

$\nu_0(\widehat{x}) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{1 + \frac{v_k}{u_k} + \frac{w_k}{u_k}}$ і $\nu_2(\widehat{x}) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1}{1 + \frac{u_k}{w_k} + \frac{v_k}{w_k}}$, тобто

$$\nu_0(\widehat{x}) = \nu_0(x_0), \ \nu_1(\widehat{x}) = \nu_1(x_0).$$

Отже, множина Безиковича–Еггльстона $E[\tau_0, \tau_1, \tau_2]$ має потужність континуум.

Оскільки $E[\tau_0, \tau_1, \tau_2] \subseteq K_a$, то множина K_a континуальна.

2. *Всюди щільність.* Множина K_a є всюди щільною, оскільки у довільному циліндрі $\Delta^3_{c_1\ldots c_k} = \{x : \alpha_j(x) = c_j,\ j = \overline{1,m}\}$ існують точки з цієї множини. А саме, якщо $x_0 = \Delta^3_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\ldots} \in K_a$, то точка $x = \Delta^3_{c_1\ldots c_m\alpha_1\ldots\alpha_n\ldots} \in K_a \cap \Delta^3_{c_1\ldots c_m}$.

3. *Міра Лебега.* Якщо $a = 1$, то множина K_a містить множину нормальних за основою 3 чисел H, тобто чисел, частоти цифр яких рівні, тобто

$$\nu_0(x) = \nu_1(x) = \nu_2(x) = \frac{1}{3}.$$

Тоді
$$\nu_1(x) + 2\nu_2(x) = \frac{1}{3} + 2 \cdot \frac{1}{3} = 1.$$
Оскільки $\lambda(H) = 1$, то $\lambda(K_a) = 1$.

Якщо $a \neq 1$, то $K_a \cap H = \varnothing$. Отже, $K_a \subset [0;1] \setminus H$, $\lambda(K_a) = \lambda([0;1] \setminus H) = 0$.

4. *Розмірність Хаусдорфа–Безиковича* володіє властивістю монотонності
$$E_1 \subset E_2 \Rightarrow \alpha_0(E_1) \leqslant \alpha_0(E_2)$$
та зліченної стабільності
$$\alpha_0(\bigcup_n E_n) = \sup_n \alpha_0(E_n).$$
Тому
$$\alpha_0(K_a) = \sup_{\substack{\nu_1+2\nu_2=a,\\ \nu_1+2\nu_2+\nu_3=1}} \alpha_0(E(\nu_0,\nu_1,\nu_2)).$$

З умов $\nu_0(x)+\nu_1(x)+\nu_2(x) = 1$ і $\nu_1(x)+2\nu_2(x) = a$ визначаємо $\nu_1 = a-2\nu_2$, $\nu_0 = 1-\nu_1-\nu_2 = 1-a+2\nu_2-\nu_2 = 1-a+\nu_2$. З метою обчислення розмірності Хаусдорфа–Безиковича, дослідимо на максимум функцію
$$y \;= -\frac{\ln x^x \cdot (a-2x)^{a-2x} \cdot (1-a+x)^{1-a+x}}{\ln 3},$$
де $x \in [0; \frac{a}{2}]$, тобто
$$\begin{aligned}
y \;&= \frac{\ln x^x + \ln(a-2x)^{a-2x} + \ln(1-a+x)^{1-a+x}}{-\ln 3},\\
y' \;&= -\frac{1}{\ln 3}\left(\ln x + 1 - 2\ln(a-2x) - 2\frac{a-2x}{a-2x} + \ln(1-a+x) + \frac{1-a+x}{1-a+x}\right) =\\
&= -\frac{1}{\ln 3}\left(\ln x + 1 - 2\ln(a-2x) - 2 + \ln(1-a+x) + 1\right) =\\
&= -\frac{1}{\ln 3}\left(\ln\frac{(1-a+x)x}{(a-2x)^2}\right),\\
y' \;&= 0, \quad \frac{(1-a+x)x}{(a-2x)^2} = 1,
\end{aligned}$$
$$\begin{cases} (1-a+x)x - (a-2x)^2 = 0,\\ x \neq \frac{a}{2}; \end{cases}$$
$$3x^2 - (1+3a)x + a^2 = 0,$$
$$x_1 = \frac{1+3a-\sqrt{1+6a-3a^2}}{6} \text{ — точка максимуму},$$
$$x_2 = \frac{1+3a+\sqrt{1+6a-3a^2}}{6} \text{ — точка мінімуму},$$
$$y_{max} = -\frac{1}{\ln 3} \cdot \ln\left[\left(\frac{t-1}{3}\right)^{\frac{t-1}{3}} \cdot \left(\frac{7-3a-t}{6}\right)^{\frac{7-3a-t}{6}} \cdot \left(\frac{1+3a-t}{6}\right)^{\frac{1+3a-t}{6}}\right],$$
де $t = \sqrt{1+6a-3a^2}$. □

Наслідок 3. *Розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини* $K_1 = \{x : r(x) = 1\}$, *дорівнює* 1, *тобто* $\alpha_0(K_1) = 1$.

Література

[1] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Singular probability distributions and fractal properties of sets of real numbers defined by the asymptotic frequencies of their s-adic digits // Ukrainian Math. J. — 2005. — 57, no. 9. — P. 1361–1370.

[2] *Besicovitch A.S.* On the sum of digits of real numbers represented in the dyadic system // Math. Ann. — 1934. — 110. — p. 321–330.

[3] *Borel É.* Leçons sur la théorie des fonctions. — 2ème édition. — Paris: Gauthier-Villars, 1914. — 259 p.

[4] *Eggleston H.G.* The fractional dimension of a set defined by decimal properties // Quart. J. Math. — 1949. — Oxford Ser. 20. — p. 31–36.

[5] *Olsen L.* On the Hausdorff dimension of generalized Besicovitch-Eggleston sets of d-tuples of numbers // Indagationes Mathematicae. — 2004. — vol. 15, Issue 4. — p. 535–547.

[6] *Raimi R.A.* On the distribution of first significant figures.// Amer. Mathem. Month. — 1969. — vol. 76. — p. 342–348.

[7] *Биллингслей П.* Эргодическая теория и информация. — М.: Мир, 1969. — 239 с.

[8] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.

[9] *Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Суперфрактальність множини чисел, які не мають частоти n-адичних знаків, та фрактальні розподіли ймовірностей // Укр. мат. журн. — 1995. — 47, №7. — С. 971–975.

[10] *Торбін Г.М.* Частотні характеристики нормальних чисел в різних системх числення // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — Київ: IМ НАН України – НПУ ім. М.П.Драгоманова. — 1998, №1. — С.53–55.

[11] *Турбин А.Ф., Працевитий Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наук.думка, 1992. — 208 с.

[12] *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. — Ленинград: Государственное издательство физико-математической литературы, 1960. — 112 с.

[13] *Шутов А.В.* О распределении дробных долей. II // Исследования по алгебре, теории чисел, функциональному анализу и смежным вопросам: Межвуз. сб. науч. тр. Вып. 3. — Саратов: Изд-во Саратовского университета, 2005. — С. 146–158.

References

[1] Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G., *Ukrainian Mathematical Journal*, 2005, **57**, №9, pp. 1361–1370.

[2] Besicovitch A.S., *Math. Ann.*, 1934, **110**, pp. 321–330.

[3] Borel E., *Leçons sur la théorie des fonctions*, 1914, 259 p.

[4] Eggleston H., *Quart. J. Math.*, 1949, Pratsiovytyi, pp. 31–36.

[5] Olsen L., *Indagationes Mathematicae*, 2004, **15**, №4, pp. 535–547.

[6] Raimi R., *Amer. Mathem.*, 1969, **76**, pp. 342–348.

[7] Billingsley P., *Ergodicheskaja teorija i informacija (Ergodic theory and information)*, 1969, 239 p.

[8] Pratsiovytyi M., *Fraktalnyi pidhid u doslidzhennjah synguljarnyh rozpodiliv (Fractal approach to investigations of singular distributions)*, Kyiv, 1998, 296 p.

[9] Pratsiovytyi M., Torbin, G., *Ukrainian Mathematical Journal*, 1995, **47**, №7, pp. 971–975.

[10] Torbin, G., *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1:Phys.- Math. Sciences)*, 1998, №1, pp. 53–55.

[11] Turbin A., Pratsiovytyi M, *Fraktalnye mnozhestva, funkcii, rasspredeleniya (Fractal sets, functions, and distributions)*, Naukova Dumka, Kiev, 1992, 208 p.

[12] Hinchyn A., *Tcepnye drobi (Continued fractions)*, 1961, 112 p.

[13] Shutov A., *Issledovanija po algebre, teorii chisel, funkcionalnomu analizu i smezhnym voprosam (Research in algebra, number theory, functional analysis and related problems)*, 2005, pp. 146–158.