Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2012, № 13 (2).— С. 243–253.

УДК 511.7, 517.1

Довірчість сімейств множин відносно пакувальної розмірності

О. В. Слуцький,

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

Анотація. У статті формулюється означення фрактальної пакувальної розмірності $\dim_P$, пакувальної розмірності з нецентрованими кулями $\dim_{P(unc)}$, а також пакувальної розмірності з нецентрованими кулями відносно деякої системи множин. Доводиться, що в широкому класі просторів (зокрема в $\mathbb{R}^n$) $\dim_{P(unc)} = \dim_P$. Вводиться поняття довірчості та доводиться, що множина s-адичних інтервалів є довірчою при обчисленні $\dim_{P(unc)}$.

Ключові слова: пакувальна розмірність множини, розмірність Хаусдорфа–Безиковича множини, довірчість відносно пакувальної розмірності.

Faithfullness of sets families with respect to packing dimension

O. Slutskiy,

National Pedagogical Dragomanov University

Abstract. In this paper we give a definitions of packing dimension $\dim_P$, packing dimension with uncentred balls $\dim_{P(unc)}$ and packing dimesnsion with uncentred balls with respect to some family of sets. The theorem about equation $\dim_P = \dim_{P(unc)}$ in wide class of spaces (including $\mathbb{R}^n$) is proven. We introduce the notion of faithfulness of any set with respect to the packing dimension and prove that family of of s-adic intervals is faithful.

AMS Subject Classifications (2010): 28A78, 28A80.

Key words: Packing dimension of sets, Hausdorff dimension of sets, Faithfulness, faithful families of sets with respect to packing dimension.

Вступ

Основним об'єктом, що розглядається у статті, є пакувальна розмірність $\dim_P$ [**17, 10**]. Інтерес до цієї розмірності у світі досить швидко зростає: в 1997 році Xiao розглядає пакувальну розмірність траєкторії броунівського руху [**18**]; в 2002 році L. Olsen довів, що для множини E_{EA} суттєво анормальних s-адичних чисел мають місце рівності: $\dim_H(E_{EA}) = 0$, $\dim_P(E_{EA}) = 1$ [**14**]; у 2003-2008 році публікацій, пов'язаних з $\dim_P$ стає все більше; у 2008 році M. Das [**9**]доводить аналог теореми Біллінгслі для пакувальної розмірності; у 2011 році J. Li [**11, 12**] доводить аналоги деяких теорем S. Albeverio, М. Працьовитого, Г. Торбіна щодо пакувальної розмірності міри [**2**]; у 2012 році О. Слуцький пропонує більш простий та загальний спосіб доведення теореми Біллінгслі для $\dim_P$, ввівши «пакувальну розмірність з нецентрованими кулями» [**16**]; виходять також інші публікації, в яких розглядається $\dim_P$.

У порівнянні з розмірністю Хаусдорфа–Безиковича пакувальна розмірність має ряд цікавих властивостей, зокрема, такі як рівність (у $\mathbb{R}^n$) $\dim_P(E) = \overline{\dim_{MB}}(E)$ [**10**] та нерівність (у довільному метричному просторі) $\dim_H(E) \leqslant \dim_P(E)$. Завдяки першій властивості обчислення $\dim_P$ може бути суттєво простішим у порівнянні з обчисленням $\dim_H$; завдяки другій властивості можливо отримати досить сильну верхню оцінку розмірності Хаусдорфа–Безиковича.

Пакувальна розмірність виступає до деякої міри «двоїстою» до розмірності Хаусдорфа–Безиковича і має ті самі аналітичні переваги в застосуваннях, що й розмірність Хаусдорфа–Безиковича, зокрема зчисленну стабільність.

В цій статті буде розглянуто поняття «пакувальна розмірність відносно системи множин» та «довірчість системи множин при обчисленні пакувальної розмірності». Ці поняття введені аналогічно до таких самих понять, що стосуються розмірності Хаусдорфа–Безиковича [**1, 3**].

Поняття «довірчість системи множин при обчисленні пакувальної розмірності» дає можливість шукати пакувальну квазі-передміру як супремум не по абсолютно всім відкритим кулям (сімейство яких є континуальним), а по вужчим сімействам, в ідеалі — зчисленним. Отже, доведення довірчості певних сімейств множин (в ідеалі — якомога менших сімейств) дає можливість рахувати пакувальну розмірність набагато простіше і зручніше.

Основний результат статті — це теорема про довірчість системи s-адичних циліндрів при обчисленні пакувальної розмірності з нецентрованими кулями.

1. Пакувальна розмірність

Нехай (M, ρ) — метричний простір, в якому для довільної множини $E \subset M$ та для довільного числа $r > 0$ існує не більш ніж зчисленне покриття цієї множини відкритими кулями, діаметри яких не перевищують r.

Якщо E — деяка множина, то її діаметр будемо позначати через $|E|$.

Нагадаємо поняття пакувальної розмірності [**10, 17**], давши ланцюжок означень.

Означення 1. Нехай $E \subset M, \alpha \geqslant 0, r > 0$. Тоді α-вимірною пакувальною передмірою множини E з максимальним діаметром елементів покриття r називається число

$$\mathcal{P}_r^\alpha(E) := \sup\left\{\sum_i |E_i|^\alpha\right\},$$

де супремум береться по всеможливим не більш ніж зчисленним наборам відкритих куль $\{E_i\}$ з діаметрами, що не перевищують r, для яких виконуються такі умови:

(1) центри куль E_i належать E;

(2) $E_i \cap E_j = \emptyset \, \forall i \neq j$.

Зауваження 1. *В $\mathbb{R}^n$ вимогу того, щоб набір $\{E_i\}$ був не більш ніж зчисленним можна опустити, тому що вона випливає з вимоги того, щоб кулі не перетиналися.*

Означення 2. α-вимірною пакувальною квазі–мірою множини E називається число

$$\mathcal{P}_0^\alpha(E) := \lim_{r\to 0} \mathcal{P}_r^\alpha(E).$$

Зауваження 2. *На відміну від схожого за побудовою об'єкта — α-вимірної міри Хаусдорфа — α-вимірна пакувальна квазі-міра множини E не є мірою, тому що вона є скінченно-адитивною, проте не зчисленно-адитивною. Наприклад, при $\alpha = 1$ квазі-міра одноточкової множини дорівнює 0, але квазі-міра множини $\mathbb{Q} \cap [0;1]$ (в просторі $\mathbb{R}^1$) дорівнює 1.*

Означення 3. α-вимірною пакувальною мірою множини E називається число

$$\mathcal{P}^\alpha(E) := \inf\left\{\sum_j \mathcal{P}_0^\alpha(E_j) : E \subset \bigcup E_j\right\},$$

де інфімум береться по всеможливим не більш ніж зчисленним покриттям довільними множинами $\{E_j\}$ множини E.

Зауваження 3. *Як і для міри Хаусдорфа, для пакувальної міри виконується властивість:*

$$\forall E \subset M \begin{cases} \mathcal{P}^\alpha(E) < +\infty & \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \qquad\qquad \mathcal{P}^{\alpha+\varepsilon}(E) = 0 \\ \mathcal{P}^\alpha(E) > 0 & \Rightarrow \forall \varepsilon \in (0;\alpha) \quad \mathcal{P}^{\alpha-\varepsilon}(E) = +\infty \end{cases}.$$

Означення 4. Пакувальною розмірністю множини E називається число

$$\dim_P(E) := \inf\{\alpha : \mathcal{P}^\alpha(E) = 0\} = \sup\{\alpha : \mathcal{P}^\alpha(E) = +\infty\}.$$

Зауваження 4. *Згідно з попереднім зауваженням, пакувальна розмірність довільної множини існує і єдина (враховуючи ту умову, яку ми наклали на метричний простір (M,ρ)). Вона може бути невід'ємним дійсним числом або дорівнювати $+\infty$.*

2. Пакувальна розмірність з нецентрованими кулями

Зараз ми введемо деяке узагальнення пакувальної розмірності. Мотивацією до його введення є той факт, що означення пакувальної розмірності не дає можливості ввести розмірність Біллінгслі [**6**].

Означення 5. Нехай $E \subset M, \alpha \geqslant 0, r > 0$. Тоді α-вимірною пакувальною передмірою з нецентрованими кулями множини E з максимальним діаметром елементів покриття r називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E) := \sup\left\{\sum_i |E_i|^{\alpha}\right\},$$

де супремум береться по всеможливим не більш ніж зчисленним наборам відкритих куль $\{E_i\}$ з діаметрами, що не перевищують r, для яких виконуються такі умови:

(1) $E_i \cap E \neq \emptyset \, \forall i$;

(2) $E_i \cap E_j = \emptyset \, \forall i \neq j$.

Зауваження 5. *Як бачимо, означення $\mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E)$ відрізняється від означення $\mathcal{P}^{\alpha}_{r}(E)$ лише однією умовою: в означенні $\mathcal{P}^{\alpha}_{r}(E)$ множині E повинні належати центри куль, а в означенні $\mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E)$ множина E повинна мати непустий перетин із кожною з куль E_i. Отже, кулі E_i повинна належати хоча б одна з точок множини E, але ця точка не обов'язково має бути центром кулі E_i.*

Означення 6. α-вимірною пакувальною квазі-мірою з нецентрованими кулями множини E називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E) := \lim_{r \to 0} \mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E).$$

Означення 7. α-вимірною пакувальною мірою з нецентрованими кулями множини E називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E) := \inf\left\{\sum_j \mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E_j) : E \subset \bigcup E_j\right\},$$

де інфімум береться по всеможливим не більш ніж зчисленним покриттям довільними множинами $\{E_j\}$ множини E.

Означення 8. Пакувальною розмірністю з нецентрованими кулями множини E називається число

$$\dim_{P(unc)}(E) := \inf\{\alpha : \mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E) = 0\} = \sup\{\alpha : \mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E) = +\infty\}.$$

Теорема 1. *Нехай для метричного простору* (M, ρ) *існує така константа* C, *що* $\forall r > 0$ *у довільній відкритій кулі радіуса* $3r$ *міститься не більше, ніж* C *неперетинних відкритих куль радіуса* r. *Тоді в цьому просторі*

$$\dim_{P(unc)}(E) = \dim_P(E).$$

ДОВЕДЕННЯ. **Покажемо, що** $\dim_{P(unc)}(E) \geqslant \dim_P(E)$**.**

Числа $\mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E)$ та $\mathcal{P}^{\alpha}_{r}(E)$ є супремумами, причому перше з них — це супремум, взятий по більшій множині. Тому

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E) \geqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{r}(E).$$

Оскільки граничний перехід зберігає нестрогу нерівність, то

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E) \geqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{0}(E).$$

Аналогічно

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E) \geqslant \mathcal{P}^{\alpha}(E).$$

Нехай $\dim_{P(unc)}(E) = \alpha_0$. За означенням $\dim_{P(unc)}(E)$ маємо:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathcal{P}^{\alpha_0+\varepsilon}_{(unc)}(E) = 0 \Rightarrow$$
$$\forall \varepsilon > 0 \quad \mathcal{P}^{\alpha_0+\varepsilon}_{0}(E) = 0 \Rightarrow$$
$$\dim_P(E) \leqslant \alpha_0.$$

Отже, $\dim_{P(unc)}(E) \geqslant \dim_P(E)$, що й вимагалось довести.

Покажемо, що $\dim_{P(unc)}(E) \leqslant \dim_P(E)$**.**

Коли $\dim_{P(unc)}(E) = 0$, твердження очевидне.

Розглянемо випадок, коли $\dim_{P(unc)}(E) \neq 0$. Нехай $0 < t < s < \dim_{P(unc)}(E)$.

Оскільки $s < \dim_{P(unc)}(E)$, то $\mathcal{P}^{s}_{(unc)}(E) = +\infty$. Звідси $\mathcal{P}^{s}_{0(unc)}(E) = +\infty$, а тому існує таке $r > 0$, що $\mathcal{P}^{s}_{r(unc)}(E) > 1$.

Розглянемо набір куль, відповідний ситуації, коли $\mathcal{P}^{s}_{r(unc)}(E) > 1$. Позначимо цей набір через B. Ці кулі попарно не перетинаються, їх діаметри не перевищують r, і кожна з куль має непустий перетин з множиною E.

Введемо позначення:

$$B_k = \{A : A \in B, 2^{-k-1} \leqslant |A| < 2^{-k}\}.$$

Позначимо кількість куль у множині B_k через n_k. Хоча б одне із чисел n_k повинне задовольняти нерівність

$$n_k \geqslant 2^{kt}(1 - 2^{t-s}).$$

Справді, нехай

$$n_k < 2^{kt}(1 - 2^{t-s}) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Тоді

$$\sum_{E_i \in B} |E_i|^s < \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-ks} < \sum_{k=0}^{\infty} 2^{kt-ks}(1-2^{t-s}) = 1,$$

що суперечить умові $\mathcal{P}^s_{r(unc)}(E) > 1$. Отже,

$$\exists k_0 \in \mathbb{N} : n_{k_0} \geqslant 2^{k_0 t}(1-2^{t-s}).$$

Розглянемо всі кулі із набору B_{k_0}. Нехай

$$B_{k_0} = \{A_1, A_2, \ldots, A_{n_{k_0}}\}.$$

Нехай T_i — це одна з точок перетину кулі A_i з множиною E. Розглянемо множину B', яка складається з куль, центрами яких є точки T_i, а діаметри дорівнюють 2^{-k_0}. Зрозуміло, що кількість таких куль також дорівнює n_{k_0}.

У загальному випадку кулі з множини B' можуть перетинатися. Для того, щоб ці кулі попарно не перетиналися, виконаємо своєрідне «прибирання».

Візьмемо кулю A_1. Приберемо з множини B' ті кулі, які містяться в кулі з центром T_1 і радіусом $3 \cdot 2^{-k-1}$. Це якраз і є ті кулі, які перетинаються з кулею A_1. Кількість куль, які ми прибираємо, може бути оцінена константою C (за умовою теореми). Так само приберемо з множини B' ті кулі, які перетинаються з кулею A_2 (якщо ми ще не прибрали кулю A_2), і так далі.

Після закінчення «прибирання» кількість куль, а отже і сумарний t-об'єм множини B' зменшиться не більше, ніж у C разів. Отже,

$$\sum_{E_i \in B'} |E_i|^t \geqslant n_{k_0} \cdot \frac{2^{-k_0 t}}{C} \geqslant 2^{k_0 t}(1-2^{t-s}) \cdot \frac{2^{-k_0 t}}{C} = \frac{1-2^{t-s}}{C}.$$

Звідси випливає, що

$$\mathcal{P}^t_{2^{-k_0}}(E) \geqslant \frac{1-2^{t-s}}{C}.$$

Оскільки нерівність $\mathcal{P}^s_{r(unc)}(E) > 1$ повинна виконуватися для як завгодно малого радіуса, то і нерівність

$$\mathcal{P}^t_{2^{-k_0}}(E) \geqslant \frac{1-2^{t-s}}{C}$$

буде виконуватися для як завгодно великих значень k_0. Тому

$$\mathcal{P}^t_0(E) \geqslant \frac{1-2^{t-s}}{C},$$

а отже, і

$$\mathcal{P}^t(E) \geqslant \frac{1-2^{t-s}}{C},$$

звідки маємо нерівність $t \leqslant \dim_P(E)$. Отже, з нерівності $t < \dim_{P(unc)}(E)$ випливає нерівність $t \leqslant \dim_P(E)$. Тому $\dim_{P(unc)}(E) \leqslant \dim_P(E)$, що й вимагалося довести. □

Наслідок 1. *Якщо $M = \mathbb{R}^n$, то $\dim_{P(unc)}(E) = \dim_P(E)$.*

Доведення. Нехай B_{3r} — куля радіуса $3r$, B_r — куля радіуса r, а $\lambda(\cdot)$ — n-вимірна міра Лебега. Тоді

$$\lambda(B_{3r}) = 3^n \cdot \lambda(B_r).$$

Отже, у відкритій кулі радіуса $3r$ може поміститися не більше, ніж $C = 3^n$ неперетинних відкритих куль радіуса r, і простір $\mathbb{R}^n$ задовольняє умови попередньої теореми. □

3. Пакувальна розмірність відносно систем множин. Довірчість

Зафіксуємо деяке сімейство Φ відкритих куль з простору M, причому накладемо вимогу, щоб для будь–якої множини існувало не більш ніж зчисленне покриття кулями як завгодно малого діаметра з сімейства Φ.

Означення 9. Нехай $E \subset M, \alpha \geqslant 0, r > 0$. Тоді α-вимірною пакувальною передмірою з нецентрованими кулями множини E з максимальним діаметром елементів покриття r відносно сімейства множин Φ називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E, \Phi) := \sup \left\{ \sum_i |E_i|^{\alpha} \right\},$$

де супремум береться по всеможливим не більш ніж зчисленним наборам відкритих куль $\{E_i\}$ з діаметрами, що не перевищують r, для яких виконуються такі умови:

(1) $E_i \cap E \neq \emptyset \, \forall i$;
(2) $E_i \cap E_j = \emptyset \, \forall i \neq j$;
(3) $E_i \in \Phi \, \forall i$.

Зауваження 6. *Як бачимо, означення $\mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E, \Phi)$ відрізняється від означення $\mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E)$ лише однією умовою: в означенні $\mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E, \Phi)$ розглядаються покриття довільними кулями, а в означенні $\mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E)$ — лише покриття кулями з сімейства Φ.*

Означення 10. α-вимірною пакувальною квазі-мірою з нецентрованими кулями множини E відносно сімейства множин Φ називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E, \Phi) := \lim_{r \to 0} \mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E, \Phi).$$

Означення 11. α-вимірною пакувальною мірою з нецентрованими кулями множини E відносно сімейства множин Φ називається число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E, \Phi) := \inf \left\{ \sum_j \mathcal{P}^{\alpha}_{0(unc)}(E_j, \Phi) : E \subset \bigcup E_j \right\},$$

де інфімум береться по всеможливим не більш ніж зчисленним покриттям довільними множинами $\{E_j\}$ множини E.

Означення 12. Пакувальною розмірністю з нецентрованими кулями множини E відносно сімейства множин Φ називається число

$$\dim_{P(unc)}(E,\Phi) := \inf\{\alpha : \mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E,\Phi) = 0\} = \sup\{\alpha : \mathcal{P}^{\alpha}_{(unc)}(E,\Phi) = +\infty\}.$$

Зауваження 7. *Якщо до множини Φ належать абсолютно всі відкриті кулі з даного простору, то очевидно, що $\dim_{P(unc)}(E,\Phi) = \dim_{P(unc)}(E)$. Отже, поняття «пакувальної розмірності з нецентрованими кулями відносно певної системи множин» є узагальненням поняття «пакувальної розмірності з нецентрованими кулями».*

Теорема 2. *Для довільної множини Φ відкритих куль виконується нерівність*

$$\dim_{P(unc)}(E,\Phi) \leqslant \dim_{P(unc)}(E).$$

Доведення. Позначимо через Φ_0 множину всеможливих відкритих куль з простору M. Тоді очевидно, що

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E) = \mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E,\Phi_0).$$

За означенням, число

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E,\Phi)$$

є супремумом певної множини чисел.

Оскільки $\Phi \subseteq \Phi_0$, то (згідно з властивостями супремума)

$$\mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E,\Phi) \leqslant \mathcal{P}^{\alpha}_{r(unc)}(E,\Phi_0).$$

З нестрогої нерівності між пакувальними передмірами випливає аналогічна нестрога нерівність між пакувальними розмірностями, тобто

$$\dim_{P(unc)}(E,\Phi) \leqslant \dim_{P(unc)}(E),$$

що й вимагалося довести. □

Означення 13. Нехай сімейство множин Φ має таку властивість:

$$\forall E \subset M \quad \dim_{P(unc)}(E,\Phi) = \dim_{P(unc)}(E).$$

Тоді сімейство Φ називається довірчим для обчислення пакувальної розмірності з нецентрованими кулями.

Зауваження 8. *Варто нагадати, що поняття «довірчість» введено і для розмірності Хаусдорфа-Безиковича $\dim_H$* [**13**]. *Також для $\dim_H$ доведена нерівність:*

$$\dim_H(E,\Phi) \geqslant \dim_H(E).$$

Як бачимо, у нерівності для $\dim_H$ знак протилежний (це пов'язано з тим, що в означенні для $\dim_H$ не супремум, а інфімум). Ця зміна знаку змушує нас при *доведенні довірчості оцінювати відповідні передміри не зверху (як в* $\dim_H$*), а знизу, що в деяких випадках суттєво змінює процес доведення.*

Один з таких випадків ми розглянемо нижче.

4. Довірчість системи s-адичних циліндрів

Означення 14. Нехай $s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 2$. Нагадаємо, що s-адичним представленням дійсного числа $x \in [0; 1]$ називається запис виду

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{s^k}, \quad a_k \in \{0, 1, \ldots, s-1\}.$$

При цьому числа a_k називаються s-адичними цифрами числа x. Множина таких чисел x, у яких перші n цифр фіксовані, називається s-адичним циліндром n-го рангу і є відрізком для довільного натурального n. В подальшому ми будемо називати s-адичним інтервалом множину внутрішніх точок відповідного s-адичного циліндра.

Теорема 3. *Нехай* $s \geqslant 2$ *— це фіксоване натуральне число,* Φ *— множина всіх* s*-адичних інтервалів. Тоді* Φ *— довірча для обчислення пакувальної розмірності з нецентрованими кулями.*

Доведення. Нехай E' — довільна множина з відрізка $[0; 1]$. Нехай S_Q — множина s-адично раціональних точок, тобто

$$S_Q := \left\{ \frac{m}{s^n} : n \in \mathbb{N}, m \in \{0, 1, 2, 3, \ldots, s^n - 1\} \right\}.$$

Нехай $E = E' \setminus S_Q$. Оскільки S_Q — зчисленна, то $\dim_P(S_Q) = 0$. Отже,

$$\dim_P(E) = \dim_P(E' \setminus S_Q) = \dim_P(E').$$

Зафіксуємо дійсні числа $\alpha \geqslant 0$ та $r > 0$ та розглянемо довільну не більш ніж зчисленну сукупність неперетинних відкритих куль $\{E_i\}$, центри яких належать E, а діаметри не перевищують r.

Нехай Δ_i — це s-адичний інтервал мінімального рангу, який міститься всередині відкритої кулі E_i та містить її центр (зауважимо, що центр кулі E_i обов'язково міститься в певному s-адичному інтервалі, оскільки в множині E відсутні s-адично раціональні точки). Тоді всередині цієї ж кулі може міститися не більше, ніж $2s - 1$ інтервалів цього ж рангу (не більше, ніж $s - 1$ інтервалів зліва від Δ_i, бо інакше E_i міститиме s-адичний інтервал попереднього рангу, і аналогічно не більше, ніж $s - 1$ інтервалів справа від Δ_i). Звідси випливає, що

$$|E_i| \leqslant |\Delta_i| \cdot (2s - 1),$$

а тому
$$\sum_i |E_i|^\alpha \leqslant (2s-1)^\alpha \sum_i |\Delta_i|^\alpha.$$
Інтервали E_i задовольняють всі умови, які накладаються на відкриті кулі в означенні $\mathcal{P}_r^\alpha(E)$, а інтервали Δ_i — всі умови, які накладаються на відкриті кулі в означенні $\mathcal{P}_{r(unc)}^\alpha(E,\Phi)$. Тому при (враховуючи, що перехід до супремума зберігає нерівності)
$$\mathcal{P}_r^\alpha(E) \leqslant (2s-1)^\alpha \mathcal{P}_{r(unc)}^\alpha(E,\Phi).$$
Взявши від обох частин границю при $r \to 0$, маємо таку нерівність:
$$\mathcal{P}_0^\alpha(E) \leqslant (2s-1)^\alpha \mathcal{P}_{0(unc)}^\alpha(E,\Phi).$$
Взявши від обох частин відповідний інфімум, маємо таку нерівність:
$$\mathcal{P}_(^\alpha E) \leqslant (2s-1)^\alpha \mathcal{P}_{(unc)}^\alpha(E,\Phi).$$
З останньої нерівності випливає, що якщо $\mathcal{P}^\alpha(E) = +\infty$, то й $\mathcal{P}_{(unc)}^\alpha(E,\Phi) = +\infty$, а отже, $\dim_{P(unc)}(E,\Phi) \geqslant \dim_P(E)$.

Оскільки ми працюємо в $\mathbb{R}^1$, то $\dim_P(E) = \dim_{P(unc)}(E)$. Оскільки $\dim_P(E) = \dim_P(E')$, і $\dim_{P(unc)}(E) = \dim_{P(unc)}(E')$, то
$$\forall E' \subset [0;1] \dim_{P(unc)}(E',\Phi) \geqslant \dim_{P(unc)}(E'),$$
що й вимагалося довести. $\square$

Література

[1] *Albeverio S., Ivanenko G., Lebid M., Torbin G.* On the Hausdorff dimension faithfulness and the Cantor series expansion (in preparation)

[2] *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* $\tilde{Q}$-representation of real numbers and fractal probability distributions, http://arxiv.org/abs/math/0308007.

[3] *Albeverio S., Torbin G.,* Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q-digits, Bull. Sci. Math., 129(2005), No. 4, P. 356–367.

[4] *Billingsley P.* Hausdorff dimension in probability theory I. llinois J. Math., vol. 4 (1960), pp. 187-209.

[5] *Billingsley P.* Hausdorff dimension in probability theory II, Ill. J. Math., 5(1961), 291-198.

[6] *Billingsley P.* Ergodic theory and information, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1965.

[7] *Chatterji S.D* Certain induced measures on the unit interval. J. London Math. Soc. 38(1963), 325-331.

[8] *Chatterji S.D.* Certain induced measures and the fractional dimensions of their supports Z.Wahrscheinlichkeitstheorie, 3(1964), 184-192.

[9] *Das M.* Billingsley's packing dimension, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008), 273-278

[10] *Falconer K.J.* Fractal geometry: mathematical foundations and applications. Chichester, Wiley, 2003.

[11] *Jinjun Li* Packing Dimension of Measures Associated with $\tilde{Q}$-Representation. Mediterr. J. Math., 2011.

[12] *Jinjun Li* A class of probability distribution functions preserving the packing dimension. Statistics and probability letters, 2011.

[13] *Нікіфоров Р.О., Торбін Г.М.* Фрактальні властивості випадкових величин з незалежними Q_∞-цифрами. Теорія ймовірностей та математична статистика, 86, 2012, стор. 150-162.

[14] *Olsen L.* Extremely non-normal numbers, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 137 (2004), no. 1, 43-53.

[15] *Rogers C.A.* Hausdorff Measures. Cambridge University Press, London, 1970.

[16] *Слуцький О.В., Торбін Г.М.* Аналог теореми Біллінгслі для пакувальної розмірності.

[17] *Tricot C.* Two definitions of fractional dimension. Math. Proc. Cambridge Philos. Soc 91 (1982): 57–74.

[18] *Xiao, Y.M.* Packing dimension of the image of fractional Brownian motion, Statistics & Probability Letters 33 (1997), 379–387.

References

[1] Albeverio S., Ivanenko G., Lebid M., Torbin G., On the Hausdorff dimension faithfulness and the Cantor series expansion (in preparation)

[2] Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G., http://arxiv.org/abs/math/0308007.

[3] Albeverio S., Torbin G., *Bull. Sci.Math.*,129(2005), pp. 357-367.

[4] Billingsley P., *llinois J. Math.*, vol. 4 (1960), pp. 187-209.

[5] Billingsley P., *Ill. J. Math.*, 5(1961), pp. 291-198.

[6] Billingsley P., *Ergodic theory and information*, John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney, 1965.

[7] Chatterji S.D., *J. London Math. Soc.*, 38(1963), pp. 325-331.

[8] Chatterji S.D., *Z.Wahrscheinlichkeitstheorie*, 3(1964), pp. 184-192.

[9] Das M., *Proc. Amer. Math. Soc.*, 136 (2008), pp. 273-278

[10] Falconer K.J., *Fractal geometry: mathematical foundations and applications*, Chichester, Wiley, 2003.

[11] Jinjun Li, *Mediterr. J. Math.*, 2011.

[12] Jinjun Li, *Statistics and probability letters*, 2011.

[13] Nikiforov R.O., Torbin G.M., *Probability Theory and Mathematical Statistics*, 86, 2012, pp 150 – 162.

[14] Olsen L., *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 137 (2004), no. 1, pp. 43-53.

[15] Rogers C.A., *Hausdorff Measures*, Cambridge University Press, London, 1970.

[16] Slutskyi O.V., Torbin G.M., *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fizmat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)*, 2012, 13 (1), pp. 198-209.

[17] Tricot C., *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 91 (1982), pp. 57–74.

[18] Xiao Y.M., *Statistics & Probability Letters*, 33 (1997), pp. 379–387.