Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2012, № 13(1).— С. 210–232.

УДК 517.928

Побудова асимптотичного розв'язку задачі оптимального керування для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь

О. В. Тарасенко

Ніжинський державний університет імені Миколи Гоголя

Анотація. Досліджується можливість побудови асимптотичного розв'язку задачі оптимального керування процесом, який описується лінійною сингулярно збуреною системою диференціальних рівнянь з вироджуваною матрицею при похідних, у випадку кратного скінченного елементарного дільника і простого нескінченного. Знаходяться умови існування єдиного розв'язку цієї задачі і побудована його асимптотика у вигляді розвинень за дробовими степенями малого параметра. У ході дослідження використовуються результати асимптотичного аналізу загального розв'язку лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженнями.

Ключові слова: Оптимальне керування, лінійна сингулярно збурена система диференціальних рівнянь з вироджуваною матрицею, асимптотичний аналіз.

A construction of the asymptotic solution of the optimal control problem by process which is describing by linear singularly perturbed system of differential equations

O. V. Tarasenko

Nizhyn Mykola Gogol State University

Abstract. It is investigated the possibility of construction of the asymptotic solution of the optimal control problem by process which is describing by linear singularly perturbed system of differential equations with degenerate matrix of derivatives in case of multiple final and simple infinite elementary dividers. It was obtained the conditions of the existence and uniqueness of the solution of this problem and its asymptotic is constructed in form of power series with fractional degrees of small parameter. For this purpose it was used the results of asymptotic analyses of the general solution for the degenerated singular perturbed linear systems of differential equations.

Key words: Optimal control, singularly perturbed linear system of differential equations, asymptotic analysis.

AMS Subject Classification: 34A30.

1. Постановка задачі

Розглянемо процес, який описується системою диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + C(t,\varepsilon)u, \tag{1}$$

де $x(t,\varepsilon)$, $u(t,\varepsilon)$ — шукані n-вимірний вектор стану та m-вимірний вектор керування відповідно, $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$ — дійсні квадратні матриці n-го порядку, $C(t,\varepsilon)$ — $(n\times m)$-матриця з дійсними елементами, $\varepsilon \in (0,\varepsilon_0]$ — малий параметр: $\varepsilon_0 \ll 1$; $h \in N$, $t \in [0;T]$.

Вивчається задача про знаходження керування $u(t,\varepsilon)$, під дією якого система (1) переходить із стану

$$x(0,\varepsilon) = x_1(\varepsilon) \tag{2}$$

в стан

$$x(T,\varepsilon) = x_2(\varepsilon) \tag{3}$$

за фіксований проміжок часу T, мінімізуючи квадратичний функціонал

$$J = \frac{1}{2\varepsilon^h}\int\limits_0^T (D(t,\varepsilon)u,u)\,dt \to \min_u, \tag{4}$$

де $D(t,\varepsilon)$ — симетрична матриця m-го порядку.

Будемо передбачати, що виконуються наступні умови:

1° Матриці $A(t,\varepsilon)$, $B(t,\varepsilon)$, $C(t,\varepsilon)$ і $D(t,\varepsilon)$ допускають на відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями малого параметра:

$$A(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k A_k(t),\ B(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k B_k(t),\ C(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k C_k(t),$$
$$D(t,\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k D_k(t). \tag{5}$$

2° Коефіцієнти $A_k(t)$, $B_k(t)$, $C_k(t)$, $D_k(t)$, $k = 0,1,\ldots$, розвинень (5) нескінченно диференційовні на $[0;T]$.

3° Матриця $D(t,\varepsilon)$ додатно визначена на $[0;T]$, причому $\det D_0(t) \neq 0$.

4° Вектори початкового і кінцевого станів зображуються у вигляді розвинень

$$x_1(\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k x_k^{(1)},\ x_2(\varepsilon) \sim \sum_{k\geq 0}\varepsilon^k x_k^{(2)}. \tag{6}$$

5° Область допустимих значень для керування $u(t,\varepsilon)$ збігається з усім заданим m–вимірним простором.

6° $\det B_0(t) \equiv 0$, $\forall t \in [0;T]$.

7° Гранична в'язка матриць

$$A_0(t) - \lambda B_0(t) \tag{7}$$

на відрізку $[0;T]$ має скінченний елементарний дільник $(\lambda-\lambda_0(t))^p$ кратністю $p=n-1$ і нескінченний кратністю $q=1$.

8° $\lambda_0(t)<0$, $\forall t\in[0;T]$.

9° $\Big(B_1(t)\tilde{\varphi}(t),\tilde{\psi}(t)\Big)<0$, $\forall t\in[0;T]$, де $\tilde{\varphi}(t)$ — власний вектор матриці $B_0(t)$, що відповідає її нульовому власному значенню, $\tilde{\psi}(t)$ — відповідний власний вектор спряженої матриці $B_0^*(t)$.

Подібна задача оптимального керування досліджувалаь іншими авторами [**2**], [**3**] лише в найпростіших випадках (процес описується системою диференціальних рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами та одиничною матрицею при похідних), що обумовлено відсутністю достатньо розвинутої теорії вироджених систем диференціальних рівнянь.

Наявність при похідних у системі рівнянь (1) матриці $B(t,\varepsilon)$, яка вироджується при $\varepsilon=0$, вносить суттєві труднощі в розв'язання даної задачі, які вдається подолати, використовуючи результати асимптотичного аналізу загального розв'язку сингулярно збурених систем з виродженнями даного типу, здійсненого в роботах [**4**], [**5**].

2. Побудова формального розв'язку задачі оптимального керування

Завдяки умові 7°, яка передбачає стабільність кронекерової структури граничної в'язки матриць $A_0(t)-\lambda B_0(t)$, система (1) при досить малих $\varepsilon>0$ буде регулярною і матиме загальний розв'язок типу Коші при заданому $u(t,\varepsilon)$.

Як показано в [**5**], за умови 7°, скінченному елементарному дільнику в'язки матриць (7) відповідає жорданів ланцюжок завдовжки p, вектори якого можна визначити за формулами
$$\varphi_i(t)=(H(t)B_0(t))^{i-1}\varphi(t),\ i=\overline{1,p}, \tag{8}$$
де $\varphi(t)$ — власний вектор даної в'язки, що відповідає її власному значенню $\lambda_0(t)$, $H(t)$ — напівобернена матриця до матриці $A_0-\lambda_0B_0$.

Позначимо $\psi(t)$, $\tilde{\psi}(t)$ — базисні вектори нуль-просторів матриць $(A_0(t)-\lambda_0B_0(t))^*$, $B_0^*(t)$ відповідно, визначивши їх так, щоб виконувалися співвідношення
$$\Big(B_0(HB_0)^{i-1}\varphi,\psi\Big)=\delta_{ip}, \tag{9}$$
$$(A_0\tilde{\varphi},\tilde{\psi})=1,\ (B_1\tilde{\varphi},\tilde{\psi})\neq 0. \tag{10}$$

Оскільки $A_0(t)$, $B_0(t)$ нескінченно диференційовні на $[0;T]$, то вектори $\varphi(t)$, $\tilde{\varphi}(t)$, $\psi(t)$, $\tilde{\psi}(t)$ можна визначити так, щоб їх елементи також були нескінченно диференційовними на заданому відрізку [**6**].

Застосувавши до задачі (1), (4) принцип максимуму Л. С. Понтрягіна [**7**], побудуємо функцію Гамільтона

$$H(t,x,p,u) = \varepsilon^{-h}(A(t,\varepsilon)x,p) + \varepsilon^{-h}(C(t,\varepsilon)u,p) - \frac{1}{2\varepsilon^h}(D(t,\varepsilon)u,u),$$

де p — n-вимірний вектор спряжених змінних.

Для мінімізації критерія (4) необхідно, щоб

$$\begin{gathered}\mathrm{grad}_u H = \varepsilon^{-h}C^*(t,\varepsilon)p - \varepsilon^{-h}D(t,\varepsilon)u = 0,\\ \frac{d}{dt}\left(B^*(t,\varepsilon)p\right) = -\mathrm{grad}_x H = -\varepsilon^{-h}A^*(t,\varepsilon)p.\end{gathered}$$

Одержимо систему рівнянь

$$\begin{gathered}\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + C(t,\varepsilon)u,\\ \varepsilon^h B^*(t,\varepsilon)\frac{dp}{dt} = -\left(A^*(t,\varepsilon) + \varepsilon^h\left(B^*(t,\varepsilon)\right)'\right)p,\\ 0 = C^*(t,\varepsilon)p - D(t,\varepsilon)u.\end{gathered} \tag{11}$$

Уведемо в розгляд $(2n+m)$-вимірний вектор

$$y(t,\varepsilon) = \mathrm{col}(x(t,\varepsilon), p(t,\varepsilon), u(t,\varepsilon)). \tag{12}$$

Тоді співвідношення (11) можна записати у вигляді

$$\varepsilon^h\tilde{B}(t,\varepsilon)\dot{y} = \tilde{A}(t,\varepsilon)y, \tag{13}$$

де матриці $\tilde{A}(t,\varepsilon)$, $\tilde{B}(t,\varepsilon)$ зображуються у вигляді асимптотичних розвинень

$$\tilde{A}(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\tilde{A}_k(t),\ \tilde{B}(t,\varepsilon) \sim \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k\tilde{B}_k(t), \tag{14}$$

де

$$\tilde{A}_k(t) = \begin{pmatrix} A_k(t) & 0 & C_k(t)\\ 0 & -A_k^*(t) - (B_{k-h}^*(t))' & 0\\ 0 & C_k^*(t) & -D_k(t)\end{pmatrix},\ \tilde{B}_k(t) = \begin{pmatrix} B_k(t) & 0 & 0\\ 0 & B_k^*(t) & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$(k = 0,1,2,\ldots)$, — блочні матриці, в яких символом 0 позначено нульові блоки відповідних розмірів. Крайові умови (2), (3) подамо у вигляді:

$$My(0,\varepsilon) + Ny(T,\varepsilon) = \begin{pmatrix} x_1(\varepsilon)\\ x_2(\varepsilon)\end{pmatrix} = y_0(\varepsilon), \tag{15}$$

$$M = \begin{pmatrix} E & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\ N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ E & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{16}$$

Таким чином, задача оптимального керування (1)–(4) зводиться до двоточкової крайової задачі (13), (15).

У даному випадку гранична в'язка матриць $\tilde{A}_0(t) - \lambda\tilde{B}_0(t)$ системи рівнянь (13) регулярна, а її кронекерова структура складається з двох кратних скінченних елементарних дільників $(\lambda-\lambda_0(t))^p$, $(\lambda+\lambda_0(t))^p$ та двох простих нескінченних. Загальний розв'язок цієї системи є лінійною комбінацією $2n$ її лінійно незалежних розв'язків, $2p$ з яких відповідають скінченним елементарним дільникам, а 2 — нескінченним.

Розв'язки, що відповідають скінченному елементарному дільнику $(\lambda-\lambda_0(t))^p$, побудуємо у вигляді

$$y_i(t,\varepsilon) = v_i(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t(\lambda_0(\tau)+\lambda_i(\tau,\varepsilon))d\tau\right),\ i=\overline{1,p}, \tag{17}$$

де

$$v_i(t,\varepsilon) = \operatorname{col}\left(v_i^{(1)}(t,\varepsilon),0,0\right). \tag{18}$$

Підставивши (17) в (13), дістанемо векторне рівняння

$$A(t,\varepsilon)v_i^{(1)}(t,\varepsilon)+C(t,\varepsilon)v_i^{(3)}(t,\varepsilon) = (\lambda_0(t)+\lambda_i(t,\varepsilon))B(t,\varepsilon)v_i^{(1)}(t,\varepsilon)+$$
$$+\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\left(v_i^{(1)}(t,\varepsilon)\right)', \tag{19}$$

що збігається з рівнянням, до якого зводиться задача знаходження розв'язків n-вимірної системи рівнянь:

$$\varepsilon^h B(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x. \tag{20}$$

Згідно з [**5**] для розв'язності рівняння (19) необхідно і достатньо, щоб функція $\lambda_i(t,\varepsilon)$ задовольняла рівняння розгалуження

$$\lambda_i^p + \sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s L_{0s} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s L_{ks}\left[\lambda_i^k\right] = 0, \tag{21}$$

коефіцієнти якого визначаються за формулами

$$L_{0s} = \sum_{j=1}^{s}(-1)^j\left(P_j^s(H\Gamma)\varphi,\psi\right),\ s=1,2,\ldots; \tag{22}$$

$$L_{ks}\left[\lambda_i^k\right] = \sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{h}\right]}\sum_{j=0}^{s-mh}(-1)^j D^m\left[\lambda_i^k\right]\left(P_{m+k,j}^{s-hm}(HB;H\Gamma)\varphi,\psi\right), k,s=1,2,\ldots; \tag{23}$$

$$L_{k0}\left[\lambda_i^k\right] = \lambda_i^k\delta_{k,p}, k=\overline{1,p},$$

де $P_j^s(H\Gamma)$ — сума всіх можливих добутків j операторів $H\Gamma_{k_1}, H\Gamma_{k_2},\ldots,H\Gamma_{k_s}$, сума індексів яких $k_1+\ldots+k_s=s$; при цьому покладається $P_0^0(H\Gamma)=E$, $P_0^s(H\Gamma)=0$, якщо $k\ge 1$, а перший множник H у всіх доданках «відбирається», $\Gamma_k = A_k-\lambda_0 B_k - B_{k-h}\frac{d}{dt}$.

$P_{s,k}^j(H\Gamma;HB)$ — сума всіх можливих «добутків» k матричних множників HB_{i_1}, HB_{i_2}, $\ldots, HB_{i_k}$ з цілими невід'ємними індексами та s операторних множників $H\Gamma_{m_1}, H\Gamma_{m_2}$, $\ldots, H\Gamma_{m_s}$, сума індексів яких $i_1+i_2+\ldots+i_k+m_1+m_2+\ldots+m_s=j$.

$D^j\left[\lambda_i^k\right]$ — сума всіх можливих «добутків» j «множників» $D=\frac{d}{dt}$ та k множників λ_i; при цьому останнім множником у всіх доданках є λ_i, а оператор диференціювання D діє на весь вираз, що міститься праворуч від нього.

Відповідний вектор $v_i^{(1)}(t,\varepsilon)$ представляється у вигляді формального розвинення

$$v_i^{(1)}(t,\varepsilon)=\varphi+\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s H\tilde{L}_{0s}\varphi+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s H\tilde{L}_{ks}\left[\lambda_i^k\right]\varphi, \tag{24}$$

коефіцієнти $\tilde{L}_{ks}\left[\lambda_i^k\right]$ якого визначаються за формулами

$$\tilde{L}_{0s}=\sum_{j=1}^{s}(-1)^j P_j^s(H\Gamma),\ s=1,2,\ldots; \tag{25}$$

$$\tilde{L}_{ks}\left[\lambda_i^k\right]=\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{h}\right]}\sum_{j=0}^{s-hm}(-1)^j D^m\left[\lambda_i^k\right]P_{m+k,j}^{s-hm}(HB,H\Gamma),\ k\geq 1,\ s\geq 0. \tag{26}$$

Розглянемо найпростіший випадок, припускаючи, що коефіцієнт L_{01} рівняння розгалуження відмінний від нуля:

$$L_{01}=-(A_1\varphi,\psi)+\lambda_0(B_1\varphi,\psi)+\delta_{1,h}\left(B_0\varphi',\psi\right)\neq 0,\ \forall t\in[0;T]. \tag{27}$$

Побудувавши відповідну діаграму Ньютона, встановлюємо, що вона має вигляд відрізка, що з'єднує точки $(0;1)$ і $(p;0)$. Нахил цієї діаграми до від'ємного напряму осі абсцис дорівнює $\frac{1}{p}$, звідки випливає, що відповідні формальні розвинення для функцій $\lambda_i(t,\varepsilon)$ і векторів $v_i(t,\varepsilon)$ можна побудувати за степенями $\mu=\sqrt[p]{\varepsilon}$:

$$\lambda_i(t,\varepsilon)=\sum_{k=1}^{\infty}\mu^k\lambda_k^{(i)}(t),\ i=\overline{1,p}; \tag{28}$$

$$v_i^{(1)}(t,\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\mu^k v_{ki}^{(1)}(t),\ i=\overline{1,p}. \tag{29}$$

Для знаходження коефіцієнтів розвинення (28) підставимо ряд (28) у рівняння (21). Перегрупувавши доданки та прирівнявши до нуля вирази при однакових степенях μ, дістанемо нескінченну систему рівнянь

$$P_p^k\left(\lambda^{(i)}\right)+L_{0,\frac{k}{p}}+\sum_{s=1}^{\left[\frac{k-1}{p}\right]}\sum_{j=1}^{k-sp}L_{js}\left[P_j^{k-ps}\left(\lambda^{(i)}\right)\right]=0,\ k=p,p+1,\ldots. \tag{30}$$

Перше рівняння цієї системи збігається з визначальним рівнянням

$$\left(\lambda_1^{(i)}(t)\right)^p+L_{01}=0,$$

з якого завдяки умові (27) знайдемо p комплекснозначних функцій $\lambda_1^{(j)}(t)$:

$$\lambda_1^{(j)}(t)=\sqrt[p]{|L_{01}|}\exp\left(i\frac{\arg(-L_{01})+2\pi(j-1)}{p}\right),\ j=\overline{1,p}. \tag{31}$$

Із $(p+k)$-го рівняння (30) отримаємо рекурентну формулу для наступних коефіцієнтів розвинення (28):

$$\lambda_{k+1}^{(i)}(t) = -\frac{1}{p\lambda_1^{(i)}}\left[\tilde{P}_p^{p+k}\left(\lambda^{(i)}\right) + \sum_{s=1}^{\left[\frac{p+k-1}{p}\right]}\sum_{j=1}^{p+k-sp} L_{js}\left[P_j^{p+k-sp}\left(\lambda^{(i)}\right)\right]\right], \qquad (32)$$

$(k = 1, 2, \ldots)$. Підставивши ряд (28) у (24) і згрупувавши доданки з однаковими степенями μ, дістанемо відповідні формули і для знаходження коефіцієнтів розвинення (29):

$$v_{ki}^{(1)}(t) = \sum_{j=0}^{k} P_j^k\left(\lambda^{(i)}\right)(HB_0)^j\varphi + H\tilde{L}_{0,\frac{k}{p}}\varphi + \sum_{s=1}^{\left[\frac{k-1}{p}\right]}\sum_{j=1}^{k-sp} H\tilde{L}_{js}\left[P_j^{k-ps}\left(\lambda^{(i)}\right)\right]\varphi. \qquad (33)$$

Розв'язки системи (13), що відповідають скінченному елементарному дільнику $(\lambda + \lambda_0(t))^p$, шукатимемо у вигляді

$$y_i(t,\varepsilon) = \tilde{v}_i(t,\varepsilon)\exp\left(-\varepsilon^{-h}\int_t^T\left(-\lambda_0(\tau) + \tilde{\lambda}_i(\tau,\varepsilon)\right)d\tau\right),\ i = \overline{1,p}, \qquad (34)$$

де

$$\tilde{v}_i(t,\varepsilon) = \mathrm{col}\left(\tilde{v}_i^{(1)}(t,\varepsilon), \tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon), \tilde{v}_i^{(3)}(t,\varepsilon)\right),\ i = \overline{1,p}, \qquad (35)$$

відповідно до структури матриць $\tilde{A}(t,\varepsilon)$, $\tilde{B}(t,\varepsilon)$.

Підставивши (34) у систему (13), приходимо до системи трьох векторних рівнянь

$$\begin{gathered} A(t,\varepsilon)\tilde{v}_i^{(1)}(t,\varepsilon) + \lambda_0(t)B(t,\varepsilon)\tilde{v}_i^{(1)}(t,\varepsilon) = \tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)\tilde{v}_i^{(1)}(t,\varepsilon) - \\ -C(t,\varepsilon)\tilde{v}_i^{(3)}(t,\varepsilon) + \varepsilon^h B(t,\varepsilon)\left(\tilde{v}_i^{(1)}(t,\varepsilon)\right)'; \end{gathered} \qquad (36)$$

$$\begin{gathered} -\left[A^*(t,\varepsilon) - \lambda_0(t)B^*(t,\varepsilon)\right]\tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon) = \tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon)B^*(t,\varepsilon)\tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon) + \\ +\varepsilon^h\left(B^*(t,\varepsilon)\right)'\tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon) + \varepsilon^h B^*(t,\varepsilon)\left(\tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon)\right)'; \end{gathered} \qquad (37)$$

$$C^*(t,\varepsilon)\tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon) - D(t,\varepsilon)\tilde{v}_i^{(3)}(t,\varepsilon) = 0. \qquad (38)$$

Рівняння (37) збігається з рівнянням, до якого зводиться задача знаходження розв'язків однорідної n-вимірної системи

$$\varepsilon^h\frac{d}{dt}(B^*(t,\varepsilon)x) = -A^*(t,\varepsilon)x, \qquad (39)$$

спряженої з (20). При цьому функції $\tilde{\lambda}^{(i)}(t,\varepsilon)$ повинні задовольняти рівняння розгалуження:

$$(-1)^{p-1}\left(\tilde{\lambda}_i\right)^p + \sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s F_{0s} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty}\varepsilon^s F_{ks}\left[\tilde{\lambda}_i^k\right] = 0, \qquad (40)$$

коефіцієнти якого виражаються формулами

$$F_{0s} = -\sum_{j=1}^{s}(-1)^j P_j^s \left(H^*\Gamma^*\psi, \varphi\right), \; s = 1, 2, \ldots; \tag{41}$$

$$F_{ks}\left[\tilde{\lambda}_i^k\right] = \sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{h}\right]} \sum_{j=0}^{s-mh} (-1)^{j+k+1} D^m \left[\tilde{\lambda}_i^k\right] \left(P_{m+k,j}^{s-hm}(H^*B^*; H^*\Gamma^*)\psi, \varphi\right). \tag{42}$$

Відповідні вектори $\tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon)$ зображуються формальним розвиненням

$$\tilde{v}_i^{(2)}(t) = \psi - \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s H^* \tilde{F}_{0s}\psi - \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s H^* \tilde{F}_{ks}\left[\tilde{\lambda}_i^k\right]\psi, \tag{43}$$

коефіцієнти якого знаходяться за формулами

$$\tilde{F}_{0s} = -\sum_{j=1}^{s} P_j^s(H^*\Gamma^*), \; s = 1, 2, \ldots; \tag{44}$$

$$\tilde{F}_{k0}\left[\tilde{\lambda}_i^k\right] = (-1)^{k+1}\tilde{\lambda}_i^k B_0^*(H^*B_0^*)^{k-1}, \; k = 1, 2, \ldots; \tag{45}$$

$$\tilde{F}_{ks}\left[\tilde{\lambda}_i^k\right] = -\sum_{m=0}^{\left[\frac{s}{h}\right]} \sum_{j=0}^{s-hm} (-1)^{j+k} D^m \left[\tilde{\lambda}_i^k\right] P_{m+k,j}^{s-hm}(H^*B^*, H^*\Gamma^*), \tag{46}$$

в яких

$$\Gamma_k^* = A_k^* - \lambda_0 B_k^* + \left(B_{k-h}^*\right)' + B_{k-h}^* \frac{d}{dt}, \; k = 1, 2, \ldots. \tag{47}$$

Оскільки згідно з (41), (27)

$$F_{01}(t) = \left(\left(A_1^* - \lambda_0 B_1^* + \delta_{1,h}(B_0^*)' + \delta_{1,h} B_0^* \frac{d}{dt}\right)\psi, \varphi\right) =$$
$$= (A_1(t)\varphi, \psi) - \lambda_0(B_1\varphi, \psi) - \delta_{1,h}\left(B_0\varphi', \psi\right) = -L_{01}(t) \neq 0, \; \forall t \in [0; T],$$

то відповідна діаграма Ньютона, побудована за коефіцієнтами рівняння (40) на площині O_{ks}, являє собою відрізок, що з'єднує точки $(0;1)$ і $(p;0)$. Звідси випливає, що функції $\tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon)$ і відповідні вектори $\tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon)$ необхідно, як і для першої групи розв'язків, будувати у вигляді розвинень за степенями $\mu = \sqrt[p]{\varepsilon}$:

$$\tilde{\lambda}_i(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \tilde{\lambda}_k^{(i)}(t), \; i = \overline{1,p}; \tag{48}$$

$$\tilde{v}_i^{(2)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \tilde{v}_{ki}^{(2)}(t), \; i = \overline{1,p}. \tag{49}$$

Підставивши ряд (48) у рівняння (40) і застосувавши метод невизначених коефіцієнтів, отримаємо рекурентні формули для знаходження функцій $\tilde{\lambda}_k^{(i)}(t)$, з яких випливає, що

$$\tilde{\lambda}_k^{(i)}(t) = -\lambda_k^{(i)}(t) \, k = 1, 2, \ldots. \tag{50}$$

Підставивши (48) у (43) і врахувавши (50), дістанемо відповідний вираз для коефіцієнтів розвинення (49)

$$\tilde{v}_{ki}^{(2)}(t) = \sum_{j=0}^{k} P_j^k \left(\lambda^{(i)}\right) \left(H^* B_0^*\right)^j \psi + H^* \tilde{M}_{0,\frac{k}{p}} \psi - \sum_{s=1}^{\left[\frac{k-1}{p}\right]} \sum_{j=1}^{k-sp} (-1)^j H^* \tilde{M}_{js} \left[P_j^{k-ps}\left(\lambda^{(i)}\right)\right] \psi,$$

$$k = 1, 2, \ldots . \tag{51}$$

Після цього з рівняння (38) знайдемо

$$\tilde{v}_i^{(3)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \tilde{v}_{ki}^{(3)}(t), \tag{52}$$

де вектори $\tilde{v}_{ki}^{(3)}$ виражаються рекурентними формулами

$$\tilde{v}_{0i}^{(3)}(t) = D_0^{-1} C_0^* \psi, \tag{53}$$

$$\tilde{v}_{ki}^{(3)}(t) = D_0^{-1} \left[\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{p}\right]} C_j^* \tilde{v}_{k-pj,i}^{(2)} - \sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{p}\right]} D_j \tilde{v}_{k-pj,i}^{(3)}\right], \; k = 1, 2, \ldots . \tag{54}$$

Аналогічно, поклавши

$$\tilde{v}_i^{(1)}(t, \varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \tilde{v}_{ki}^{(1)}(t), \tag{55}$$

з рівняння (36) дістанемо

$$\tilde{v}_{0i}^{(1)}(t) = -R_0^{-1} C_0 D_0^{-1} C_0^* \psi, \tag{56}$$

$$\begin{gathered}\tilde{v}_{ki}^{(1)}(t) = -R_0^{-1} \left[\sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{p}\right]} C_j \tilde{v}_{k-pj,i}^{(3)} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{(i)} B_0 \tilde{v}_{k-j,i}^{(1)} + C_0 \tilde{v}_{ki}^{(3)} + + \sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{p}\right]} A_j \tilde{v}_{k-pj,i}^{(1)} + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{\left[\frac{k}{p}\right]} \lambda_0 B_j \tilde{v}_{k-pj,i}^{(1)} + \sum_{j=1}^{k-p} \sum_{s=1}^{\left[\frac{k-j}{p}\right]} \lambda_j^{(i)} B_s \tilde{v}_{k-j-ps,i}^{(1)} - \sum_{j=0}^{\left[\frac{k-ph}{p}\right]} B_j \left(\tilde{v}_{k-ph-pj,i}^{(1)}\right)'\right], \; k = 1, 2, \ldots,\end{gathered} \tag{57}$$

де $R_0(t) = A_0(t) + \lambda_0(t) B_0(t)$.

Взявши до уваги, що при $k < p$

$$\tilde{v}_{ki}^{(1)}(t) = -R_0^{-1} \left[C_0 \tilde{v}_{ki}^{(3)} + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j^{(i)} B_0 \tilde{v}_{k-j,i}^{(1)}\right],$$

$$\tilde{v}_{ki}^{(3)}(t) = D_0^{-1} C_0^* \tilde{v}_{ki}^{(2)}, \; \tilde{v}_{ki}^{(2)}(t) = \sum_{j=0}^{k} P_j^k \left(\lambda^{(i)}\right) \left(H^* B_0^*\right)^j \psi,$$

здійснюючи взаємну підстановку цих формул, матимемо

$$\tilde{v}_{1i}^{(1)}(t) = \lambda_1^{(i)} \left[R_0^{-1} B_0 R_0^{-1} C_0 D_0^{-1} C_0^* \psi - R_0^{-1} C_0 D_0^{-1} C_0^* H^* B_0^* \psi\right];$$

$$\tilde{v}_{2i}^{(1)}(t) = \lambda_2^{(i)}\Big[R_0^{-1}B_0R_0^{-1}C_0D_0^{-1}C_0^*\psi - R_0^{-1}C_0D_0^{-1}C_0^*H^*B_0^*\psi\Big] +$$
$$+\left(\lambda_1^{(i)}\right)^2\Big[-R_0^{-1}B_0R_0^{-1}B_0R_0^{-1}C_0D_0^{-1}C_0^*\psi + R_0^{-1}B_0R_0^{-1}C_0D_0^{-1}C_0^*H^*B_0^*\psi -$$
$$-R_0^{-1}C_0D_0^{-1}C_0^*(H^*B_0^*)^2\psi\Big].$$

Застосувавши метод математичної індукції, встановимо, що

$$\tilde{v}_{ki}^{(1)}(t) = \sum_{s=0}^{k} P_s^k\left(\lambda^{(i)}\right)\sum_{j=0}^{s}(-1)^{j+1}R_0^{-1}\left(B_0R_0^{-1}\right)^j C_0D_0^{-1}C_0^*(H^*B_0^*)^{s-j}\psi,$$

$(k = \overline{0, p-1})$. Позначивши

$$\psi_s(t) = \sum_{j=0}^{s-1}(-1)^{j+1}R_0^{-1}\left(B_0R_0^{-1}\right)^j C_0D_0^{-1}C_0^*\left(H^*B_0^*\right)^{s-1-j}\psi, \tag{58}$$

останню формулу запишемо у вигляді

$$\tilde{v}_{ki}^{(1)}(t) = \sum_{s=1}^{k+1} P_{s-1}^k\left(\lambda^{(i)}(t)\right)\psi_s(t),\ k = \overline{0, p-1}. \tag{59}$$

Розв'язки, що відповідають двом нескінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць, про які йшла мова вище, шукатимемо у вигляді

$$y_1(t,\varepsilon) = w(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \xi^{-1}(\tau,\varepsilon)d\tau\right), \tag{60}$$

$$y_2(t,\varepsilon) = \tilde{w}(t,\varepsilon)\exp\left(-\varepsilon^{-h}\int_t^T \tilde{\xi}^{-1}(\tau,\varepsilon)d\tau\right), \tag{61}$$

де $w(t,\varepsilon)$, $\tilde{w}(t,\varepsilon)$ — $(2n+m)$-вимірні вектори, $\xi(t,\varepsilon)$, $\tilde{\xi}(t,\varepsilon)$ — скалярні функції, які зображуються формальними розвиненнями

$$w(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k w_k(t),\ \xi(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\xi_k(t); \tag{62}$$

$$\tilde{w}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k \tilde{w}_k(t),\ \tilde{\xi}(t,\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\tilde{\xi}_k(t). \tag{63}$$

Перший розв'язок побудуємо, поклавши

$$w(t,\varepsilon) = \operatorname{col}\left(w^{(1)}(t,\varepsilon); 0; 0\right), \tag{64}$$

де $w^{(1)}(t,\varepsilon)$ — n-вимірний вектор, який згідно з (62) зображується у вигляді формального ряду

$$w^{(1)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k w_k^{(1)}(t). \tag{65}$$

Підставивши (60), (64) у систему (13), отримаємо рівняння, до якого зводиться побудова відповідного розв'язку системи рівнянь (20). Тому коефіцієнти розвинення (65), (62) визначаються за рекурентними формулами

$$w_0^{(1)}(t) = \tilde{\varphi}(t); \tag{66}$$

$$\xi_1(t) = \left(B_1(t)\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t)\right); \tag{67}$$

$$\xi_k(t) = -\left(d_k^{(1)}(t), \tilde{\psi}(t)\right),\ k = 2, 3, \ldots; \tag{68}$$

$$w_k^{(1)}(t) = G(t)a_k^{(1)}(t),\ k = 1, 2, \ldots; \tag{69}$$

де

$$d_k^{(1)}(t) = \sum_{s=1}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-s}\xi_s A_j w_{k-s-j}^{(1)} - \sum_{s=1}^{k} B_s w_{k-s}^{(1)} - \sum_{s=1}^{k-h}\sum_{j=0}^{k-h-s}\xi_s B_j \left(w_{k-h-s-j}^{(1)}\right)'; \tag{70}$$

$$a_k^{(1)}(t) = \xi_k A_0 \tilde{\varphi} + d_k^{(1)}(t),\ k = 1, 2, \ldots, \tag{71}$$

де $G(t) = B_0^{-}(t)$.

При знаходженні другого розв'язку покладемо

$$\tilde{w}(t,\varepsilon) = \operatorname{col}\left(\tilde{w}^{(1)}(t,\varepsilon); \tilde{w}^{(2)}(t,\varepsilon); \tilde{w}^{(3)}(t,\varepsilon)\right), \tag{72}$$

$$\tilde{w}^{(j)}(t,\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k \tilde{w}_k^{(j)}(t),\ j = \overline{1,3}. \tag{73}$$

Підставивши (61), (72) у (13), дістанемо

$$\begin{gathered} B(t,\varepsilon)\tilde{w}^{(1)}(t,\varepsilon) = \tilde{\xi}(t,\varepsilon)A(t,\varepsilon)\tilde{w}^{(1)}(t,\varepsilon) + \tilde{\xi}(t,\varepsilon)C(t,\varepsilon)\tilde{w}^{(3)}(t,\varepsilon) - \\ -\varepsilon^h\tilde{\xi}(t,\varepsilon)B(t,\varepsilon)\left(\tilde{w}^{(1)}(t,\varepsilon)\right)'; \end{gathered} \tag{74}$$

$$\begin{gathered} B^*(t,\varepsilon)\tilde{w}^{(2)}(t,\varepsilon) = -\tilde{\xi}(t,\varepsilon)A^*(t,\varepsilon)\tilde{w}^{(2)}(t,\varepsilon) - \varepsilon^h\tilde{\xi}(t,\varepsilon)\left(B^*(t,\varepsilon)\right)'\tilde{w}^{(2)}(t,\varepsilon) - \\ -\varepsilon^h\tilde{\xi}(t,\varepsilon)B^*(t,\varepsilon)\left(\tilde{w}^{(2)}(t,\varepsilon)\right)'; \end{gathered} \tag{75}$$

$$C^*(t,\varepsilon)\tilde{w}^{(2)}(t,\varepsilon) - D(t,\varepsilon)\tilde{w}^{(3)}(t,\varepsilon) = 0. \tag{76}$$

Рівняння (75) визначає розв'язок n-вимірної системи рівнянь (39), який відповідає простому нескінченному елементарному дільнику її граничної в'язки матриць. Тому коефіцієнти розвинень (63) для функції $\tilde{\xi}(t,\varepsilon)$ і (73) — для вектора $\tilde{w}^{(2)}(t,\varepsilon)$ визначаються за формулами

$$\tilde{\xi}_k(t) = -\xi_k(t),\ k = 1, 2, \ldots; \tag{77}$$

$$\tilde{w}_0^{(2)}(t) = \tilde{\psi}(t),\ \tilde{w}_k^{(2)}(t) = G^*(t)\tilde{a}_k^{(2)}(t),\ k = 1, 2, \ldots; \tag{78}$$

$$\tilde{a}_k^{(2)}(t) = \xi_k A_0^*\tilde{\psi} + \sum_{s=1}^{k-1}\sum_{j=0}^{k-s}\xi_s A_j^*\tilde{w}_{k-s-j}^{(2)} + \sum_{s=1}^{k-h}\sum_{j=0}^{k-h-s}\xi_s\left(B_j^*\right)'\tilde{w}_{k-s-j-h}^{(2)} +$$

$$+\sum_{s=1}^{k-h}\sum_{j=0}^{k-h-s}\xi_s B_j^*\left(\tilde{w}_{k-h-s-j}^{(2)}\right)' - \sum_{j=1}^{k} B_j^*\tilde{w}_{k-j}^{(2)},\ k=1,2,\dots. \tag{79}$$

Підставивши відповідні розвинення в рівняння (76) і прирівнявши вирази при однакових степенях ε, отримаємо рекурентні формули, якими визначаються вектори $\tilde{w}_k^{(3)}(t)$:

$$\tilde{w}_0^{(3)}(t) = D_0^{-1}(t)C_0^*(t)\tilde{\psi}(t); \tag{80}$$

$$\tilde{w}_k^{(3)}(t) = D_0^{-1}\left[\sum_{s=0}^{k} C_s^*\tilde{w}_{k-s}^{(2)} - \sum_{s=1}^{k} D_s\tilde{w}_{k-s}^{(3)}\right],\ k=1,2,\dots. \tag{81}$$

Нарешті, підставивши розвинення (73), (63) у рівняння (74) і прирівнявши вирази при однакових степенях параметра та взявши до уваги (77), матимемо таку систему рівнянь для визначення коефіцієнтів відповідного розвинення для вектора $\tilde{w}^{(1)}(t,\varepsilon)$:

$$B_0\tilde{w}_0^{(1)} = 0; \tag{82}$$

$$B_0\tilde{w}_k^{(1)} = \tilde{a}_k^{(1)},\ k=1,2,\dots; \tag{83}$$

$$\begin{aligned}\tilde{a}_k^{(1)}(t) = -\sum_{s=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-s}\xi_s A_j\tilde{w}_{k-s-j}^{(1)} - \sum_{s=1}^{k}\sum_{j=0}^{k-s}\xi_s C_j\tilde{w}_{k-s-j}^{(3)} + \\ +\sum_{s=1}^{k-h}\sum_{j=0}^{k-h-s}\xi_s B_j\left(\tilde{w}_{k-s-j-h}^{(1)}\right)' - \sum_{s=1}^{k} B_s\tilde{w}_{k-s}^{(1)},\ k=1,2,\dots.\end{aligned} \tag{84}$$

Ця система буде розв'язною тоді і тільки тоді, коли вектори $\tilde{a}_k^{(1)}(t)$ будуть ортогональними до вектора $\tilde{\psi}(t)$:

$$\left(\tilde{a}_k^{(1)}(t),\tilde{\psi}(t)\right) = 0,\ k=1,2,\dots. \tag{85}$$

За виконання цієї умови вектори $\tilde{w}_k^{(1)}(t)$ визначатимемо за формулами

$$\tilde{w}_0^{(1)}(t) = c_0(t)\tilde{\varphi}(t); \tag{86}$$

$$\tilde{w}_k^{(1)}(t) = G(t)\tilde{a}_k^{(1)}(t) + c_k(t)\tilde{\varphi}(t),\ k=1,2,\dots, \tag{87}$$

де $c_s(t)$, $s=0,1,\dots$, — скалярні множники, за рахунок яких і задовольняється умова (85). Згідно з (84), (86), (80) при $k=1$ умова (85) запишеться у вигляді

$$c_0\left[\xi_1\left(A_0\tilde{\varphi},\tilde{\psi}\right) + \left(B_1\tilde{\varphi},\tilde{\psi}\right)\right] + \xi_1\left(C_0D_0^{-1}C_0^*\tilde{\psi},\tilde{\psi}\right) = 0. \tag{88}$$

Враховуючи (10), (67) та умову 9°, знайдемо

$$c_0(t) = -\frac{1}{2}\left(C_0D_0^{-1}C_0^*\tilde{\psi},\tilde{\psi}\right). \tag{89}$$

Якщо всі $c_s(t)$ вже відомі при $s < k$, то для знаходження $c_k(t)$ використаємо умову (85) на $(k+1)$-у кроці. Поклавши в (85), (84) $k+1$ замість k, отримаємо

$$c_k(t) = -\frac{\left(\tilde{d}_k^{(1)}, \tilde{\psi}\right)}{2\xi_1}, \tag{90}$$

де

$$\begin{gathered}\tilde{d}_k^{(1)}(t) = \sum_{s=2}^{k+1}\sum_{j=0}^{k-s+1} \xi_s A_j \tilde{w}_{k+1-s-j}^{(1)} + \xi_1 \sum_{j=1}^{k} A_j \tilde{w}_{k-j}^{(1)} + \sum_{s=1}^{k+1}\sum_{j=0}^{k+1-s} \xi_s C_j \tilde{w}_{k+1-s-j}^{(3)} - \\ - \sum_{s=1}^{k+1-h}\sum_{j=0}^{k+1-h-s} \xi_s B_j \left(\tilde{w}_{k+1-s-j-h}^{(1)}\right)' + \sum_{s=2}^{k+1} B_s \tilde{w}_{k+1-s}^{(1)} + \xi_1 A_0 G \tilde{a}_k^{(1)} + B_1 G \tilde{a}_k^{(1)}\end{gathered} \tag{91}$$

— вже відомий вектор згідно з припущенням індукції.

Розв'язок крайової задачі (13), (15) тепер будемо шукати у вигляді

$$\begin{gathered}y(t,\varepsilon) = \mu^{-(p-1)} \sum_{i=1}^{p} v_i(t,\varepsilon) c^{(i)}(\varepsilon) \exp\Big(\varepsilon^{-h} \int_0^t (\lambda_0(\tau) + \lambda_i(\tau,\varepsilon)) d\tau\Big) + \\ + \mu^{-(p-1)} \sum_{i=1}^{p} \tilde{v}_i(t,\varepsilon) \tilde{c}^{(i)}(\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_t^T (\lambda_0(\tau) + \lambda_i(\tau,\varepsilon)) d\tau\right) + \\ + w(t,\varepsilon) c^{(n)}(\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \xi^{-1}(\tau,\varepsilon) d\tau\right) + \tilde{w}(t,\varepsilon) \tilde{c}^{(n)}(\varepsilon) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_t^T \xi^{-1}(\tau,\varepsilon) d\tau\right),\end{gathered} \tag{92}$$

де $c^{(i)}(\varepsilon)$, $\tilde{c}^{(i)}(\varepsilon)$ — скалярні множники, які зображуються у вигляді формальних розвинень за степенями μ:

$$c^{(i)}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k c_k^{(i)},\ i = \overline{1,n}; \tag{93}$$

$$\tilde{c}^{(i)}(\varepsilon) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \tilde{c}_k^{(i)},\ i = \overline{1,n}. \tag{94}$$

Підставивши (92) у крайову умову (15) і знехтувавши експоненціально малими доданками, розглянемо рівняння

$$\sum_{i=1}^{p} v_i^{(1)}(0,\varepsilon) c^{(i)}(\varepsilon) + \mu^{p-1} w^{(1)}(0,\varepsilon) c^{(n)}(\varepsilon) = \mu^{p-1} x_1(\varepsilon); \tag{95}$$

$$\sum_{i=1}^{p} \tilde{v}_i^{(1)}(T,\varepsilon) \tilde{c}^{(i)}(\varepsilon) + \mu^{p-1} \tilde{w}^{(1)}(T,\varepsilon) \tilde{c}^{(n)}(\varepsilon) = \mu^{p-1} x_2(\varepsilon), \tag{96}$$

з яких і будемо визначати шукані сталі множники.

Підставивши в рівняння (95) розвинення (29), (65), (93), (6) і прирівнявши в одержаній тотожності вирази при однакових степенях μ, отримаємо нескінченну систему рівнянь

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{k} v_{ji}^{(1)}(0)c_{k-j}^{(i)} + \sum_{j=0}^{\left[\frac{k+1-p}{p}\right]} w_j^{(1)}(0)c_{k+1-p-pj}^{(n)} = x^{(1)}_{\frac{k+1-p}{p}},\ k=0,1,\ldots.$$

Врахувавши формули (33), (66), (69), якими виражаються вектори $v_{ji}^{(1)}(t)$ і $w_j^{(1)}(t)$, цю систему запишемо у вигляді

$$\sum_{s=0}^{k}\sum_{j=s}^{k}\sum_{i=1}^{p} P_s^j\left(\lambda^{(i)}(0)\right)(HB_0)^s\varphi c_{k-j}^{(i)} + c_{k+1-p}^{(n)}\tilde{\varphi} + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=p}^{k} d_{ji}^{(1)}c_{k-j}^{(i)} +$$
$$+\sum_{j=1}^{\left[\frac{k+1-p}{p}\right]} Ga_j^{(1)}c_{k+1-p-pj}^{(n)} = x^{(1)}_{\frac{k+1-p}{p}},\ k=0,1,\ldots, \tag{97}$$

де

$$d_{ji}^{(1)} = H\tilde{L}_{0,\frac{j}{p}}\varphi + \sum_{s=1}^{\left[\frac{j-1}{p}\right]}\sum_{j_1=1}^{j-sp} H\tilde{L}_{j_1 s}\left[P_{j_1}^{j-ps}(\lambda_i)\right]\varphi,\ j=p,p+1,\ldots.$$

Звідси, взявши до уваги лінійну незалежність векторів $(HB_0)^s\varphi$, $s=\overline{0,p-1}$, $\tilde{\varphi}$, при $k<p-1$ будемо мати

$$\sum_{j=s}^{k}\sum_{i=1}^{p} P_s^j\left(\lambda^{(i)}(0)\right)c_{k-j}^{(i)} = 0,\ k=\overline{0,p-2},\ s=\overline{0,k}. \tag{98}$$

Розклавши вектор $x_0^{(1)}$ за базисом $\varphi(0), H(0)B_0(0)\varphi(0),\ldots,(H(0)B_0(0))^{p-1}\varphi(0)$, $\tilde{\varphi}(0)$:

$$x_0^{(1)} = \sum_{s=0}^{p-1}\alpha_{s+1}^{(0)}(H(0)B_0(0))^s\varphi(0) + \alpha_{p+1}^{(0)}\tilde{\varphi}(0),$$

при $k=p-1$ отримаємо

$$\sum_{j=s}^{p-1}\sum_{i=1}^{p} P_s^j\left(\lambda^{(i)}(0)\right)c_{p-1-j}^{(i)} = \alpha_{s+1}^{(0)},\ s=\overline{0,p-1}; \tag{99}$$

$$c_0^{(n)} = \alpha_{p+1}^{(0)}. \tag{100}$$

Взявши останні рівняння з систем рівнянь (98), (99) й позначивши $c_0 = \operatorname{col}\left(c_0^{(1)}, c_0^{(2)},\ldots,c_0^{(n)}\right)$, дістанемо

$$\Omega(0)c_0 = m_0, \tag{101}$$

де $m_0 = \mathrm{col}\left(0,\ldots,0,\alpha_p^{(0)},\alpha_{p+1}^{(0)}\right)$,

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \\ \lambda_1^{(1)}(t) & \lambda_1^{(2)}(t) & \ldots & \lambda_1^{(p)}(t) & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \left(\lambda_1^{(1)}(t)\right)^{p-1} & \left(\lambda_1^{(2)}(t)\right)^{p-1} & \ldots & \left(\lambda_1^{(p)}(t)\right)^{p-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Оскільки згідно з (31), (27) $\det\Omega(0) \neq 0$, з рівняння (101) однозначно визначається вектор c_0: $c_0 = \Omega^{-1}(0)m_0$.

Для знаходження сталих $c_1^{(i)}$, $i = \overline{1,n}$, крім рівнянь (98), (99), розглянемо ще й рівняння (97) при $k = p$. Взявши до уваги, що $(HB_0)^s = 0$ при $s \geq p$, запишемо його у вигляді

$$\sum_{s=0}^{p-1}\sum_{j=s}^{p}\sum_{i=1}^{p} P_s^j\left(\lambda^{(i)}(0)\right)(HB_0)^s\varphi c_{p-j}^{(i)} + c_1^{(n)}\tilde{\varphi} + \sum_{i=1}^{p} d_{pi}^{(1)}c_0^{(i)} = 0.$$

Розклавши вектор $\sum_{i=1}^{p} d_{pi}^{(1)}c_0^{(i)}$ за базисом:

$$-\sum_{i=1}^{p} d_{pi}^{(1)}c_0^{(i)} = \sum_{s=0}^{p-1}\alpha_{s+1}^{(1)}(H(0)B_0(0))^s\varphi(0) + \alpha_{p+1}^{(1)}\tilde{\varphi}(0),$$

звідси дістанемо

$$\sum_{j=s}^{p}\sum_{i=1}^{p} P_s^j\left(\lambda^{(i)}(0)\right)c_{p-j}^{(i)} = \alpha_{s+1}^{(1)},\ s = \overline{0,p-1}; \tag{102}$$

$$c_1^{(n)} = \alpha_{p+1}^{(1)}. \tag{103}$$

Взявши тепер передостанні рівняння з систем (98), (99) та останнє з системи (102) і приєднавши до них рівність (103), отримаємо $\Omega(0)c_1 = m_1$, де $c_1 = \mathrm{col}\left(c_1^{(1)},c_1^{(2)},\ldots,c_1^{(n)}\right)$, а

$$m_1 = \mathrm{col}\left(0, -\sum_{i=1}^{p} P_1^2\left(\lambda^{(i)}(0)\right)c_0^{(i)},\ldots,-\sum_{i=1}^{p} P_{p-3}^{p-2}\left(\lambda^{(i)}(0)\right)c_0^{(i)},\right.$$
$$\left.\alpha_{p-1}^{(0)} - \sum_{i=1}^{p} P_{p-2}^{p-1}\left(\lambda^{(i)}(0)\right)c_0^{(i)}, \alpha_p^{(0)} - \sum_{i=1}^{p} P_{p-1}^{p}\left(\lambda^{(i)}(0)\right)c_0^{(i)}, \alpha_{p+1}^{(0)}\right)$$

— уже відомий вектор, оскільки сталі $c_0^{(i)}$, $i = \overline{1,n}$, визначено на попередньому кроці. Отже, $c_1 = \Omega^{-1}(0)m_1$.

Продовжуючи цей процес, знайдемо всі необхідні коефіцієнти $c_k^{(i)}$, $k = 0,1,\ldots$, $i = \overline{1,n}$.

Розглянемо тепер рівняння (96). Підставивши в нього розвинення (55), (94), (73), (6) і прирівнявши вирази при однакових степенях μ, отримаємо нескінченну систему рівнянь

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=0}^{k}\tilde{v}_{ji}^{(1)}(T)\tilde{c}_{k-j}^{(i)}+\sum_{j=0}^{\left[\frac{k+1-p}{p}\right]}\tilde{w}_{j}^{(1)}(T)\tilde{c}_{k+1-p-pj}^{(n)}=x_{\frac{k+1-p}{p}}^{(2)},k=0,1,\ldots. \tag{104}$$

З (57), (59) випливає, що вектори $\tilde{v}_{ji}^{(1)}(t)$ можна подати у вигляді

$$\tilde{v}_{ji}^{(1)}=\sum_{s=1}^{j+1}P_{s-1}^{j}\left(\lambda^{(i)}(t)\right)\psi_s(t)+\tilde{d}_{ji}^{(1)}(t),\ j=0,1,\ldots, \tag{105}$$

де вектори $\psi_s(t)$ виражаються через $\psi(t)$ за формулами (58), а $\tilde{d}_{ji}^{(1)}(t)=0$ при $j<p$. Врахувавши (105), а також формули (86), (87), (89), (90), якими виражаються вектори $\tilde{w}_j^{(1)}(t)$, рівняння (104) перетворимо до вигляду

$$\begin{gathered}\sum_{s=1}^{k+1}\sum_{j=s-1}^{k}\sum_{i=1}^{p}P_{s-1}^{j}\left(\lambda^{(i)}(T)\right)\tilde{c}_{k-j}^{(i)}\psi_s(T)+\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=p}^{k}\tilde{d}_{ji}^{(1)}(T)\tilde{c}_{k-j}^{(i)}+c_0(T)\tilde{\varphi}(T)\tilde{c}_{k+1-p}^{(n)}+\\ \sum_{j=1}^{\left[\frac{k+1-p}{p}\right]}G(T)\tilde{a}_j^{(1)}(T)\tilde{c}_{k+1-p-pj}^{(n)}+\sum_{j=1}^{\left[\frac{k+1-p}{p}\right]}c_j(T)\tilde{\varphi}(T)\tilde{c}_{k+1-p-pj}^{(n)}=x_{\frac{k+1-p}{p}}^{(2)},\ k=0,1,\ldots.\end{gathered} \tag{106}$$

Припустимо тепер, що вектори $\psi_s(T)$, $s=\overline{1,p}$, $\tilde{\varphi}(T)$ лінійно незалежні, тобто

$$\det\left[\psi_1(T),\ldots,\psi_p(T),\tilde{\varphi}(T)\right]\neq 0, \tag{107}$$

і виконується умова

$$\left(K_0(t)\tilde{\psi}(t),\tilde{\psi}(t)\right)\neq 0,\ \forall t\in[0;T], \tag{108}$$

з якої випливає, що $c_0(T)\neq 0$. Тоді при $k<p$ із (106) матимемо

$$\sum_{j=s-1}^{k}\sum_{i=1}^{p}P_{s-1}^{j}\left(\lambda^{(i)}(T)\right)\tilde{c}_{k-j}^{(i)}=0,\ s=\overline{1,k+1},\ k=\overline{0,p-2}. \tag{109}$$

Розклавши вектор $x_0^{(2)}$ за базисними векторами:

$$x_0^{(2)}=\sum_{s=1}^{p}\beta_s^{(0)}\psi_s(T)+\beta_{p+1}^{(0)}\tilde{\varphi}(T),$$

при $k=p-1$ отримаємо

$$\sum_{j=s-1}^{p-1}\sum_{i=1}^{p}P_{s-1}^{j}\left(\lambda^{(i)}(T)\right)\tilde{c}_{p-1-j}^{(i)}=\beta_s^{(0)},\ s=\overline{1,p}; \tag{110}$$

$$c_0(T)\tilde{c}_0^{(n)}=\beta_{p+1}^{(0)}. \tag{111}$$

Взявши з отриманих систем (109), (110) останні рівняння (поклавши $s = k+1$ у (109) і $s = p$ — в (110)) й позначивши $\tilde{c}_0 = \operatorname{col}\left(\tilde{c}_0^{(1)}, \tilde{c}_0^{(2)}, \ldots, \tilde{c}_0^{(n)}\right)$, дістанемо

$$\tilde{\Omega}(T)\tilde{c}_0 = \tilde{m}_0, \tag{112}$$

де $\tilde{m}_0 = \operatorname{col}\left(0, \ldots, 0, \beta_p^{(0)}, \beta_{p+1}^{(0)}\right)$,

$$\tilde{\Omega}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \\ \lambda_1^{(1)}(t) & \lambda_1^{(2)}(t) & \ldots & \lambda_1^{(p)}(t) & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \left(\lambda_1^{(1)}(t)\right)^{p-1} & \left(\lambda_1^{(2)}(t)\right)^{p-1} & \ldots & \left(\lambda_1^{(p)}(t)\right)^{p-1} & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & c_0(t) \end{bmatrix}.$$

Оскільки згідно з (31), (27), (108) $\det\tilde{\Omega}(T) \neq 0$, то з рівняння (112) знайдемо $\tilde{c}_0 = \tilde{\Omega}^{-1}(T)\tilde{m}_0$.

Поклавши в (106) $k = p$, матимемо

$$\sum_{s=1}^{p}\sum_{j=s-1}^{p}\sum_{i=1}^{p} P_{s-1}^{j}\left(\lambda^{(i)}(T)\right)\tilde{c}_{p-j}^{(i)}\psi_s(T) + c_0(T)\tilde{\varphi}(T)\tilde{c}_1^{(n)} =$$
$$= -\sum_{i=1}^{p}\left(\lambda_1^{(i)}(T)\right)^{p}\tilde{c}_0^{(i)}\psi_{p+1}(T) - \sum_{i=1}^{p}\tilde{d}_{pi}^{(1)}(T)\tilde{c}_0^{(i)} = 0.$$

Розклавши вектор у правій частині цієї рівності за базисом $\psi_1(T), \ldots, \psi_p(T)$, $\tilde{\varphi}(T)$, позначивши його координати в цьому базисі $\beta_s^{(1)}$, $s = \overline{1, p+1}$, дістанемо систему рівнянь

$$\sum_{j=s-1}^{k}\sum_{i=1}^{p} P_{s-1}^{j}\left(\lambda^{(i)}(T)\right)\tilde{c}_{p-j}^{(i)} = \beta_s^{(1)},\ s = \overline{1,p}; \tag{113}$$

$$c_0(T)\tilde{c}_1^{(n)} = \beta_{p+1}^{(1)}. \tag{114}$$

Взявши тепер передостанні рівняння з систем (109), (110) (поклавши $s = k$ в (109) і $s = p-1$ — у (110)) та останнє рівняння з (113) і приєднавши до них рівняння (114), отримаємо $\tilde{\Omega}(T)\tilde{c}_1 = \tilde{m}_1$, де $\tilde{c}_1 = \operatorname{col}\left(\tilde{c}_1^{(1)}, \tilde{c}_1^{(2)}, \ldots, \tilde{c}_1^{(n)}\right)$, а

$$\tilde{m}_1 = \operatorname{col}\Bigg(0, -\sum_{i=1}^{p} P_1^{2}\left(\lambda^{(i)}(T)\right)\tilde{c}_0^{(i)}, \ldots, -\sum_{i=1}^{p} P_{p-3}^{p-2}\left(\lambda^{(i)}(T)\right)\tilde{c}_0^{(i)},$$
$$\beta_{p-1}^{(0)} - \sum_{i=1}^{p} P_{p-2}^{p-1}\left(\lambda^{(i)}(T)\right)\tilde{c}_0^{(i)}, \beta_p^{(1)} - \sum_{i=1}^{p} P_{p-1}^{p}\left(\lambda^{(i)}(0)\right)\tilde{c}_0^{(i)}, \beta_{p+1}^{(1)}\Bigg)$$

— уже відомий вектор. Отже, $\tilde{c}_1 = \tilde{\Omega}^{-1}(T)\tilde{m}_1$.

Продовжуючи так і далі, знайдемо будь-які сталі $\tilde{c}_k^{(i)}$, $k = 0, 1, \ldots$, $i = \overline{1, n}$. Визначення цих сталих завершує побудову формального розв'язку крайової задачі (13), (15).

3. Асимптотичний характер побудованого розв'язку

Покажемо, що побудований розв'язок має асимптотичний характер і виведемо відповідну асимптотичну оцінку. Розглянемо l наближення

$$
\begin{aligned}
y_l(t,\varepsilon) = \mu^{-(p-1)} \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=0}^{l} \mu^k \left(\sum_{j=0}^{k} c_j^{(i)} v_{k-j}^{(i)}(t) \right) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \left(\lambda_0(\tau) + \sum_{k=1}^{l} \mu^k \lambda_k^{(i)}(\tau) \right) d\tau \right) + \\
+ \sum_{k=0}^{l} \mu^k \left(\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{p}\right]} w_j(t) c_{k-pj}^{(n)} \right) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_0^t \left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{l}{p}\right]} \mu^{kp} \xi_k(\tau) \right)^{-1} d\tau \right) + \\
+\mu^{-(p-1)} \sum_{i=1}^{p} \sum_{k=0}^{l} \mu^k \left(\sum_{j=0}^{k} \tilde{c}_j^{(i)} \tilde{v}_{k-j}^{(i)}(t) \right) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_t^T \left(\lambda_0(\tau) + \sum_{k=1}^{l} \mu^k \lambda_k^{(i)}(\tau) \right) d\tau \right) + \\
+ \sum_{k=0}^{l} \mu^k \left(\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{p}\right]} \tilde{w}_j(t) \tilde{c}_{k-pj}^{(n)} \right) \exp\left(\varepsilon^{-h} \int_t^T \left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{l}{p}\right]} \mu^{kp} \xi_k(\tau) \right)^{-1} d\tau \right). \qquad (115)
\end{aligned}
$$

Точний розв'язок крайової задачі (13), (15) будемо шукати у вигляді суми l-наближення $y_l(t,\varepsilon)$ і вектора нев'язки $z_l(t,\varepsilon)$:

$$
y(t,\varepsilon) = y_l(t,\varepsilon) + z_l(t,\varepsilon). \qquad (116)
$$

Виходячи із способу визначення коефіцієнтів розвинення (115) та вигляду вектора $z_l(t,\varepsilon) = \operatorname{col}\left(z_l^{(1)}(t,\varepsilon); z_l^{(2)}(t,\varepsilon); z_l^{(3)}(t,\varepsilon) \right)$, встановлюємо, що цей вектор є розв'язком крайової задачі

$$
\begin{gathered}
\varepsilon^h \tilde{B}(t,\varepsilon) \frac{dz_l(t,\varepsilon)}{dt} = \tilde{A}(t,\varepsilon) z_l(t,\varepsilon) + \mu^{l+2-2p} a(t,\varepsilon); \\
M z_l(0,\varepsilon) + N z_l(T,\varepsilon) = \mu^{l+2-p} b(\varepsilon),
\end{gathered}
$$

в якій $a(t,\varepsilon)$ — деякий обмежений на $[0;T]$ $(2n+m)$-вимірний вектор, $b(\varepsilon)$ — обмежений $2n$-вимірний вектор.

Врахувавши структуру матриць $\tilde{A}(t,\varepsilon)$, $\tilde{B}(t,\varepsilon)$, M, N, звідси дістанемо

$$
z_l^{(3)}(t,\varepsilon) = D^{-1}(t,\varepsilon) C^*(t,\varepsilon) z_l^{(2)}(t,\varepsilon) + O\left(\mu^{l+2-2p} \right), \qquad (117)
$$

а для $2n$-вимірного вектора $\tilde{z}_l(t,\varepsilon) = \operatorname{col}\left(z_l^{(1)}(t,\varepsilon); z_l^{(2)}(t,\varepsilon) \right)$ маємо крайову задачу

$$
\varepsilon^h \hat{B}(t,\varepsilon) \frac{d\tilde{z}_l}{dt} = \hat{A}(t,\varepsilon) \tilde{z}_l + \mu^{l+2-2p} g(t,\varepsilon), \qquad (118)
$$

$$M_1\tilde{z}_l(0,\varepsilon)+N_1\tilde{z}_l(T,\varepsilon)=\mu^{l+2-p}b(\varepsilon), \tag{119}$$

де

$$\hat{A}(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} A(t,\varepsilon) & C(t,\varepsilon)D^{-1}(t,\varepsilon)C^*(t,\varepsilon) \\ 0 & -A^*(t,\varepsilon)-\varepsilon^h\left(B^*(t,\varepsilon)\right)' \end{pmatrix},\ \hat{B}(t,\varepsilon)=\begin{pmatrix} B(t,\varepsilon) & 0 \\ 0 & B^*(t,\varepsilon) \end{pmatrix},$$

$g(t,\varepsilon)$ — $2n$-вимірна вектор-функція, рівномірно обмежена на $[0;T]$.

Згідно з [**5**, с.97] $\hat{B}^{-1}(t,\varepsilon)=\varepsilon^{-1}F(t,\varepsilon)$, де $F(t,\varepsilon)$ рівномірно обмежена на $[0;T]$. Тому, помноживши рівняння (118) зліва на матрицю $\hat{B}^{-1}(t,\varepsilon)$, дістанемо

$$\frac{d\tilde{z}_l}{dt}=\varepsilon^{-h-1}\check{A}(t,\varepsilon)\tilde{z}_l+\mu^{l+2-p(h+3)}q(t,\varepsilon), \tag{120}$$

де $\check{A}(t,\varepsilon)=F(t,\varepsilon)\hat{A}(t,\varepsilon)$, $q(t,\varepsilon)=F(t,\varepsilon)g(t,\varepsilon)$.

Фундаментальна матриця відповідної однорідної системи у даному випадку має вигляд

$$Z(t,\varepsilon)=\left[\left(V_l(t,\varepsilon)+O\left(\mu^\alpha\right)\right)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t\Lambda_l(\tau,\varepsilon)d\tau\right);\right.$$

$$\left.\left(\tilde{V}_l(t,\varepsilon)+O\left(\mu^\alpha\right)\right)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_t^T\Lambda_l(\tau,\varepsilon)d\tau\right)\right]=\left[\left(V_l(t,\varepsilon);\tilde{V}_l(t,\varepsilon)\right)+O\left(\mu^\alpha\right)\right]\times$$

$$\times\mathrm{diag}\left\{\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t\Lambda_l(\tau,\varepsilon)d\tau\right);\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_t^T\Lambda_l(\tau,\varepsilon)d\tau\right)\right\}, \tag{121}$$

де $\alpha=l+2-p(h+3)$, $V_l(t,\varepsilon)=\mathrm{col}\left(V_l^{(1)}(t,\varepsilon);0\right)$, $\tilde{V}_l(t,\varepsilon)=\mathrm{col}\left(\tilde{V}_l^{(1)}(t,\varepsilon);\tilde{V}_l^{(2)}(t,\varepsilon)\right)$.

$$V_l^{(1)}(t,\varepsilon)=\left[\sum_{k=0}^{l}\mu^k v_{k1}^{(1)}(t);\ldots;\sum_{k=0}^{l}\mu^k v_{kp}^{(1)}(t);\sum_{k=0}^{\left[\frac{l}{p}\right]}\mu^{kp}w_k^{(1)}(t)\right], \tag{122}$$

$$\tilde{V}_l^{(j)}(t,\varepsilon)=\left[\sum_{k=0}^{l}\mu^k \tilde{v}_{k1}^{(j)}(t);\ldots;\sum_{k=0}^{l}\mu^k \tilde{v}_{kp}^{(j)}(t);\sum_{k=0}^{\left[\frac{l}{p}\right]}\mu^{kp}\tilde{w}_k^{(j)}(t)\right], \tag{123}$$

$(j=1,2)$,

$$\Lambda_l(t,\varepsilon)=\mathrm{diag}\left\{\lambda_0(t)+\sum_{k=1}^{l}\mu^k\lambda_k^{(1)}(t),\ldots,\lambda_0(t)+\sum_{k=1}^{l}\mu^k\lambda_k^{(n-1)}(t),\left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{l}{p}\right]}\mu^{kp}\xi_k(t)\right)^{-1}\right\}.$$

Поклавши $Z(t,\varepsilon) = Z_1(t,\varepsilon) + Z_2(t,\varepsilon)$, де

$$Z_1(t,\varepsilon) = \left(\left[V_l(t,\varepsilon); \tilde{V}_l(t,\varepsilon)\right] + O\left(\mu^\alpha\right)\right) \operatorname{diag}\left\{\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \Lambda_l(\tau,\varepsilon)d\tau\right); 0\right\},$$

$$Z_2(t,\varepsilon) = \left(\left[V_l(t,\varepsilon); \tilde{V}_l(t,\varepsilon)\right] + O\left(\mu^\alpha\right)\right) \operatorname{diag}\left\{0; \exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t \Lambda_l(\tau,\varepsilon)d\tau\right)\right\},$$

загальний розв'язок системи (120) подамо у вигляді

$$\tilde{z}(t,\varepsilon) = Z(t,\varepsilon)c(\varepsilon) + \mu^\alpha \int_0^t Z_1(t,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon)q(\tau,\varepsilon)d\tau -$$

$$-\mu^\alpha \int_t^T Z_2(t,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon)q(\tau,\varepsilon)d\tau. \tag{124}$$

де $c(\varepsilon)$ — довільний вектор, сталий відносно t.

Підставивши (124) у крайову умову (119) і врахувавши структуру матриць $V_l(t,\varepsilon)$, $\tilde{V}_l(t,\varepsilon)$, M_1, N_1, дістанемо

$$\left(\operatorname{diag}\left\{V_l^{(1)}(0,\varepsilon); \tilde{V}_l^{(1)}(T,\varepsilon)\right\} + O\left(\mu^\alpha\right)\right) c(\varepsilon) = \mu^\alpha M_1 \int_0^T Z_2(0,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon)q(\tau,\varepsilon)d\tau -$$

$$-\mu^\alpha N_1 \int_0^T Z_1(T,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon)q(\tau,\varepsilon)d\tau + \mu^{l+2-p}b(\varepsilon). \tag{125}$$

Виходячи з формул (33), (59), (66), (86), (89) і умов (107), (108), неважко переконатися, що вектор-стовпці, з яких утворено матриці $V_l^{(1)}(0,\varepsilon)$ і $\tilde{V}_l^{(1)}(T,\varepsilon)$, лінійно незалежні при $l \geq p-1$ і досить малих ε, відмінних від нуля. Тому з рівняння (125) однозначно визначається вектор $c(\varepsilon)$. Підставивши його в (124), дістанемо єдиний розв'язок крайової задачі (118), (119), який можна подати у вигляді

$$\tilde{z}_l(t,\varepsilon) = \mu^\alpha \int_0^T G_0(t,\tau,\varepsilon)q(\tau,\varepsilon)d\tau + \mu^{l+2-p}Z(t,\varepsilon)\left[\operatorname{diag}\left\{\left(V_l^{(1)}(0,\varepsilon)\right)^{-1};\right.\right.$$

$$\left.\left.\left(\tilde{V}_l^{(1)}(T,\varepsilon)\right)^{-1}\right\} + O\left(\mu^\alpha\right)\right] b(\varepsilon), \tag{126}$$

де $G_0(t,\tau,\varepsilon)$ — матриця Гріна відповідної однорідної задачі, яка має наступний вигляд:

$$G_0(t,\tau,\varepsilon)=\begin{cases} Z(t,\varepsilon)\left[\operatorname{diag}\left\{\left(V_l^{(1)}(0,\varepsilon)\right)^{-1};\left(\tilde V_l^{(1)}(T,\varepsilon)\right)^{-1}\right\}+O\left(\mu^{\alpha}\right)\right]\times\\ \times\left(M_1Z_2(0,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon)-N_1Z_1(T,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon)\right)+Z_1(t,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon),\\ \text{якщо } 0\le\tau\le t\le T;\\ Z(t,\varepsilon)\left[\operatorname{diag}\left\{\left(V_l^{(1)}(0,\varepsilon)\right)^{-1};\left(\tilde V_l^{(1)}(T,\varepsilon)\right)^{-1}\right\}+O\left(\mu^{\alpha}\right)\right]\times\\ \times\left(M_1Z_2(0,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon)-N_1Z_1(T,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon)\right)-Z_2(t,\varepsilon)Z^{-1}(\tau,\varepsilon),\\ \text{якщо } 0\le t\le\tau\le T;\end{cases}$$

Перейшовши в (126) до оцінок за нормою і врахувавши, що матриці $V_l^{(1)}(t,\varepsilon)$ і $\tilde V_l^{(1)}(t,\varepsilon)$ мають полюс по μ $(p-1)$-го порядку, та взявши до уваги обмеженість експоненціальних матриць, що входять до складу $G_0(t,\tau,\varepsilon)$, дістанемо таку асимптотичну оцінку для вектора нев'язки:

$$\|\tilde z_l(t,\varepsilon)\|\le c\mu^{l+3-p(h+4)}.$$

Звідси, взявши до уваги (116), отримаємо відповідні оцінки для шуканих вектора стану $x(t,\varepsilon)$ та керування $u(t,\varepsilon)$:

$$\|x(t,\varepsilon)-x_l(t,\varepsilon)\|\le c_1\mu^{l+3-p(h+4)},$$

$$\|u(t,\varepsilon)-u_l(t,\varepsilon)\|\le c_2\mu^{l+3-p(h+4)},$$

де c_1, c_2 — деякі сталі, що не залежать від ε.

4. Основні результати

Підсумовуючи результати проведених досліджень, приходимо до такої теореми.

Теорема 1. *Якщо виконуються умови* 1°–9°, *(*27*), (*107*), (*108*), то існує єдиний вектор керування* $u(t,\varepsilon)$, *який виражається асимптотичною формулою*

$$u(t,\varepsilon)=\mu^{-(p-1)}\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=0}^{l}\mu^k\sum_{j=0}^{k}\tilde v_{k-j,i}^{(3)}(t)\tilde c_j^{(i)}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_t^T\left(\lambda_0(\tau)+\sum_{k=1}^{l}\mu^k\lambda_k^{(i)}\right)d\tau\right)+$$

$$+\sum_{k=0}^{l}\mu^k\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{p}\right]}\tilde w_j^{(3)}(t)\tilde c_{k-pj}^{(n)}\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_t^T\left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{l}{p}\right]}\mu^{kp}\xi_k(\tau)\right)^{-1}d\tau\right)+O\left(\mu^{l+3-p(h+4)}\right),\ \mu=\sqrt[p]{\varepsilon},$$

що переводить систему (1) *із стану* $x_1(\varepsilon)$ *в стан* $x_2(\varepsilon)$*, мінімізуючи функціонал* (4)*. Відповідна траєкторія, за якою здійснюється цей перехід, виражається асимптотичною формулою*

$$x(t,\varepsilon)=\mu^{-(p-1)}\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=0}^{l}\mu^k\left(\sum_{j=0}^{k}v_{k-j,i}^{(1)}(t)c_j^{(i)}\right)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t\left(\lambda_0(\tau)+\sum_{k=1}^{l}\mu^k\lambda_k^{(i)}\right)d\tau\right)+$$
$$+\sum_{k=0}^{l}\mu^k\left(\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{p}\right]}w_j^{(1)}(t)c_{k-pj}^{(n)}\right)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t\left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{l}{p}\right]}\mu^{kp}\xi_k(\tau)\right)^{-1}d\tau\right)+$$
$$+\mu^{-(p-1)}\sum_{i=1}^{p}\sum_{k=0}^{l}\mu^k\left(\sum_{j=0}^{k}\tilde{v}_{k-j,i}^{(1)}(t)\tilde{c}_j^{(i)}\right)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_t^T\left(\lambda_0(\tau)+\sum_{k=1}^{l}\mu^k\lambda_k^{(i)}\right)d\tau\right)+$$
$$+\sum_{k=0}^{l}\mu^k\left(\sum_{j=0}^{\left[\frac{k}{p}\right]}\tilde{w}_j^{(1)}(t)\tilde{c}_{k-pj}^{(n)}\right)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_t^T\left(\sum_{k=1}^{\left[\frac{l}{p}\right]}\mu^{kp}\xi_k(\tau)\right)^{-1}d\tau\right)+O\left(\mu^{l+3-p(h+4)}\right).$$

Коефіцієнти наведених розвинень визначаються за описаним вище алгоритмом.

Література

[1] *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц / Ф. Р. Гантмахер. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

[2] *Шкиль Н. И.* Об асимптотическом решении задачи оптимального управления для систем с медленноменяющимися коэффициентами / Н. И. Шкиль, В. Н. Лейфура // Докл. АН УССР. Сер. А. — 1976. — № 7. — С. 604–608.

[3] *Шкиль Н. И.* К вопросу об асимптотическом решении задачи оптимального управления системами с медленноменяющимися коэффициентами в случае кратных корней / Н. И. Шкиль, В. Н. Лейфура // Межвед. респ. сб.: Вычисл. и прикл. математика. — К., 1977. — Вып. 31. — С. 81–92.

[4] *Шкиль Н. И.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями / Н. И. Шкиль, И. И. Старун, В. П. Яковец. — К.: Вища шк., 1991. — 207 с.

[5] *Самойленко А. М.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець. — К.: Вища школа, 2000. — 294 с.

[6] *Sibuya Y.* Some global properties of matrixes of functions of one variable / Y. Sibuya // Math. Anal. — 1965. — 161, N 1. — P. 67–77.

[7] *Понтрягин Л. С.* Математическая теория оптимальных процессов / Л. С. Понтрягин, В. Г. Болтянский, Р. В. Гамкрелидзе, Е. Ф. Мищенко. — М.: Наука, 1983. — 392 с.

References

[1] Gantmaher F. R. *Matrix Theory* - 1988, 552 p.

[2] N. I. Shkil, V. N. Lejfura *Dokl. AN USSR. (USSR AS Reports)* - 1976, pp. 604 - 608.

[3] N. I. Shkil, V. N. Lejfura *Mezhved. resp. sb.: Vychisl. i prikl. matematika. (Republican book "Computational and Applied Mathematics")* - 1977, 31, pp. 82-92

[4] N. I. Shkil, I. I. Starun, V. P. Yakovets *Asimptoticheskoe integrirovanie linejnyh sistem differencial'nyh uravnenij s vyrozhdenijami (Asymptotic integration of linear systems of differential equations with degenerations)* - 1991, 207 p.

[5] A. M. Samoilenko, M. I. Shkil, V. P. Yakovets. *Linijni systemy dyferencial'nyh rivnjan' z vyrodzhennjamy (Linear systems of differential equations with degeneracy)* - 2000, 294 p.

[6] Y. Sibuya *Math. Anal.* - 1965, 161, pp. 67-77.

[7] L. S. Pontrjagin, V. G. Boltjanskii, R. V. Gamkrelidze, E. F. Mishhenko. *Matematicheskaja teorija optimal'nyh processov (The mathematical theory of optimal processes)* - 1983, 392 p.