Науковий часопис НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова. — 2012, № 13(1).— С. 8–23.

Асимптотичне розвинення розв'язків сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженням і точками повороту

М. І. Шкіль,

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

Анотація. У роботі розглядаються деякі задачі, пов'язані з асимптотичним інтегруванням систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь з різного роду виродженням. Зокрема, наявності точок повороту, особливих точок тощо.

Використовуючи "збурене" характеристичне рівняння, побудовано формальні розв'язки для окремих типів систем сингулярно збурених диференціальних рівнянь і доведено, що ці розв'язки в околі точок повороту є асимптотичними зображеннями "точних" розв'язків розглядуваних систем. Досліджено вироджену систему сингулярно збурених диференціальних рівнянь у випадку, коли виродженість настає в окремих точках. В околі цих точок побудовано асимптотичні формули для розв'язків зазначених систем, які методом "зшивання" можуть бути продовжені на увесь інтервал зміни аргументу.

1. Класичні результати

Асимптотичні методи інтегрування диференціальних рівнянь беруть свій початок з робіт Фур'є, Ліувілля, Штурма, Пуанкаре, Шлєзінгера, Тамаркіна. Аналіз цих робіт і робіт інших авторів подано в [1].

2. Диференціальні рівняння з повільно змінними коефіцієнтами

Асимптотичні методи Крилова, Боголюбова [2], знайшли широке впровадження при дослідженні багатьох систем диференціальних рівнянь, зокрема рівнянь з повільно змінними коефіцієнтами. Так називають диференціальні рівняння, у яких коефіцієнти залежать від повільного часу $\tau = \varepsilon t$, де ε – малий параметр. Диференціальні рівняння з повільно змінними коефіцієнтами знаходять своє застосування в багатьох питаннях науки і техніки. До них приводяться також сингулярно збурені диференціальні рівняння. Рівняння з повільно змінними коефіцієнтами глибоко і всесторонньо були вперше дослідженні в 50-60 роках XX століття в працях С.Ф. Фещенка і М.І. Шкіля та їх учнів [1], [3]. Приведемо основні їх результати досліджень з даного питання.

Перші результати С.Ф. Фещенко отримав ще в 1948-1949 роках. Він розглянув рівняння
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \varepsilon\rho(\tau,\varepsilon)\frac{dy}{dt} + q(\tau,\varepsilon)y = \varepsilon f(\tau,\varepsilon)e^{i\theta(t,\varepsilon)}, \tag{1}$$
де $\rho(\tau,\varepsilon)$, $q(\tau,\varepsilon)$, $f(\tau,\varepsilon)$ – функції, які повільно змінюються і допускають розвинення за степенями малого параметра ε. Особливо важливим у теоретичному плані, а також для розв'язування задач математичної фізики виявився розглянутий С.Ф. Фещенком випадок, коли функція $\upsilon(\tau) = \frac{d\theta(t,\varepsilon)}{dt}$ при деяких $\tau \in [0; L]$ співпадає із одним з коренів характеристичного рівняння, складеного для рівняння (1). Цей випадок він назвав "резонансним". Можна довести, що "резонансні" точки є точками повороту системи диференціальних рівнянь, до якої може бути приведене рівняння (1).

С.Ф. Фещенко також довів теореми, які дозволяють будувати асимптотичні розв'язки рівняння (1) у "нерезонансному" випадку, коли функція $\upsilon(\tau)$ не співпадає жодним з коренів характеристичного рівняння.

2.1. Теореми про асимптотичне розщеплення системи. У 1995 році С.Ф. Фещенко отримав важливі результати, які стосувались асимптотичного розщеплення систем лінійних диференціальних рівнянь вигляду
$$\frac{dx}{dt} = A(\tau,\varepsilon)x, \quad \tau \in [0; L], \tag{2}$$
де x – n-вимірний вектор, $A(\tau,\varepsilon)$ – дійсна квадратна матриця порядку n, яка має зображення $A(\tau,\varepsilon) = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A^{(s)}(\tau)$.

Для цих систем С.Ф. Фещенко показав, що при виконанні певних умов їх можна асимптотично розщепити на підсистеми нижчого порядку. Зокрема, вірними є теореми.

Теорема 1. *Припустимо, що корені характеристичного рівняння*
$$\det \left\| A^{(0)}(\tau) - \lambda E \right\| = 0 \tag{3}$$
(E – одинична матриця) можна розбити на дві групи $\lambda_1(\tau)$, ..., $\lambda_r(\tau)$ та $\lambda_{r+1}(\tau)$, ..., $\lambda_n(\tau)$ так, що жоден з коренів першої групи при всіх $\tau \in [0; L]$ не дорівнює кореням другої групи. Тоді, якщо $A(\tau,\varepsilon)$ на відрізку $[0; L]$ має похідні по τ всіх порядків, то система диференціальних рівнянь (2) має формальний розв'язок $x = U_1(\tau,\varepsilon)\xi_1 + U_2(\tau,\varepsilon)\xi_2$, де $U_1(\tau,\varepsilon)$, $U_2(\tau,\varepsilon)$ – прямокутні матриці з розмірами відповідно $(n \times r)$, $(n \times (n-r))$, а ξ_1 – r-вимірний вектор, ξ_2 – $(n-r)$-вимірний вектор, які визначають системи диференціальних рівнянь
$$\frac{d\xi_1}{dt} = W_1(\tau,\varepsilon)\xi_1, \quad \frac{d\xi_2}{dt} = W_2(\tau,\varepsilon)\xi_2$$
порядку відповідно r та $n - r$.

Теорема 2. *Якщо $A(\tau,\varepsilon)$ задовольняє умовам теореми 1 і власні числа матриць*

$$\Delta_i(\tau) = \frac{1}{2}\left[W_i(\tau) + W_i^*(\tau)\right], \quad i = 1, 2,$$

де $W_1(\tau)$, $W_2(\tau)$ – діагональні клітини матриці $T^{-1}(\tau)A^{(0)}(\tau)T(\tau)$ ($T(\tau)$ – матриця перетворення, $T^{-1}(\tau)$ – обернена до $T(\tau)$), $W_1^*(\tau)$, $W_2^*(\tau)$ – матриці спряжені до матриць $W_1(\tau)$, $W_2(\tau)$, не додатні, тоді для будь-якого $L > 0$ та $0 < \varepsilon \le \varepsilon_0$ можна вказати таку сталу $c > 0$, не залежну від ε, що як тільки $x|_{t=0} = x_m|_{t=0}$ (x_m – m-наближення), то $||x - x_m|| \le \varepsilon^m c$.

За допомогою теорем 1 і 2 можна асимптотично знизити порядок системи. Якщо корені характеристичного рівняння системи (2) на сегменті $[0; L]$ прості, то, як наслідок із теорем С.Ф. Фещенка випливають теореми Біркгофа і Тамаркіна про асимптотичне зображення розв'язків таких систем.

2.2. Випадок кратних коренів. Як згадувалось вище, теореми про асимптотичне розщеплення дають можливість лише наближено понизити порядок вихідної системи. У загальному випадку, наприклад, для кратних коренів характеристичного рівняння з допомогою цих теорем отримати асимптотичний розв'язок системи (2) неможливо. І в той же час цей випадок досить часто зустрічається як при дослідженні теоретичних питань, так і при розв'язанні задач практики. Цей випадок має місце при розгляді рівняння Штурма–Ліувілля, при дослідженні систем диференціальних рівнянь з малим параметром при частині похідних, в задачах оптимального керування. Зауважимо, що випадок кратних коренів, особливо той варіант, коли кратним кореням відповідають кратні елементарні дільники, досить складний. Це обумовлено тим, що вихідна система диференціальних рівнянь, взагалі кажучи, не має розв'язків, які б мали розвинення за цілими степенями параметра ε. Такі розв'язки, на відміну від випадку простих коренів, зображаються формальними рядами за дробовими степенями цього параметра, причому показники степеня залежать не тільки від кратності кореня, але й від кратності відповідних елементарних дільників та певних співвідношень між коефіцієнтами розглядуваної системи диференціальних рівнянь. Випадок кратних коренів характеристичного рівняння всебічно дослідив автор даної статті у 1960-1970 роках [3]. Нижче наведено деякі з отриманих ним результатів (теореми 3,4).

Припустимо, що характеристичне рівняння (3) має хоча б один корінь $\lambda = \lambda_0(\tau)$ постійної кратності k, $2 \le k < n$, якому відповідає елементарний дільник тієї ж кратності.

Теорема 3. *Якщо $A(\tau,\varepsilon)$ має на відрізку $[0;L]$ похідні по τ всіх порядків і матриця*

$$C(\tau)=T^{-1}(\tau)\left(\frac{dT(\tau)}{d\tau}-A_1(\tau)T(\tau)\right), \tag{4}$$

де $T(\tau)$ – матриця, яка приводить $A_0(\tau)$ до жорданової форми, $T^{-1}(\tau)$ – обернена матриця до $T(\tau)$ така, що для будь-якого $\tau\in[0;L]$ її елемент

$$c_{k1}(\tau)\neq 0, \tag{5}$$

то система диференціальних рівнянь (2) має формальний розв'язок вигляду

$$x=u(\tau,\mu)\exp\left(\int\limits_0^t \lambda(\tau,\mu)dt\right), \tag{6}$$

де n-вимірний вектор $u(\tau,\mu)$ та скалярна функція $\lambda(\tau,\mu)$ мають розвинення

$$\begin{gathered} u(\tau,\mu)=\sum_{s=0}^{\infty}\mu^s u_s(\tau),\\ \lambda(\tau,\mu)=\lambda_0(\tau)+\sum_{s=1}^{\infty}\mu^s\lambda_s(\tau), \end{gathered} \tag{7}$$

в яких

$$\mu=\varepsilon^{\frac{1}{k}}. \tag{8}$$

Можна довести, що умова (5) є і необхідною для того, щоб система (2) мала формальний розв'язок вигляду (6).

Пізніше теорему 3 довів М.М. Моісеєв іншим методом [4].

У випадку коли $c_{k1}(\tau)\equiv 0$, але якщо при цьому $c_{k-1,1}(\tau)+c_{k2}(\tau)\neq 0$, то система (2) має формальний розв'язок вигляду (6), де $u(\tau,\mu)$, $\lambda(\tau,\mu)$ зображаються формальними рядами за степенями параметра

$$\mu=\varepsilon^{\frac{1}{k-1}},$$

а один розв'язок – за цілими степенями параметра ε.

Наведемо найбільш загальний результат автора стосовно дослідження системи (2) для випадку кратних коренів характеристичного рівняння (3).

Нехай виконуються умови:

1) матриця $A(\tau,\varepsilon)$ на відрізку $[0;L]$ має похідні по τ всіх порядків;

2) характеристичне рівняння (3) має один корінь $\lambda=\lambda_0(\tau)$ постійної кратності n;

3) кореню $\lambda_0(\tau)$ відповідає $r\geq 1$ елементарних дільників вигляду

$$(\lambda-\lambda_0(\tau))^{k_1},...,(\lambda-\lambda_0(\tau))^{k_r};$$

4) виконується одне із співвідношень:

а) $k_1=k_2=...=k_r=k$;

б) $k_1>k_2>...>k_r$.

Тоді для випадку а) справедлива така теорема.

Теорема 4. *Якщо виконуються умови 1-3 і випадок а), то для того щоб вектор*

$$x = u(\tau, \mu) \exp \left(\int_0^t \lambda(\tau, \mu) dt \right),$$

де n-вимірний вектор $u(\tau, \mu)$ і скалярна функція $\lambda(\tau, \mu)$ зображуються формальними рядами

$$u(\tau, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s u_s(\tau), \quad \lambda(\tau, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s \lambda_s(\tau), \tag{9}$$

в яких $\mu = \varepsilon^{\frac{1}{k}}$, був формальним вектор-розв'язком системи (2), необхідно і достатньо, щоб функція $(\lambda_1(\tau))^k$ при будь-якому $\tau \in [0; L]$ була коренем рівняння

$$\det \begin{Vmatrix} \rho + c_{k1}(\tau) & c_{k,k+1}(\tau) & ... & c_{k,l_{r-1}+1}(\tau) \\ c_{2k,1}(\tau) & \rho + c_{2k,k+1}(\tau) & ... & c_{2k,l_{r-1}+1}(\tau) \\ ... & ... & ... & ... \\ c_{n1}(\tau) & c_{n,k+1}(\tau) & ... & \rho + c_{n,l_{r-1}+1}(\tau) \end{Vmatrix} = 0, \tag{10}$$

де $c_{k1}(\tau), ..., c_{nl_{r-1}+1}(\tau), l_{r-1} = (r-1)k$ – елементи матриці (4).

Доведення достатньої умови теореми 4 дає і метод побудови коефіцієнтів формальних рядів (9).

Аналогічна теорема справедлива і для випадку б). Доведено також, що для обох випадків формальні розв'язки є асимптотичними розвиненнями за параметром ε точних розв'язків системи (2). Зауважимо, що теорема 3 є частинним випадком теореми 4. Умова (10) для $r = 1$ набирає вигляду

$$\rho + c_{n1}(\tau) = 0.$$

2.3. Точки повороту. "Збурене" характеристичне рівняння. Проблеми. Доведення існування асимптотичних розв'язків системи (2) у випадку кратних коренів значно складніше ніж у випадку простих коренів характеристичного рівняння. Тому природно виникає питання: чи не можна за допомогою певних перетворень над матрицею коефіцієнтів системи випадок кратних коренів звести до простих? Так, Г. Туррітін [5], І.І. Старун [6] намагалися з допомогою низки зрізуючих перетворень позбутися випадку кратних коренів. Але повністю уникнути формальних розвинень за дробовими степенями параметра ε їм так і не вдалося.

В останні роки автором [7] запропоновано новий підхід до побудови формальних розв'язків системи (2), який пов'язаний з введенням до розгляду так званого збуреного характеристичного рівняння. З'ясуємо цей метод для окремого випадку системи

(2). А саме, будемо розглядати систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\frac{dx}{dt} = A(\tau)x. \tag{11}$$

Припустимо, що матриця $A(\tau)$ достатнє число раз диференційовна на відрізку $[0; L]$, рівняння (3) при будь-якому $\tau \in [0; L]$ має один тотожно n-кратний корінь $\lambda = \lambda_0(\tau)$ і йому відповідає один елементарний дільник тієї ж кратності. Тоді з допомогою підстановки $x = V(\tau)y$, де $V(\tau)$ – матриця перетворення подібності, систему (11) можна звести до системи вигляду

$$\frac{dy}{dt} = B(\tau, \varepsilon)y, \tag{12}$$

де

$$B(\tau, \varepsilon) = W(\tau) - \varepsilon V^{-1}(\tau)V'(\tau),$$

$W(\tau)$ – клітина Жордана, $V^{-1}(\tau)$ – матриця, обернена до $V(\tau)$, $V'(\tau)$ – похідна.

Побудуємо рівняння

$$\det \|B(\tau, \varepsilon) - \rho E\| = 0 \tag{13}$$

і назвемо його "збуреним" характеристичним рівнянням.

Припустимо, що корені $\rho_i(\tau, \varepsilon)$, $i = \overline{1, n}$ рівняння (13) прості для будь-якого $\tau \in [0; L]$ і $\varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$. Тоді, підставляючи в систему (12) вектор

$$y = U_m(\tau, \varepsilon, \varepsilon)z, \quad U_m(\tau, \varepsilon, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s U_s(\tau, \varepsilon) \tag{14}$$

($m \geq 1$ – натуральне число), отримуємо систему

$$U_m(\tau, \varepsilon, \varepsilon)\frac{dz}{dt} = (B(\tau, \varepsilon)U_m(\tau, \varepsilon, \varepsilon) - \varepsilon U_m'(\tau, \varepsilon, \varepsilon))z, \tag{15}$$

($U_m'(\tau, \varepsilon, \varepsilon)$ – похідна по τ).

Матрицю $U_m(\tau, \varepsilon, \varepsilon)$ будемо визначати із матричної рівності

$$B(\tau, \varepsilon)U_m(\tau, \varepsilon, \varepsilon) - \varepsilon U_m'(\tau, \varepsilon, \varepsilon) = U_m(\tau, \varepsilon, \varepsilon)(\Lambda_m(\tau, \varepsilon, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1}C_m(\tau, \varepsilon)), \tag{16}$$

в якій $\Lambda_m(\tau, \varepsilon, \varepsilon) = \sum\limits_{s=0}^{m} \varepsilon^s \Lambda_s(\tau, \varepsilon)$ – діагональна матриця, а $C_m(\tau, \varepsilon)$ – матриця розмірів $n \times n$.

Зрівняємо в рівності (16) коефіцієнти при "зовнішніх" степенях ε^k, $k = 0, 1, ..., m$, і ε^{m+1}. Отримаємо систему рівнянь

$$B(\tau, \varepsilon)U_0(\tau, \varepsilon) - U_0(\tau, \varepsilon)\Lambda_0(\tau, \varepsilon) = 0,$$

$$B(\tau, \varepsilon)U_r(\tau, \varepsilon) - U_r(\tau, \varepsilon)\Lambda_0(\tau, \varepsilon) = H_r(\tau, \varepsilon), \quad r = \overline{1, m},$$

$$U_m(\tau, \varepsilon, \varepsilon)C_m(\tau, \varepsilon) = R_m(\tau, \varepsilon),$$

де
$H_r(\tau,\varepsilon) = U'_{r-1}(\tau,\varepsilon) + \sum\limits_{i=0}^{r} U_i(\tau,\varepsilon)\Lambda_{r-i}(\tau,\varepsilon)$, $r = \overline{1,m}$,
$R_m(\tau,\varepsilon) = U'_m(\tau,\varepsilon) + \sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{j=k}^{m} \varepsilon^{k-1} U_{k+j-1}(\tau,\varepsilon)\Lambda_{m+2-k-j}(\tau,\varepsilon)$.

Невідомі матриці $U_s(\tau,\varepsilon)$, $\Lambda_s(\tau,\varepsilon)$, $s = \overline{0,m}$, визначаються методом, наведеним у [7]. Далі вимагатимемо виконання умови

1°). матриця $U_m(\tau,\varepsilon,\varepsilon)$ неособлива при будь-якому $\tau \in [0;L]$ і $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$. Тоді систему (15) згідно з (16) можна записати у вигляді

$$\frac{dz}{dt} = \left(\Lambda_m(\tau,\varepsilon,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1} C_m(\tau,\varepsilon)\right) z, \tag{17}$$

де $C_m(\tau,\varepsilon) = U_m^{-1}(\tau,\varepsilon,\varepsilon) R_m(\tau,\varepsilon)$.

Нехай виконується умова

2°). для будь-якого $\tau \in [0;L]$ і $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ $\mathrm{Re}(\rho_j(\tau,\varepsilon)) \le 0$, $j = \overline{1,n}$, $C_m(\tau,\varepsilon) = O(\varepsilon^{-\alpha})$, $\varepsilon \to 0$, $0 < \alpha < m$. Тоді систему (17) можна проінтегрувати методом послідовних наближень, внаслідок чого для вектора z отримаємо асимптотичну формулу $z = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \sum\limits_{s=0}^{m} \varepsilon^s \Lambda_s(\sigma,\varepsilon)d\sigma\right) a + O(\varepsilon^{m-\alpha})$, $\varepsilon \to 0$, де a – сталий вектор.

Накладемо ще одну умову

3°). матриця $U_m(\tau,\varepsilon,\varepsilon)$ для будь-якого $\tau \in [0;L]$ і $\varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ обмежена за нормою. Тоді для вектора x отримаємо асимптотичну формулу

$$x = V(\tau,\varepsilon) U_m(\tau,\varepsilon,\varepsilon) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^\tau \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s \Lambda_s(\sigma,\varepsilon)d\sigma\right) a + O(\varepsilon^{m-\alpha}), \quad \varepsilon \to 0. \tag{18}$$

Зауважимо, що формула (18) отримана при виконанні умов 1°–3°, в яких явно не фігурують коефіцієнти системи (11). Виникає питання: яким вимогам повинна відповідати матриця $A(\tau)$ (матриця $A(\tau,\varepsilon)$), щоб виконувались умови 1°–3°?

Відповіді на це питання і складають ті проблеми, які згадуються в п. 2.4.

Приклад 1. Розглянемо скалярне рівняння

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \varepsilon p(\tau) x = 0, \tag{19}$$

де $p(\tau) \ne 0 \forall \tau \in [0;L]$ і має неперервні похідні до другого порядку включно.

Тоді рівняння (19) можна записати у вигляді системи (12), де $y = (y_1; y_2)$ ($y_1 = x$, $y_2 = dx/dt$) – двовимірний вектор, $B(\tau,\varepsilon)$ – матриця розмірів 2×2 вигляду $B(\tau,\varepsilon) = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 \\ -\varepsilon p(\tau) & 0 \end{matrix} \right\|$. Рівняння (13) має корені $\rho_1(\tau,\varepsilon) = \sqrt{-\varepsilon p(\tau)}$,

$\rho_2(\tau,\varepsilon) = -\sqrt{-\varepsilon p(\tau)}$. Нехай у підстановці (14) $m = 1$. Тоді, повторивши попередні викладки та наклавши умову $p(\tau) > 0 \; \forall \, \tau \in [0;L]$ (при цьому припущенні умови 1°–3° виконуються), для вектора z отримаємо асимптотичну формулу $z = \exp\left(\frac{1}{3}\int\limits_0^\tau \tilde{\Lambda}_1(\sigma,\varepsilon)d\sigma\right) + O\left(\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)$, $\varepsilon \to 0$, де $\tilde{\Lambda}_1(\sigma,\varepsilon) = diag\left(\frac{p'(\tau)}{4p(\tau)};\ \frac{p'(\tau)}{4p(\tau)}\right)$.

Зауваження 1. *Запропонований в п. 2.3. метод може бути застосований і в тому випадку коли в системі (2) з'являються точки повороту [8]. У цьому випадку слід на матрицю* $A(\tau,\varepsilon)$ *накласти умову, щоб рівняння (збурене)* $\det\|A_0(\tau) + \varepsilon A_1(\tau) - \rho E\| = 0$ *при* $\forall \, \tau \in [0;L]$ *і* $\forall \, \varepsilon \in (0;\varepsilon_0]$ *мало різні корені.*

3. Системи диференціальних рівнянь з виродженням в точці

Останнім часом все більше математиків займаються дослідженням сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь як лінійних так і нелінійних, у яких матриця при похідних може бути виродженою. Бібліографію з цих досліджень можна знайти в монографії [9]. При цьому розглядалися випадки, коли матриця є виродженою на всьому проміжку, на якому досліджується система диференціальних рівнянь.

У даній роботі розглядається випадок, коли виродженість в системі настає в одній точці, і отже, вище наведені результати не можуть бути застосованими.

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon t^p \frac{dx}{dt} = A(t)x, x(0) = x_0, \tag{20}$$

у якій $x = x(t)$, x_0 – n-вимірні вектори, $A(t)$ – $(n \times n)$-матриця, ε $(0 < \varepsilon \le \varepsilon_0)$ – малий параметр, $t \in [0;L]$ – дійсна змінна, $p \ge 1$ – натуральне число.

Як це слідує з (20) при $t = 0$ настає виродженість: коефіцієнт при похідній дорівнює нулю. На матрицю $A(t)$ накладемо умови:

1°. На відрізку $[0;L]$ вона неперервна і має неперервні похідні до $m+1$ порядку включно ($m \ge p$ – натуральне число). Тоді $A(t)$ може бути розвинута за формулою Тейлора:

$$A(t) = A(0) + \frac{A'(0)}{1!}t + ... + \frac{A^{(m)}(0)}{m!}t^m + \frac{A^{(m+1)}(\theta t)}{(m+1)!}t^{m+1}, 0 < \theta < 1. \tag{21}$$

2°. В точці $t = 0$ виконуються умови: $A(0) = A'(0) = ... = A^{(p-1)}(0) = 0$, $A^{(p)}(0) \neq 0$, де 0 – нульова матриця, $A'(0), ..., A^{(p)}(0)$ – відповідні похідні матриці $A(t)$ при $t = 0$.

3.1. Асимптотика (за параметром ε) на відрізку $0 \le t \le \delta$. Систему диференціальних рівнянь (21) при $t \in (0;L]$ можна записати у вигляді:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = B(t)x, \tag{22}$$

де

$$B(t) = \frac{1}{t^p} A(t). \tag{23}$$

При виконанні умов 1°– 2° існує $\lim\limits_{\substack{t \to 0 \\ (t>0)}} B(t)$ і дорівнює

$$\lim_{\substack{t \to 0 \\ (t>0)}} B(t) = \frac{1}{p!} A^{(p)}(0) = K. \tag{24}$$

Тоді $B(t)$ у точці $t = 0$ можна довизначити за принципом неперервності, ввівши матрицю:

$$C(t) = \begin{cases} B(t), & t \in (0; L], \\ K, & t = 0. \end{cases} \tag{25}$$

Надалі розглядатимемо довизначену в точці $t = 0$ систему диференціальних рівнянь:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = C(t)x, x(0) = x_0, \tag{26}$$

задану на відрізку $[0; L]$.

Зазначимо, матриця $C(t)$ в системі (26) згідно 1°, (25) є неперервною на відрізку $[0; L]$ і має неперервні похідні до $m + 1$ включно в напівінтервалі $(0; L]$.

Введемо до розгляду матрицю

$$D(t) = C(t) - K. \tag{27}$$

Згідно (24) існує окіл точки $t = 0$, $0 \leq t \leq \delta$ (цим самим визначено число $0 < \delta = \delta(\varepsilon) \leq L$) такий, що для $\forall\, t \in [0; \delta]$ і $\forall\, \varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ норма $\|D(t)\|$ матриці $D(t)$ задовольняє нерівність

$$\|D(t)\| \leq \varepsilon^{\alpha} b, \tag{28}$$

де $\alpha > 1$ – довільне дійсне число, $b > 0$ – дійсне число, яке не залежить від ε.

Тоді систему диференціальних рівнянь (26) можна записати у вигляді

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = Kx + D(t)x, x(0) = x_0. \tag{29}$$

Введемо підстановку

$$x = Xy, \tag{30}$$

де $X = X(t, \varepsilon)$ – розв'язок початкової задачі $X(0, \varepsilon) = E$ для матричного рівняння

$$\varepsilon \frac{dX}{dt} = KX, \tag{31}$$

E – одинична матриця. Рівняння (31) має нормальну фундаментальну систему розв'язків

$$X = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} Kt\right). \tag{32}$$

Тоді підстановка (30) зводить систему диференціальних рівнянь (29) до еквівалентної системи інтегральних рівнянь:

$$x = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}Kt\right)x_0 + \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}K(t-t_1)\right)D(t_1)x(t_1,\varepsilon)dt_1. \tag{33}$$

Надалі припускатимемо виконання умови:

3°. Характеристичні числа матриці K прості і їх дійсні частини недодатні. Тоді існують числа $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, які не залежать від ε і такі, що $\forall\, t, t_1 \in [0;\delta]$ і $\forall\, \varepsilon \in (0;\varepsilon_1]$ $(0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_0)$ мають місце оцінки

$$\left\|\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}Kt\right)x_0\right\| \le c_1, \quad \left\|\exp\frac{1}{\varepsilon}K(t-t_1)D(t_1)\right\| \le c_2\varepsilon^{\alpha}. \tag{34}$$

Тому із співвідношення (33) отримуємо нерівність:

$$\|x\| \le c_1 + \varepsilon_0^{\alpha-1}c_2\int\limits_0^t \|x(t_1,\varepsilon)\|\,dt_1, \tag{35}$$

$0 \le t \le \delta \le L$.

Застосовуючи до нерівності (35) відому лему Беллмана [10], отримуємо

$$\|x(t,\varepsilon)\| \le c_1 e^{\varepsilon_0^{\alpha-1}c_2 L}, \tag{36}$$

$0 \le t \le \delta \le L$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_1 \le \varepsilon_0$, $\|x\|$ – норма вектора x. Отже, розв'язок $x(t,\varepsilon)$ системи диференціальних рівнянь (26) з початковою умовою $x(0) = x_0$ є обмеженим для $\forall\, t \in [0;\delta]$ $(0 < \delta < L)$ і $\forall\, \varepsilon \in (0;\varepsilon_1]$ $(0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_0)$.

Тоді для другого доданку в рівності (33) маємо таку оцінку

$$\left\|\int\limits_0^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}K(t-t_1)\right)D(t_1)x(t_1,\varepsilon)dt_1\right\| \le \varepsilon^{\alpha-1}c_2c_1e^{\varepsilon_0^{\alpha-1}c_2L}L. \tag{37}$$

Отримані вище результати можна сформулювати у вигляді теореми.

Теорема 5. *Якщо матриця $A(t)$ задовольняє умови 1°–3° п. 3.1, то існує відрізок $[0;\delta] \subset [0;L]$ ($\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ – число, яке визначається співвідношенням (28) такий, що для $\forall\, t \in [0;\delta]$ і $\forall\, \varepsilon \in (0;\varepsilon_1]$ $(0 < \varepsilon_1 \le \varepsilon_0)$) розв'язок системи диференціальних рівнянь (26) можна зобразити у вигляді асимптотичної (за параметром ε) формули:*

$$x(t,\varepsilon) = \left(\exp\left(K\frac{t}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon^{\alpha-1})\right)x_0. \tag{38}$$

3.2. Асимптотика (за параметром ε) на відрізку $[\delta; L]$**.** Для введення асимптотичної формули для розв'язку системи (26) на відрізку $[\delta; L]$ скористаємося методом роботи [7]. Згідно (25) система диференціальних рівнянь (26) набирає вигляду:

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = B(t)x, x(\delta) = x_\delta. \tag{39}$$

4°. Припускатимемо, що характеристичне рівняння

$$\det \|B(t) - \lambda E\| = 0 \tag{40}$$

на відрізку $[\delta; L]$ має прості корені $\lambda_1(t), ..., \lambda_n(t)$.

Згідно 1°, (23) матриця $B(t)$ на відрізку $[\delta; L]$ має неперервні похідні до $(m+1)$-го $(m \geq 1)$ порядку включно. Тому [1] існує неособлива матриця $T(t)$, яка на відрізку $[\delta; L]$ має неперервні похідні до порядку $m + 1$ включно і така, що на відрізку $[\delta; L]$ вірною є рівність

$$T^{-1}(t)B(t)T(t) = \Lambda(t), \tag{41}$$

де

$$\Lambda(t) = diag(\lambda_1(t), ..., \lambda_n(t)), \tag{42}$$

$T^{-1}(t)$ – матриця обернена до $T(t)$.

Шукатимемо розв'язок системи (39) у вигляді

$$x(t, \varepsilon) = U_m(t, \varepsilon)y(t, \varepsilon), \tag{43}$$

де $U_m(t, \varepsilon)$ – $(n \times n)$-матриця

$$U_m(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{m} \varepsilon^s U_s(t), \tag{44}$$

$y(t, \varepsilon)$ – n-вимірний вектор. Тоді згідно [7] систему (39) можна звести до системи

$$\varepsilon \frac{dy}{dt} = (\Lambda_m(t, \varepsilon) + \varepsilon^{m+1} C_m(t, \varepsilon))y, \tag{45}$$

з початковою умовою

$$y_\delta = y(\delta) = U_m^{-1}(\delta, \varepsilon)x_\delta, \tag{46}$$

де $C_m(t, \varepsilon)$ – неперервна $(n \times n)$-матриця.

Система диференціальних рівнянь (45) зводиться до інтегральної системи рівнянь вигляду

$$y(t, \varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_\delta^t \Lambda_m(t_1, \varepsilon)dt_1\right) y_\delta + \varepsilon^m \int_\delta^t \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_{t_1}^t \Lambda_m(\tau, \varepsilon)d\tau\right) C_m(t_1, \varepsilon)y(t_1, \varepsilon)dt_1. \tag{47}$$

5°. Надалі припускатимемо, що для $\forall t \in [\delta; L]$ виконується умова: $\mathrm{Re}\lambda_i(t) \le 0$, $i = \overline{1,n}$. Тоді можна стверджувати, що існують сталі числа $c_3 > 0$, $c_4 > 0$, які незалежать від ε, і такі, що $\forall t \in [\delta; L]$ і $\forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_0]$ вірними є нерівності:

$$\left\| \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_\delta^t \Lambda_m(t_1,\varepsilon) dt_1 \right) y_\delta \right\| \le c_3, \quad \left\| \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_{t_1}^t \Lambda_m(\tau,\varepsilon) \right) C_m(t_1,\varepsilon) dt_1 \right\| \le c_4. \quad (48)$$

Тоді із (47), враховуючи (48), отримаємо нерівність

$$\|y(t,\varepsilon)\| \le c_3 + c_4 \varepsilon_0^m \int_\delta^t \|y(t_1,\varepsilon)\| dt_1. \quad (49)$$

Застосовуючи до нерівності (49) лему Беллмана [10], маємо оцінку:

$$\|y(t,\varepsilon)\| \le c_3 e^{c_4 L \varepsilon_0^m} \quad (50)$$

для $\forall t \in [\delta; L]$ і $\varepsilon \in (0; \varepsilon_2]$ $(0 < \varepsilon_2 \le \varepsilon_1 \le \varepsilon_0)$.

Із нерівностей (48), (50) випливає:

$$\left\| \int_\delta^t \exp\left(\frac{1}{3} \int_{t_1}^t \Lambda_m(\tau,\varepsilon) d\tau \right) C_m(t_1,\varepsilon) y(t_1,\varepsilon) \right\| \le c_4 c_3 L e^{c_4 L \varepsilon_0^m}. \quad (51)$$

Отже, для вектора $y(t,\varepsilon)$ згідно (47) при $\forall t \in [\delta; L]$ і $\forall \varepsilon \in (0; \varepsilon_2]$ $(0 < \varepsilon_2 \le \varepsilon_1 \le \varepsilon_0)$ вірною є асимптотична (за параметром ε) формула:

$$y(t,\varepsilon) = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_\delta^t \Lambda_m(t_1,\varepsilon) dt_1 \right) y_\delta + O(\varepsilon^m). \quad (52)$$

Оскільки матриця $U_m(t,\varepsilon)$ згідно 1° на відрізку $[\delta; L]$ є неперервною і при малих значеннях параметра $\varepsilon \in (0; \varepsilon_2]$ $(0 < \varepsilon_2 \le \varepsilon_1 \le \varepsilon_0)$ неособливою, то існує число $c_5 > 0$, яке не залежить від параметра ε і таке, що $\|U_m(t,\varepsilon)\| \le c_5$.

Тому для шуканого вектор-розв'язку $x(t,\varepsilon)$ системи диференціальних рівнянь (39) вірною є асимптотична формула:

$$x(t,\varepsilon) = U_m(t,\varepsilon) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon} \int_\delta^t \Lambda_m(t_1,\varepsilon) dt_1 \right) y_\delta + O(\varepsilon^m), \quad (53)$$

де $y_\delta = U_m^{-1}(\delta,\varepsilon) x_\delta$, x_δ знаходиться із формули (38) при $t = \delta$.

Підсумовуючи, можна сформулювати теорему.

Теорема 6. *Якщо виконуються умови* 1°–5° *п. 3, то для вектор-розв'язку* $x(t,\varepsilon)$ *системи диференціальних рівнянь (39) в області* $t \in [\delta; L]$, $0 < \varepsilon \le \varepsilon_2$ $(0 < \varepsilon_2 \le \varepsilon_1 \le \varepsilon_0)$ *вірною є асимптотична (за параметром* ε*) формула (53).*

Зробимо наступні зауваження.

Зауваження 2. *Якщо в системі диференціальних рівнянь (26) довизначена неперервна матриця* $C(t)$ *в точці* $t = 0$ *має* $m+1$ $(m \geq 1)$ *неперервну похідну, то в п. 4 замість відрізка* $[\delta; L]$ *можна розглядати увесь відрізок* $[0; L]$. *І формула (53) залишається вірною і для цього випадку. Тоді потреба в дослідженні системи (26) на відрізу* $[0; \delta]$ *відпадає.*

Зауваження 3. *В п. 3 припускається виконання умови* 4°. *Однак, використовуючи метод [11], можна провести дослідження системи (39) і у тому випадку, коли серед коренів характеристичного рівняння з'являються кратні.*

Зауваження 4. *Оскільки число* $\alpha > 1$ *– довільне, то для рівномірної за параметром* ε *асимптотики на всьому відрізку* $[0; L]$ *досить в формулі (38) покласти* $\alpha = m + 1$.

4. Нелінійні системи. Асимптотика в околі особливої точки

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon E(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)x + \varepsilon f(t,x,\varepsilon), x(0,\varepsilon) = x_0, \tag{54}$$

де $E(t)$ – діагональна матриця

$$E(t) = diag\left(\underbrace{1,...,1,}_{n} t^{p_1},...,t^{p_2}\right), \tag{55}$$

$A(t,\varepsilon)$ – $(n \times n)$-матриця, $f(t,x,\varepsilon)$ – n-вимірний вектор, які відповідно в областях $D(0 \leq t \leq L; 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0)$, $T(0 \leq t \leq L; \|x\| \leq 0, 0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0)$ задовольняють умовам:

6°. Вони є неперервними і для вектора f за змінною x виконується умова Ліпшица;

7°. Існують скінченні границі:

$$\lim_{\substack{t\to 0\\(t>0)}} (E^{-1}(t)f(t,x(t),\varepsilon)) = b(\varepsilon) \neq 0, \tag{56}$$

де $E^{-1}(t)$ – обернена матриця до $E(t)$ (при $t > 0$ $E^{-1}(t)$ існує), O – нульова – $(n \times n)$ матриця, 0 – нульовий n-вимірний вектор.

8°. Характеристичні числа матриці $K(\varepsilon)$ прості їх дійсні частини недодатні. Зауважимо, що умова 1° забезпечує існування та єдиність неперервного розв'язку $x = x(t,\varepsilon)$ задачі (54).

4.1. Асимптотика на відрізку $0 \leq t \leq \delta$. Систему (5) можна записати у вигляді

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = B(t,\varepsilon)x + \varepsilon f_1(t,x,\varepsilon), \tag{57}$$

де $B_1(t,\varepsilon) = E^{-1}(t)A(t,\varepsilon)$, $f_1(t,x,\varepsilon) = E^{-1}(t)f(t,x,\varepsilon)$. (58) Матрицю $B(t,\varepsilon)$ і вектор $f_1(t,x,\varepsilon)$ згідно 6°, 7° в точці $t = 0$ можна довизначити за принципом неперервності ввівши матрицю $C(t,\varepsilon)$ і вектор $f_2(t,x,\varepsilon)$:

$$C(t,\varepsilon) = \begin{cases} B(t,\varepsilon), & t \in (0;L], \\ K(\varepsilon), & t = 0, \end{cases}$$

$$f_2(t,x,\varepsilon) = \begin{cases} f_1(t,x,\varepsilon), & t \in (0;L], \\ h(\varepsilon), & t = 0 \end{cases} \tag{59}$$

Надалі розглядатимемо довизначену систему

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = C(t,\varepsilon)x + \varepsilon f_2(t,x,\varepsilon), x(0) = x_0, \tag{60}$$

у якій матриця $C(t,\varepsilon)$ і вектор $f_2(t,x,\varepsilon)$ є неперервними відповідно в областях D і T. Систему (60) запишемо у вигляді:

$$\varepsilon\frac{dx}{dt} = K(\varepsilon)x + \varepsilon h(\varepsilon) + \tilde{C}(t,\varepsilon)x + \varepsilon f_2(t,x,\varepsilon), \tag{61}$$

де

$$\tilde{C}(t,\varepsilon) = C(t,\varepsilon) - K(\varepsilon), \tilde{f}_2(t,x,\varepsilon) = f_2(t,x,\varepsilon) - h(\varepsilon). \tag{62}$$

Згідно умови 6° існує окіл точки $t = 0$, $0 \le t \le \delta$ (цим самим визначено число $0 < \delta \le \delta(\varepsilon) \le L$) такий, що $\forall\, t \in [0;\delta]$ і $\forall\, \varepsilon \in (0;\varepsilon_0)$ справедливими є нерівності

$$\left\|\tilde{C}(t,\varepsilon)\right\| \le \varepsilon^\alpha b_1, \left\|\tilde{f}_2(t,x,\varepsilon)\right\| \le \varepsilon^\alpha b_2, \tag{63}$$

де $\alpha > 1$ – довільне дійсне число, $b_1 > 0$, $b_2 > 0$ – дійсні числа, які не залежать від ε. Далі застосовуємо відомий метод зведення диференціальної системи рівнянь до інтегральної системи. З цією метою застосуємо підстановку

$$x = Xy, \tag{64}$$

де $X = X(t,\varepsilon)$ – розв'язок початкової задачі $X(0,\varepsilon) = E$ (E – одинична матриця), для матричного рівняння

$$\varepsilon\frac{dX}{dt} = K(\varepsilon)X. \tag{65}$$

Рівняння (65) має нормальну фундаментальну систему розв'язків

$$X = \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}K(\varepsilon)t\right). \tag{66}$$

Тоді підстановка (64) зводить систему диференціальних рівнянь (61) до системи інтегральних рівнянь

$$y(t) = y(0) + \int\limits_0^t \exp\left(-K(\varepsilon)\frac{t_1}{\varepsilon}\right)dt_1 h(\varepsilon) +$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \exp\left(-K(\varepsilon)\frac{t_1}{\varepsilon}\right)\tilde{C}(t_1,\varepsilon)\exp\left(K(\varepsilon)\frac{t_1}{\varepsilon}\right)y(t_1)dt_1+$$

$$+\int\limits_0^t \exp\left(-K(\varepsilon)\frac{t_1}{\varepsilon}\right)\tilde{f}_2\left(t_1,\exp\left(K(\varepsilon)\frac{t_1}{\varepsilon}\right)y(t_1),\varepsilon\right)dt_1. \tag{67}$$

Застосовуючи до інтегрального рівняння (67) метод послідовних наближень [11] можна довести, що при виконанні умови 6° рівняння (67) на відрізку $[0;\delta_1]$ $(0<\delta_1\le\delta)$ має єдиний неперервний обмежений розв'язок $y=y(t)$, який при $t=0$ дорівнює x_0.

Тоді, помноживши обидві частини рівняння (67) на матрицю (66), отримуємо

$$x(t)=\exp\left(K(\varepsilon)\frac{t}{\varepsilon}\right)x_0+\int\limits_0^t \exp\left(K(\varepsilon)\frac{t-t_1}{\varepsilon}\right)dt_1h(\varepsilon)+$$

$$+\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \exp\left(K(\varepsilon)\frac{t-t_1}{\varepsilon}\right)\tilde{C}(t_1,\varepsilon)x(t_1)dt_1+$$

$$+\int\limits_0^t \exp\left(K(\varepsilon)\frac{t-t_1}{\varepsilon}\right)f_2\left(t_1,x(t_1),\varepsilon\right)dt_1. \tag{68}$$

Надалі скористаємося умовою 8° та нерівностями (63). Тоді можна стверджувати, що існують числа $c_1>0$, $c_2>0$, які не залежать від ε і такі, що оцінки:

$$\left\|\exp\left(K(\varepsilon)\frac{t-t_1}{\varepsilon}\right)\tilde{C}(t_1,\varepsilon)x(t_1)\right\|\le\varepsilon^{\alpha-1}c_1,$$

$$\left\|\exp\left(K(\varepsilon)\frac{t-t_1}{\varepsilon}\right)\tilde{f}_2(t_1,x(t_1),\varepsilon)\right\|\le\varepsilon^{\alpha}c_2. \tag{69}$$

Отже, з інтегрального рівняння (68) та нерівностей (69) випливає асимптотична за параметром ε формула:

$$x(t)=\exp\left(K(\varepsilon)\frac{t}{\varepsilon}\right)x_0+\int\limits_0^t \exp\left(K(\varepsilon)\frac{t-t_1}{\varepsilon}\right)dt_1h(\varepsilon)+O(\varepsilon^{\alpha-1}). \tag{70}$$

Отриманий результат сформулюємо у вигляді теореми.

Теорема 7. *Якщо для задачі Коші (54) виконуються умови* 6°–8°, *то для розв'язку* $x(t)$ *цієї задачі для* $\forall\, t\in[0;\delta_1]$ $(\delta_1\le\delta\le L)$ *і* $\forall\,\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$ *вірною є формула (70).*

Література

[1] *Фещенко С.Ф., Шкиль Н.И., Николенко Л.Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений. – Киев: Наук. думка, 1966. – 252 с.

[2] *Крылов Н.М., Боголюбов Н.Н.* Введение в нелинейную механику. – К., Изд-во АН УССР, 1937. – 363 с.

[3] *Шкиль Н.И.* Об асимптотических методах в теории линейных дифференциальных уравнений и их применении. – Киев: КСУ, 1996. – Ч. 1. – 198 с.; 1997. – Ч. 2. – 226 с.

[4] *Моисеев Н.Н.* Асимптотическое представление решения линейных дифференциальных уравнений в случае кратных элементарных деталей // Докл. АН СССР. – 1996. – 170, №4. – С. 37-43.

[5] *Turritin H.L.* Asymptotic expansions of solutions of systems of ordinary lineary, differential equations containing a parameter. // Mathematica. – 1957. – 1, №2. – P. 29-59.

[6] *Шкиль Н.И., Старун И.И., Яковец В.П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями. – Киев: Выща шк., 1991. – 207 с.

[7] *Шкіль М.І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях. – Київ: Вища шк., 1971. – 225 с.

[8] *Вазов В.* Асимптотические разложение решений обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Мир, 1968. – 464 с.

[9] *Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями. – Київ: Вища шк., 2000. – 294 с.

[10] *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.: Иност. лит., 1954. – 215 с.

[11] *Хейл Дж.* Колебания в нелинейных системах. – М.: Мир, 1966. – 300 с.