Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2012, № 13(1).— С. 141–150.

УДК 519.21

Про розподіл одного класу випадкових величин, зображених двійковим дробом з двома надлишковими незалежними цифрами 2 і 3

М. В. Працьовитий

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

О. П. Макарчук

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

Анотація. В роботі узагальнений результат розв'язання проблеми типу розподілу випадкової величин ξ, зображеної двійковим дробом з двома надлишковими цифрами, які мають однаковий розподіл, за умови $p_0 - p_1 + p_2 - p_3 = 0$.

Ключові слова: випадкові величини, зображені двійковим дробом з двома надлишковими цифрами, сингулярно та абсолютно неперервні ймовірнісні міри.

Distribution of random variables, depicted binary fraction with two redundant digits 2 and 3

M. Pratsiovytyi,

National Pedagogical Dragomanov University, Institute for Mathematics of NASU

O. Makarchyk,

National Pedagogical Dragomanov University

Abstract. We generalized the result of unresolved issues such as distribution of random variables ξ, depicted binary fraction with two redundant digits, which have a uniform distribution, if $p_0 - p_1 + p_2 - p_3 = 0$.

AMS Subject Classifications (2010): 28A80, 60G30.

Key words: random variables, depicted binary fraction with two redundant digits, singularly continuous probability measures and absolutely continuous probability measures.

1. Вступ

Нехай ξ_k послідовність незалежних випадкових величин , які набувають значень 0,1,2,3 з ймовірностями $p_{0k}, p_{1k}, p_{2k}, p_{3k}$ відповідно. Випадкова величина

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k 2^{-k}$$

називається випадковою величиною, зображеною двійковим дробом з двома надлишковими цифрами.

За теоремою Джессена–Вінтнера [**8**] випадкова величина ξ має чистий розподіл, тобто чисто дискретний, або чисто абсолютно неперервний, або чисто сингулярний.

За теоремою П. Леві [**9**] випадкова величина ξ має чисто дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_{0 \le i \le 3} \{p_{ik}\} > 0$$

Проблема типу розподілу випадкової величини ξ розглядалася в роботі [**3**], де були знайдені деякі достатні умови сингулярності та абсолютної неперервності розподілу випадкової величини ξ, а саме: якщо $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_{0 \le i \le 3}\{p_{ik}\} = 0$ та порушується умова $\lim\limits_{k\to\infty} d_k g_{k+1} = 0$, де $d_k = (p_{0k} - p_{1k} + p_{2k} - p_{3k})^2$, $g_{k+1} = (p_{0(k+1)} - p_{2(k+1)})^2 + (p_{1(k+1)} - p_{3(k+1)})^2$, то випадкова величина ξ має чистий сингулярний розподіл, якщо ж принаймні один з рядів, $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(p_{0k} + p_{2k} - \frac{1}{2})^2$ (при умові, що починаючи, з деякого номера $k = k_0$ виконується нерівність $\frac{p_{2k}}{p_{0k}} \ge \frac{p_{3k}}{p_{1k}}$), $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\sqrt{p_{0k}} - \sqrt{p_{2k}})^2 + (\sqrt{p_{1k}} - \sqrt{p_{3k}})^2$, або $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(1 - 2\sqrt{p_{0k}p_{3k}})$ збіжний, то розподіл випадкової величини ξ абсолютно неперервний.

Задача про тип розподілу випадкової величини ξ, за умови $p_{ik} = p_i, \forall k \in N, i \in \{0, 1, 2, 3\}$, розглядалася в роботі [**4**].

Теорема 1. [**4**] *Випадкова величина ξ має чистий розподіл, причому*
1)дискретний $\Leftrightarrow p_{\max} = \max\limits_{0 \le i \le 3} p_i = 1$;

$$2)\begin{cases} \max\limits_{0 \le i \le 3} p_i \ne 1; \\ p_0 - p_1 + p_2 - p_3 \ne 0; & \Rightarrow \textit{сингулярний} \\ (p_0 - p_2)^2 + (p_1 - p_3)^2 \ne 0. \end{cases}$$

3) $(p_0 - p_2)^2 + (p_1 - p_3)^2 = 0 \Rightarrow$ *абсолютно неперервний.*

2. Умова абсолютної неперервності одного класу випадкових величин, зображених двійковим дробом з двома надлишковими цифрами

Означення 1. Нехай n – натуральне число, m – невід'ємне число, яке не перевищує $3\cdot(2^n-1)$, $||\alpha_{ij}||$ – матриця розмірності $k\times n$ (з максимально можливим k), елементами якої є цифри алфавіту $A=\{0,1,2,3\}$, причому для кожного $i\in\{1,...,k\}$ виконується умова:

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\alpha_{ij}}{2^j}=\frac{m}{2^n}.$$

Для стохастичній матриці $||\bar{p}||=(p_{0k},p_{1k},p_{2k},p_{3k})$ розміру $4\times s,(s\geq n)$, $k\in\{1,...,s\}$ означимо величину(число)

$$S_{m,n}^{||\bar{p}||}=\sum_{i=1}^{k}\prod_{j=1}^{n}p_{\alpha_{ij}j},$$

яку називатимемо сумою всеможливих добутків (СВД).

Покладемо $S_{-1,n}^{||\bar{p}||}=0=S_{-2,n}^{||\bar{p}||}$ для кожного натурального n.

Лема 1. *Нехай* $||(q_{0r},q_{1r},q_{2r},q_{3r})||$ *довільна стохастична матриця* $4\times n, r\in\{1,...,n\}$, $\sum\limits_{i=0}^{3(2^n-1)}a_iz^i$ *— канонічний розклад многочлена*

$$h(z)=\prod_{i=1}^{n}(q_{0(n-i+1)}+q_{1(n-i+1)}z^{2^{i-1}}+q_{2(n-i+1)}z^{2\cdot2^{i-1}}+q_{3(n-i+1)}z^{3\cdot2^{i-1}}).$$

тоді

$$a_j\leq\prod_{i=1}^{n}\max\{q_{0i}+q_{2i};q_{1i}+q_{3i}\},\forall n\in N,\forall j\in\{0,1,...,3\cdot(2^n-1)\}$$

Доведення. Доведення проведемо за індукцією по n.

При $n=1$ $a_j=q_j\leq\max\{q_{01}+q_{21};q_{11}+q_{31}\}$, $i\in\{0,1,2,3\}$.

Нехай твердження правильне при $n=k$, тоді

$a_l\leq\prod\limits_{i=1}^{k}\max\{q_{0i}+q_{2i};q_{1i}+q_{3i}\},\forall l\in\{0,1,...,3\cdot(2^k-1)\}$, де

$h(z)=\prod\limits_{i=1}^{k}(q_{0(k-i+1)}+q_{1(k-i+1)}z^{2^{i-1}}+q_{2(k-i+1)}z^{2\cdot2^{i-1}}+q_{3(k-i+1)}z^{3\cdot2^{i-1}})=\sum\limits_{i=0}^{3(2^k-1)}a_iz^i.$

Доведемо, що твердження правильне при $n=k+1$, тобто

$b_l\leq\prod\limits_{i=1}^{k+1}\max\{q_{0i}+q_{2i};q_{1i}+q_{3i}\},\forall l\in\{0,1,...,3\cdot(2^{k+1}-1)\}$, де

$h^*(z)=\prod\limits_{i=1}^{k+1}(q_{0(k-i+2)}+q_{1(k-i+2)}z^{2^{i-1}}+q_{2(k-i+2)}z^{2\cdot2^{i-1}}+q_{3(k-i+2)}z^{3\cdot2^{i-1}})=\sum\limits_{i=0}^{3(2^{k+1}-1)}b_iz^i.$

Оскільки $h^*(z)=(q_{0(k+1)}+q_{1(k+1)}z+q_{2(k+1)}z^2+q_{3(k+1)}z^3)h(z^2)$, то

$$\sum_{i=0}^{3(2^{k+1}-1)}b_iz^i=(q_{0(k+1)}+q_{1(k+1)}z+q_{2(k+1)}z^2+q_{3(k+1)}z^3)\sum_{i=0}^{3(2^k-1)}a_iz^{2i}$$

Маємо:

$$b_0=q_{0(k+1)}a_0$$

$$b_1=q_{1(k+1)}a_0$$

$$b_{2m}=q_{0(k+1)}a_m+q_{2(k+1)}a_{m-2},m\in\{1,2,...,3\cdot2^{k+1}-3\}$$

$$b_{2r+1} = q_{1(k+1)}a_r + q_{3(k+1)}a_{r-2}, r \in \{1, 2, ..., 3 \cdot 2^{k+1} - 3)\}$$

$$b_{3(2^{k+2}-1)-1} = q_{2(k+1)}a_{3(2^{k+1}-1)-1}$$

$$b_{3(2^{k+2}-1)} = q_{3(k+1)}a_{3(2^{k+1}-1)}$$

Отже, отримаємо:

$$b_0 = q_{0(k+1)}a_0 \leq q_{0(k+1)} \prod_{i=1}^{k} \max\{q_{0i} + q_{2i}; q_{1i} + q_{3i}\} \leq$$
$$\leq \max\{q_{0(k+1)} + q_{2(k+1)}; q_{1(k+1)} + q_{3(k+1)}\} \prod_{i=1}^{k} \max\{q_{0i} + q_{2i}; q_{1i} + q_{3i}\} =$$
$$= \prod_{i=1}^{k+1} \max\{q_{0i} + q_{2i}; q_{1i} + q_{3i}\}$$

$$b_1 = q_{1(k+1)}a_0 \leq q_{1(k+1)} \prod_{i=1}^{k} \max\{q_{0i} + q_{2i}; q_{1i} + q_{3i}\} \leq$$
$$\leq \max\{q_{0(k+1)} + q_{2(k+1)}; q_{1(k+1)} + q_{3(k+1)}\} \prod_{i=1}^{k} \max\{q_{0i} + q_{2i}; q_{1i} + q_{3i}\} =$$
$$= \prod_{i=1}^{k+1} \max\{q_{0i} + q_{2i}; q_{1i} + q_{3i}\}$$

$$b_{2m} = q_{0(k+1)}a_m + q_{2(k+1)}a_{m-2} \leq$$
$$\leq q_{0(k+1)} \prod_{i=1}^{k} \max\{q_{0i} + q_{2i}; q_{1i} + q_{3i}\} + q_{2(k+1)} \prod_{i=1}^{k} \max\{q_{0i} + q_{2i}; q_{1i} + q_{3i}\} =$$
$$= (q_{0(k+1)} + q_{2(k+1)}) \prod_{i=1}^{k} \max\{q_{0i} + q_{2i}; q_{1i} + q_{3i}\} \leq$$
$$\leq \max\{q_{0(k+1)} + q_{2(k+1)}; q_{1(k+1)} + q_{3(k+1)}\} \prod_{i=1}^{k} \max\{q_{0i} + q_{2i}; q_{1i} + q_{3i}\} =$$
$$= \prod_{i=1}^{k+1} \max\{q_{0i} + q_{2i}; q_{1i} + q_{3i}\}, \forall m \in \{1, 2, ..., 3 \cdot 2^{k+1} - 3\}$$

$$b_{2r+1} = q_{1(k+1)}a_r + q_{3(k+1)}a_{r-2} \leq$$
$$\leq q_{1(k+1)} \prod_{i=1}^{k} \max\{q_{0i} + q_{2i}; q_{1i} + q_{3i}\} + q_{3(k+1)} \prod_{i=1}^{k} \max\{q_{0i} + q_{2i}; q_{1i} + q_{3i}\} =$$
$$= (q_{1(k+1)} + q_{3(k+1)}) \prod_{i=1}^{k} \max\{q_{0i} + q_{2i}; q_{1i} + q_{3i}\} \leq$$
$$\leq \max\{q_{0(k+1)} + q_{2(k+1)}; q_{1(k+1)} + q_{3(k+1)}\} \prod_{i=1}^{k} \max\{q_{0i} + q_{2i}; q_{1i} + q_{3i}\} =$$
$$= \prod_{i=1}^{k+1} \max\{q_{0i} + q_{2i}; q_{1i} + q_{3i}\}, \forall r \in \{1, 2, ..., 3 \cdot 2^{k+1} - 3)\}$$

$$b_{3(2^{k+2}-1)-1} = q_{2(k+1)}a_{3(2^{k+1}-1)-1} \leq q_{2(k+1)} \prod_{i=1}^{k} \max\{q_{0i} + q_{2i}; q_{1i} + q_{3i}\} \leq$$
$$\leq \max\{q_{0(k+1)} + q_{2(k+1)}; q_{1(k+1)} + q_{3(k+1)}\} \prod_{i=1}^{k} \max\{q_{0i} + q_{2i}; q_{1i} + q_{3i}\} =$$
$$= \prod_{i=1}^{k+1} \max\{q_{0i} + q_{2i}; q_{1i} + q_{3i}\}$$

$$b_{3(2^{k+2}-1)} = q_{3(k+1)}a_{3(2^{k+1}-1)} \leq q_{3(k+1)}\prod_{i=1}^{k}\max\{q_{0i}+q_{2i};q_{1i}+q_{3i}\} \leq$$
$$\leq \max\{q_{0(k+1)}+q_{2(k+1)};q_{1(k+1)}+q_{3(k+1)}\}\prod_{i=1}^{k}\max\{q_{0i}+q_{2i};q_{1i}+q_{3i}\} =$$
$$= \prod_{i=1}^{k+1}\max\{q_{0i}+q_{2i};q_{1i}+q_{3i}\}$$

Лему доведено. □

Лема 2. *Якщо для нескінченної стохастичної матриці* $||(p_{0k},p_{1k},p_{2k},p_{3k})||$, *(*$k\in N$*) виконується умова*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\max\{p_{0k}+p_{2k};p_{1k}+p_{3k}\}-\frac{1}{2})<\infty,$$

то існує число L, *таке що*

$$S_{m,n}^{||\bar{p}||} \leq \frac{L}{2^n}, \forall n\in N, \forall m\in\{0,1,...,3\cdot(2^n-1)\}$$

Доведення. Розглянемо вираз

$$g(z)=\prod_{i=1}^{n}(p_{0n}+p_{1n}z^{\frac{1}{2^i}}+p_{2n}z^{\frac{2\cdot 1}{2^i}}+p_{3n}z^{\frac{3\cdot 1}{2^i}})$$

Нехай $g(z)=\sum\limits_{i=0}^{3(2^n-1)}a_iz^{\frac{i}{2^n}}$. Якщо в k-ому ($k\in\{1,...,n\}$) множнику добутку $\prod\limits_{i=1}^{n}(p_{0n}+p_{1n}z^{\frac{1}{2^i}}+p_{2n}z^{\frac{2\cdot 1}{2^i}}+p_{3n}z^{\frac{3\cdot 1}{2^i}})$ взяти член $p_{i_kk}z^{\frac{i_k}{2^k}}$, де $i_{k-1}\in\{0,1,2,3\},\forall k\in\{1,...,n\}$ і всі ці члени перемножити отримаємо вираз $z^r\prod\limits_{k=1}^{n}p_{i_kk}$, де $r=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{i_k}{2^k}$, тобто $a_{2^n\cdot r}=$
$=\sum\prod\limits_{k=1}^{n}p_{\alpha_{i_{k-1}}}$, де сума береться по все можливим наборам $(i_1;i_2;...;i_n)$ для яких $r=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{i_k}{2^k}$.

Отже,

$$a_{2^n\cdot r}=S_{2^n\cdot r,n}^{||\bar{p}||}, 2^n\cdot r\in\{0,1,...,3\cdot(2^n-1)\} \tag{1}$$

Розглянемо многочлен
$h(z)=\prod\limits_{i=1}^{n}(p_{0(n-i+1)}+p_{1(n-i+1)}z^{2^{i-1}}+p_{2(n-i+1)}z^{2\cdot 2^{i-1}}+p_{3(n-i+1)}z^{3\cdot 2^{i-1}})$.

Оскільки $h(z)=g(z^{2^n})$, то враховуючи лему 1, маємо:
$a_j\leq\prod\limits_{i=1}^{n}\max\{q_{0i}+q_{2i};q_{1i}+q_{3i}\},\forall n\in N,\forall j\in\{0,1,...,3\cdot(2^n-1)\}$, тому

$$S_{m,n}^{||\bar{p}||}=a_m\leq\prod_{i=1}^{n}\max\{p_{0i}+p_{2i};p_{1i}+p_{3i}\},\forall n\in N,\forall m\in\{0,1,...,3\cdot(2^n-1)\}$$

Зрозуміло, що $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\max\{p_{0k}+p_{2k};p_{1k}+p_{3k}\}-\frac{1}{2})<\infty$ звідки

$\sum\limits_{k=1}^{\infty}(2\max\{p_{0k}+p_{2k};p_{1k}+p_{3k}\}-1)<\infty$. Оскільки $p_{0k}+p_{2k}+p_{1k}+p_{3k}=1$,

то $2\max\{p_{0k}+p_{2k};p_{1k}+p_{3k}\}\geq 2\cdot\frac{1}{2}=1$, тому

$$\sum_{k=1}^{\infty}(2\max\{p_{0k}+p_{2k};p_{1k}+p_{3k}\}-1)<\infty\Rightarrow\prod_{k=1}^{\infty}(2\max\{p_{0k}+p_{2k};p_{1k}+p_{3k}\})<\infty$$

Позначимо

$$\prod_{k=1}^{\infty}(2\max\{p_{0k}+p_{2k};p_{1k}+p_{3k}\})=L \tag{2}$$

оскільки $2\max\{p_{0k}+p_{2k};p_{1k}+p_{3k}\}\geq 1,\forall k\in N$, то

$$\prod_{i=1}^{n}2\max\{p_{0i}+p_{2i};p_{1i}+p_{3i}\}\leq\prod_{k=1}^{\infty}(2\max\{p_{0k}+p_{2k};p_{1k}+p_{3k}\})=L,$$

для кожного $n\in N$. Звідки
$2^n\prod\limits_{i=1}^{n}\max\{p_{0i}+p_{2i};p_{1i}+p_{3i}\}=\prod\limits_{i=1}^{n}2\max\{p_{0i}+p_{2i};p_{1i}+p_{3i}\}\leq L,\forall n\in N$,

$$\prod_{i=1}^{n}\max\{p_{0i}+p_{2i};p_{1i}+p_{3i}\}\leq\frac{L}{2^n},\forall n\in N.$$

Враховуючи нерівність (1) отримаємо:

$$S_{m,n}^{||\bar{p}||}\leq\frac{L}{2^n},\forall n\in N,\forall m\in\{0,1,...,3\cdot(2^n-1)\}.$$

□

Лема 3. *Якщо розподіл випакдової величини ξ неперервний, то для кожного натурального n і довільного $m\in\{0,1,...,3\cdot(2^n-1)\}$, виконується рівність*

$$P\{\xi\in\left[\tfrac{m}{2^n};\tfrac{m+1}{2^n}\right]\}=P\{\xi_n^{**}\in[0;1]\}S_{m,n}^{||\bar{p}||}+P\{\xi_n^{**}\in[1;2]\}S_{m-1,n}^{||\bar{p}||}+$$
$$+P\{\xi_n^{**}\in[2;3]\}S_{m-2,n}^{||\bar{p}||}$$

де $\xi_n^{**}=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{\xi_{n+j}}{2^j}$.

Доведення. Зрозуміло, що з неперервності розподілу випадкової величини ξ випливає неперервність розподілу ξ_n^{**}.

Нехай $\Delta^2_{0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n\alpha_{n+1}...}\in\left[\frac{m}{2^n};\frac{m+1}{2^n}\right]$, оскільки $\Delta_{0,00...0\alpha_{n+1},\alpha_{n+2}...}\in\left[0;\frac{3}{2^n}\right]$ то можливі наступні випадки:

1) $\Delta^2_{0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n(0)}=\frac{m}{2^n}$ та $\Delta^2_{0,00...0\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}...}\in\left[0;\frac{1}{2^n}\right]$
2) $\Delta^2_{0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n(0)}=\frac{m}{2^n}-\frac{1}{2^n}$ та $\Delta^2_{0,00...0\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}...}\in\left[\frac{1}{2^n};\frac{2}{2^n}\right]$
3) $\Delta^2_{0,\alpha_1\alpha_2...\alpha_n(0)}=\frac{m}{2^n}-\frac{2}{2^n}$ та $\Delta^2_{0,00...0\alpha_{n+1}\alpha_{n+2}...}\in\left[\frac{2}{2^n};\frac{3}{2^n}\right]$

Оскільки $P\{\frac{r}{2^n} \leq \sum\limits_{i=n+1}^{\infty} \frac{\xi_i}{2^i} \leq \frac{r+1}{2^n}\} = P\{r \leq \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{\xi_{n+j}}{2^j} \leq r+1\} =$
$= P\{r \leq \xi_n^{**} \leq r+1\}, r \in \{0,1,2\}$ і $P\{\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\xi^*_{n+j}}{2^j} = \frac{m-r}{2^n}\} = S^{||\bar{p}||}_{m-r,n}$, де $r \in \{0,1,2\}$, то

$$\begin{aligned}
&P\{\xi \in \left[\tfrac{m}{2^n}; \tfrac{m+1}{2^n}\right]\} = P\{\sum_{j=1}^{n} \tfrac{\xi_{n+j}}{2^j} = \tfrac{m}{2^n}\}P\{0 \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \tfrac{\xi_i}{2^i} \leq \tfrac{1}{2^n}\}+\\
&P\{\sum_{j=1}^{n} \tfrac{\xi_{n+j}}{2^j} = \tfrac{m}{2^n} - \tfrac{1}{2^n}\}P\{\tfrac{1}{2^n} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \tfrac{\xi_i}{2^i} \leq \tfrac{2}{2^n}\}+\\
&+P\{\sum_{j=1}^{n} \tfrac{\xi_{n+j}}{2^j} = \tfrac{m}{2^n} - \tfrac{2}{2^n}\}P\{\tfrac{2}{2^n} \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \tfrac{\xi_i}{2^i} \leq \tfrac{3}{2^n}\} =\\
&= P\{\sum_{j=1}^{n} \tfrac{\xi_{n+j}}{2^j} = \tfrac{m}{2^n}\}P\{\xi_n^{**} \in [0;1]\} + P\{\sum_{j=1}^{n} \tfrac{\xi_{n+j}}{2^j} = \tfrac{m-1}{2^n}\}P\{\xi \in [1;2]\}+\\
&+P\{\sum_{j=1}^{n} \tfrac{\xi_{n+j}}{2^j} = \tfrac{m-2}{2^n}\}P\{\xi_n^{**} \in [2;3]\} = P\{\xi_n^{**} \in [0;1]\} \cdot S^{||\bar{p}||}_{m,n}+\\
&+P\{\xi_n^{**} \in [1;2]\} \cdot S^{||\bar{p}||}_{m-1,n} + P\{\xi_n^{**} \in [2;3]\} \cdot S^{||\bar{p}||}_{m-2,n}.
\end{aligned}$$

□

Лема 4. *Якщо* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(2\max\{p_{0k}+p_{2k}; p_{1k}+p_{3k}\}-1) < \infty$, *то*

$$F_\xi(\frac{m}{2^n}) - F_\xi(\frac{r}{2^n}) \leq L(\frac{m}{2^n} - \frac{r}{2^n}), \forall m, r \in \{0,1,...,3\cdot 2^n - 2\}, m \geq r$$

де константа L *визначається рівністю* (2).

Доведення. Оскільки $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\max\{p_{0k}+p_{2k}; p_{1k}+p_{3k}\} - \frac{1}{2}) < \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \max\{p_{0k}+p_{2k}; p_{1k}+p_{3k}\} = \frac{1}{2}$, звідки випливає що умова $\lim\limits_{n\to\infty} \max\limits_{0\leq i\leq 3}\{p_{ik}\} =$
$= 1$ не виконується, тому $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_{0\leq i\leq 3}\{p_{ik}\} = 0$ і за теоремою Леві розподіл ξ неперервний.

Враховуючи лему 2 та 3 отримаємо:

$$\begin{aligned}
&(F_\xi(\tfrac{t+1}{2^n}) - F_\xi(\tfrac{t}{2^n})) = P\{\xi \in \left[\tfrac{t}{2^n}; \tfrac{t+1}{2^n}\right]\} \leq \tfrac{L}{2^n}P\{\xi_n^{**} \in [0;1]\}+\\
&+\tfrac{L}{2^n}P\{\xi_n^{**} \in [1;2]\} + \tfrac{L}{2^n}P\{\xi_n^{**} \in [2;3]\} = \tfrac{L}{2^n}P\{\xi_n^{**} \in [0;3]\} = \tfrac{L}{2^n}.
\end{aligned}$$

Отже, $\forall t \in \{0,1,...,3\cdot(2^n-1)\} \forall n \in N$ виконується нерівність

$$F_\xi(\frac{t+1}{2^n}) - F_\xi(\frac{t}{2^n}) \leq \frac{L}{2^n}.$$

Нехай $m, r \in \{0,1,...,3\cdot 2^n - 2\}$. Якщо $m > r$ то, враховуючи останню нерівність маємо:

$$(F_\xi(\tfrac{m}{2^n}) - F_\xi(\tfrac{r}{2^n})) = \sum_{i=0}^{m-r-1}(F_\xi(\tfrac{m-i}{2^n}) - F_\xi(\tfrac{m-i-1}{2^n})) \leq L(\tfrac{m-r}{2^n})$$

тобто, $F_\xi(\frac{m}{2^n}) - F_\xi(\frac{r}{2^n}) \leq L(\frac{m}{2^n} - \frac{r}{2^n})$. Якщо $m = r$, то $F_\xi(\frac{m}{2^n}) - F_\xi(\frac{r}{2^n}) = L(\frac{m}{2^n} - \frac{r}{2^n})$.

Отже, $F_\xi(\frac{m}{2^n}) - F_\xi(\frac{r}{2^n}) \leq L(\frac{m}{2^n} - \frac{r}{2^n}) \forall m, r \in \{0,1,...,3\cdot 2^n - 2\}, m \geq r$.

Лему доведено. □

Лема 5. *Для довільного* $x \in R$ *виконується рівність*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[2^n x]}{2^n} = x.$$

Доведення. Оскільки $\forall t \in R : t-1 < [t] \le t$, то

$$x - \frac{1}{2^n} = \frac{2^n x - 1}{2^n} < \frac{[2^n x]}{2^n} \le \frac{2^n x}{2^n} = x$$

причому $\lim\limits_{n\to\infty}(x - \frac{1}{2^n}) = x = \lim\limits_{n\to\infty} x$, тому $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[2^n x]}{2^n} = x$.

Лему доведено. □

Теорема 2. *Якщо* $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\max\{p_{0k}+p_{2k};p_{1k}+p_{3k}\} - \frac{1}{2}) < \infty$, *то розподіл випадкової величини* ξ *абсолютно неперервний.*

Доведення. Нехай $x_2, x_1 \in [0;3), x_2 \ge x_1$, враховуючи лему 5, маємо: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[2^n x_2]}{3\cdot 2^n - 2} = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{[2^n x_2]}{2^n}]}{3-\frac{2}{2^n}} = \frac{x_2}{3} < 1$. Нехай $\varepsilon = 1 - \frac{x_2}{3} > 0$, тоді існує $N_0 \in N : \forall n \in N, n > N_0 : \frac{[2^n x_2]}{3\cdot 2^n - 1} = \frac{x_2}{3} + \varepsilon < 1$, тобто $[2^n x_2] < 3\cdot 2^n - 2, \forall n \in N, n > N_0$. Зрозуміло, що $[2^n x_2] \ge [2^n x_1], \forall n \in N$, тому $[2^n x_1], [2^n x_2] \in \{0,1,...,3\cdot 2^n - 1\}, \forall n \in N, n > N_0$, за лемою 5

$$F_\xi(\frac{[2^n x_2]}{2^n}) - F_\xi(\frac{[2^n x_1]}{2^n}) \le L(\frac{[2^n x_2]}{2^n} - \frac{[2^n x_1]}{2^n}), \forall n \in N, n > N_0 \quad (3)$$

За лемою 5

$$\lim_{n\to\infty}\frac{[2^n x_1]}{2^n} = x_1, \lim_{n\to\infty}\frac{[2^n x_2]}{2^n} = x_2,$$

Оскільки функція $F_\xi(x)$ неперервна, то маємо:

$$\lim_{n\to\infty} F_\xi(\frac{[2^n x_1]}{2^n}) = F_\xi(\lim_{n\to\infty}\frac{[2^n x_1]}{2^n}) = F_\xi(x_1) \quad (4)$$

$$\lim_{n\to\infty} F_\xi(\frac{[2^n x_2]}{2^n}) = F_\xi(\lim_{n\to\infty}\frac{[2^n x_2]}{2^n}) = F_\xi(x_2) \quad (5)$$

Перейшовши в нерівності (3) до граничного переходу $n \to \infty$, враховуючи рівності (4) та (5) отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty} F_\xi(\frac{[2^n x_2]}{2^n}) - \lim_{n\to\infty} F_\xi(\frac{[2^n x_1]}{2^n}) \le L(\lim_{n\to\infty}\frac{[2^n x_2]}{2^n} - \lim_{n\to\infty}\frac{[2^n x_1]}{2^n})$$

$$F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1) \le L(x_2 - x_1), \forall x_2, x_1 \in [0;3), x_2 \ge x_1 \quad (6)$$

Покажемо, що $F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1) \le L(x_2 - x_1), \forall x_2, x_1 \in [0;3], x_2 \ge x_1$ для цього достатньо показати, що $F_\xi(3) - F_\xi(x_1) \le L(3 - x_1), \forall x_1 \in [0;3]$. Оскільки остання нерівність при $x_1 = 3$ виконується, розглянемо випадок $x_1 \in [0;3)$. Розглянемо послідовність $a_n = 3 - \frac{1}{n}$. Оскільки $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}(3 - \frac{1}{n}) = 3$, тоді для $\varepsilon = 3 - x_1 > 0$

існує $N_1 \in N : \forall n \in N, n > N_1 : a_n > 3 - \varepsilon = x_1$, але $a_n = 3 - \frac{1}{n} < 3, \forall n \in N$, тому скориставшись нерівністю (6) отримаємо:

$$F_\xi(3 - \frac{1}{n}) - F_\xi(x_1) \leq L(3 - \frac{1}{n} - x_1), \forall n \in N, n > N_1$$

Перейшовши в останній нерівності до граничного переходу $n \to \infty$, враховуючи що $\lim_{n\to\infty} F_\xi(3 - \frac{1}{n}) = F_\xi(\lim_{n\to\infty}(3 - \frac{1}{n})) = F_\xi(3)$ отримаємо:

$$F_\xi(3) - F_\xi(x_1) \leq L(3 - x_1)$$

Отже,

$$F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1) \leq L(x_2 - x_1), \forall x_2, x_1 \in [0;3], x_2 \geq x_1,$$

Функція $F_\xi(x)$ не спадна, тому останню нерівність можна переписати, у вигляді:

$$|F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1)| \leq L|x_2 - x_1|, \forall x_1, x_2 \in [0;3]$$

Отже, $F_\xi(x)$ задовольняє умову Ліпшиця на проміжку $[0;3]$.

Оскільки при $x \leq 0$: $F_\xi(x) = 0$, при $x \geq 3$:$F_\xi(x) = 1$, на проміжку $[0;3]$ $F_\xi(x)$ задовольняє умову Ліпшиця, що означає абсолютну неперервність $F_\xi(x)$ на проміжку $[0;3]$, приходимо до висновку, що $F_\xi(x)$ абсолютно неперервна функція розподілу. $\square$

Література

[1] *Гончаренко.Я.В.* Асимптотичні властивості характеристичної функції випадкової величин з незалежними двійковими цифрами та згортки сингулярних розподілів. // Наукові записки НПУ імені. Драгоманова.Фізико-математичні науки . – №3,2002.-С.376-390.

[2] *Лукач Е.* Характеристические функции.– М.: Наука, 1979.–424с.

[3] *Працьовитий М.В.,Макарчук О.П,* Розподіл випадкової величин, зображеної двійковим дробом з двома надлишковими цифрами. // Науковий часопис НПУ імені. Драгоманова.Серія 1.Фізико-математичні науки, 2010. – №11.– С.160-169.

[4] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ імені М.П Драгоманова, 1998. – 296с.

[5] *Працьовитий М.В.,Торбін.Г.М.* Один клас випадкових величин типу Джессена-Вінтнера// Доп.НАН України. – 1998. – №4. – С.48-54.

[6] *Турбин А.Ф.,Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения.–Киев: Наук.думка, 1992. – 2008с.

[7] *Albeverio,S.,Goncharenko.Y.,Pratsiovyti,M.,Torbin,G.,*Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits.//Random Oper. Stochastic Equations, 2007. – .**15**,№1. – P.89-97.

[8] *Jessen ,B., Wintner, A.* Distribution function and Riemann Zeta-function, //Trans.Amer.Math.Soc.38,1935. – P.48-88.

[9] *Levy P.* Sur les sries don't les termes sont des variables independantes// Studia math., 3,1931.– P.119-155.

References

[1] Goncharenko Ya., *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)*, 2002, 3, pp. 376-390.

[2] Lykach E., *Harakterystycheskye funkcyy (Characteristic functions)*, Moscow, 1979, 424 p.

[3] Pratsiovytyi M., Makarchyk O., *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)*, 2010, 11, pp. 160-169.

[4] Pratsiovytyi M.,*Fraktalnyi pidhid u doslidzhennjah synguljarnyh rozpodiliv (Fractal approach to investigations of singular distributions)*, Kyiv, 1998, 296 p.

[5] Pratsiovytyi M., Torbin G., *Dopovidi Nacional'noi' akademii' nauk Ukrai'nyharakterystycheskye funkcyy (Reports of the National Academy of Sciences of Ukraine)*, 1998, 4, pp. 48-54.

[6] Turbin A., Pratsiovytyi M., *Fraktalnye mnozhestva, funkcii, rasspredeleniya (Fractal sets, functions, and distributions)*, Naukova Dumka, Kiev, 1992, 208 p.

[7] Albeverio S., Goncharenko Y., Pratsiovyti M.,Torbin G., *Random Oper. Stochastic Equations*, 2007, **15**, 1,pp. 89-97.

[8] Jessen B., Wintner A., *Trans.Amer.Math.Soc.*, 1935, 38, pp. 48-88.

[9] Levy P., *Studia math.*, 1931, 3, pp. 119-155.