Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2012, № 13(1).— С. 128–140.

УДК 519.21

Про розмірність Хаусдорфа-Безиковича спектра одного класу нескінченних згорток Бернуллі з суттєвими перекриттями

М. В. Лебідь

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова, Університет м. Білефельд

Анотація. Робота присвячена дослідженню розмірності Хаусдорфа спектра випадкових величин виду $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$, де ξ_k — незалежні бернуліївські випадкові величини, а збіжний знакододатний ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ має наступну властивість: $\forall k \in \mathbb{N}$ $\exists s_k \in \mathbb{N} \bigcup \{0\} : \quad a_k = a_{k+1} = ... = a_{k+s_k} \geq r_{k+s_k}$, де $r_k := \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} a_i$, причому $s_k > 0$ для нескінченної кількості індексів k.

Нехай $\{k_n\}$ буде послідовністю невід'ємних цілих чисел таких, що $i \in \{k_n\}$ тоді і тільки тоді, коли $s_i = 0$, та $l_n = k_n - k_{n-1}$, $k_0 = 0$. У випадку $\sup\{l_n\} < \infty$ проблема знаходження розмірності Хаусдорфа-Безиковича спектра тісно повязана з властивістю довірчості (фрактальності) сімейства циліндричних відрізків виду

$$\mathcal{B} = \left\{ \Delta : \Delta = \left[\sum_{i=1}^{k_n} c_i a_i, \ r_{k_n} + \sum_{i=1}^{k_n} c_i a_i \right], c_i \in \{0,1\}, \ i = \overline{1, k_n} \text{ та } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Г. Торбіним та М.Лебедем була отриманий наступний результат: при виконанні умови $\sup\{l_n\} < \infty$ розмірність Хаусдорфа-Безиковича спектра випадкової величини ξ дорівнює

$$\varliminf_{n \to \infty} \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} \ln(l_j + 1)}{- \ln r_{k_n}} \right).$$

Взагалі кажучи, сімейство $\mathcal{B}$ не є довірчим. Тобто, стандартний підхід при обчисленні розмірності Хаусдорфа-Безиковича не працює. Незважаючи на це, у даній статті доводиться, що у загальному випадку розмірність Хаусдорфа-Безиковича спектра в. в. ξ обчислюється за тією самою формулою.

Ключові слова: нескінченні згортки Бернуллі, фрактали, спектри ймовірнісних мір, розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини, розмірність Хаусдорфа міри, довірчі системи покриттів

E-mail: mlebid@uni-bielefeld.de

The Hausdorff-Besikovitch dimension of spectrum of one class of generalized infinite Bernoulli convolutions with essential overlaps

M. Lebid,

Dragomanov National Pedagogical University, Bielefeld University

Abstract. The paper is devoted to the Hausdorff-Besikovitch dimension of spectrum of random variables $\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k$, where ξ_k are independent Bernoulli random variables, and a convergent positive series $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ has the following property: $\forall k \in N \quad \exists s_k \in N \bigcup \{0\}: \quad a_k = a_{k+1} = ... = a_{k+s_k} \geq r_{k+s_k}$, with $s_k > 0$ for infinitely many indices k.

The calculation problem of the Hausdorff-Besikovitch dimension of spectrum in the case $\sup\{l_n\} < \infty$ is strongly connected with the faithfulness property of cylindrical family

$$\mathcal{B} = \left\{ \Delta : \Delta = \left[\sum_{i=1}^{k_n} c_i a_i,\ r_{k_n} + \sum_{i=1}^{k_n} c_i a_i \right], c_i \in \{0,1\},\ i = \overline{1, k_n} \quad n \in \mathbb{N} \right\}.$$

G. Torbin and M. Lebid have proven with spatial condition $\sup\{l_n\} < \infty$ the Hausdorff-Besikovitch dimension of spectrum of random variables ξ equal to

$$\varliminf_{n\to\infty} \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} \ln(l_j + 1)}{- \ln r_{k_n}} \right).$$

The family $\mathcal{B}$ is not faithful in general. It means that the standard approach does not work. It was proven, however, that the formula for calculation of the Hausdorff-Besikovitch dimension of random variables ξ is true.

Keywords: infinite Bernoulli convolution, fractal, spectrum of random variable, Hausdorff-Besikovitch dimension, faithful covering system.

AMS Subject Classifications (2010): 60G30, 11K55, 28A80

1. Вступ

Нехай $\mu_\xi = \mu$ — розподіл випадкової величин

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k a_k, \tag{1}$$

де $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ є знакододатним збіжним рядом, а ξ_k є незалежними випадковими величинами, які набувають значень 0 та 1 з імовірностями p_{0k} та p_{1k} відповідно. Розподіл μ_ξ називається *нескінченною згорткою Бернуллі*. Роботи [**13, 16**] містять огляд існуючих проблем та результатів досліджень таких розподілів. Застосування нескінченних згорток Бернуллі обговорювались в роботах [**5, 16**]. У випадку, коли ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ збігається «достатньо швидко», тобто коли $a_k \geq r_k := \sum\limits_{i=k+1}^{\infty} a_i$ для всіх достатньо великих k, лебегівська структура та фрактальні властивості згорток Бернуллі вивчені достатньо гарно (див. [**3, 8**]). У той же час випадок, коли $a_k < r_k$ виконується для нескінченої кількості індексів k, є все ще мало дослідженим. Основна проблема, з якою зустрічаються дослідники на цьому шляху, є дослідження властивостей тих згорток Бернуллі, для яких «майже всі» (в смислі міри Лебега чи розмірності Хаусдорфа-Безиковича) точки спектра мають континуальну кількість різних розкладів виду $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \omega_k a_k$, де $\omega_k \in \{0, 1\}$. Ймовірнісні міри такого виду належать до так званих згорток Бернуллі з «суттєвими перекриттями» ([**13**]). У роботі досліджується розмірність спектра випадкової величини ξ для випадку, коли на $\{a_k\}$ накладено наступну умову:

$$\forall k \in N,\ \exists s_k \in N_0 := N \bigcup \{0\} : \quad a_k = a_{k+1} = ... = a_{k+s_k} \geq r_{k+s_k}, \tag{2}$$

причому $s_k > 0$ для нескінченної кількості індексів k.

Введемо допоміжні позначення. Нехай $\{k_n\}$ буде послідовністю невід'ємних цілих чисел таких, що $i \in \{k_n\}$ тоді і тільки тоді коли $s_i = 0$, та $l_n = k_n - k_{n-1}$, $k_0 = 0$.

При обчисленні розмірності Хаусдорфа-Безиковича важливу роль відіграє поняття довірчості сімейств множин.

Нехай M – фіксована обмежена підмножина дійсної прямої. Нагадаємо, що сімейство Φ_M інтервалів називається *сімейством локально тонких покриттів* множини M, якщо для довільного $\varepsilon > 0$ існує не більш ніж зчисленне ε – покриття $\{E_j\}$ множини M і $E_j \in \Phi_M$, тобто, $\forall \varepsilon > 0\ \exists \{E_j\}$ $(E_j \in \Phi_M,\ |E_j| \leq \varepsilon)$: $M \subset \bigcup\limits_j E_j$.

α–мірною мірою Хаусдорфа підмножини $E \subset M$ відносно заданого сімейства Φ_M тонких покриттів називається

$$H^\alpha(E, \Phi_M) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\inf_{|E_j| \leq \varepsilon} \left\{ \sum_j |E_j|^\alpha \right\} \right] = \lim_{\varepsilon \to 0} H^\alpha_\varepsilon(E, \Phi_M),$$

де інфімум береться по всеможливих не більш ніж зчисленних ε–покриттях $\{E_j\}$ множини E, $E_j \in \Phi_M$.

Якщо $M = [0, 1]$, то використовуючи сімейство всіх відкритих (замкнених) інтервалів отримаємо класичну α–мірну міру Хаусдорфа, яку будемо позначати $H^\alpha(E)$. Невід'ємне число

$$\dim_H(E, \Phi_M) = \inf\{\alpha : \quad H^\alpha(E, \Phi_M) = 0\} \tag{3}$$

називається розмірністю Хаусдорфа множини $E \subset M$ відносно сімейства тонких покриттів Φ_M. Одразу з означення слідує, що якщо сімейства тонких покриттів $\Phi_1 \subset \Phi_2$ множини M, то $\dim_H(E, \Phi_1) \geq \dim_H(E, \Phi_2)$, $\quad \forall E \subset M$.

Сімейство тонких покриттів Φ_M називають *довірчим сімейством покриттів*, якщо для визначення розмірності Хаусдорфа – Безиковича $\dim_H$ довільної підмножини

$E \subset M$ достатньо розглядати лише покриття з Φ_M, тобто,

$$\dim_H(E, \Phi_M) = \dim_H(E), \forall E \subset M.$$

Якщо $M = [0,1]$, то сімейство всіх замкнених (відкритих) інтервалів і сімейство s–адичних інтервалів будуть довірчими (див. [**7**]). Легко помітити, що якщо $M_1 \subset M$ і Φ — довірче сімейство покриттів множини M, то Φ буде довірчим і для M_1.

У статті [**14**] була доведена властивість довірчості сімейства покриттів

$$\mathcal{B} = \left\{ \Delta : \Delta = \left[\sum_{i=1}^{k_n} c_i a_i,\ r_{k_n} + \sum_{i=1}^{k_n} c_i a_i \right], c_i \in \{0,1\},\ i = \overline{1, k_n} \text{ та } n \in \mathbb{N} \right\}$$

відносно спектра в.в. ξ та обчислена розмірність спектра в. в. ξ у випадку $\sup\{l_n\} < \infty$. Але у загальній постановці, коли можлива ситуація $\sup\{l_n\} = \infty$, властивість довірчості сімейства покриттів порушується. Незважаючи на це, у даній статті доводиться, що у загальному випадку розмірність Хаусдорфа-Безиковича спектра в. в. ξ обчислюється за аналогічною формулою $\varliminf_{n\to\infty} \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} \ln(l_j+1)}{-\ln r_{k_n}} \right)$. При отриманні основного результату використовується техніка розвинена у статті [**12**].

2. Розмірність спектра розподілу випадкової величини ξ

Нагадаємо, що мінімальна замкнена множина, на якій зосереджений розподіл випадкової величини φ називається *спектром* (топологічним носієм) φ.

У роботі [**14**] було покажемо, що розподіл випадкової величини ξ є ймовірнісною мірою з незалежними $\tilde{Q}$-символами. Нехай $\tilde{\xi}$ – відповідна в. в. з незалежними $\tilde{Q}$-символами та $\mu := \mu_{\tilde{\xi}}$ – розподіл в. в. $\tilde{\xi}$. Визначимо матрицю $\tilde{Q}$. Нехай послідовність $\{m_n\}$ задовольняє рівності:

$$m_n = \begin{cases} l_n + 1, \text{ якщо } a_{k_n} = r_{k_n}; \\ 2l_n + 1, \text{ якщо } a_{k_n} > r_{k_n}. \end{cases} \tag{4}$$

Для кожного n визначимо стохастичний вектор-стовпчик

$$\vec{q}_n = (q_{0n}, q_{1n}, ..., q_{m_n-1,n})$$

наступним чином.

1) Якщо $m_n = l_n + 1$, то

$$q_{in} = \frac{1}{l_n + 1}, i \in \{0, 1, 2, ..., m_n - 1\} = B_n.$$

2) Якщо $m_n = 2l_n + 1$, то

$$q_{in} = \frac{r_{k_n}}{r_{k_{n-1}}}, i \in \{0, 2, 4, ..., m_n - 1\} = B_n;$$

$$q_{in} = \frac{a_{k_n} - r_{k_n}}{r_{k_{n-1}}}, i \in \{1, 3, 5, ..., m_n - 2\}.$$

Спектра в. в.$\tilde{\xi}$ повністю визначається матрицею $\tilde{Q}$

Використаємо «стохастичну матрицю» $\tilde{Q} = \|q_{in}\|$, для визначення спектра випадкової величини $\tilde{\xi}$.

Крок 1. Розбиваємо відрізок $[0,1]$ (зліва на право) на відрізки $\Delta^{\tilde{Q}}_{i_1}$, $i_1 \in \overline{0,\ m_1 - 1}$ (без спільних внутрішніх точок) довжини $\left|\Delta^{\tilde{Q}}_{i_1}\right| = q_{i_1 1}$,

$$[0,1] = \bigcup_{i_1 \in \ \overline{0, m_1 - 1}} \Delta^{\tilde{Q}}_{i_1}.$$

будемо називати відповідний відрізок 1-го рангу *циліндром першого рангу.*

Циліндри, які входять до множини $\mathcal{A}_1 := \left\{\Delta : \Delta = \Delta^{\tilde{Q}}_{i_1}, i_1 \in B_1\right\}$ будемо називати *циліндрами першого рангу.* Отже, існує $l_1 + 1$ рівних між собою циліндри першого рангу довжиною r_{k_1}, які розміщені (зліва на право) на рівній відстані $a_{k_1} - r_{k_1}$ одни за одним на одиничному відрізку.

Крок $n \geq 2$. Кожен елемент $\Delta^{\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$ з сім'ї циліндрів $\mathcal{A}_{n-1}$ розкладаємо (зліва на право) на відрізки $\Delta^{\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n}$, $i_n \in \overline{0,\ m_n - 1}$ в об'єднання відрізків (без спільних внутрішніх точок) довжини $\left|\Delta^{\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n}\right| = r_{k_{n-1}} \cdot q_{i_n n}$,

$$\Delta^{\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}} = \bigcup_{i_n \in \overline{0,\ m_n - 1}} \Delta^{\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_n}.$$

Будемо називати відповідний відрізок n-го рангу *циліндром n-го рангу.*

Циліндри, які входять до множини

$$\mathcal{A}_n := \left\{\Delta : \Delta = \Delta^{\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1} i_n},\ i_t \in B_t,\ t = \overline{1, n}\right\}$$

будемо називати *циліндрами n-го рангу.* Отже існує $l_1 + 1$ рівних між собою циліндра n-го рангу довжиною r_{k_n}, розміщені (зліва на право) на рівній відстані $a_{k_n} - r_{k_n}$ одни за одним, які належать деякому циліндру $\Delta^{\tilde{Q}}_{i_1 i_2 \ldots i_{n-1}}$ $(n-1)$-го рангу та розміщених (зліва на право) на рівній відстані $a_{k_n} - r_{k_n}$ один за одним.

Означимо S_n, як об'єднання усіх циліндрів n-го рангу, тобто

$$S_n := \bigcup_{I \in \mathcal{A}_n} I.$$

Отже, спектр випадкової величини $\tilde{\xi}$ можна подати у вигляді перетину множин S_n:

$$S_\mu = \bigcap_{k=1}^{+\infty} S_n.$$

Побудуємо допоміжну сім'ю множин. Нехай

$$\mathcal{T}_n := \{T : T = \bigcup_{i=1}^{l} \Delta_i,\ \Delta_i \in \mathcal{A}_n, 1 \leq l \leq l_n + 1 \text{ та } \exists T' \in \mathcal{A}_{n-1} : T \subset T'\},$$

тобто $\mathcal{T}_n$ це сім'я множин, кожен елемент якої є об'єднанням циліндрів n-го рангу, які належать певному циліндру $(n-1)$-го рангу. Нехай

$$\mathcal{T} = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \mathcal{T}_n.$$

Лема 1. *Нехай* $\alpha \in (0,1]$ *тоді*

$$\frac{1}{6} H^{\alpha}(S_\mu, \mathcal{T}) \leq H^{\alpha}(S_\mu).$$

Доведення. Нехай $\{E_i\}$ довільне ε - покриття спектра S_μ інтервалами $E_i = (a_i, b_i)$. Оскільки при обчисленні передміри $H^{\alpha}_{\varepsilon}(S_\mu)$ достатньо брати покриття з умовою $E_i \bigcap S_\mu \neq \emptyset$, то, без втрати загальності, будемо вважати, що $E_i \bigcap S_\mu \neq \emptyset$. Для довільного E_i існує циліндр n-го рангу , такий, що $I_i \subset E_i$ і E_i не містить циліндрів $(n-1)$-го рангу .

Зрозуміло, що E_i не може перетинатися більше ніж з двома циліндрами $(n-1)$-го рангу, бо у іншому випадку E_i містив би циліндр $(n-1)$-го рангу. Означимо ці два циліндри I_i^1, I_i^2. Нехай T_i^1 та T_i^2, буде об'єднанням циліндрів n-го рангу множини спектра S_μ, які належать I_i^1 та I_i^2 відповідно, і мають точки перетину з E_i. Зазначимо, що T_i^1, $T_i^2 \in \mathcal{T}$. Не зменшуючи загальності, припустимо що $|T_i^1| \geq |T_i^2|$. З попереднього припущення T_i^1 містить хоча б один циліндр n-го рангу множини спектра S_μ, отже $|T_i^1|^{\alpha} \leq (|E_i| + 2r_{k_n})^{\alpha} \leq (3|E_i|)^{\alpha}$. Таким чином

$$|T_i^1|^{\alpha} + |T_i^2|^{\alpha} \leq 2(3)^{\alpha}|E_i|^{\alpha} \leq 6|E_i|^{\alpha}$$

З побудови T_i^1 та T_i^2 випливає $S_\mu \cap E_i \subset (T_i^1 \cap E) \cup (T_i^2 \cap E)$ і $|T_i^1|$, $|T_i^2| \leq 3|E_i|$.

Отже, $\{T_i^1\}_{i>0} \cup \{T_i^2\}_{i>0}$ буде таке 3ε - покриття множини S_μ елементами сім'ї $\mathcal{T}$, що для довільне ε - покриття $\{E_i\}$ множини S_μ інтервалами $E_i = (a_i, b_i)$ і для $\forall \alpha > 0$ виконується:

$$\sum_i |E_i|^{\alpha} \geq \frac{1}{6} \sum_i (|T_i^1|^{\alpha} + |T_i^2|^{\alpha}).$$

З попередніх міркувань і випливає твердження теореми. □

Неважко помітити, що $\mathcal{T}$ є довірчою сім'єю покриттів на S_μ.

Тепер сформулюємо та доведемо важливу лему:

Лема 2. *Нехай* $\alpha \in (0,1]$. *Нехай* $\mathcal{E} = \{E_i\}$ *деяке* ε*-покриття спектра* S_μ *та* $\mathcal{E} \subset \mathcal{T}$, *тоді існує таке* $n(\varepsilon)$, *що виконується нерівність*

$$\sum_i |E_i|^{\alpha} \geq \frac{1}{4} \sum_{I \in \mathcal{A}_{n(\varepsilon)}} |I|^{\alpha},$$

при цьому

$$n(\varepsilon) \to \infty \ (\varepsilon \to 0).$$

Доведення. Отже, $\mathcal{E} = \{E_i\}$ – деяке ε-покриття спектра S_μ та $\mathcal{E} \subset \mathcal{T}$. Не зменшуючи загальності ми можемо припустити, що $\mathcal{E}$ скінчене (дивись [**11**]). Нехай n_1 і n_2 відповідно будуть наименьшим та найбільшим рангом циліндрів, які утворюють елементи покриття $\mathcal{E}$ (нагадаємо, що кожен елемент, який належить до множини $\mathcal{T}$, утворюється об'єднанням циліндрів певного рангу множини спектра S_μ).

Зараз побудуємо допоміжне ε-покриття $\mathcal{P}$ на основі $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{P}_1 := \{I : I \in \mathcal{E} \text{ і } I \in \mathcal{T}_{n_1}\};$$

$$\mathcal{P}_2 := \{I : I \in \mathcal{A}_{n_1} \text{ і } I \not\subset E, \forall E \in \mathcal{E}\};$$

$$\mathcal{P} := \mathcal{P}_1 \cup \mathcal{P}_2.$$

За означенням сім'я $\mathcal{P}$ є покриттям множини S_{n_1}, де елементи покриття є або об'єднанням циліндрів n_1-го рангу множини спектра S_μ, або саме циліндри n_1-го рангу множини спектра S_μ.

Означимо допоміжну функції для $I \in \mathcal{P}$:

$$f(\alpha, I) = \left\{ \begin{array}{l} \frac{|I|^\alpha}{N(I)} \text{ ,— якщо } I \in \mathcal{P}_1 \\ \sum\limits_{E \in \mathcal{E},\ E \subset I} |E|^\alpha \text{ ,— якщо } I \in \mathcal{P}_2 \end{array} \right\},$$

де $N(I)$ - кількість циліндрів n_1-го рангу множини спектра S_μ, які утворюють $I \in \mathcal{P}_1$. З конструкції $\mathcal{T}$ випливає: якщо $E_i \in \mathcal{E}$ і $E_i \notin \mathcal{P}_1$ тоді E_i повинно належати деякому циліндру n_1-го рангу множини спектра S_μ. Нехай, функція $f(\alpha, I)$ набуває свого мінімуму у деякому елементі I_{min} з сім'ї $\mathcal{P}$, тобто

$$f(I_{min}, \alpha) = \min_{I \in \mathcal{P}} f(\alpha, I)$$

($f(I_{min}, \alpha)$ – завжди існує тому, що $\mathcal{P}$ скінчена сім'я множин).

Отже

$$\begin{aligned} \sum_i |E_i|^\alpha = \sum_{I \in \mathcal{P}_1} |I|^\alpha + \sum_{I \in \mathcal{P}_2} \left(\sum_{E_i \in \mathcal{E},\ E_i \subset I} |E_i|^\alpha \right) = \\ = \sum_{I \in \mathcal{P}_1} (N(I) f(I, \alpha)) + \sum_{I \in \mathcal{P}_2} f(I, \alpha) \geq \\ \geq \sum_{I \in \mathcal{P}_1} (N(I_{min}) f(I_{min}, \alpha)) + \sum_{I \in \mathcal{P}_2} f(I_{min}, \alpha) = \\ = \left(\sum_{I \in \mathcal{P}_1} (N(I_{min})) + \sum_{I \in \mathcal{P}_2} (1) \right) f(I_{min}, \alpha). \end{aligned} \tag{5}$$

Зазначимо, що $\left(\sum\limits_{I\in\mathcal{P}_1}(N(I_{min}))+\sum\limits_{I\in\mathcal{P}_2}(1)\right)$ є кількість циліндрів n_1-го рангу множини спектра S_μ (тобто кількість елементів $\mathcal{A}_{n_1}$) , а вона дорівнює $\prod\limits_{j=1}^{n_1}(l_j+1)$, таким чином

$$\left(\sum_{I\in\mathcal{P}_1}(N(I_{min}))+\sum_{I\in\mathcal{P}_2}(1)\right)=\prod_{j=1}^{n_1}(l_j+1).$$

Отже, з (5) випливає:

$$\sum_i |E_i|^\alpha \geq \prod_{j=1}^{n_1}(l_j+1)f(I_{min},\alpha) \tag{6}$$

(i) Нехай $I_{min}\in\mathcal{P}_1$.

Якщо $N(I_{min})=1$, то $I_{min}\in\mathcal{A}_{n_1}$ та

$$\sum_i |E_i|^\alpha \geq \prod_{j=1}^{n_1}(l_j+1)f(I_{min},\alpha)=\prod_{j=1}^{n_1}(l_j+1)|I_{min}|^\alpha=\sum_{I\in\mathcal{A}_{n_1}}|I|^\alpha,$$

таким чином для цього випадку виконується твердження леми. Якщо

$$N(I_{min})\geq 2,$$

то

$$2\left(\frac{l_{n_1}+1}{N(I_{min})}+1\right)|I_{min}|\geq |I|,\ I\in\mathcal{A}_{n_1-1}. \tag{7}$$

(враховуючи проміжки між об'єднанням циліндрів n_1-го рангу. Максимально їх може бути не більше ніж $\frac{l_{n_1}+1}{N(I_{min})}+1$).

З попередньої нерівності випливає:

$$|I_{min}|\geq \frac{1}{4}\frac{N(I_{min})}{(l_{n_1}+1)}|I|,\ I\in\mathcal{A}_{n_1-1}. \tag{8}$$

З (6) та (8):

$$\sum_i |E_i|^\alpha \geq \prod_{j=1}^{n_1}(l_j+1)f(I_{min},\alpha)=\prod_{j=1}^{n_1-1}(l_j+1)\left(\frac{l_{n_1}+1}{N(I_{min})}|I_{min}|^\alpha\right)\geq$$
$$\geq \prod_{j=1}^{n_1-1}(l_j+1)\left(\frac{l_{n_1}+1}{N(I_{min})}\left(\frac{1}{4}\frac{N(I_{min})}{(l_{n_1}+1)}|I|\right)^\alpha\right)\geq$$
$$\geq \frac{1}{4}\prod_{j=1}^{n_1-1}(l_j+1)|I|^\alpha=\frac{1}{4}\sum_{I\in\mathcal{A}_{n_1-1}}|I|^\alpha.$$

Отже, перше твердження леми є правильним і у випадку $N(I_{min})\geq 2$.

(ii) Тепер, нехай $I_{min}\in\mathcal{P}_2$. У цьому випадку I_{min} є циліндром n_1-го рангу множини спектра S_μ. Нехай

$$\mathcal{Q}_0 = \{I : I \in \mathcal{E},\ I \subset I_{min}\}.$$

Нехай l – відстань від лівого кінця I_{min} циліндра до точки 0, тобто

$$l = inf\{|x| : x \in I_{min}\}$$

.

Зробимо зсув усіх множин з сім'ї $\mathcal{Q}_0$ на рівну відстань l вліво до точки 0 та отримаємо сім'ю $\mathcal{Q}_1$ тобто:

$$\mathcal{Q}_1 = \left\{\{\{x - l\} : x \in I\} : I \in \mathcal{Q}_0\right\}.$$

Нехай для $i \in \overline{1, \prod\limits_{j=1}^{n_1}(l_j + 1) - 1}$:

$$\mathcal{Q}_{i+1} = \left\{\{x + i|I_{min}| : x \in I\} : I \in \mathcal{Q}_1\right\}.$$

Тепер ми можемо побудувати покриття спектра S_μ:

$$\mathcal{Q} = \bigcup_{i=1}^{\prod\limits_{j=1}^{n_1}(l_j+1)} \mathcal{Q}_i.$$

З конструкції цього покриття випливає, що:

$$\sum_{I\in\mathcal{Q}} I^\alpha = \prod_{j=1}^{n_1}(l_j + 1) \sum_{E\in\mathcal{E},\ E\subset I_{min}} |E|^\alpha.$$

З попереднього зауваження та з (6) випливає, що

$$\sum_i |E_i|^\alpha \geq \prod_{j=1}^{n_1}(l_j + 1) f(I_{min}, \alpha) = \prod_{j=1}^{n_1}(l_j + 1) \sum_{E\in\mathcal{E},\ E\subset I_{min}} |E|^\alpha = \sum_{I\in\mathcal{Q}} I^\alpha,$$

тобто

$$\sum_i |E_i|^\alpha \geq \sum_{I\in\mathcal{Q}} I^\alpha. \tag{9}$$

Зазначимо, що якщо n_1' і n_2' відповідно будуть найменшим та найбільшим рангом циліндрів, які утворюють елементи покриття $\mathcal{Q}$, то $n_1 > n_1' \geq n_2' \geq n_2$. Тепер ми можемо повторити операції пункту (i) та використавши формули (9), після скінченої кількості кроків, знайдемо $n(\varepsilon)$, таке, що $n_1 - 1 \geq n(\varepsilon) \geq n_2$ та

$$\sum_i |E_i|^\alpha \geq \frac{1}{4} \sum_{I\in\mathcal{A}_{n(\varepsilon)}} |I|^\alpha.$$

Очевидно, що $\varepsilon \to 0$ виконується при $n_1 \to \infty$, тобто $\varepsilon \to 0$ при $n(\varepsilon) \to \infty$. Отже, твердження леми виконується.

$\square$

Теорема 1.

$$\dim_H S_\mu = \varliminf_{n\to\infty} \frac{\log \prod\limits_{j=1}^{n}(l_j+1)}{-\log r_{k_n}}$$

Доведення. Зазначимо, що $\mathcal{A}_n$ є покриттям спектра S_μ. З цього випливає, що

$$H^\alpha(S_\mu) \le H^\alpha(S_\mu, \mathcal{T}) \le H^\alpha(S_\mu, \mathcal{A}) \le \varliminf_{n\to\infty} \sum_{I\in\mathcal{A}_n} I^\alpha = \varliminf_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n}(l_j+1) r_{k_n}^\alpha. \qquad (10)$$

Нехай $\mathcal{E} = \{E_i\}$ – деяке ε-покриття спектра S_μ, та $\mathcal{E} \subset \mathcal{T}$. Нехай $\alpha \in [0,1]$. З леми 2 випливає, що

$$H^\alpha(S_\mu, \mathcal{T}) \ge \frac{1}{4} \varliminf_{n\to\infty} \sum_{I\in\mathcal{A}_n} I^\alpha.$$

Використавши попередню нерівність та лему 1 маємо

$$H^\alpha(S_\mu) \ge \frac{1}{24} \varliminf_{n\to\infty} \sum_{I\in\mathcal{A}_n} I^\alpha = \frac{1}{24} \varliminf_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n}(l_j+1) r_{k_n}^\alpha.$$

Ми отримали подвійну нерівність при $\alpha \in [0,1]$:

$$\frac{1}{24} \varliminf_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n}(l_j+1) r_{k_n}^\alpha \le H^\alpha(S_\mu) \le \varliminf_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n}(l_j+1) r_{k_n}^\alpha. \qquad (11)$$

Якщо

$$\alpha > \varliminf_{n\to\infty} \frac{\log \prod\limits_{j=1}^{n}(l_j+1)}{-\log r_{k_n}},$$

то існує підпослідовність $\{n(i)\}_{i\ge1}$, така, що

$$\alpha > \frac{\log \prod\limits_{j=1}^{n(i)}(l_j+1)}{-\log r_{k_{n(i)}}}.$$

Таким чином

$$\prod_{j=1}^{n(i)}(l_j+1) r_{k_{n(i)}}^\alpha \le 1, \ \forall i \in \mathbb{N},$$

а це приводить до

$$\varliminf_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n}(l_j+1) r_{k_n}^\alpha \le 1.$$

Використавши попередню нерівність та (11) ми маємо

$$H^\alpha(S_\mu) \le 1.$$

Отже,

$$\dim_H S_\mu \le \lim_{n\to\infty} \frac{\log \prod\limits_{j=1}^{n} (l_j+1)}{-\log r_{k_n}}.$$

Тепер, нехай

$$\alpha < \lim_{n\to\infty} \frac{\log \prod\limits_{j=1}^{n} (l_j+1)}{-\log r_{k_n}},$$

тоді для будь-якої підпослідовність $\{n(i)\}_{i\ge1}$ виконується

$$\alpha < \frac{\log \prod\limits_{j=1}^{n(i)} (l_j+1)}{-\log r_{k_{n(i)}}}.$$

Таким чином $\forall\{n(i)\}_{i\ge1}$ буде виконуватися

$$\prod_{j=1}^{n(i)} (l_j+1) r^{\alpha}_{k_{n(i)}} \ge 1,\ \forall i \in \mathbb{N},$$

а це приводить до

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} (l_j+1) r^{\alpha}_{k_n} \ge 1.$$

Використавши попередню нерівність та (11) ми маємо

$$H^\alpha(S_\mu) \ge \frac{1}{24},$$

отже

$$\dim_H S_\mu \ge \lim_{n\to\infty} \frac{\log \prod\limits_{j=1}^{n} (l_j+1)}{-\log r_{k_n}}.$$

Підсумовуючи отримані результати ми приходимо до твердження теореми

$$\dim_H S_\mu = \lim_{n\to\infty} \frac{\log \prod\limits_{j=1}^{n} (l_j+1)}{-\log r_{k_n}}.$$

$\square$

Література

[1] *S. Albeverio, G. Torbin*, Image measures of infinite product measures and generalized Bernoulli convolutions, *Transactions of the National Pedagogical University of Ukraine. Mathematics*, **5**, (2004), P. 228 – 241.

[2] *S. Albeverio, G. Torbin*, Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q^*-digits, *Bull. Sci. Math.*, **129, 4**, (2005), P. 356–367.

[3] *S. Albeverio, G. Torbin*, On fine fractal properties of generalized infinite Bernoulli convolutions, *Bull. Sci. Math.*, **132, 8**, (2008), P. 711–727.

[4] S. Albeverio, V. Koshmanenko, M. Pratsiovytyi, G. Torbin, *On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent $\widetilde{Q}$- symbols*, Meth. of Func. An. Top., **17** (2011), no.2, P.97–111.

[5] J. C. Alexander, D. Zagier, *The entropy of a certain infinitely convolved Bernoulli measure*, J. London Math. Soc. **44** (1991), 121–134.

[6] *P. Billingsley*, Hausdorff dimension in probability theory II, *Ill. J.Math.*, **5**, (1961), P. 291–198.

[7] *P. Billingsley*, Ergodic theory and information, *New York-London-Sydney: John Wiley & Sons, Inc.*, (1965).

[8] *M. Cooper*, Dimension, measure and infinite Bernoulli convolutions, *Math. Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **124**, (1998), P. 135–149.

[9] *S. D. Chatterji* , Certain induced measures on the unit interval, *Journal London Math. Soc.*, **38**, (1963), P. 325–331.

[10] *C. Everett*, Representations for real numbers, *Bull. Amer. math. Soc.*, **52**, (1946), P. 861–869.

[11] *K. Falconer*, Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. *Chichester: Wiley*, (1990).

[12] *D. J. Feng, H. Rao, J. Wu*, The net measure properties of one dimensional homogeneous Cantor set and its applications, *Progr. Nat. Sci.*, **6**, (1996), P. 673 – 678.

[13] *Ya. Gontcharenko, M. Pratsiovytyi, G. Torbin*, On fractal properties of some Bernoulli convolutions *Prob. Theory and Math. Statist.*, **79**, (2009), 39–55.

[14] *М. Лебідь, Г. Торбін* Сингулярність та тонкі фрактальні властивості згорток Бернуллі, прийнята до друку в *Теор. ймов. та мат. стат.*.

[15] *Y. Peres, K. Simon, B. Solomyak* Absolute continuity for random iterated function systems with overlaps, *J. London Math. Soc.*, **74**, (2006), P. 739–756.

[16] *Y. Peres, W. Schlag, B. Solomyak*, Sixty years of Bernoulli convolutions, *Fractal Geometry and Stochastics II. Progress in Probability*, **46**, (2000), P. 39–65.

[17] *М. В. Працьовитий* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. —Київ: Вид–во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998.

[18] *C. Rogers*, Hausdorff measures, *Cambridge Univ. Press, London*, (1970).

[19] *G. Torbin* On generalized infinite Bernoulli convolutions and their fractal properties, *Skorokhod Space Conference: Skorokhod space. 50 years on.*

[20] *А.Ф. Турбин, Н.В. Працевитый* Фрактальные множества, функции, распределения.— Киев: Наук.думка, 1992.— 208с.

References

[1] S. Albeverio, G. Torbin, *Transactions of the National Pedagogical University of Ukraine. Mathematics*, **5**, (2004), P. 228 – 241.

[2] S. Albeverio, G. Torbin, *Bull. Sci. Math.*, **129, 4**, (2005), P. 356–367.

[3] S. Albeverio, G. Torbin, *Bull. Sci. Math.*, **132, 8**, (2008), P. 711–727.

[4] S. Albeverio, V. Koshmanenko, M. Pratsiovytyi, G. Torbin, *Meth. of Func. An. Top.*, **17** (2011), no.2, P.97–111.

[5] J. C. Alexander, D. Zagier, *J. London Math. Soc.*, **44** (1991), 121–134.

[6] P. Billingsley, *Ill. J.Math.*, **5**, (1961), P. 291–198.

[7] *P. Billingsley*, Ergodic theory and information, *New York-London-Sydney: John Wiley & Sons, Inc.*, (1965).

[8] M. Cooper, *Math. Proc. Cambr. Phil. Soc.*, **124**, (1998), P. 135–149.

[9] S. D. Chatterji, *Journal London Math. Soc.*, **38**, (1963), P. 325–331.

[10] C. Everett, *Bull. Amer. math. Soc.*, **52**, (1946), P. 861–869.

[11] *K. Falconer*, Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. *Chichester: Wiley*, (1990).

[12] D. J. Feng, H. Rao, J. Wu, *Progr. Nat. Sci.*, **6**, (1996), P. 673 – 678.

[13] Ya. Gontcharenko, M. Pratsiovytyi, G. Torbin, *Prob. Theory and Math. Statist.*, **79**, (2009), 39–55.

[14] M. Lebid, G. Torbin, submitted to *Prob. Theory and Math. Statist.*

[15] Y. Peres, K. Simon, B. Solomyak, *J. London Math. Soc.*, **74**, (2006), P. 739–756.

[16] Y. Peres, W. Schlag, B. Solomyak, *Fractal Geometry and Stochastics II. Progress in Probability*, **46**, (2000), P. 39–65.

[17] Pratsiovytyi M. V. *Fraktalnyi pidhid u doslidzhennjah synguljarnyh rozpodiliv (Fractal approach to investigations of singular distributions)*, Kyiv, 1998, 296 p.

[18] *C. Rogers*, Hausdorff measures, (1970).

[19] G. Torbin, *Skorokhod Space Conference: Skorokhod space. 50 years on.*

[20] Turbin A. F., Pratsiovytyi M. V., *Fraktalnye mnozhestva, funkcii, rasspredeleniya (Fractal sets, functions and distributions)*, Naukova Dumka, Kiev, 1992, 208 p.