Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2012, № 13(1).— С. 31–44.

УДК 519.21

Про сингулярність та спектральну структуру розподілів випадкових ланцюгових дробів

С. Альбеверіо,

Інститут прикладної математики Боннського університету, HCM, Bonn; BiBoS, Bielefeld–Bonn; CERFIM, Locarno; IZKS, Bonn

Ю. В. Кулиба,

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

М. В. Працьовитий,

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова; Інститут математики НАН України

Г. М. Торбін,

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова; Інститут математики НАН України

Анотація. У роботі розглядаються різні підходи до доведення сингулярної неперервності розподілів випадкових величин ξ з незалежними однаково розподіленими символами ланцюгового розкладу. Повністю досліджено спектральну структуру розподілів випадкових величин з незалежними (взагалі кажучи, різнорозподіленими) символами ланцюгового розкладу.

Ключові слова: ланцюгові дроби, сингулярно неперервні ймовірнісні міри, ергодична теорема, асимптотична частота символів, розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини, розмірність Хаусдорфа міри.

On singularity of random continued fractions

S. Albeverio,

Institut für Angewandte Mathematik, Universität Bonn; HCM, Bonn; BiBoS, Bielefeld–Bonn; CERFIM, Locarno; IZKS, Bonn

Yu. Kulyba,

National Pedagogical Dragomanov University

M.Pratsiovytyi,

National Pedagogical Dragomanov University, Institute for Mathematics of NASU

G. Torbin,

National Pedagogical Dragomanov University, Institute for Mathematics of NASU

E-mail: albeverio@uni-bonn.de, kuliba9@gmail.com, prats4@yandex.ru, torbin@iam.uni-bonn.de

Abstract. We consider different approaches to the proof of singular continuity of distributions of random variables with independent identically distributed symbols of continued fraction expansion. The spectral structure of probability distributions of random variables with independent continued fraction symbols is completely studied.

AMS Subject Classifications (2010): 11K55, 28A80, 60G30.

Key words: continued fractions, singularly continuous probability measures, ergodic theorem, asymptotic frequency of symbols, Hausdorff-Besicovitch dimension of sets, Hausdorff dimension of measures.

1. Вступ

Розглянемо випадкову величину ξ, породжену елементарним ланцюговим дробом:

$$\xi = \cfrac{1}{\xi_1 + \cfrac{1}{\xi_2 + \cfrac{1}{\xi_3 + ... + \cfrac{1}{\xi_k + ...}}}}, \tag{1}$$

де $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k, ...$ — незалежні випадкові величини, які набувають значень $1, 2, ..., n, ...$ з ймовірностями $p_{1k}, p_{2k}, ..., p_{nk}, ...$ відповідно, де $p_{ik} \geq 0$ $\sum\limits_{i=1}^{\infty} p_{ik} = 1$ $\forall k \in N$.

Розподіл випадкової величини ξ визначається матрицею P^* :

$$P^* = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdot & p_{1k} & \cdot \\ p_{21} & p_{22} & \cdot & p_{2k} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdot & p_{nk} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Класична теорема Лебега стверджує існування лише три типи чистих ймовірнісних розподілів: дискретні, сингулярно неперервні та абсолютно неперервні. Вивченням лебегівської структури, метричних, топологічних та розмірнісних властивостей розподілів такого виду займалися J.R. Kinney, T.S. Pitcher, Yu. Kifer, Yu. Peres, B. Weiss, О.Б. Брагін, Г.В. Іваненко, О.Л. Лещинський, Р.О. Нікіфоров, М.В.Працьовитий, Г.М.Торбін та інші (див., напр., [**9, 11, 16, 13**] та огляди літератури у вказаних роботах).

Критерій чистої дискретності ξ довів О.Б. Брагін [**15**], описавши всі його атоми:

Теорема 1. *Випадкова величина ξ матиме дискретний розподіл тоді і тільки тоді, коли*

$$\prod_{k=1}^{\infty} \max_{i \in N}\{p_{ik}\} > 0$$

причому у випадку дискретності максимальний стрибок функція розподілу випадкової величини ξ має в точці

$$x_0 = [0; a_1^{'}, a_2^{'}, ..., a_k^{'}, ...], \quad \text{де} \quad p_{a_k^{'}k} = \max_{i \in N}\{p_{ik}\}, \quad k = 1, 2, ...$$

Всі інші атоми розподілу ξ відрізняються від x_0 лише скінченним числом елементів свого ланцюгового розкладу.

У розділі 2 розглядаються різні підходи до доведення сингулярності випадкової величини ξ з незалежними однаково розподіленими символами ланцюгового розкладу. Наведені в статті методи відіграють важливу роль для строгого доведення сингулярної неперервності випадкової величини ξ з незалежними та марківськими символами ланцюгового розкладу.

У розділі 3 досліджено спектральну структуру розподілів випадкових величин з незалежними символами ланцюгового розкладу згідно нової спектральної класифікації сингулярно неперервних ймовірнісних мір ([**4**]).

2. Методи доведення сингулярної неперервності випадкової величини з незалежними однаково розподіленими символами ланцюгового розкладу

Нехай ξ — випадкова величина з незалежними однаково розподіленими символами ланцюгового розкладу:

$$\xi = \cfrac{1}{\xi_1 + \cfrac{1}{\xi_2 + \cfrac{1}{\xi_3 + ... + \cfrac{1}{\xi_k + ...}}}},$$

де $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k, ...$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини, які набувають значення $1, 2, ..., n, ...$ з ймовірностями $p_1, p_2, ..., p_n, ..$ відповідно, $p_i \neq 1 \ \forall i \in N$.

Розглянемо перетворення T :

$$Tx = \begin{cases} \{\frac{1}{x}\}, & \text{якщо} \quad x \in (0, 1), \\ 0, & \text{якщо} \quad x = 0. \end{cases}$$

Це перетворення є перетворенням одностороннього зсуву по ланцюговому розкладу числа x. Тобто $\forall x = [0; \alpha_1(x), \alpha_2(x), ..., \alpha_k(x), ...] \in [0,1] : \quad Tx = [0; \alpha_2(x), ..., \alpha_k(x), ...]$.

Нагадаємо, що множина A називається інваріантною або нерухомою відносно перетворення T, якщо $A = T^{-1}A$, де $T^{-1}A = \{x : Tx \in A\}, A \in \mathcal{B}$. Міра μ називається ергодичною відносно перетворення T, якщо довільна інваріантна множина $A \in \mathcal{B}$ є множиною або нульової, або одиничної міри. Міра μ називається інваріантною відносно перетворення T, якщо для довільної множини $E \in \mathcal{B}$ виконується рівність $\mu(T^{-1}E) = \mu(E)$.

Теорема 2. *Якщо $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k, ...$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини і $p_i \neq 1$, $\forall i \in N$, то μ_ξ — сингулярно неперервна відносно міри Лебега.*

Доведення. **І спосіб** Розглянемо перетворення одностороннього зсуву T. Відомо, що міра Гаусса μ_G, тобто ймовірнісна міра на одиничному відрізку зі щільністю $p(x) = \frac{1}{\ln 2}\frac{1}{1+x}$, ергодична і інваріантна відносно перетворення T ([**5**]). Міра Гаусса μ_G і міра Лебега λ абсолютно неперервні одна відносно одної $\mu_G \ll \lambda$ і $\lambda \ll \mu_G$. Таким чином, якщо якась властивість виконується майже скрізь відносно міри μ_G, то вона виконується майже скрізь і відносно міри λ. Покажемо, що міра μ_ξ також інваріантна відносно перетворення T. Візьмемо довільний циліндричний відрізок n-го рангу $\triangle^{c.f.}_{c_1c_2...c_n}$. Тоді $T^{-1}\triangle^{c.f.}_{c_1c_2...c_n} = \bigcup\limits_{\beta=1}^{\infty} \triangle^{c.f.}_{\beta c_1c_2...c_n}$.

$$\mu_\xi(\triangle^{c.f.}_{c_1c_2...c_n}) = p_{c_1} \cdot p_{c_2} \cdot ... \cdot p_{c_n}$$

і

$$\mu_\xi(\bigcup_{\beta=1}^{\infty} \triangle^{c.f.}_{\beta c_1c_2...c_n}) = p_1 \cdot p_{c_1} \cdot p_{c_2} \cdot ... \cdot p_{c_n} + ... + p_n \cdot p_{c_1} \cdot p_{c_2} \cdot ... \cdot p_{c_n} + ... =$$

$$= p_{c_1} \cdot p_{c_2} \cdot ... \cdot p_{c_n}(p_1 + ... + p_n + ...) = p_{c_1} \cdot p_{c_2} \cdot ... \cdot p_{c_n}.$$

Таким чином

$$\mu_\xi(\triangle^{c.f.}_{c_1c_2...c_n}) = \mu_\xi(\bigcup_{\beta=1}^{\infty} \triangle^{c.f.}_{\beta c_1c_2...c_n}).$$

Оскільки борелівська σ-алгебра породжується сімейством циліндрів різних рангів ланцюгового розкладу, то $\mu_\xi(T^{-1}E) = \mu_\xi(E)$ $\forall E \in \mathcal{B}$. Оскільки міри μ_G і μ_ξ інваріантні і ергодичні відносно перетворення T, то вони або співпадають, або взаємно сингулярні ([**5**]).

Розглянемо циліндричний відрізок 1-го рангу $\triangle^{c.f.}_1$.

$$\mu_\xi(\triangle^{c.f.}_1) = p_1$$

і

$$\mu_G(\triangle_1^{c.f.}) = \frac{1}{\ln 2}\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{dx}{1+x} = \frac{1}{\ln 2}(\ln 2 - \ln\frac{3}{2}) = \frac{1}{\ln 2}\cdot\ln\frac{4}{3}.$$

1a) Якщо $p_1 \neq \frac{1}{\ln 2}\cdot\ln\frac{4}{3}$, то $\mu_\xi \neq \mu_G$, і, отже, μ_ξ — сингулярно неперервна відносно λ.

1b) Якщо $p_1 = \frac{1}{\ln 2}\cdot\ln\frac{4}{3}$, то розглянемо циліндричний відрізок 2-го рангу $\triangle_{(1,1)}^{c.f.}$.

$$\mu_\xi(\triangle_{(1,1)}^{c.f.}) = p_1^2 = (\frac{1}{\ln 2}\cdot\ln\frac{4}{3})^2.$$

і

$$\mu_G(\triangle_{(1,1)}^{c.f.}) = \frac{1}{\ln 2}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}}\frac{dx}{1+x} = \frac{1}{\ln 2}(\ln(1+\frac{2}{3}) - \ln(1+\frac{1}{2})) = \frac{1}{\ln 2}\cdot\ln\frac{10}{9}.$$

Отже, $\mu_\xi(\triangle_{(1,1)}^{c.f.}) = (\frac{1}{\ln 2}\cdot\ln\frac{4}{3})^2 \neq \frac{1}{\ln 2}\cdot\ln\frac{10}{9} = \mu_G(\triangle_{(1,1)}^{c.f.})$ Тому μ_ξ — сингулярно неперервна відносно λ.

II спосіб

Нехай $M = [0,1]$ і $\mathcal{B}$ — борелівська σ-алгебра. Нагадаємо, що α-мірною мірою Хаусдорфа підмножини $E \subset M$ називається функціонал

$$H^\alpha(E) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\inf_{|E_j|\leq\varepsilon}\left\{\sum_j |E_j|^\alpha\right\}\right] = \lim_{\varepsilon\to 0} m_\varepsilon^\alpha(E),$$

де інфімум береться по всеможливих не більш ніж зчисленних ε-покриттях $\{E_j\}$ множини E, $E \subset \bigcup_j E_j$.

Невід'ємне число

$$\dim_H E = \inf\{\alpha :\ H^\alpha(E) = 0\}$$

називається розмірністю Хаусдорфа-Безиковича множини $E \subset M$.

Нехай ν — неперервна ймовірнісна міра, визначена на борелівській σ-алгебрі $\mathcal{B}$. Нехай $N_\nu = \{E :\ \ \nu(E) = 1\}$ — сімейство всіх (не обов'язково замкнених) носіїв міри ν. Невід'ємне число

$$\dim_H \nu = \inf_{E\in N_\nu}\{\dim_H E\}$$

називається розмірністю Хаусдорфа міри ν.

Якщо ймовірнісна міра містить абсолютно неперервну компоненту, то розмірність Хаусдорфа такої міри дорівнює 1.

В роботі [**9**] доведено, що для μ_ξ існує абсолютна константа $C < 1$ така, що при довільному ймовірнісному векторі $(p_1, p_2, ..., p_n, ...)$ розмірність Хаусдорфа ймовірнісної міри з незалежними однаково розподіленими символами не перевищує C, тобто $\dim_H \mu_\xi < C$. Тому μ_ξ — сингулярно неперервна відносно λ.

III спосіб

Нехай ξ_k — послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин, які набувають значень $1, 2, ..., n, ...$ з ймовірностями $p_1, p_2, ..., p_n, ..$ відповідно. Розглянемо випадкові величини $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n, ...$

$$\eta_k = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \xi_k = 1, \\ 0, & \text{якщо} \quad \xi_k \neq 1, k \in N. \end{cases}$$

Зауважимо, що випадкові величини ξ_k і η_k можна розглядати як вимірні функції від

$$x = \cfrac{1}{\alpha_1(x) + \cfrac{1}{\alpha_2(x) + \cfrac{1}{\alpha_3(x) + ... + \cfrac{1}{\alpha_k(x) + ...}}}},$$

де $\alpha_k(x) \in N$, $\forall k \in N$.

$$\xi_k(x) = \alpha_k(x) \quad \text{і} \quad \eta_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \alpha_k(x) = 1, \\ 0, & \text{якщо} \quad \alpha_k(x) \neq 1. \end{cases}$$

Випадкова величина $\eta_1(x)$ набуває значення 1 з ймовірністю p_1, а значення 0 з ймовірністю $1 - p_1$. Тоді $\eta_1(x), \eta_2(x), ..., \eta_n(x), ...$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини і $M\eta_1(x) = p_1$. За посиленим законом великих чисел для μ_ξ-майже всіх $x \in [0, 1]$ виконується рівність:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\eta_1(x) + \eta_2(x) + ... + \eta_n(x)}{n} = M\eta_1(x).$$

Отже,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{N_1(x, n)}{n} = p_1 \quad \text{для } \mu_\xi\text{-майже всіх} \quad x \in [0, 1].$$

де $N_1(x, n)$ — кількість чисел "1" серед перших n знаків у представленні числа x ланцюговим дробом.

Якщо існує скінченна границя

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N_1(x, n)}{n} = \nu_1(x),$$

то вона називається асимптотичною частотою цифри "1" серед елементів розкладу числа x в елементарний ланцюговий дріб.

Це означає, що μ_ξ зосереджена на множині, де асимптотична частота цифри 1 серед елементів розкладу числа x в ланцюговий дріб дорівнює p_1. Відомо ([**5**]), що для λ-майже всіх $x \in [0, 1]$ асимптотична частота цифри 1 в ланцюговому представленні дорівнює $\nu_1 := \frac{1}{\ln 2} \cdot \ln \frac{4}{3}$. Позначимо дану множину $A = \{x : \nu_1(x) = \nu_1\}$, $\lambda(A) = 1$.

1a) Нехай $p_1 \neq \nu_1$, тоді $\mu_\xi(\widetilde{A}) = 1$ і $\lambda(\widetilde{A}) = 0$, де $\widetilde{A} = \{x : \nu_1(x) = p_1\}$.

Отже, μ_ξ — сингулярно неперервна відносно λ.

1b) Нехай $p_1 = \nu_1$. Розглянемо перетворення одностороннього зсуву T.

Нехай $N_{(1,1)}(x,k)$ кількість комбінацій $(1,1)$ серед перших $(k+1)$ елементів розкладу числа x в ланцюговий дріб, тобто

$$N_{(1,1)}(x,k) = \#\{i : \quad (\alpha_i(x), \alpha_{i+1}(x)) = (1,1), \quad i \in \{1,2,3,...,k\}\}.$$

Якщо границя

$$\lim_{k\to\infty} \frac{N_{(1,1)}(x,k)}{k}$$

існує, то число $\nu_{(1,1)}(x)$ називають асимптотичною частотою пари $(1,1)$ у ланцюговому представленні числа x.

Нехай f — характеристична функція множини

$$\Delta^{c.f.}_{(1,1)} = \{x : \alpha_1(x) = 1 \wedge \alpha_2(x) = 1\}.$$

З ергодичної теореми слідує, що для λ-майже всіх $x \in [0,1]$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k(x)) = \int\limits_0^1 f(x) d\mu_G(x) = \frac{1}{\ln 2} \int_{\Delta^{c.f.}_{(1,1)}} \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{\ln 2} \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{2}{3}} \frac{dx}{1+x} =$$

$$= \frac{1}{\ln 2}(\ln(1+\frac{2}{3}) - \ln(1+\frac{1}{2})) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \ln\frac{10}{9} =: \nu_{(1,1)}.$$

Тоді множина $B = \{x : \nu_{(1,1)}(x) = \frac{1}{\ln 2} \cdot \ln\frac{10}{9}\}$ має повну міру Лебега.

Розглянемо випадкові вектори $(\xi_1;\xi_2), (\xi_2;\xi_3), (\xi_3;\xi_4), ..., (\xi_{n-1};\xi_n), (\xi_n;\xi_{n+1}), ...$.

Побудуємо випадкові величини

$$\varphi_k = \varphi_k(x) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } (\xi_k, \xi_{k+1}) = (1,1), \\ 0, & \text{якщо } (\xi_k, \xi_{k+1}) \neq (1,1). \end{cases}$$

Випадкові величини $\varphi_1, \varphi_3, ..., \varphi_{2n-3}, \varphi_{2n-1}...$ — незалежні однаково розподілені і $M\eta_1(x) = p_1^2$. За посиленим законом великих чисел для μ_ξ-майже всіх $x \in [0,1]$ виконується:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_1 + \varphi_3 + ... + \varphi_{2n-1} + \varphi_n}{n} = p_1^2. \tag{2}$$

Аналогічно $\varphi_2, \varphi_4, ..., \varphi_{2n-2}, \varphi_{2n}...$ — незалежні однаково розподілені випадкові величини і $M\eta_2(x) = p_1^2$. Тоді за посиленим законом великих чисел для μ_ξ-майже всіх $x \in [0,1]$ виконується рівність:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_2 + \varphi_4 + ... + \varphi_{2n-2} + \varphi_{2n}}{n} = p_1^2. \tag{3}$$

З (2) і (3) випливає, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\varphi_1 + \varphi_2 + ... + \varphi_{n-1} + \varphi_n}{n} = p_1^2 \quad \text{для } \mu_\xi\text{-майже всіх } x \in [0,1].$$

Отже, ймовірнісна міра μ_ξ зосереджена на множині, де відносна асимптотична частота пари $(1,1)$ дорівнює ${\nu_1}^2$ ($\nu_1 = p_1$ за припущенням). Міра Лебега цієї множини дорівнює нулю, оскільки $\nu_1^2 = (\frac{1}{\ln 2}\cdot \ln\frac{4}{3})^2 \neq \frac{1}{\ln 2}\cdot\ln\frac{10}{9} =: \nu_{(1,1)}$. Отже, μ_ξ — сингулярно неперервна відносно λ.

□

3. Спектральна класифікація сингулярно неперервних ймовірнісних мір, з незалежними символами ланцюгового розкладу

В роботі [**13**] зроблено поділ сингулярних ймовірнісних мір на типи за топологічними та метричними властивостями їх спектрів (C-тип, S-тип, K-тип).

Розглянемо випадкову величину ξ для якої

$$P^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & p_{12} & \cdot & p_{1k} & \cdot \\ 0 & p_{22} & \cdot & p_{2k} & \cdot \\ \frac{1}{4} & p_{32} & \cdot & p_{3k} & \cdot \\ 0 & p_{42} & \cdot & p_{4k} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{2^n} & p_{(2n-1)2} & \cdot & p_{(2n-1)k} & \cdot \\ 0 & p_{(2n)2} & \cdot & p_{(2n)k} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix},$$

де $p_{ik} > 0\ \forall k \geq 2\ \forall i \in N$.

Покажемо, що спектр випадкової величини ξ є множиною наступного виду:

$$S_{\mu_\xi} = (\bigcup_i [a_i, b_i]) \bigcup \{x_0\},$$

де $\{[a_i, b_i]\}$ — послідовність (неперекривних) відрізків, $x_0 = 0$.

Оскільки $p_{ik} > 0\ \forall k \geq 2\ \forall i \in N$, то довільний циліндричний відрізок $\triangle^{c.f.}_{i\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n}$ ($i = \{1, 3, ..., 2n-1, ...\}$, $\alpha_n \in N$, $\forall n \in N$) належить спектру S_{μ_ξ}.

При цьому

$$\mu_\xi(\bigcup_i\bigcup_{\alpha_2}\ldots\bigcup_{\alpha_n}\triangle^{c.f.}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k_0}}) = \sum_i\sum_{\alpha_2}\ldots\sum_{\alpha_n} p_{i1}\cdot p_{a_2 2}\cdot\ldots\cdot p_{a_{k_0}k_0} = 1.$$

Очевидно, що точка $x_0 = 0$ не належить жодному циліндричному відрізку $\triangle^{c.f.}_{i\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n}$, тобто не належить об'єднанню $(\bigcup_i\bigcup_{\alpha_2}\ldots\bigcup_{\alpha_n}\triangle^{c.f.}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k_0}})$. Оскільки, $\forall\varepsilon > 0$ існує $n_1 = n_1(\varepsilon, x)$ таке, що $|\triangle^{c.f.}_{i(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{n_1}(x)}| \subset (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, то точка x_0 є граничною для множини $(\bigcup_i\bigcup_{\alpha_2}\ldots\bigcup_{\alpha_n}\triangle^{c.f.}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k_0}})$. Отже, $S_{\mu_\xi} = (\bigcup_i [a_i, b_i]) \bigcup\{x_0\}$, де в якості $[a_i, b_i]$ можна взяти циліндричні відрізки першого рангу $\triangle^{c.f.}_i$, $i = 2l-1$, $l \in N$.

Таким чином, сингулярно неперервна ймовірнісна міра μ_ξ, розглянута в прикладі, не належить ні до C-типу, ні до S-типу, ні до K-типу і не є сумішшю цих типів.

У роботі ([**4**]) було запропоновано нову спектральну класифікацію сингулярно неперервних ймовірнісних мір і доведено, що довільна сингулярно неперервна міра може бути представлена у вигляді опуклої комбінації мір наведених нижче типів.

Означення 1. Сингулярно неперервна ймовірнісна міра μ на R^1 називається мірою чистого GC-типу, якщо існує ніде не щільна множина E така, що

$$\begin{cases} E \subset S_\mu, \\ \mu(E) = 1, \\ \forall x \in E, \quad \exists \varepsilon(x) > 0 : \quad \lambda([x-\varepsilon(x), x+\varepsilon(x)] \cap S_\mu) = 0. \end{cases}$$

Означення 2. Сингулярно неперервна ймовірнісна міра μ називається мірою чистого GP-типу, якщо існує ніде не щільна множина E така, що

$$\begin{cases} E \subset S_\mu, \\ \mu(E) = 1, \\ \forall x \in E \ \ \forall \varepsilon > 0 : \quad \lambda([x-\varepsilon, x+\varepsilon] \cap S_\mu) > 0. \end{cases}$$

Означення 3. Сингулярно неперервна ймовірнісна міра μ називається мірою чистого GS-типу, якщо існує послідовність (неперекривних) відрізків $\{[a_i, b_i]\}$ таких, що

$$\begin{cases} [a_i, b_i] \subset S_\mu, \\ \mu\left(\bigcup_i [a_i, b_i]\right) = 1. \end{cases}$$

Використовуючи результати досліджень топологічних та метричних властивостей спектрів розподілів випадкових величин з незалежними символами ланцюгового розкладу [**13**], дослідимо спектральну структуру випадкової величини ξ. Спочатку знайдемо необхідні і достатні умови того, що міра Лебега спектра S_{μ_ξ} дорівнювала нулю. Ця задача була розв'язана в [**13**]. Ми наведемо інше доведення.

Лема 1. *Нехай* $S_k = \{i : p_{ik} = 0\}$. *Для того, щоб міра Лебега спектра* S_{μ_ξ} *дорівнювала нулю необхідно і достатньо, щоб*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{i \in S_n} \frac{1}{i^2}) = +\infty. \tag{4}$$

Доведення. Як відомо [**13**] спектр розподілу випадкової величини ξ відрізняється не більш як зчисленною кількістю точок від множини

$$C[c.f., \{V_k\}] = \{x : x = \triangle_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_k \ldots}, \qquad \alpha_k \in V_k = \{i : p_{ik} \neq 0\}\}.$$

Тому $\lambda(C[c.f., \{V_k\}]) = \lambda(S_{\mu_\xi})$.

Позначимо $C_n = C_n[c.f., \{V_k\}] = \{x : \triangle_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}, \alpha_j \in V_j, \forall j = \overline{1,n}\}$.

Тоді $C[c.f., \{V_k\}] = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$ і $\lambda(S_{\mu_\xi}) = \lim\limits_{n\to\infty} \lambda(C_n)$.

Позначимо $\overline{C_n} = C_{n-1} \backslash C_n = \{x : \triangle_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n}, \alpha_j \in V_j, \forall j = \{1, ..., n-1\}, \alpha_n \in S_n\}$.

Тоді

$$\lambda(C_{n-1}) = \lambda(C_n) + \lambda(\overline{C_n})$$

і

$$\lambda(S_{\mu_\xi}) = \lim_{n\to\infty} \lambda(C_n) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{\lambda(C_k)}{\lambda(C_{k-1})} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(C_k)}{\lambda(C_{k-1})} = \prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{\lambda(\overline{C_n})}{\lambda(C_{n-1})}). \tag{5}$$

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 - \frac{\lambda(\overline{C_n})}{\lambda(C_{n-1})}) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(\overline{C_n})}{\lambda(C_{n-1})} = +\infty.$$

Нехай $\alpha_k \in V_k \ \forall k = \{1, 2, ..., n-1, \}$, тоді $\triangle_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}} \subset C_{n-1}$.

Відомо [**18**], що

$$\frac{1}{3i^2} \leq \frac{\lambda(\triangle_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1} i})}{\lambda(\triangle_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}})} \leq \frac{2}{i^2}.$$

Тому

$$(\sum_{i\in S_n} \frac{1}{3i^2}) \lambda(\triangle_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}}) \leq \sum_{i\in S_n} \lambda(\triangle_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1} i}) \leq (\sum_{i\in S_n} \frac{2}{i^2}) \lambda(\triangle_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}}).$$

і, отже,

$$\begin{cases} \sum\limits_{\alpha_j\in V_j, j<n} \ \sum\limits_{i\in S_n} \lambda(\triangle_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1} i}) \leq (\sum\limits_{i\in S_n} \frac{2}{i^2}) \cdot \sum\limits_{\alpha_j\in V_j, j<n} \lambda(\triangle_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}}), \\ \sum\limits_{\alpha_j\in V_j, j<n} \ \sum\limits_{i\in S_n} \lambda(\triangle_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1} i}) \geq (\sum\limits_{i\in S_n} \frac{1}{3i^2}) \cdot \sum\limits_{\alpha_j\in V_j, j<n} \lambda(\triangle_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_{n-1}}); \end{cases}$$

що рівносильно наступній умові

$$(\sum_{i\in S_n} \frac{1}{3i^2}) \lambda(C_{n-1}) \leq \lambda(\overline{C_n}) \leq (\sum_{i\in S_n} \frac{2}{i^2}) \lambda(C_{n-1}).$$

Тому

$$\frac{1}{3} \sum_{i\in S_n} \frac{1}{i^2} \leq \frac{\lambda(\overline{C_n})}{\lambda(C_{n-1})} \leq 2 \sum_{i\in S_n} \frac{1}{i^2}. \tag{6}$$

Беручи до уваги (5) та (6), отримуємо, що

$$\lambda(S_{\mu_\xi}) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(\overline{C_n})}{\lambda(C_{n-1})} = +\infty \qquad \Leftrightarrow \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (\sum_{i\in S_n} \frac{1}{i^2}) = +\infty.$$

$\square$

Наступна теорема стверджує спектральну чистоту розподілу випадкової величини ξ і дає критерій належності ξ до кожного з чистих GC- GP- і GS-типів.

Теорема 3. *Позначимо* $S_k = \{i : \quad p_{ik} = 0\}$, $V_k = N \setminus S_k = \{i : p_{ik} > 0\}$. *Ймовірнісна міра* μ_ξ *сингулярна відносно міри Лебега, причому у випадку неперервності вона має чистий спектральний тип і є*

(1) мірою чистого GS*-типу тоді і тільки тоді, коли матриця* P^* *має лише скінченну кількість стовпчиків, що містять нулі;*

(2) мірою чистого GP*-типу тоді і тільки тоді, коли нескінченна кількість стовпчиків матриці* P^* *містить нулі і при цьому*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{i\in S_k}\frac{1}{i^2}) < +\infty;$$

(3) мірою чистого GC*-типу тоді і тільки тоді, коли нескінченна кількість стовпчиків матриці* P^* *містить нулі і при цьому*

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{i\in S_k}\frac{1}{i^2}) = +\infty.$$

Доведення. (1) Якщо P^* містить скінченну кількість стовпчиків з нулями, то $\exists k_0 : \forall k > k_0$, $p_{ik} > 0$, $\forall i \in N$. Покажемо, що довільний циліндричний відрізок $\triangle^{c.f.}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k_0}}$ $(\alpha_j \in V_j, j = \overline{1, k_0})$ належить спектру S_{μ_ξ}. Справді, $\forall x \in \triangle^{c.f.}_{c_1c_2\ldots c_{k_0}}$ $(c_j \in V_j, j = \overline{1, k_0})$ та $\forall\varepsilon > 0$ знайдеться такий номер $k_1 = k_1(\varepsilon)$, що: $k_1 > k_0$, $\triangle^{c.f.}_{c_1c_2\ldots c_{k_0}} \supset \triangle^{c.f.}_{c_1c_2\ldots c_{k_0}\ldots c_{k_1}} \ni x$ і $|\triangle^{c.f.}_{c_1c_2\ldots c_{k_0}\ldots c_{k_1}}| < \varepsilon$.

При цьому

$$\mu_\xi(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \geq \mu_\xi(\triangle^{c.f.}_{c_1c_2\ldots c_{k_1}}) = \prod_{j=1}^{k_1} p_{c_j j} > 0,$$

бо $c_j \in V_j$, $\forall j \leq k_1$.

Тоді

$$\mu_\xi(\bigcup_{a_1\in V_1}\bigcup_{a_2\in V_2}\cdots\bigcup_{a_{k_0}\in V_{k_0}}\triangle^{c.f.}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_{k_0}}) = \sum_{a_1\in V_1}\sum_{a_2\in V_2}\cdots\sum_{a_{k_0}\in V_{k_0}} p_{a_1 1}\cdot p_{a_2 2}\cdot\ldots\cdot p_{a_{k_0}k_0} = 1,$$

оскільки $\sum\limits_{a_j\in V_j} p_{a_j j} = 1$, $\forall j \in N$.

Тому, якщо матриця P^* має лише скінченну кількість стовпчиків, які містять нулі, то сингулярно неперервна ймовірнісна міра μ_ξ є мірою GS-типу.

(2) Нехай матриця P^* має нескінченну кількість стовпчиків, які містить нулі і при цьому $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\sum\limits_{i\in S_k}\frac{1}{i^2}) < +\infty$.

Розглянемо множину

$$C[c.f., \{V_k\}] = \{x : x = \triangle^{c.f.}_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k\ldots}, \qquad \alpha_k \in V_k\}.$$

Ця множина є ніде не щільною. Справді, довільний інтервал $(a,b) \subset (0,1)$ цілком містить циліндричний відрізок деякого рангу n_0 : $\triangle^{c.f.}_{c_1c_2\ldots c_{n_0}} \subset (a,b)$. Оскільки P^* містить нескінченну кількість стовпчиків з нулями, то $\exists i_0 \in S_{n_0+k_0}$ $p_{i_0(n_0+k_0)} = 0$ і $\triangle^{c.f.}_{c_1c_2\ldots c_{n_0}\ldots c_{n_0+k_0-1}i_0} \subset \triangle^{c.f.}_{c_1c_2\ldots c_{n_0}}$.

Тоді внутрішність циліндра $\triangle^{c.f.}_{c_1c_2\ldots c_{n_0}\ldots c_{n_0+k_0-1}i_0}$ не має жодної спільної точки з $C[c.f.,\{V_k\}]$.

Очевидно, що $C[c.f.,\{V_k\}] \subset S_{\mu_\xi}$.

Нехай $x \in C[c.f.,\{V_k\}]$. Тоді $x = \triangle^{c.f.}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_k(x)\ldots}, \qquad \alpha_k(x) \in V_k$. Для довільного $\varepsilon > 0$ існує $n_1 = n_1(\varepsilon, x)$ таке, що $|\triangle^{c.f.}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{n_1}(x)}| < \varepsilon$.

Тоді

$$\mu_\xi(x-\varepsilon, x+\varepsilon) \geq \mu_\xi(\triangle^{c.f.}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{n_1}(x)}) = \prod_{j=1}^{n_1} p_{\alpha_j(x)j} > 0,$$

бо $\alpha_j(x) \in V_j$, $\forall j \leq n_1$.

Покажемо, що $\forall x \in C[c.f.,\{V_k\}]$, $\forall \varepsilon > 0$ множина $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)\bigcap S_{\mu_\xi}$ має додатну міру Лебега.

Нехай $n_1 = n_1(\varepsilon, x)$ — означене раніше натуральне число.

Тоді

$$((x-\varepsilon, x+\varepsilon)\bigcap C[c.f.,\{V_k\}]) \supset (\triangle^{c.f.}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{n_1}(x)}\bigcap C[c.f.,\{V_k\}]) =$$

$$= \{x : x = \triangle^{c.f.}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{n_1}(x)c_{n_1+1}c_{n_2+1}\ldots}, де \qquad c_j \in V_j, \forall j > n_1\} =:$$

$$C_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{n_1}(x)} = \lim_{n\to\infty}(\triangle^{c.f.}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{n_1}(x)}\bigcap C_n),$$

де множини C_n були означені в доведенні попередньої леми. Тому, використовуючи ті ж самі міркування, отримаємо:

$$\lim_{n\to\infty}\lambda(\triangle^{c.f.}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{n_1}(x)}\bigcap C_n) =$$

$$= \lambda(\triangle^{c.f.}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{n_1}(x)}) \cdot \prod_{n=n_1+1}^{\infty}(1 - \frac{\lambda(\triangle^{c.f.}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{n_1}(x)}\bigcap \overline{C_n})}{\lambda(\triangle^{c.f.}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_{n_1}(x)}\bigcap C_{n-1})}).$$

Оскільки за умовою ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(\sum\limits_{i\in S_k}\frac{1}{i^2}) < +\infty$ збігається,то

$$\sum_{n=n_1+1}^{\infty}(1 - \frac{\lambda(\triangle^{c.f.}_{a_1(x)a_2(x)\ldots a_{n_1}(x)}\bigcap \overline{C_n})}{\lambda(\triangle^{c.f.}_{a_1(x)a_2(x)\ldots a_{n_1}(x)}\bigcap C_{n-1})}) < +\infty.$$

Це означає, що $\lambda((x-\varepsilon, x+\varepsilon)\bigcap S_{\mu_\xi}) \geq \lambda(C_{a_1(x)a_2(x)\ldots a_{n_1}(x)})$.

Отже, у цьому випадку сингулярно неперервна ймовірнісна міра μ_ξ має GP-тип.

(3) Нехай матриця має нескінченну кількість стовпчиків, які містять нулі і при цьому $\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{i\in S_k}\frac{1}{i^2}) = +\infty$.

У цьому випадку множина $C[c.f., \{V_k\}]$ є ніде не щільною і повністю належить спектру (див. доведення п.2).

Покажемо, що $\forall x \in C[c.f., \{V_k\}]\ \exists \varepsilon(x) > 0 : \lambda((x-\varepsilon, x+\varepsilon)\bigcap S_{\mu_\xi}) = 0$.

Оскільки з умови $\sum_{k=1}^{\infty}(\sum_{i\in S_k}\frac{1}{i^2}) = +\infty$ випливає нуль-мірність спектра (див. лему 1), то в якості $\varepsilon(x)$ можна вибирати довільне додатне число. Отже, у випадку 3) міра μ_ξ має чистий GC-тип.

Оскільки умови 1), 2), 3) є попарно несумісними і одна з них завжди виконується, то міра має чистий спектральний тип.

□

Подяки. Ця робота була частково підтримана проектами DFG KO1989/6-1 та DAAD A/11/85586. Автори вдячні професору Ювалу Пересу (Yuval Peres, Microsoft Research) за корисне обговорення проблем, пов'язаних з метричною та ймовірнісною теоріями ланцюгових дробів.

Література

[1] *S. Albeverio, V. Koshmanenko, M. Pratsiovytyi, G. Torbin*, On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent $\widetilde{Q}$-symbols, Methods of Functional Analysis and Topology, **17** (2011), no. 2, 97 – 111.

[2] *S. Albeverio, G. Torbin*, Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q^*-digits, Bull. Sci. Math., **129** (2005), no. 4, 356 – 367.

[3] *P. Billingsley*, Ergodic theory and information, John Willey and Sons, New York, 1965.

[4] *C. I. Everett*, Representations for real numbers, Bull. Amer. math. Soc., **52** (1946), 861 – 869.

[5] *K. J. Falconer* Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications, John Willey and Sons, Chichester, 1990.

[6] *J. E. Hutchinson*, Fractals and self similarity, Indiana Univ. Math. J., **30** (1981), 713 – 747.

[7] *S. Kakutani*, Equivalence of infinite product measures, Ann. of Math., **49**(1948), P.214-224.

[8] *J.R. Kinney, T.S. Pitcher*, On dimension of some sets defined in terms of f-expansions, Z. Wahrsch. verw. Geb., **4**(1966), 293-315.

[9] *Yu. Kifer, Yu. Peres, B. Weiss* A dimension gap for continued fractions with independent digits, *Israel J. Math.*, **124**(2001), 61-76.

[10] *R. Nikiforov, G. Torbin*, Ergodic properties of the Q_∞-expansion and fractal properties of probability measures with independent Q_∞-digits, Transactions of the National Pedagogical University of Ukraine. Mathematics, **9** (2008), 150-174.

[11] *Yu. Peres, G. Torbin*, Continued fractions and dimensional gaps, in preparation.

[12] *A. Renyi*, Representations for real numbers and their ergodic properties, Acta Math. Sci. Hungar., **8** (1957), 477-493.

[13] *C. A. Rogers*, Hausdorff measures, Cambridge Univ. Press, London, 1970.

[14] *A. F. Turbin, M. V. Pratsiovytyi*, Fractal sets, functions, and distributions, Naukova Dumka, Kiev, 1992.

[15] *Брагин, А. Б.* Сингулярные распределения случайных величин, заданных с помощью цепных дробей / А. Б. Брагин // Случайные эволюции: теорет. и прикл. задачи. — Киев: Ин-т математики АН Украины, 1992. — С. 10-16.

[16] *Іваненко, Г. В. Нікіфоров, Р. О. Торбін, Г. М.* Ергодичний підхід до дослідження сингулярних ймовірнісних мір / Г. В. Іваненко, Р. О Нікіфоров, Г. М. Торбін // Наук. час. НПУ імені М. П. Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки. — 2006. — №7. — С.126-142.

[17] *Працьовитий, М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів / М. В. Працьовитий. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[18] *Хинчин А. Я.* Цепные дроби / А. Я. Хинчин. — 3-е изд. — М.: Физматгиз, 1961. — 112 с.

References

[1] Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G., *Methods of Functional Analysis and Topology*, 2011, **17**, no. 2, pp. 97 – 111.

[2] Albeverio S., Torbin G., *Bull. Sci. Math.*, 2005, **129**, no. 4, pp. 356 – 367.

[3] Billingsley P., *Ergodic theory and information*, John Willey and Sons, New York, 1965.

[4] Everett C. I., *Bull. Amer. math. Soc.*, 1946, **52**, pp. 861 – 869.

[5] Falconer K. J., *Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications*, John Willey and Sons, Chichester, 1990.

[6] Hutchinson J. E., Indiana Univ. Math. J.,1981, **30**, pp. 713 – 747.

[7] Kakutani S., *Ann. of Math.*, 1948, **49**, pp. 214-224.

[8] Kinney J. R., Pitcher T. S., *Z. Wahrsch. verw. Geb.*, 1966, **4**, pp. 293-315.

[9] Kifer Yu., Peres Yu., Weiss B., *I*srael J. Math., 2001, **124**, pp. 61-76.

[10] Nikiforov R., Torbin G., *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)*, 2008, 9, pp. 150-174.

[11] Peres Yu., Torbin G., *Continued fractions and dimensional gaps*, in preparation.

[12] Renyi A., *Acta Math. Sci. Hungar.*, 1957, 8, pp. 477-493.

[13] Rogers C. A., *Hausdorff measures*, Cambridge Univ. Press, London, 1970.

[14] Turbin A. F., Pratsiovytyi M. V., *Fraktalnye mnozhestva, funkcii, rasspredeleniya (Fractal sets, functions and distributions)*, Naukova Dumka, Kiev, 1992, 208 p.

[15] Bragin A. B. *Sluchajnye evoljucyi: teoret. i prykl. zadachy (Stochastic evolutions: theoretical and applied problems)*, Kyiv, 1992, pp. 10-16.

[16] Ivanenko G., Nikiforov R., Torbin G. *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)*, 2006, 7, pp. 126-142.

[17] Pratsiovytyi M. V. *Fraktalnyi pidhid u doslidzhennjah synguljarnyh rozpodiliv (Fractal approach to investigations of singular distributions)*, Kyiv, 1998, 296 p.

[18] Hinchyn A. Ja. *Tcepnye drobi (Continued fractions)*, 1961, 112 p.