*Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2012, № 13(1).— С. 181–197.

# Побудова асимптотики розв'язків лінійних сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь вищих порядків з виродженнями

С. П. Пафик,

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

В. П. Яковець,

Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова

Анотація. Побудовано асимптотику лінійно незалежних розв'язків однорідної сингулярно збуреної системи лінійних диференціальних рівнянь довільного $m$-го порядку з матрицею при старших похідних, яка вироджується з прямуванням малого параметра до нуля. Для побудови відповідних асимптотичних розвинень використовується теорія поліноміальних матричних в'язок. Розглянуто випадок простого спектра характеристичного полінома.

# Construction of the asymptotic solution of the homogeneous degenerated singularly perturbed system for linear differential equations of higher orders

S. P. Pafyk,

National Pedagogical Dragomanov University

V. P. Yakovets,

National Pedagogical Dragomanov University

Abstract. It is constructed the asymptotic of linearly independent solutions of the homogeneous singularly perturbed systems of linear differential equations $m$-order with the the matrix of the older derivative which is degenerating when small parameter is to zero. For the building of the corresponding expansions the theory of the polynomial matrix brunches is used.

It is investigated the case of the simple spectrum of characteristic polynom.

## 1. Постановка задачі

Розглянемо систему диференціальних рівнянь вигляду

$$\varepsilon^{mh}A_m(t,\varepsilon)\frac{d^m x}{dt^m}+\varepsilon^{(m-1)h}A_{m-1}(t,\varepsilon)\frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}+...+\varepsilon^h A_1(t,\varepsilon)\frac{dx}{dt}+A_0(t,\varepsilon)x=0, \qquad (1)$$

де $x(t,\varepsilon)$ – шуканий $n$-вимірний вектор, $A_i(t,\varepsilon),\ i=\overline{0,m}$, – дійсні або комплексно-значні матриці $n$-го порядку, $\varepsilon\in(0;\varepsilon_0]$ – малий дійсний параметр, $h\in N, t\in[0;T]$.

Будемо передбачати, що виконуються наступні умови:

1°. матриці $A_i(t,\varepsilon), i=\overline{0,m}$, допускають на відрізку $[0;T]$ рівномірні асимптотичні розвинення за степенями $\varepsilon$:

$$A_i(t,\varepsilon)\sim\sum_{k\geq 0}\varepsilon^k A_i^{(k)}(t), i=\overline{0,m}; \qquad (2)$$

2°. матриці $A_i^{(k)}(t), i=\overline{0,m}, k=0,1,...,$ – нескінченно диференційовані на відрізку $[0;T]$;

3°. $\det A_m^{(0)}(t)=0, \forall t\ \epsilon\ [0;T]$.

Питання побудови асимптотичних розв'язків системи (1) за степенями малого параметра вивчалось різними авторами [1-8]. Однак ними розглядались в основному системи рівнянь другого порядку. Системи ж рівнянь вищих порядків досліджувались лише в найпростіших випадках і, як правило , за умови, коли матриці $A_i(t,\varepsilon), i=\overline{0,m-1}$, нульові, а $A_m(t,\varepsilon)$ – одинична [9],що, на наш погляд, обумовлено намаганням мати справу з однією граничною матрицею $A_0^{(0)}(t)$ та використовувати можливість її зведення до канонічної форми Жордана. Більш загальна система при $h=1$ і одиничною матрицею при старшій похідній розглядається в [10], де для побудови асимптотичних розв'язків використовується розклад характеристичного полінома даної системи на лінійні множники.

У даній роботі для дослідження асимптотики лінійно незалежних розв'язків системи (1) використаємо теорію поліноміальних матричних в'язок. З цією метою у пункті 2 наводяться деякі допоміжні результати, які стосуються поліноміальних в'язок матриць. У пункті 3 доводиться основна теорема, якою визначається вигляд формальних розв'язків системи (1) у випадку простих коренів характеристичного рівняння. У процесі доведення цієї теореми дається алгоритм, за яким визначаються коефіцієнти відповідних формальних розвинень. У заключному пункті 4 сформульовано умови, за виконання яких побудовані формальні розв'язки мають асимптотичний характер, і наводяться відповідні асимптотичні оцінки.

## 2. Деякі допоміжні результати

Розглянемо над полем комплексних чисел поліноміальну в'язку матриць

$$P(\lambda)=A_0+\lambda A_1+...+\lambda^{m-1}A_{m-1}+\lambda^m A_m. \qquad (3)$$

При цьому вважатимемо, що матриця $A_m$ вироджена, тобто $\det A_m = 0$.

**Означення 1.** Поліноміальну в'язку матриць $P(\lambda)$ будемо називати регулярною, якщо $\det P(\lambda) \neq 0$, і сингулярною, якщо $\det P(\lambda) \equiv 0, \forall\ \lambda \in C$.

Поряд з (3) розглянемо в'язку матриць

$$P(\lambda,\omega) = \omega^m A_0 + \omega^{m-1}\lambda A_1 + ... + \omega\lambda^{m-1}A_{m-1} + \lambda^m A_m,$$

яка залежить від двох параметрів $\lambda$ й $\omega$.

Знайдемо її інваріантні многочлени

$$i_s(\lambda,\omega) = \frac{D_{n-s+1}(\lambda,\omega)}{D_{n-s}(\lambda,\omega)}, s = \overline{1,n},$$

де $D_k(\lambda,\omega)$ – найбільший спільний дільник усіх мінорів $k$-го порядку матриці $P(\lambda,\omega)$ [11, с. 314].

Розклавши інваріантні многочлени $i_s(\lambda,\omega), s = \overline{1,n}$, на незвідні множники над полем комплексних чисел, отримаємо дві групи елементарних дільників: $e_i(\lambda,\omega) = (\alpha_i\lambda + \beta_i\omega)^{k_i}$ і $e_j(\lambda,\omega) = \omega^{s_j}$, де $\alpha_i, \beta_i \in C;\ k_i, s_j \in N$.

Поклавши в $e_i(\lambda,\omega)$ $\omega = 1$, дістанемо елементарні дільники в'зки (3). Що ж стосується другої групи елементарних дільників, то вони є елементарними дільниками симетричної в'язки матриць

$$M(\omega) = A_m + \omega A_{m-1} + ... + \omega^{m-1}A_1 + \omega^m A_0, \tag{4}$$

що відповідають її нульовому власному значенню.

Слідуючи [8, с. 42], елементарні дільники першої групи називатимемо скінченними елементарними дільниками поліноміальної в'язки матриць $P(\lambda)$, а елементарні дільники другої групи – нескінченними елементарними дільниками цієї в'язки.

Додержуючись [8, с. 41-42], введемо поняття жорданового ланцюжка векторів для поліноміальної в'язки (3).

**Означення 2.** Число $\lambda_0$ називатимемо власним значенням в'язки матриць $P(\lambda)$, а ненульові вектори $\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_p$ – відповідним жордановим ланцюжком власного та приєднаних векторів завдовжки $p$, якщо виконуються рівності

$$P(\lambda_0)\varphi_1 = 0;$$

$$P(\lambda_0)\varphi_i + \sum_{k=1}^{\min(i-1,m)} \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!}\Big|_{\lambda=\lambda_0} \varphi_{i-k} = 0,\ i = \overline{2,p};$$

а рівняння

$$P(\lambda_0)y + \sum_{k=1}^{\min(p,m)} \frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!}\Big|_{\lambda=\lambda_0} \varphi_{p+1-k} = 0$$

не має розв'язків відносно $y$.

Справджується наступне твердження.

**Лема.** Якщо в'язка матриць $P(\lambda)$ регулярна, то:

1) сума кратностей всіх її скінченних та нескінченних елементарних дільників дорівнює $mn$;

2) кожному скінченному елементарному дільнику кратністю $p$ відповідає жорданів ланцюжок векторів завдовжки $p$;

3) якщо в'язка матриць $P(\lambda)$ має нескінченний елементарний дільник кратністю $q$, то нульовому власному значенню симетричної в'язки $M(\omega)$ відповідає жорданів ланцюжок векторів завдовжки $q$.

Доведення. Поряд з поліноміальною в'язкою матриць (3) розглянемо лінійну в'язку $(mn \times mn)$-матриць $L(\lambda) = \widetilde{A} + \lambda\widetilde{B}$, в якій матриці $\widetilde{A}$ та $\widetilde{B}$ мають блоковий вигляд:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\dots & 0 & E \\ (-1)^{m-1}A_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\dots & 0 & 0 \\ (-1)^{m-2}A_1 & E & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\dots & 0 & 0 \\ (-1)^{m-3}A_2 & 0 & E & 0 & \dots & 0 & 0\dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{k+1}A_{m-k-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\dots & 0 & 0 \\ (-1)^{k}A_{m-k-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & E & 0\dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-1)^{2}A_{m-3} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\dots & 0 & 0 \\ (-1)^{1}A_{m-2} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0\dots & E & A_{m-1} \end{pmatrix};$$

$$\widetilde{B} = \mathrm{diag}\{E, E, ..., E, A_m\}, \tag{5}$$

де $E$ та $0$ – відповідно одинична та нульова матриці $n$-го порядку.

Покажемо, що визначники в'язок матриць $P(\lambda)$ і $L(\lambda)$ збігаються. З цією метою виконаємо над визначником лінійної в'язки $L(\lambda)$ послідовно еквівалентні перетворення **A**:

1. Множимо його $m$-й стовпець на $\lambda$-матрицю $-\lambda E$ і додамо до 1-го стовпця, потім 1-й рядок отриманого визначника множимо на $\lambda$-матрицю $-A_{m-1} - \lambda A_m$ і додаємо до $m$-го рядка;

2. $i$-й рядок ($i = m,\ m-1, ...,\ 3$) отриманого визначника множимо на $\lambda-$матрицю $-\lambda E$ і додаємо до $(i-1)$-го, потім $(i-1)$-й стовпець отриманого визначника множимо на $\lambda-$матрицю $(-1)^{m-i+2}\sum_{j=0}^{m-i+2} \lambda^{m+2-i-j} A_{m-j}$ і додаємо до 1-го;

3.У отриманому визначнику міняємо місцями 1-й та 2-й рядки, а потім $i$-й стовпець з $m$-м, $(i = \overline{2, m-1})$.

У результаті отримаємо $\det L(\lambda) = \det P(\lambda)$.

Отже, власні значення в'язок $L(\lambda)$ і $P(\lambda)$ збігаються. Покажемо, що скінченні та нескінченні елементарні дільники цих в'язок також збігаються.

Виконавши над лінійною в'язкою $L(\lambda)$ перетворення $\mathbf{A}$, зведемо її до еквівалентної $\lambda$-матриці $\mathrm{diag}\{P(\lambda),\ E, ...,\ E\}$, елементарні дільники якої збігаються з елементарними дільниками поліноміальної в'язки матриць $P(\lambda)$. Оскільки ж еквівалентні $\lambda$-матриці мають одні й ті самі елементарні дільники [11], то звідси випливає, що скінченні елементарні дільники поліноміальної в'язки $P(\lambda)$ збігаються із скінченними елементарними дільниками лінійної в'язки $L(\lambda)$.

Аналогічно встановлюємо, що елементарні дільники поліноміальної в'язки матриць $M(\omega)$, симетричної в'язці $P(\lambda)$, збігаються з елементарними дільниками відповідної лінійної в'язки $\mathbf{M}(\omega) = \widetilde{B} + \omega\widetilde{A}$, симетричної в'язці $L(\lambda)$. Для цього над лінійною в'язкою матриць $\mathbf{M}(\omega)$ виконаємо еквівалентні перетворення $\mathbf{B}$:

1. Множимо $i$-й рядок $(i = \overline{2, m-1})$ в'язки $\mathbf{M}(\omega)$ на $\omega$-матрицю $(-1)^{-1}\omega E$ і додаємо до $(i{+}1)$-го рядка, потім $i$-й стовпець множимо на $\omega-$матрицю $(-1)^{m+2-i}\sum_{j=0}^{i-2}\omega^{i-j-1}A_j$ і додаємо до 1-го;

2. Множимо 1-й стовпець отриманої в'язки на $\omega$-матрицю $(-1)^{-1}\omega E$ і додаємо до $m$-го, потім 1-й рядок отриманої в'язки множимо на $\omega$-матрицю $\sum_{j=0}^{m-2}\omega^{m-j-1}A_j$ і додаємо до $m$-го.

У результаті дістанемо $\mathrm{diag}\{E,\ E, ...,\ M(\omega)\}$, звідки випливає, що збігаються також і нескінченні елементарні дільники в'язок $P(\lambda)$ і $L(\lambda)$.

Оскільки сума кратностей всіх скінченних і нескінченних елементарних дільників лінійної регулярної в'язки матриць $L(\lambda)$ дорівнює $mn$, то такою буде й сума кратностей відповідних елементарних дільників поліноміальної в'язки $P(\lambda)$.

Нехай в'язка матриць $P(\lambda)$ має скінченний елементарний дільник $(\lambda - \lambda_0)^p$ кратністю $p$, що відповідає власному значенню $\lambda_0$. За доведеним вище такий самий скінченний елементарний дільник матиме також відповідна блокова лінійна в'язка $L(\lambda)$. Згідно теоремою 1.7 із [8, с. 38)] цьому елементарному дільнику відповідає жорданів ланцюжок завдовжки $p$ $mn$-вимірних векторів, що складається з власного вектора $\varphi_1$ і $p-1$ приєднаних векторів $\varphi_i$, $i = \overline{2, p}$, які задовольняють співвідношення

$$(\widetilde{A} + \lambda_0\widetilde{B})\varphi_1 = 0, \tag{6}$$

$$(\widetilde{A} + \lambda_0\widetilde{B})\varphi_i + \widetilde{B}\varphi_{i-1} = 0,\ i = \overline{2, p}, \tag{7}$$

а рівняння

$$(\widetilde{A}+\lambda_0\widetilde{B})x+\widetilde{B}\varphi_p=0 \tag{8}$$

не має розв'язку відносно $x$.

Позначимо $\varphi_i = col[\varphi_i^{(1)};...;\varphi_i^{(k)};...;\varphi_i^{(n)}]$, де $\varphi_i^{(k)}$, $i=\overline{1,p}, k=\overline{1,m}$,– $n$-вимірні вектори, координатами яких є відповідні координати вектора $\varphi_i$. Взявши до уваги структуру матриць $\widetilde{A}$ та $\widetilde{B}$, з (6), (7) матимемо

$$P(\lambda_0)\varphi_1^{(1)}=0,$$

$$P(\lambda_0)\varphi_i^{(1)}+\sum_{k=1}^{\min(i-1,m)}\frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!}|_{\lambda=\lambda_0}\varphi_{i-k}^{(1)}=0,\ i=\overline{2,p},$$

а з несумісності рівняння (8) випливає несумісність рівняння

$$P(\lambda_0)y+\sum_{k=1}^{\min(p,m)}\frac{P^{(k)}(\lambda)}{k!}|_{\lambda=\lambda_0}\varphi_{p+1-k}^{(1)}=0.$$

Таким чином, скінченному елементарному дільнику кратністю $p$ поліноміальної в'язки матриць $P(\lambda)$ відповідає жорданів ланцюжок векторів, довжина якого збігається з кратністю цього елементарного дільника.

Нехай тепер поліноміальна в'язка матриць $P(\lambda)$ має нескінченний елементарний дільник кратністю q Ṫоді за доведеним вище такий самий елементарний дільник матиме лінійна в'язка матриць $L(\lambda)$. Згідно з тією ж теоремою 1.7 із [8] нульовому власному значенню в'язки матриць $\mathbf{M}(\omega)$, симетричної в'язці $L(\lambda)$, відповідає жорданів ланцюжок векторів завдовжки $q$, що складається з $mn$-вимірних векторів $\widetilde{\varphi}_i,\ i=\overline{1,q}$, що задовольняють співвідношення

$$\widetilde{B}\widetilde{\varphi}_1=0, \tag{9}$$

$$\widetilde{B}\widetilde{\varphi}_i+\widetilde{A}\widetilde{\varphi}_{i-1}=0,\ i=\overline{2,q}, \tag{10}$$

а рівняння

$$\widetilde{B}x+\widetilde{A}\widetilde{\varphi}_p=0 \tag{11}$$

не має розв'язку.

Позначимо $\widetilde{\varphi}_i = col[\widetilde{\varphi}_i^{(1)};...;\widetilde{\varphi}_i^{(k)};...;\widetilde{\varphi}_i^{(n)}]$, де $\widetilde{\varphi}_i^{(k)}$, $i=\overline{1,q}$, $k=\overline{1,m}$, - $n$-вимірні вектори, координатами яких є відповідні координати вектора $\widetilde{\varphi}_i$. Врахувавши структуру матриць $\widetilde{A}$ та $\widetilde{B}$, з (9), (10) матимемо

$$A_m\widetilde{\varphi}_1^{(m)}=0;$$

$$A_m\widetilde{\varphi}_i^{(m)} + \sum_{k=1}^{\min(i-1,m)} A_{m-k}\widetilde{\varphi}_{i-k}^{(m)} = 0,\ i=\overline{2,q},$$

а з несумісності рівняння (11) випливає несумісність рівняння

$$A_m y + \sum_{k=1}^{\min(i-1,m)} A_{m-k}\widetilde{\varphi}_{q+1-k}^{(m)} = 0.$$

Отже, якщо поліноміальна в'язка матриць $P(\lambda)$ має нескінченний елементарний дільник кратністю q , то нульовому власному значенню в'язки матриць $M(\omega)$ відповідає жорданів ланцюжок завдовжки q .

Лему доведено.

**Зауваження.** Доведена лема дійсна також для поліноміальної в'язки матриць $P(t,\lambda) = A_0(t)+\lambda A_1(t)+\lambda^2 A_2(t)+...+\lambda^m A_m(t)$ зі змінними матрицями, якщо кратності всіх її скінченних та нескінченних елементарних дільнитків залишаються сталими на проміжку зміни аргумента $t$. При цьому, якщо елементи матриць $A_i(t)$, $i=\overline{0,m}$, мають на відрізку $[0;\ T]$ неперервні похідні до $k$-го порядку включно, то всі власні значення поліноміальної в'язки матриць $P(t,\lambda)$ також матимуть на цьому відрізку неперервні похідні $k$-го порядку. Власні вектори в'язки матриць $P(t,\lambda)$ та симетричної їй в'язки $M(t,\omega)$ можна визначити так, щоб і вони мали той самий ступінь гладкості. [8, c. 46]

Перейдемо до побудови розв'язків системи (1).

### 3. Побудова формальних розв'язків

Припустимо, що, крім умов $1^\circ - 3^\circ$, сформульованих у пункті 1, виконуються також наступні:

$4^\circ$. гранична в'язка матриць

$$P(t,\lambda) = \sum_{i=0}^{m} \lambda^i A_i^{(0)}(t) \tag{12}$$

системи (1) регулярна при всіх $t\in[0;T]$ і має тільки прості елементарні дільники:$mn-1$ скінченних $\lambda-\lambda_i(t),\ i=\overline{1,mn-1}$, і один – нескінченний.

$5^\circ$. $(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t);\ \widetilde{\psi}(t)) \neq 0, \forall\ t\in[0;T]$, де $\widetilde{\varphi}(t)$ та $\widetilde{\psi}(t)$ – елементи нуль-просторів матриць $A_m^{(0)}(t)$ і $(A_m^{(0)}(t))^*$ відповідно.

Як показано в [8, c. 95], за умови $5^\circ$ матриця $A_m(t,\ \lambda)$ буде неособливою при досить малих $\varepsilon > 0,\ t\in[0;T]$, що гарантує існування в системи (1) $mn$ лінійно незалежних розв'язків, які необхідно побудувати.

Розв'язки, що відповідають скінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць $P(t,\ \lambda)$, будемо шукати у вигляді

$$x(t,\ \varepsilon)=u(t,\ \varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t\lambda(\tau,\ \varepsilon)d\tau\right), \tag{13}$$

де $u(t,\ \varepsilon)$ – $n$-вимірний вектор, а $\lambda(t,\ \varepsilon)$ – скалярна функція, які зображаються у вигляді формальних розвинень

$$u(t,\ \varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k u^{(k)}(t), \tag{14}$$

$$\lambda(t,\ \varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^k \lambda^{(k)}(t). \tag{15}$$

Покажемо, що вектор (13) формально задовольняє рівняння (1). Диференціюючи вектор-функцію (13) $k$ разів, отримаємо рекурентний вираз

$$\frac{d^kx}{dt^k}=\left[\sum_{l=1}^{k}\sum_{s=1}^{l}\varepsilon^{-sh}C_k^l\frac{d^{k-l}u(t,\ \varepsilon)}{dt^{k-l}}\Lambda_l^s(t,\ \varepsilon)+\frac{d^ku(t,\ \varepsilon)}{dt^k}\right]\times$$
$$\times\exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t\lambda(\tau,\ \varepsilon)d\tau\right),\ k=\overline{0,m}, \tag{16}$$

де

$$\Lambda_l^1(t,\ \varepsilon)=\frac{d^{l-1}}{dt^{l-1}}(\lambda(t,\ \varepsilon)), \tag{17}$$

$$\Lambda_l^s(t,\ \varepsilon)=\sum_{i=0}^{l-s}\frac{d^{l-s-i}}{dt^{l-s-i}}(\lambda(t,\ \varepsilon)\Lambda_{i+s-1}^{s-1}(t,\ \varepsilon)),\ s=\overline{2,l},\ l=\overline{1,k}. \tag{18}$$

Підставивши вектор (13) і його похідні (16) у систему (1), дістанемо

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{l=1}^{k}\sum_{s=1}^{l}\varepsilon^{(k-s)h}C_k^lA_k(t,\ \varepsilon)\frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}}u(t,\ \varepsilon)\Lambda_l^s(t,\ \varepsilon)+\varepsilon^{kh}A_k(t,\ \varepsilon)\frac{d^k}{dt^k}u(t,\ \varepsilon)\right)=0,$$

або

$$\sum_{k=0}^{m}\lambda^k(t,\ \varepsilon)A_k(t,\ \varepsilon)u(t,\ \varepsilon)=-\sum_{k=1}^{m}\Bigg(\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{s=1}^{l}\varepsilon^{(k-s)h}C_k^lA_k(t,\ \varepsilon)\frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}}u(t,\ \varepsilon)\Lambda_l^s(t,\ \varepsilon)+$$
$$+\sum_{s=1}^{k-1}\varepsilon^{(k-s)h}A_k(t,\ \varepsilon)u(t,\ \varepsilon)\Lambda_k^s(t,\ \varepsilon)+\varepsilon^{kh}A_k(t,\ \varepsilon)\frac{d^k}{dt^k}u(t,\ \varepsilon)\Bigg). \tag{19}$$

Згідно з (15), (17), (18) функції $\Lambda_l^s(t,\ \varepsilon),\ s=\overline{1,l},\ l=\overline{1,k}$, можна подати у вигляді розвинення за степенями $\varepsilon$:

$$\Lambda_l^s(t,\ \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \varepsilon^r \Lambda_l^{s(r)}(t), \tag{20}$$

де

$$\Lambda_l^{1(r)}(t) = \frac{d^{l-1}}{dt^{l-1}}(\lambda^{(r)}(t)), \tag{21}$$

$$\Lambda_l^{s(r)}(t) = \sum_{i=0}^{l-s}\sum_{j=0}^{r} \frac{d^{l-s-i}}{dt^{l-s-i}}(\lambda^{(j)}(t)\Lambda_{i+s-1}^{s-1(r-j)}(t)),\ s=\overline{2,l},\ l=\overline{1,k}. \tag{22}$$

Підставивши в (19) розвинення (2), (14), (15), (20), маємо

$$\sum_{k=0}^{m}(\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\lambda^{(r)}(t))^k \sum_{r\geq 0}\varepsilon^r A_k^{(r)}(t)\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r u^{(r)}(t)) = \sum_{r=1}^{\infty}\varepsilon^r f^{(r)}(t), \tag{23}$$

де

$$\begin{aligned} f^{(r)}(t) = -\sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{s=1}^{l}\sum_{i=0}^{r-(k-s)h}\sum_{j=0}^{r-(k-s)h-i} C_k^l A_k^{(i)}(t)\frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}}(u^{(j)}(t))\Lambda_l^{s(r-(k-s)h-i-j)}(t)+ \\ +\sum_{s=1}^{k-1}\sum_{i=0}^{r-(k-s)h}\sum_{j=0}^{r-(k-s)h-i} A_k^{(i)}(t)u^{(j)}(t)\Lambda_k^{s(r-(k-s)h-i-j)}(t)+ \\ +\sum_{j=0}^{r-kh} A_k^{(j)}(t)\frac{d^k}{dt^k}(u^{(r-kh-j)}(t))\Big),\ r=1,\ 2,\ \ldots \end{aligned} \tag{24}$$

Скориставшись формулою

$$\Big(\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\lambda^{(r)}(t)\Big)^k = (\lambda^{(0)}(t))^k + \sum_{r=1}^{\infty}\varepsilon^r P_k^r(\lambda),\ k=\overline{0,m}, \tag{25}$$

де $P_k^r(\lambda)$ – сума всеможливих добутків функцій $\lambda^{(j_1)}(t),\ \lambda^{(j_2)}(t),\ \ldots\ \lambda^{(j_k)}(t)$ з натуральними індексами, сума яких дорівнює $r$, рівність (23) запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r(\sum_{k=0}^{m}(\lambda^{(0)}(t))^k A_k^{(0)}(t)u^{(r)}(t)) = \\ = -\sum_{r=1}^{\infty}\varepsilon^r(\sum_{k=1}^{m}k\lambda^{(r)}(t)(\lambda^{(0)}(t))^{k-1}A_k^{(0)}(t)u^{(0)}(t)) + \sum_{r=1}^{\infty}\varepsilon^r b^{(r)}(t), \end{aligned} \tag{26}$$

де

$$b^{(r)}(t) = f^{(r)}(t) + d^{(r)}(t),\ r=1,\ 2,\ \ldots; \tag{27}$$

$$d^{(r)}(t) = -\sum_{k=0}^{m}(\sum_{j=1}^{r}(\lambda^{(0)}(t))^k A_k^{(j)}(t)u^{(r-j)}(t) + \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=0}^{r-i}\widetilde{P}_k^i(\lambda)A_k^{(j)}(t)u^{(r-i-j)}(t))-$$
$$-\sum_{k=1}^{m}\sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=0}^{r-i}k\lambda^{(i)}(t)(\lambda^{(0)}(t))^{k-1}A_k^{(j)}(t)u^{(r-i-j)}(t), \quad (28)$$

$\widetilde{P}_k^r(\lambda)$ – частина виразу $P_k^r(\lambda)$, яка містить лише ті $\lambda^{(j)}(t)$, індекси яких $j < k$.

Прирівнявши в (26) вирази при однакових степенях $\varepsilon$, приходимо до нескінченної системи векторних рівнянь

$$P(t,\ \lambda^{(0)}(t))u^{(0)}(t) = 0; \quad (29)$$

$$P(t,\ \lambda^{(0)}(t))u^{(r)}(t) = -\lambda^{(r)}(t)\frac{\partial P(t,\ \lambda^{(0)}(t)}{\partial\lambda}u^{(0)}(t) + b^{(r)}(t), \quad (30)$$

Рівняння (29) матиме ненульовий розв'язок тоді і тільки тоді, коли функція $\lambda^{(0)}(t)$ буде власним значенням поліноміальної в'язки матриць (12). Отже, згідно з умовою $4^\circ$ матимемо

$$\lambda^{(0)}(t) = \lambda_i(t),\ i = \overline{1, mn-1}, \quad (31)$$
$$u^{(0)}(t) =\ \varphi_i(t),\ i = \overline{1, mn-1}, \quad (32)$$

де $\varphi_i(t)$ – власні вектори поліноміальної в'язки (12), що відповідають власним значенням $\lambda_i(t),\ i = \overline{1, mn-1}$.

Із врахуванням (31), (32), система (30) набуває вигляду

$$P(t,\ \lambda_i(t))u_i^{(r)}(t) = -\lambda_i^{(r)}(t)\frac{\partial P(t,\ \lambda_i(t)}{\partial\lambda}\varphi_i(t) + b_i^{(r)}(t), \quad (33)$$

де вектор $b_i^{(r)}(t)$ містить тільки ті $\lambda_i^{(j)}(t),\ u_i^{(j)}(t),\ i = \overline{1, mn-1},\ r = 1,\ 2,\ ...$, індекси яких $j < r$.

Нехай $i$ фіксоване. Система рівнянь (33) сумісна тоді і тільки тоді, коли її права частина ортогональна до вектора $\psi_i(t)$ – елемента нуль-простору матриці $P^*(t,\ \lambda_i(t))$, тобто

$$-\lambda_i^{(r)}(t)\left(\frac{\partial P(t,\ \lambda_i(t))}{\partial\lambda}\varphi_i(t),\ \psi_i(t)\right) + (b_i^{(r)}(t),\ \psi_i(t)) = 0,\ r = 1,\ 2,\ \dots . \quad (34)$$

Оскільки згідно з умовою $4^\circ$ скінченні елементарні дільники поліноміальної в'язки матриць $P(t,\ \lambda)$ прості, то за лемою з пункту 2 їм відповідають жорданові ланцюжки завдовжки 1. Тому

$$\left(\frac{\partial P(t,\ \lambda_i(t))}{\partial \lambda}\varphi_i(t),\ \psi_i(t)\right) \neq 0,\ \forall\ t\ \epsilon\ [0;\ T].$$

Завдяки скалярному множнику, з точністю до якого визначається вектор $\psi_i(t)$, останній визначимо так, щоб

$$\left(\frac{\partial P(t,\ \lambda_i(t))}{\partial \lambda}\varphi_i(t),\ \psi_i(t)\right) = 1.$$

Тоді з рівняння (34) знайдемо

$$\lambda_i^{(r)}(t) = (b_i^{(r)}(t),\ \psi_i(t)),\ i = \overline{1, mn-1},\ r = 1,\ 2,\ ... \tag{35}$$

Підставивши одержану функцію $\lambda_i^{(r)}(t)$ в рівняння (33), вектори $u_i^{(r)}(t)$ знайдемо з нього за формулою

$$u_i^{(r)}(t) = H_i(t)[b_i^{(r)}(t) - \lambda_i^{(r)}(t)\frac{\partial P(t,\ \lambda_i(t)}{\partial \lambda}\varphi_i(t)],\ i = \overline{1, mn-1},\ r = 1,\ 2,\ ..., \tag{36}$$

де $H_i(t)$ – напівобернена матриця до матриці $P(t,\ \lambda_i(t))$ [8, с. 25].

Формули (35), (36) мають рекурентний характер і дозволяють визначити будь-які коефіцієнти розвинень (14), (15). Існування похідних, які є в цих формулах, випливає з умови $2^\circ$ та зауваження до пункту 2.

Слідуючи [8], ще один розв'язок системи рівнянь (1), який відповідає нескінченному елементарному дільнику граничної в'язки матриць (12), шукатимемо у вигляді

$$x(t,\ \varepsilon) = v(t,\ \varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h-1}\int_0^t \xi^{-1}(\tau,\ \varepsilon)d\tau), \tag{37}$$

де $n$-вимірний вектор $v(t,\ \varepsilon)$ і скалярна функція $\xi(t,\ \varepsilon)$ зображаються розвиненнями

$$v(t,\ \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} v^{(r)}(t), \tag{39}$$

$$\xi(t,\ \varepsilon) = \sum_{r=0}^{\infty} \xi^{(r)}(t). \tag{40}$$

Диференціюючи рівність (37) $k$ разів, за індукцією знаходимо

$$\frac{d^k x}{dt^k} = \Bigg[\sum_{l=1}^{k}\sum_{s=1}^{l}\varepsilon^{-s(h+1)}C_k^l\frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}}v(t,\ \varepsilon)\Xi_l^s(t,\ \varepsilon) +$$

$$+\frac{d^k}{dt^k}v(t,\ \varepsilon)\Bigg]\exp\left(\varepsilon^{-(h+1)}\int_0^t \xi^{-1}(\tau,\ \varepsilon)d\tau\right),\ k = \overline{0, m}, \tag{41}$$

де

$$\Xi_l^1(t,\ \varepsilon)=\frac{d^{l-1}}{dt^{l-1}}(\xi^{-1}(t,\ \varepsilon)), \tag{42}$$

$$\Xi_l^s(t,\ \varepsilon)=\sum_{i=0}^{l-s}\frac{d^{l-s-i}}{dt^{l-s-i}}(\xi^{-1}(t,\ \varepsilon)\Xi_{i-s-1}^{s-1}(t,\ \varepsilon)),\ s=\overline{2,l}. \tag{43}$$

Підставимо (37), (41) в систему (1), отримаємо

$$\sum_{k=0}^{m}\left(\sum_{l=1}^{k}\sum_{s=1}^{l}\varepsilon^{(k-s)h-s}C_k^lA_k(t,\ \varepsilon)\frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}}v(t,\ \varepsilon)\Xi_l^s(t,\ \varepsilon)+\varepsilon^{kh}A_k(t,\ \varepsilon)\frac{d^k}{dt^k}v(t,\ \varepsilon)\right)=0,$$

або

$$\sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{s=1}^{l}\varepsilon^{(k-s)h-s}C_k^lA_k(t,\ \varepsilon)\frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}}v(t,\ \varepsilon)\Xi_l^s(t,\ \varepsilon)+$$
$$+\sum_{s=1}^{k-1}\varepsilon^{(k-s)h-s}A_k(t,\ \varepsilon)v(t,\ \varepsilon)\Xi_k^s(t,\ \varepsilon)+\varepsilon^{-k}A_k(t,\ \varepsilon)v(t,\ \varepsilon)\xi^{-k}(t,\ \varepsilon)+$$
$$+\varepsilon^{kh}A_k(t,\ \varepsilon)\frac{d^k}{dt^k}v(t,\ \varepsilon)\Big)+A_0(t,\ \varepsilon)v(t,\ \varepsilon)=0. \tag{44}$$

Помноживши цю рівність зліва на $\varepsilon^m\xi^m(t,\ \varepsilon)$, після нескладних перетворень дістанемо

$$A_m(t,\ \varepsilon)v(t,\ \varepsilon)=-\varepsilon\xi(t,\ \varepsilon)A_{m-1}(t,\ \varepsilon)v(t,\ \varepsilon)-\sum_{k=1}^{m-2}\varepsilon^{m-k}\xi^{m-k}(t,\ \varepsilon)A_k(t,\ \varepsilon)v(t,\ \varepsilon)-$$
$$-\sum_{k=1}^{m}\Big(\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{s=1}^{l}\varepsilon^{(k-s)h-s+m}C_k^l\xi^m(t,\ \varepsilon)A_k(t,\ \varepsilon)\frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}}v(t,\ \varepsilon)\Xi_l^s(t,\ \varepsilon)+$$
$$+\sum_{s=1}^{k-1}\varepsilon^{(k-s)h-s+m}\xi^m(t,\ \varepsilon)A_k(t,\ \varepsilon)v(t,\ \varepsilon)\Xi_k^s(t,\ \varepsilon)+\varepsilon^{kh+m}\xi^m(t,\ \varepsilon)A_k(t,\ \varepsilon)\frac{d^k}{dt^k}v(t,\ \varepsilon)\Big)-$$
$$-\varepsilon^m\xi^m(t,\ \varepsilon)A_0(t,\ \varepsilon)v(t,\ \varepsilon). \tag{45}$$

Згідно з (40), (42), (43) для функцій $\Xi_l^s(t,\ \varepsilon)$, $s=\overline{1,l}$, $l=\overline{1,m}$, мають місце розвинення

$$\Xi_l^s(t,\ \varepsilon)=\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\Xi_l^{s(r)}(t), \tag{46}$$

де

$$\Xi_l^{1(r)}(t)=\frac{d^{l-1}}{dt^{l-1}}(\overline{\xi}^{(r)}(t)), \tag{47}$$

$$\Xi_l^{s(r)}(t) = \sum_{i=0}^{l-s}\sum_{j=0}^{r} \frac{d^{l-s-i}}{dt^{l-s-i}}(\overline{\xi}^{(j)}(t)\Xi_{i+s-1}^{s-1(r-j)}(t)),\ s=\overline{2,l},\ l=\overline{1,k}, \tag{48}$$

а функції $\widetilde{\xi}^{(r)}(t),\ r=0,\ 1,\ ...$ визначаються за рекурентними формулами

$$\widetilde{\xi}^{(0)}(t) = \frac{1}{\xi^{(0)}(t)},$$

$$\widetilde{\xi}^{(r)}(t) = -\frac{\sum_{j=1}^{r}\xi^{(j)}(t)\widetilde{\xi}^{(r-j)}(t)}{\xi^{(0)}(t)},\ r=1,\ 2,\ ...\ .$$

Підставивши в (45) розвинення (2), (40), (45) і прирівнявши вирази при однакових степенях $\varepsilon$, дістанемо

$$A_m^{(0)}(t)v^{(0)}(t) = 0, \tag{49}$$

$$A_m^{(0)}(t)v^{(r)}(t) = -\xi^{(r-1)}(t)A_{m-1}^{(0)}(t)v^{(0)}(t) + a^{(r)}(t),\ r=1,\ 2,...\ , \tag{50}$$

де

$$\begin{gathered}
a^{(r)}(t) = -\sum_{j=1}^{r} A_m^{(j)}(t)v^{(r-j)}(t) - \sum_{i=1}^{r-1}\sum_{j=0}^{r-i}\xi^{(i-1)}(t)A_{m-1}^{(j)}(t)v^{(r-i-j)}(t) - \\
-\sum_{k=1}^{m-2}\sum_{i=0}^{r-m+k}\sum_{j=0}^{r-m+k-i} P_{m-k}^{i}(\xi)A_k^{(j)}(t)v^{(r-m+k-i-j)}(t) - \\
-\sum_{k=1}^{m}(\sum_{l=1}^{k-1}\sum_{s=1}^{l}\sum_{\partial=0}^{r-(k-s)h+s-m}\sum_{i=0}^{\partial}\sum_{j=0}^{r-(k-s)h+s-m-\partial} C_k^l P_m^i(\xi)A_k^{(\partial-i)}\frac{d^{k-l}}{dt^{k-l}}(v^{(j)}(t))\times \\
\times\Xi_l^{s(r-(k-s)h+s-m-\partial-j)}(t) + \sum_{s=1}^{k-1}\sum_{\partial=0}^{r-(k-s)h+s-m}\sum_{i=0}^{\partial}\sum_{j=0}^{r-(k-s)h+s-m-\partial} P_m^i(\xi)A_k^{(\partial-i)}(t)v^{(j)}(t)\times \\
\times\Xi_k^{s(r-(k-s)h+s-m-\partial-j)}(t) + \sum_{i=0}^{r-kh-m}\sum_{j=0}^{r-kh-m-i} P_m^i(\xi)A_k^{(j)}(t)\frac{d^k}{dt^k}(v^{(r-kh-m-i-j)}(t))) - \\
-\sum_{i=0}^{r-m}\sum_{j=0}^{r-m-i} P_m^i(\xi)A_0^{(j)}(t)v^{(r-m-i-j)}(t).
\end{gathered} \tag{51}$$

Символом $P_k^s(\xi)$ аналогічно до $P_k^s(\lambda)$ позначається сума всеможливих добутків $k$ функцій $\xi^{(j_1)}(t),\ \xi^{(j_2)}(t),\ ...\ \xi^{(j_k)}(t)$ з цілими невід'ємними індексами, сума яких $j_1+j_2+...+j_k=s$.

Покажемо, що з системи векторних рівнянь (49), (50) можна послідовно визначити будь-які коефіцієнти розвинень (39), (40). З рівняння (49) маємо

$$v^{(0)}(t) = \widetilde{\varphi}(t), \tag{52}$$

де $\widetilde{\varphi}(t)$ – власний вектор в'язки матриць $M(t,\omega) = A_m^{(0)}(t) + \omega A_{m-1}^{(0)}(t) + ... + \omega^m A_0^{(0)}(t)$, симетричної в'язці (12), що відповідає її нульовому власному значенню. Враховуючи (52), систему рівнянь (50) запишемо у вигляді

$$A_m^{(0)}(t)v^{(r)}(t) = -\xi^{(r-1)}(t)A_{m-1}^{(0)}(t)\widetilde{\varphi}(t) + a^{(r)}(t),\ r = 1,\ 2, ..., \tag{53}$$

де $a^{(r)}(t)$ виражаються через функції $\xi^{(i)}(t)$ і вектори $v^{(i)}(t)$ при $j < r$.

Як і під час розв'язування системи рівнянь (33), сумісність цієї системи забезпечимо, визначаючи функції $\xi^{(r)}(t),\ r = 1,\ 2, ...,$ з умови ортогональності її правої частини до вектора $\widetilde{\psi}(t)$ – елемента нуль-простору матриці $(A_m^{(0)}(t))^*$.

Оскільки за умовою 4° нескінченний елементарний дільник в'язки матриць $P(t,\ \lambda)$ простий, то згідно з лемою пункту 2 йому відповідає жорданів ланцюжок векторів завдовжки 1. Тому $(A_{m-1}^{(0)}(t)\widetilde{\varphi}(t),\ \widetilde{\psi}(t)) \neq 0,\ \forall\ t \in [0,\ T]$. Завдяки скалярному множнику, з точністю до якого визначається вектор $\widetilde{\psi}(t)$, останній визначимо так, щоб $(A_{m-1}^{(0)}(t)\widetilde{\varphi}(t),\ \widetilde{\psi}(t)) = 1$.

Записавши умову розв'язності системи (53), знайдемо

$$\xi^{(r-1)}(t) = (a^{(r)}(t),\ \widetilde{\psi}(t)),\ r = 1,\ 2, .... \tag{54}$$

Забезпечивши цим самим сумісність системи (53), вектори $v^{(r)}(t),\ r = 1,\ 2, ...,$ визначимо з неї за формулою

$$v^{(r)}(t) = G(t)g^r(t),\ r = 1,\ 2, .... , \tag{55}$$

де $g^r(t) = a^{(r)}(t) - \xi^{(r-1)}(t)A_{m-1}^{(0)}(t)\widetilde{\varphi}(t)$ – вже відомий вектор, а $G(t)$ – напівобернена матриця до матриці $A_m^{(0)}(t)$.

Згідно з (51), (54) і умовою 5°

$$\xi^{(0)}(t) = -(A_m^{(1)}(t)\widetilde{\varphi}(t),\ \widetilde{\psi}(t)) \neq 0,\ \forall\ t \ \epsilon\ [0;\ T],$$

що забезпечує відмінність від нуля функції $\xi(t,\ \varepsilon)$ при досить малих $\varepsilon > 0$.

У результаті приходимо до такої теореми.

**Теорема.** Якщо виконуються умови $1° - 5°$, то система диференціальних рівнянь (1), матиме $mn - 1$ формальних розв'язків вигляду

$$x_i(t,\ \varepsilon) = u_i(t,\ \varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h}\int_0^t \lambda_i(\tau,\ \varepsilon)d\tau),\ i = \overline{1, mn-1},$$

що відповідають скінченним елементарним дільникам граничної в'язки матриць (12), і один розв'язок вигляду

$$x(t,\ \varepsilon) = v(t,\ \varepsilon)\exp(\varepsilon^{-h-1}\int_0^t \xi^{-1}(\tau,\ \varepsilon)d\tau),$$

який відповідає нескінченному елементарному дільнику цієї в'язки, де $u_i(t,\ \varepsilon),\ v(t,\ \varepsilon)$ – $n$-вимірні вектори, а $\lambda_i(t,\ \varepsilon),\ \xi(t,\ \varepsilon)$ – скалярні функції, які зображаються у вигляді формальних розвинень (14), (15), (39), (40). Коефіцієнти цих розвинень визначаються рекурентними формулами (31), (32), (35), (36), (52), (54), (55).

Зазначимо, що дана теорема поширюється і на той випадок, коли головна матриця $A_m^{(0)}(t)$ при старший похідний у системі (1) неособлива. У цьому випадку гранична в'язка матриць матиме тільки скінченні елементарні дільники, яким відповідають $mn$ розв'язків вигляду (13). Тому отриманий результат узагальнює результати, викладені в [10, 13]. При цьому розв'язки даної системи побудовано при більш загальних умовах, ніж у [10].

## 4. Асимптотичні властивості формальних розв'язків

Легко переконатися, що формальні розв'язки, які будуються за вказаним алгоритмом, лінійно незалежні в тому розумінні, що такими будуть $l$ – наближення, утворені шляхом обривання розвинень (14), (33), на $l$ -му члені, оскільки такими є вже нульові наближення завдяки лінійний незалежності власних векторів $\widetilde{\varphi}(t)$, $\varphi_i(t)$, $i=\overline{1, mn-1}$.

Методами робіт [8, 12], можна довести, що ці розв'язки є асимптотичним розвиненням точних лінійно незалежних розв'язків системи (1) при $\varepsilon \longrightarrow 0$, якщо функції $Re\lambda_i(t),\ i=\overline{1, mn-1}$ і $Re\xi^{(0)}(t)$ не змінюють знак на заданому відрізку $[0;\ T]$. Для цього необхідно звести систему (1) до еквівалентної системи рівнянь першого порядку і застосувати процедуру оцінки нев'язки, описану в [8, 12]. У результаті отримаємо асимптотичні оцінки

$$\|x_i(t,\ \varepsilon)-x_i^{(l)}(t,\ \varepsilon)\| \leq c\varepsilon^{m+1-h} \sup_{t\in[0;\ T]} \exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t (\lambda_i(t)+\sum_{k=1}^{h-1}\lambda_i^{(k)}(\tau))d\tau\right);$$

$$\left\|\frac{d^k x_i(t,\ \varepsilon)}{dt^k}-\frac{d^k x_i^{(l)}(t,\ \varepsilon)}{dt^k}\right\| \leq c\varepsilon^{m+1-h} \sup_{t\in[0;\ T]} \exp\left(\varepsilon^{-h}\int_0^t (\lambda_i(t)+\sum_{k=1}^{h-1}\lambda_i^{(k)}(\tau))d\tau\right),$$

$k=\overline{1, m-1}$, для розв'язків першої групи і

$$\|x(t,\ \varepsilon)-x^{(l)}(t,\ \varepsilon)\| \leq c_1\varepsilon^{m-h} \sup_{t\in[0;\ T]} \exp\left(\varepsilon^{-h-1}\int_0^t \frac{d\tau}{\sum_{k=0}^h \varepsilon^k \xi^{(k)}(\tau)}\right);$$

$$\left\|\frac{d^k x(t,\ \varepsilon)}{dt^k}-\frac{d^k x^{(l)}(t,\ \varepsilon)}{dt^k}\right\| \leq c_1\varepsilon^{m-h} \sup_{t\in[0;\ T]} \exp\left(\varepsilon^{-h-1}\int_0^t \frac{d\tau}{\sum_{k=0}^h \varepsilon^k \xi^{(k)}(\tau)}\right)$$

– для розв'язку другої групи, що відповідає нескінченному елементарному дільнику граничної в'язки матриць матриць $P(t,\lambda)$, де $x_i(t,\ \varepsilon),\ x(t,\ \varepsilon)$ – точні розв'язки системи (1), $x_i^{(l)}(t,\ \varepsilon),\ x^{(l)}(t,\ \varepsilon)$ – відповідні $l$ – наближення, $c,\ c_1$ – деякі сталі, що не залежать від $\varepsilon$.

## Література


[1] *Фещенко С.Ф.* Малі коливання систем із скінченним числом ступенів вільності / С.Ф. Фещенко // Наук. зап. Київ. пед. ін-ту, фіз-мат. серія. –1949. – Т.9, №4. – С. 99–155.

[2] *Павлюк І.А.* Асимптотичні властивості розв'язків неавтономних систем диференціальних рівнянь другого порядку/ І.А. Павлюк. – К.: Вид-во Київ. ун-ту, 1970. – 208 с.

[3] *Шкиль Н.И.* Об асимптотическом решении системы линейных диференциальных уравнений второго порядка // Н.И. Шкиль, З. Шаманов // Приближённые методы математического анализа.- К.: Киев. пед. ин-т, 1978. – С. 137-146.

[4] *Шкиль Н.И.* Об асимптотическом представлении решений системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при производной дробного ранга / Н.И. Шкиль, Т.К. Мейлиев // Докл. АН УССР. – 1979. – №4. – С. 264–267.

[5] *Шкиль Н.И.* Асимптотические свойства формальных фундаментальных матриц систем линейных диффеенциальных уравнений второго порядка, содержащих параметр / Н.И. Шкиль, И.И. Конет // Укр. мат. журн. – 1983. – Т.35, № 1, – С. 124–130.

[6] *Шкиль Н.И.* Асимптотическое интегрирование линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений / Н.И. Шкиль, И.И. Старун, В.П. Яковец. – К.: Вища школа, 1989. – 287 с.

[7] *Яковец В.П.* Асимптотическое интегрирование линейных систем диференциальных уравнений второго порядка в частных производных с медленно меняющимися коэфициентами: дис. канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Яковец Василий Павлович. – К., 1983. – 162 с.

[8] *Самойленко А.М.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А.М. Самойленко, М.І. Шкіль, В.П. Яковець. – К.: Вища школа, – 2000. – 294 с.

[9] *Кушнир В.А.* Асимптотические разложения решений систем линейных дифференциальных уравнений высших порядков з малым параметром при производных: дисс. канд. физ.-мат. наук. – К., 1984. – 139 с.

[10] *Кушнір В.А.* Побудова асимптотичних розв'язків систем лінійних диференціальних рівнянь вищих порядків з малим параметром при похідних / В.А. Кушнір, Г.А. Кушнір // Науковий часопис Нац. пед. ун-ту ім. М.П. Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. – 2007. – Вип. 8. – С. 139-143

[11] *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1988.- 528 с.

[12] *Шкиль Н.И.* Асимптотическое интегрирование линейных систем дифференциальных уравнений с вырождениями // Н.И. Шкиль, И.И. Старун, В.П. Яковец.- К.: Вища школа, 1991. – 207 с.

[13] *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / М.В. Федорюк. – М.: Наука, 1983. – 352 с.

## References


[1] Feshenko S. F. *Naukovi zapysky Kyivskogo pedagogishnogo instytutu, Phisyko-matematychna seriya (Notices of Kyiv Pedagogical Institute, Series of Physics and Mathematics)*, 1949, **9**, №4, pp. 99–155.

[2] Pavlenko I. A. *Asymptotychni vlastyvosti rozvyazkiv neavtonomnykh system dyferentsialnykh rivnyan drugogo poryadku (Asymptotic properties of solutions of non-autonomous systems of second order differential equations)*, 1970, 208 p.

[3] Shkil M.I., Shamanov Z. *Priblezhonye metody matematicheskogo analiza (Approximate methods of mathematical analysis)*, 1978, pp. 137-146.

[4] Shkil M.I., Meiliev T.K. *DAN USSR (Proceedings of the Ukrainian SSR Academy of Sciences)*, 1979, **4**, pp. 264–267.

[5] Shkil M.I., Konet I. I. *Ukr. math. zhurn. (Ukrainian Mathematical Journal)*, 1983, **35**, № 1, pp. 124–130.

[6] Shkil M.I., Starun I.I., Yakovets V.P. *Asimptoticheskoe integrirovanie lineinykh sistem obyknovenykh diferentsialnykh uravneniy (Asymptotical integration of linear systems of ordinary differential equations)*, 1989, 287 p.

[7] Yakovets V.P. Phd thesis, 1983, 162 p.

[8] Samoilenko A.M., Shkil M.I., Yakovets V.P. *Liniyni systemy dyferentsialnykh rivnyan z vyrodgenyamy (Linear systems of differential equations with degenations)*, 2000, 294 p.

[9] Kushnir V.A. Phd Thesis, 1984, 139 p.

[10] Kushnir V.A., Kushnir G.A. *Naukovyi chasopys NPU imeni M. P. Dragomanova. Seriya 1: Fiz-mat. nauky (Transactions of Dragomanov National Pedagogical University. Series 1: Phys.- Math. Sciences)*, 2007, **8**, pp. 139-143

[11] Gantmacher F. R. *Theory of matrices*, 1988, 528 p.

[12] Shkil M.I., Starun I.I., Yakovets V.P. *Asimptoticheskoe integrirovanie lineinykh sistem diferentsialnykh uravneniy s vyrozhdeniemi (Asymptotical integration of linear systems of differential equations with degenations)*, 1991, 207 p.

[13] Fedoruk M.V. *Asimptoticheskie metody dlya obyknovenykh diferentsialnykh uravneniy (Asymptotical methods for ordinary differential equations)*, 1983, 352 p.