Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2009, № 10.— С. 100–107.

УДК 519.21+511.72

Властивості розподілу випадкової величини, елементи зображення якої знакододатним рядом Люрота утворюють однорідний ланцюг Маркова

Ю. І. Жихарєва, М. В. Працьовитий
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

Анотація. Вивчаються тополого-метричні і фрактальні властивості множин дійсних чисел, у зображенні яких знакододатним рядом Люрота відсутня принаймні одна наперед задана комбінація двох цифр (L-символів), а також структура і властивості розподілу випадкової величини, L-символи якої утворюють однорідний ланцюг Маркова.

Abstract. We study topological, metric and fractal properties of the set of real numbers such that at least one given combination of two digits (L-symbols) is absent in their representation by positive Lüroth series. Structure and properties of distribution of random variable whose L-symbols form a homogeneous Markov chain are also studied.

Вступ

Означення 1. *Числовим знакододатним рядом Люрота* (далі: рядом Люрота) називається вираз виду

$$\frac{1}{d_1+1}+\frac{1}{d_1(d_1+1)(d_2+1)}+\frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)(d_3+1)}+\ldots$$
$$\ldots+\frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)\ldots d_{n-1}(d_{n-1}+1)(d_n+1)}+\ldots, \tag{1}$$

де d_n - фіксований нескінченний набір натуральних чисел.

Зауваження 1. *Легко бачити, що залишок (хвіст) ряду Люрота* (1)

$$r_k=\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)\ldots d_{n-1}(d_{n-1}+1)(d_n+1)}$$

не є рядом Люрота, але подається у вигляді:

$$r_k = \frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)...d_k(d_k+1)} \cdot (\frac{1}{d_{k+1}+1} + \frac{1}{d_{k+1}(d_{k+1}+1)(d_{k+2}+1)} + ...),$$

де вираз в круглих дужках є рядом Люрота.

Теорема 1. ([**2**]) *Будь-яке число $x \in (0,1]$ единим чином розкладається в ряд Люрота, тобто для числа x існує єдина послідовність натуральних чисел (d_n) така, що*

$$x = \frac{1}{d_1+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{d_1(d_1+1)d_2(d_2+1)...d_{n-1}(d_{n-1}+1)(d_n+1)}. \tag{2}$$

Означення 2. Далі скорочений запис $x = \Delta^L_{d_1 d_2 ... d_n ...}$ розкладу числа x в ряд (2) називатимемо *L-зображенням числа x*. При цьому, число $d_n = d_n(x)$ називатимемо n-им L-символом (цифрою) L-зображення числа x.

Легко довести, що коли L-зображення числа є періодичним, то саме число є раціональним. Виявляється, що правильне і обернене твердження, тобто має місце наступний критерій.

Теорема 2. ([**2**]) *Число $x \in (0,1]$ є раціональним тоді і тільки тоді, коли його L-зображення є періодичним.*

У попередній роботі [**3**] ми використовували розклади чисел в ряди Люрота для задання та дослідження розподілів ймовірностей на $[0,1]$, а саме: розподілів випадкових величин за розподілами їх цифр і навпаки. Ми довели, що у рівномірно розподіленої на $[0,1]$ випадкової величини "L-цифри"є незалежними і однаково розподіленими, вказавши при цьому їх розподіли. Вичерпно розв'язали задачу про лебегівську структуру розподілу випадкової величини з незалежними L-символами. А саме: довели, що розподіл є чистим і обгрунтовали критерії належності класу дискретних, абсолютно неперервних, та сингулярно неперервних розподілів. Також вивчили властивості розподілу випадкової величини з однаково розподіленими L-символами. Довели взаємну ортогональність двох різних розподілів і знайшли необхідні та достатні умови, коли функція розподілу, будучи строго зростаючою, зберігає фрактально розмірність Хаусдорфа-Безиковича.

У даній роботі ми досліджуємо розподіл випадкової величини L-символи якої будучи залежними, утворюють однорідний ланцюг Маркова. Ми акцентуємо увагу на тих же задачах, а саме: про лебегівську і спектральну структуру розподілу та його фрактальні властивості. Ми використовуватимемо також більш компактну форму запису ряду Люрота (1):

$$\frac{1}{d_1+1} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{D_k(d_{k+1}+1)} \quad \text{де} \;\; D_k = d_1(d_1+1)...d_k(d_k+1),\; k = 2,3,\ldots .$$

1. Основи метричної теорії L-зображень дійсних чисел.

Означення 3. Нехай $(c_1, c_2, ..., c_m)$ - фіксований впорядкований набір натуральних чисел. *Циліндром* рангу m з основою $c_1c_2...c_m$ називається множина

$$\Delta^L_{c_1c_2...c_m} := \{x : x = \Delta^L_{c_1c_2...c_m d_{m+1}d_{m+2}...}, d_{n+i} \in N\}.$$

Циліндр $\Delta^L_{c_1c_2...c_m}$ є півінтервалом з кінцями

$$\inf \Delta^L_{c_1...c_m} = \tfrac{1}{c_1+1} + \tfrac{1}{c_1(c_1+1)(c_2+1)} + ... + \tfrac{1}{c_1(c_1+1)...c_{m-1}(c_{m-1}+1)(c_m+1)} = a_m;$$

$$\max \Delta^L_{c_1...c_m} = a_m + \frac{1}{b_m}, \quad \text{де } b_m = c_1(c_1+1)...c_m(c_m+1),$$

тобто

$$\Delta^L_{c_1...c_m} = \left(a_m, a_m + \frac{1}{b_m}\right] = \left(a_m, a_m + \frac{1}{c_1(c_1+1)...c_m(c_m+1)}\right].$$

Циліндри мають в л а с т и в о с т і:

1. $\Delta^L_{c_1c_2...c_m} = \bigcup\limits_{i_1=1}^{\infty} ... \bigcup\limits_{i_k=1}^{\infty} \Delta^L_{c_1...c_m i_1 i_2...i_k} \forall k \in N.$

2. Довжина циліндра обчислюється за формулою:

$$\left|\Delta^L_{c_1...c_m}\right| = \frac{1}{c_1(c_1+1)...c_m(c_m+1)} = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{c_i(c_i+1)}.$$

3. Має місце рівність (основне метричне відношення):

$$\left|\Delta^L_{c_1...c_m i}\right| = \frac{1}{i(i+1)} \left|\Delta^L_{c_1...c_m}\right|.$$

Наслідком основного метричного відношення є те, що кожна множина дійсних чисел, L-зображення яких не містить принаймні одного фіксованого символа (L-символа), є множиною нульової міри Лебега.

Нехай k і c — фіксовані натуральні числа. Множина $\Delta^k_c = \{x : d_k(x) = c\}$ є:
1) циліндром 1-го рангу з основою c, якщо $k = 1$;
2) є об'єднанням циліндрів рангу k при $k > 1$, причому

$$\Delta^k_c = \bigcup_{i_1 \in N} \cdots \bigcup_{i_{k-1} \in N} \Delta^L_{i_1...i_{k-1}c} \;\; i \;\; \lambda(\Delta^k_c) = \frac{1}{c(c+1)}.$$

При $k_1 \neq k_2$ напівциліндри $\Delta^{k_1}_{c_1}$ і $\Delta^{k_2}_{c_2}$ є метрично незалежними, тобто

$$\lambda(\Delta^{k_1}_{c_1} \bigcap \Delta^{k_2}_{c_2}) = \lambda(\Delta^{k_1}_{c_1}) \cdot \lambda(\Delta^{k_2}_{c_2}).$$

2. Означення випадкової величини та її властивості.

Нехай (ξ_n)—послідовність дискретно розподілених випадкових величин, які набувають натуральних значень і утворюють однорідний ланцюг Маркова з початковими ймовірностями $p_1, p_2, \ldots, p_m, \ldots$ і матрицею перехідних ймовірностей $\|p_{ij}\|$, тобто

$$P\{\xi_1 = m\} = p_m, \quad p_m \geq 0, \quad \sum_{m=1}^{\infty} p_m = 1 \quad i$$

$$P\{\xi_{k+1} = j | \xi_k = i\} = p_{ij}, \quad p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1 \quad \forall i \in N.$$

Розглядається випадкова величина

$$\xi = \Delta^L_{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k \ldots}.$$

Зауваження 2. *Якщо всі стовбці матриці $\|p_{ij}\|$ однакові і співпадають з вектором $(p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots)$, то ми матимемо випадок незалежності та однакової розподіленості випадкових величин ξ_k, який вивчався в роботах* ([**2**])-([**3**]).

Нагадаємо важливі для аналізу властивостей випадкової величини ξ поняття.

Означення 4. Число x називається *L-раціональним*, якщо його L-зображення має період (1), тобто

$$x = \Delta^L_{c_1 c_2 \ldots c_m (1)}. \tag{3}$$

Число, яке не є L-раціональним, називатимемо *L-ірраціональним.*

Кожне L-раціональне число є правим кінцем циліндра, причому число (3) є правим кінцем циліндра $\Delta^L_{c_1 c_2 \ldots c_m}$. І навпаки, правий кінець довільного циліндра є L-раціональним числом. Легко довести, що кожне L-раціональне число є числом раціональним, але не кожне раціональне число є L-раціональним. Зауважимо, що L-раціональність числа і раціональність не є тотожніми поняттями. Наприклад, число $\Delta_{(12)}$ не є L-раціональним, але є раціональним, згідно з наступним критерієм раціональності.

Лема 1. *Функція розподілу F_ξ випадкової величини ξ має вигляд*

$$F_\xi(x) = \beta_1(x) + \sum_{k=2}^{\infty} (\beta_k(x) p_{d_1(x)} \prod_{i=1}^{k-2} p_{d_i(x) d_{i+1}(x)}), \quad \text{якщо} \quad 0 < x \leq 1, \tag{4}$$

де

$$\beta_1(x) = 1 - \sum_{j=1}^{d_1(x)} p_j, \quad \beta_k(x) = 1 - \sum_{j=1}^{d_k(x)} p_{d_{k-1}(x) j}$$

і де $d_k(x)$ є k-им L-символом числа x.

Доведення. Оскільки подія $\{\xi < x\}$ подається у вигляді об'єднання несумісних подій

$$\{\xi < x\} = \{d_1(\xi) > d_1(x)\} \bigcup \{d_1(\xi) = d_1(x) \wedge d_2(\xi) > d_2(x)\} \bigcup \dots$$
$$\dots \bigcup \{d_1(\xi) = d_1(x) \wedge d_2(\xi) = d_2(x) \dots d_k(\xi) > d_k(x) \wedge d_{k+1}(\xi) > d_{k+1}(x)\}$$

і

$$P\{\xi_1 = d_1(x), \dots, \xi_{k-1} = d_{k-1}(x), \xi_k > d_k(x)\} =$$
$$= P\{\xi_1 = d_1(x)\} \dots P\{\xi_k > d_k(x) | \xi_{k-1} = d_{k-1}(x)\} =$$
$$= p_{d_1(x)} \prod_{i=1}^{k-2} p_{d_i(x) d_{i+1}(x)} (1 - \sum_{j=1}^{d_k(x)} p_{d_{k-1}(x) j}),$$

то

$$F_\xi(x) = 1 - \sum_{j=1}^{d_1(x)} p_j + (1 - \sum_{j=1}^{d_2(x)} p_{d_1(x) j}) \cdot p_{d_1(x)} + \dots +$$
$$+ (1 - \sum_{j=1}^{d_k(x)} p_{d_{k-1}(x) j}) \cdot p_{d_1(x)} \prod_{i=1}^{k-2} p_{d_i(x) d_{i+1}(x)} + \dots,$$

що й завершує доведення леми. □

Теорема 3. *Розподіл випадкової величини ξ має атоми тоді і тільки тоді, коли існує такий набір натуральних чисел $(d_1, d_2, \dots, d_k, \dots)$, що*

$$p_{d_1} \prod_{k=1}^{\infty} p_{d_k d_{k+1}} > 0.$$

Доведення. Оскільки для $x = \Delta^L_{d_1, d_2, \dots, d_k, \dots}$

$$P\{\xi = x\} = p_{d_1} \prod_{k=1}^{\infty} p_{d_k d_{k+1}}, \tag{5}$$

то x є атомом тоді і тільки тоді, коли

$$p_{d_1} \prod_{k=1}^{\infty} p_{d_k d_{k+1}} > 0.$$

Отже, має місце теорема 3. □

Наслідок 1. *Розподіл випадкової величини ξ є неперервним тоді і тільки тоді, коли для довільної послідовності натуральних чисел (d_k)*

$$p_{d_1} \prod_{k=1}^{\infty} p_{d_k d_{k+1}} = 0.$$

Лема 2. *Спектром розподілу випадкової величини ξ є замикання множини*

$$E = \{x : x = \Delta^L_{d_1 d_2 \dots d_k \dots}, \;\; p_i > 0 \;\; \forall i \in N, \;\; p_{d_k d_{k+1}} > 0 \;\; \forall k \in N\}.$$

Доведення. 1. Покажемо, що $E \subset S_\xi$. Нехай $\Delta^L_{d_1 d_2 \ldots d_k \ldots} = x \in E$. Тоді

$$\mathsf{P}\{\xi \in \Delta^L_{d_1 d_2 \ldots d_k}\} = p_{d_1} \prod_{i=1}^{k-1} p_{d_i d_{i+1}} > 0$$

для довільного $k \in N$. З властивостей циліндрів випливає, що для довільного додатного ε існує таке k, що

$$\Delta^L_{d_1 d_2 \ldots d_k} \subset (x - \varepsilon, x + \varepsilon).$$

Тому

$$\mathsf{P}\{\xi \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)\} \geq \mathsf{P}\{\xi \in \Delta^L_{d_1 d_2 \ldots d_k}\} > 0,$$

тобто $x \in S_\xi$ і, отже, $E \subset S_\xi$.

2. Покажемо, що $S_\xi \subset \overline{E}$. Нехай $x \in S_\xi$, тобто

$$\mathsf{P}\{\xi \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)\} > 0 \quad \textit{для будь-якого} \quad \varepsilon > 0. \tag{6}$$

Припустимо, що існує k таке, що $p_{d_{k-1} d_k} = 0$, де $\Delta^L_{d_1 d_2 \ldots d_k \ldots} = x$. Тоді

$$\mathsf{P}\{\xi \in \Delta^L_{d_1 d_2 \ldots d_k}\} = p_{d_1} \prod_{i=1}^{k-1} p_{d_i d_{i+1}} = 0.$$

Можливі два випадки:
(1) існує $\varepsilon > 0$ таке, що $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subset \Delta^L_{d_1 d_2 \ldots d_k}$;
(2) $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \not\subset \Delta^L_{d_1 d_2 \ldots d_k}$ для довільного $\varepsilon > 0$.

У першому випадку

$$\mathsf{P}\{\xi \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)\} \leq \mathsf{P}\{\xi \in \Delta^L_{d_1 d_2 \ldots d_k}\} = 0,$$

що суперечить (6).

У другому випадку x є односторонньою граничною точкою множини S_ξ. Для конкретності, нехай лівосторонньою. Тоді існує таке $\varepsilon > 0$, що $(x - \varepsilon, x) \subset \Delta^L_{d_1 d_2 \ldots d_k}$ і $\mathsf{P}\{\xi \in (x, x + \varepsilon)\} = 0$. І в цьому випадку

$$\mathsf{P}\{\xi \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)\} = \mathsf{P}\{\xi \in (x - \varepsilon, x)\} \leq \mathsf{P}\{\xi \in \Delta^L_{d_1 d_2 \ldots d_k}\} = 0,$$

що суперечить умові (6).

Отримана суперечність доводить, що $p_{d_{k-1}} p_{d_k} > 0$ для довільного $k \in N$, тобто $x \in E$. Отже, $S_\xi = E$, що й вимагалося довести. □

Лема 3. *Нехай $(i, j) \in N^2$. Множина*

$$D[L, \overline{ij}] = \{x : x = \Delta^L_{d_1 d_2 \ldots d_n \ldots}, \textit{де} \;\; d_k d_{k+1} \neq ij \;\; \forall k \in N\}$$

є ніде не щільною нуль-множиною Лебега.

Доведення. Доведемо, що $D[L,\overline{ij}]$ є ніде не щільною згідно з означенням.

Справді, нехай (a,b)—довільний інтервал, що належить $(0,1]$. Легко вказати циліндр $\Delta^L_{c_1\ldots c_m} \subset (a,b)$.Тоді інтервал $int\Delta^L_{c_1\ldots c_m ij}$ не містить жодної точки множини $D[L,\overline{ij}]$. Отже, $D[L,\overline{ij}]$ є ніде не щільною.

Доведемо, що міра Лебега мнижини $D[L,\overline{ij}]$ рівна нулю.

Нехай $F_0=(0,1]$, F_{2k}—об'єднання циліндрів рангу $2k$, які містять точки множини $D[L,\overline{ij}]$,

$$\overline{F}_{2(k+1)} = F_{2k} \setminus F_{2(k+1)}. \tag{7}$$

Очевидно, що $F_{2k} \supset F_{2(k+1)} \supset D[L,\overline{ij}]$ $\forall k \in N$,

$$D[L,\overline{ij}] = \bigcap_{k=1}^{\infty} F_{2k} = \lim_{k\to\infty} F_{2k}.$$

За неперервністю міри Лебега зверху

$$\lambda(D[L,\overline{ij}]) = \lim_{k\to\infty} \lambda(F_{2k}).$$

Тоді

$$\lambda(D[L,\overline{ij}]) = \lim_{k\to\infty}\left[\frac{\lambda(F_{2k})}{\lambda(F_{2(k-1)})}\cdot\frac{\lambda(F_{2(k-1)})}{\lambda(F_{2(k-2)})}\cdot\ldots\cdot\frac{\lambda(F_2)}{\lambda(F_0)}\right] = \lim_{k\to\infty}\prod_{m=1}^{k}\frac{\lambda(F_{2m})}{\lambda(F_{2(m-1)})} =$$

$$= \prod_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda(F_{2m})}{\lambda(F_{2(m-1)})}. \tag{8}$$

З (7) маємо

$$\lambda(F_{2(k+1)}) = \lambda(F_{2k}) - \lambda(\overline{F}_{2(k+1)})$$

і

$$\frac{\lambda(F_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})} = 1 - \frac{\lambda(\overline{F}_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})}.$$

Підставивши в (8) отриманий вираз, одержимо

$$\lambda(D[L,\overline{ij}]) = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - \frac{\lambda(\overline{F}_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})}).$$

Останній нескінченний добуток розбігається до нуля тоді і тільки тоді, коли

$$\sum_{k=1}^{\infty}\lambda(\overline{F}_{2(k+1)})\lambda(F_{2k}) = \infty. \tag{9}$$

Знайдемо оцінки останнього відношення.

Нехай $\Delta^L_{c_1\ldots c_{2k}}$—циліндр з F_{2k}. Можливі випадки:

1)$c_{2k} = i$,

2)$c_{2k} \neq i$.

Якщо $c_{2k} = i$, то $int\Delta^L_{c_1\ldots c_{2k}j} \bigcap D[L, \overline{ij}] = \varnothing$ і

$$\frac{\Delta^L_{c_1\ldots c_{2k}j}}{\Delta^L_{c_1\ldots c_{2k}}} = \frac{1}{j(j+1)}.$$

Якщо $c_{2k} \neq i$, то $int\Delta^L_{c_1\ldots c_{2k}ij} \bigcap D[L, \overline{ij}] = \varnothing$ і

$$\frac{\Delta^L_{c_1\ldots c_{2k}ij}}{\Delta^L_{c_1\ldots c_{2k}}} = \frac{1}{i(i+1)j(j+1)}.$$

Тому, враховуючи це, маємо

$$0 < \frac{1}{i(i+1)j(j+1)} \leq \frac{\lambda(\overline{F}_{2(k+1)})}{\lambda(F_{2k})} \leq \frac{1}{j(j+1)} < 1.$$

Отже, ряд (9) розбігається і $\lambda(D[L, \overline{ij}]) = 0$. □

Теорема 4. *Якщо матриця перехідних ймовірностей має принаймні один нуль, то спектр розподілу випадкової величини ξ має нульову міру Лебега.*

ДОВЕДЕННЯ. Якщо $p_{ij} = 0$, то згідно з лемою (2) $S_\xi \subset D[L, \overline{ij}]$. А тому, згідно з попередньою лемою, $\lambda(S_\xi) = \lambda(D[L, \overline{ij}]) = 0$. □

НАСЛІДОК 2. *Якщо матриця перехідних ймовірностей містить нуль і для будь-якої послідовності $(d_n), d_n \in N$ вираз (5) рівний нулю, то розподіл ξ є сингулярним розподілом канторівського типу.*

Література

[1] *Барановський О.М., Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Тополого-метричні властивості множин дійсних чисел з умовами на їх розклади в ряди Остроградського // Укр. мат. журн. – 2007. – **59**, №9. – С. 1155–1168.

[2] *Жихарева Ю.І., Працьовитий М.В.* Зображення чисел знакододатними рядами Люрота: основи тополого-метричної, фрактальної і ймовірнісної теорій // Наук. часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. – 2008. – №9. – С. 200–211.

[3] *Жихарева Ю.І., Працьовитий М.В.* Властивості розподілу випадкової величини, L-символи якої в зображенні знакододатним рядом Люрота, є незалежними // Труды ИПММ НАН Украины. – 2011. – Том 23. – С. 71-83.

[4] *Працьовита І.М.* Ряди Остроградського 2-го виду і розподіли їх випадкових неповних сум // Наук. часопис НПУ ім. М.П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. – 2006. – №7. – С. 174–189.

[5] *Працьовитий М.В., Лещинський О.Л.* Властивості випадкових величин, заданих розподілами елементів свого $\tilde{Q}_\infty$-зображення // Теорія ймовірн. та мат. стат. – 1997. – №57. – С.134–139.

[6] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ ім. М.П. Драгоманова, 1998. – 296 с.