Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2009, № 10.— С. 40–49.

УДК 511.72+517.51+519.21

Про одну функцію, пов'язану з рядами Остроградського 1-го та 2-го видів

О. М. Барановський, І. М. Працьовита, М. В. Працьовитий
(Національний педагогічний університет імені М.П. Драгоманова)

Анотація. Розглядаються дві системи зображення дійсних чисел $(0, 1]$ з допомогою нескінченного алфавіту $\{1, 2, 3, \ldots\}$, які відповідають розкладам чисел у знакозмінні ряди Остроградського 1-го та 2-го видів. Вивчається перетворення F відрізка $[0, 1]$, яке кожну точку зі своїм зображенням у першій системі переводить у точку з таким самим зображенням в іншій системі. Доводиться, що F є неперервною строго зростаючою функцією розподілу. Вивчаються її диференціальні й інтегральні властивості.

Abstract. In the paper we consider two systems for representation of real numbers belonging to $(0, 1]$ using an infinite alphabet $\{1, 2, 3, \ldots\}$. These systems correspond to expansions of numbers to alternating first and second Ostrogradsky series. We study the transformation F of interval $[0, 1]$ mapping any point with its representation by first system to point with the same representation by second system. We prove that F is a continuous strictly increasing probability distribution function. Its differential and integral properties are studied also.

Вступ

Функції, які мають «особливості» в кожному, як завгодно малому, інтервалі області визначення, ми називаємо функціями зі складною локальною поведінкою (будовою). Неперервні ніде не диференційовні функції відносяться до цього класу, бо вони мають нескінченну кількість максимумів і мінімумів в довільному околі будь-якої точки області визначення. Сингулярні функції ми відносимо до цього класу, бо в довільному інтервалі, що має непорожній перетин зі спектром, вони мають як точки, похідна в яких дорівнює 0, так і точки, в яких вона відмінна від 0, зокрема не існує або дорівнює нескінченності.

«Більшість» неперервних на відрізку $[0,1]$ функцій мають складну локальну будову. Про це свідчать теореми Банаха–Мазуркевича [**12, 13**] і Замфіреску [**16**]. Перша стверджує, що в просторі неперервних на $[a,b]$ функцій з рівномірною метрикою сім'я функцій в кожній точці недиференційовних є множиною другої категорії Бера [**3**]. Друга теорема констатує, що в просторі неперервних функцій розподілу з супремум-метрикою функції, які мають нетривіальну сингулярну складову, утворюють множину другої категорії Бера. В останній час інтерес до функцій зі складною локальною будовою значно посилився, вони все частіше фігурують і в теоретичних дослідженнях, і при моделюванні реальних об'єктів, процесів та явищ. Апарат для задання та дослідження таких функцій в стадії розробки. Для їх вивчення ефективно можна використати різні системи зображення дійсних чисел, як зі скінченним алфавітом (s-адичне зображення, $\tilde{Q}$-зображення [**2**], медіантне, фібоначчієве, ланцюгове A_2-зображення [**2, 14**] тощо), так і нескінченним (розклади чисел в елементарні ланцюгові дроби, ряди Енгеля, Сильвестера, Люрота, Остроградського–Серпінського–Пірса та ін.).

У даній роботі ми досліджуємо функцію, у якої аргумент і значення мають однакові «різницеві» зображення знакозмінними рядами Остроградського 1-го [**6, 9, 1, 10**] та 2-го видів [**4, 4, 11**] відповідно. Розклади чисел в ряди Остроградського 1-го виду в англомовній літературі ще називають розкладами Пірса, хоча першою науковою публікацією, де вони строго обгрунтовуються, є робота Серпінського [**16**], розклади чисел в ряди Остроградського 2-го виду теж фігурують в цій же роботі Серпінського, але вперше як перші, так і другі розклади зустрічаються в рукописах Остроградського [**8**], детальніше історію цього питання можна знайти в [**9**]. Властивості цієї функції відображають метричні відмінності цих двох систем зображення чисел, дозволяють глибше проникнути в геометрію цих зображень чисел. Дана функція, будучи функцією розподілу, задає сингулярну ймовірнісну міру на $[0,1]$ (ортогональну мірі Лебега), яка має складні диференціальні, інтегральні і фрактальні властивості. Дослідженню деяких властивостей цієї функції присвячена дана робота.

1. Означення

Відомо [**8, 16, 2**], що кожне ірраціональне число $x \in (0,1)$ єдиним чином розкладається в знакозмінні ряди Остроградського 1-го та 2-го видів, членами яких є числа, обернені до натуральних, а саме:

$$x = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{q_1 q_2 \cdots q_k} + \ldots \equiv O^1(q_1, q_2, \ldots, q_k, \ldots), \qquad (1)$$

де $q_k + 1 \le q_{k+1} \in N$, і

$$x = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{a_k} + \ldots \equiv O^2(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots), \tag{2}$$

де $a_k(a_k + 1) \le a_{k+1} \in N$.

Для раціональних чисел $x \in (0, 1]$ існують такі ж, але скінченні розклади, причому їх два:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_1 q_2 \ldots q_n} + \frac{(-1)^n}{q_1 q_2 \ldots q_n(q_n + 1)} \equiv \\ &\equiv O^1(q_1, q_2, \ldots, q_n, q_{n+1}) = O^1(q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, q_n) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1 q_2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-2}}{q_1 q_2 \ldots q_{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{q_1 q_2 \ldots q_{n-1}(q_n + 1)} \end{aligned} \tag{3}$$

і відповідно

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{a_n} + \frac{(-1)^n}{a_n(a_n + 1)} \equiv \\ &\equiv O^2(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_n(a_n + 1)) = O^2(a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n + 1) \equiv \\ &\equiv \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-2}}{a_{n-1}} + \frac{(-1)^{n-1}}{a_n + 1}. \end{aligned} \tag{4}$$

Вираз (1) (відповідно (3)) називається *розкладом числа x в ряд Остроградського 1-го виду* або коротко — *O^1-зображенням.* При цьому натуральне число $q_k = q_k(x)$ називається *k-им O^1-символом числа x*. Зрозуміло, що для раціональних чисел два останні O^1-символи числа визначаються неоднозначно. У випадку, коли це може привести до двозначності, ми робитимемо додаткові зауваження. Аналогічною термінологією ми будемо користуватися для розкладів чисел в ряди Остроградського 2-го виду (вирази (2) і відповідно (4)).

Далі O^1-зображення числа x, незалежно від того раціональним воно є чи ірраціональним, ми будемо записувати $O^1(q_1, q_2, \ldots)$. Аналогічно, $x = O^2(a_1, a_2, \ldots)$ — O^2-зображення числа x, незалежно від того раціональним чи ірраціональним є це число.

Вираз (1) (відповідно (3)) можна переписати в іншій (часто зручнішій) формі:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{g_1} - \frac{1}{g_1(g_1 + g_2)} + \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{g_1(g_1 + g_2) \ldots (g_1 + g_2 + \ldots + g_k)} + \ldots \equiv \\ &\equiv \bar{O}^1(g_1, g_2, \ldots, g_k, \ldots), \end{aligned} \tag{5}$$

де $g_1 = q_1$, $g_{n+1} = q_{n+1} - q_n$, $n = 1, 2, \ldots$, яка називається $\bar{O}^1$-зображенням числа x.

Аналогічно, виразу (2) (відповідно 4) можна дати формально інше зображення — $\bar{O}^2$-зображення:

$$\bar{O}^2(d_1, d_2, \ldots, d_k, \ldots) = O^2(a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots),$$

де $d_1 = a_1$, $d_{k+1} = a_{k+1} - a_k(a_k + 1) + 1$, $k = 1, 2, \ldots$.

Означимо функцію $y = F(x)$:

$$\bar{O}^1(g_1, g_2, \ldots) = x \xrightarrow{F} y = \bar{O}^2(g_1(x), g_2(x), \ldots).$$

Перевіримо коректність даного означення. Функція є коректно визначеною, якщо двом формально різним $\bar{O}^1$-зображенням раціональних значень аргумента вона приписує однакові значення.

Нехай x — довільна раціональна точка $(0,1]$ і

$$x \equiv \bar{O}^1(g_1, \ldots, g_{n-1}, g_n, 1) = \bar{O}^1(g_1, \ldots, g_{n-1}, g_n + 1) \equiv x'.$$

Тоді

$$y = F(x) = \bar{O}^2(g_1, \ldots, g_{n-1}, g_n, 1) \quad \text{i} \quad y' = F(x') = \bar{O}^2(g_1, \ldots, g_{n-1}, g_n + 1).$$

Покажемо, що $y = y'$. Для цього перейдемо до O^2-зображень чисел y та y'. Якщо

$$y = O^2(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}) \quad \text{i} \quad y' = O^2(a_1', a_2', \ldots, a_n'),$$

то

$$\begin{aligned}
&a_1 = a_1' = g_1,\\
&a_2 = a_2' = g_2 + a_1(a_1+1) - 1,\\
&\ldots,\\
&a_{n-1} = a_{n-1}' = g_{n-1} + a_{n-2}(a_{n-2}+1) - 1,\\
&a_n = g_n + a_{n-1}(a_{n-1}+1) - 1, \qquad a_n' = g_n + a_{n-1}(a_{n-1}+1),\\
&a_{n+1} = a_n(a_n+1) = (g_n + a_{n-1}(a_{n-1}+1) - 1)(g_n + a_{n-1}(a_{n-1}+1)).
\end{aligned}$$

Тоді

$$y - y' = \pm\left[\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right) - \frac{1}{a_n'}\right] = 0,$$

що й вимагалося довести. Функція $F(x)$ означена коректно.

Доозначимо функцію $F(x)$, поклавши $F(0) = 0$. Тепер вона визначена в кожній точці відрізка $[0,1]$.

У подальших міркуваннях нам будуть корисними наступні поняття.

Означення 1. Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — заданий набір натуральних чисел. *Циліндром рангу n з основою* $c_1c_2\ldots c_n$, що відповідає $\bar{O}^i$-зображенню чисел ($k \in \{1,2\}$), називається множина $\bar{O}^i_{c_1c_2\ldots c_n}$ всіх $x \in (0,1]$, таких що мають $\bar{O}^i$-зображення, в яких перші $\bar{O}^i$-символи відповідно рівні c_1, c_2, $\ldots$, c_n, тобто

$$\bar{O}^i_{c_1c_2\ldots c_n} = \{x : x = \bar{O}^i(g_1, g_2, \ldots, g_n, \ldots),\ g_k(x) = c_k,\ k = \overline{1,n}\}.$$

Лема 1 ([**1, 4**]). *Довжина циліндра рангу* m *з основою* $c_1c_2\dots c_m$*, що відповідає* $\bar{O}^i$*-зображенню чисел* ($k\in\{1,2\}$)*, визначається рівністю*

$$|\bar{O}^1_{g_1(x)\dots g_m(x)}| = \frac{1}{\sigma_1\sigma_2\dots\sigma_m(\sigma_m+1)},$$

$$|\bar{O}^2_{g_1(x)\dots g_m(x)}| = \frac{1}{a_m(a_m+1)}$$

де $\sigma_k = g_1+g_2+\ldots+g_k$, $a_1 = g_1$, $a_2 = g_2+a_1(a_1+1)-1$, $\dots$, $a_m = g_m+a_{m-1}(a_{m-1}+1)-1$.

2. Неперервність

Теорема 1. *Функція* $y = F(x)$ *є неперервною, строго зростаючою функцією розподілу на* $[0,1]$.

Доведення. 1. Те, що $F(x)$ є строго зростаючою на $[0,1]$, випливає з того, що відношення порядку для $\bar{O}^1$-зображення і $\bar{O}^2$-зображення чисел мають однаковий формальний вираз (правила порівняння чисел формально співпадають).

2. Доведемо неперервність $F(x)$ на відрізку $[0,1]$. Розглянемо довільно вибрану точку x_0 цього відрізка.

Нехай x_0 — ірраціональне число. Тоді воно має єдине $\bar{O}^1$-зображення, яке містить нескінченну кількість $\bar{O}^1$-символів. Для довільного $x\in(0,1]$ існує номер m, такий що

$$g_i(x) = g_i(x_0) \text{ при } i<m \quad \text{і} \quad g_m(x)\neq g_m(x_0).$$

Причому $x\to x_0$ рівносильно $m\to\infty$. Оскільки

$$|F(x)-F(x_0)| = \left|\sum_{i=m}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{a_i(x)} - \sum_{i=m}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{a_i(x_0)}\right| \le \left|\sum_{i=m}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{a_i(x)}\right| + \left|\sum_{i=m}^{\infty}\frac{(-1)^{i-1}}{a_i(x_0)}\right|,$$

де $a_k(x)$ і $a_k(x_0)$ — k-ті O^2-символи зображення $F(x)$ і $F(x_0)$ відповідно, то враховуючи порядок росту елементів O^2-зображення чисел [**4**], а саме: те, що $a_m > 2^{2^{m-2}}$, маємо

$$|F(x)-F(x_0)| < 2^{1-2^{m-2}} \to 0 \quad (m\to\infty),$$

тобто $\lim\limits_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$, а отже, $F(x)$ є неперервною в точці x_0.

Доведення для раціонального x_0 аналогічне з урахуванням неоднозначності розкладів раціонального числа в ряд Остроградського 1-го і 2-го виду. □

3. Симетрії

Лема 2. *Для будь-якого* $x\in[0,1]$ *має місце рівність*

$$F(x)+F(1-x) = 1. \tag{6}$$

Доведення. Нехай $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1]$, тоді

$$x_0 = \bar{O}^1(1, g_2, g_3, \ldots) = \frac{1}{1} - \frac{1}{1(1+g_2)} + \frac{1}{1(1+g_2)(1+g_2+g_3)} - \ldots.$$

Очевидно, що

$$1 - x_0 = \bar{O}^1(1+g_2, g_3, \ldots) = \frac{1}{1+g_2} - \frac{1}{(1+g_2)(1+g_2+g_3)} + \ldots.$$

Знайдемо образи точок x_0 та $1-x_0$:

$$F(x_0) = \bar{O}^2(1, g_2, g_3, \ldots) = \frac{1}{1} - \frac{1}{1+g_2} + \frac{1}{g_3 + (1+g_2)(2+g_2) - 1} - \ldots,$$

$$F(1-x_0) = \bar{O}^2(1+g_2, g_3, \ldots) = \frac{1}{1+g_2} + \frac{1}{g_3 + (1+g_2)(2+g_2) - 1} + \ldots.$$

Отже, $F(x_0) + F(1-x_0) = 1$.

Доведення аналогічне, якщо $x \in (0, \frac{1}{2}]$. Тоді

$$x_0 = \bar{O}^1(g_1, g_2, \ldots) = \frac{1}{g_1} - \frac{1}{g_1(g_1+g_2)} - \ldots, \quad \text{де } g_1 \geq 2,$$

$$1 - x_0 = \bar{O}^1(1, g_1 - 1, g_2, \ldots) = \frac{1}{1} - \frac{1}{1 \cdot g_1} + \frac{1}{1 \cdot g_1(g_1+g_2)} - \ldots.$$

Відповідно

$$F(x_0) = \bar{O}^2(g_1, g_2, \ldots) = \frac{1}{g_1} - \frac{1}{g_2 + g_1(g_1+1) - 1} + \ldots, \quad g_1 \geq 2,$$

$$F(1-x_0) = \bar{O}^2(1, g_1 - 1, g_2, \ldots) = \frac{1}{1} - \frac{1}{g_1 - 1 + 1 \cdot 2 - 1} + \frac{1}{g_2 + g_1(g_1+1) - 1} - \ldots.$$

Отже, лему доведено. □

Лема 3. *Рівняння $F(x) = x$ має зліченну множину раціональних коренів і жодного ірраціонального.*

Нехай $i \in \{1, 2\}$, $u = \bar{O}^i(c_1, c_2, \ldots)$ — довільна точка $(0, 1]$. Оператор φ_i зсуву символів $\bar{O}^i$-зображення на $(0, 1]$ означається рівністю

$$\varphi_i(u) = u' = \bar{O}^i(c_2, c_3, \ldots).$$

Очевидно, що інваріантними для операторів φ_1 і φ_2 є точки $\bar{O}^i(c, c, \ldots)$, $c \in N$.

Оператор φ_i, діючи на циліндри, знижує їх ранг:

$$\varphi_i\left(\bar{O}^i_{c_1 \ldots c_m}\right) = \bar{O}^i_{c_2 \ldots c_m}.$$

Зокрема, $\varphi_i(\bar{O}^i_c) = (0, 1]$, $\varphi_i((0, 1]) = (0, 1]$.

Лема 4. *Функція $y = F(x)$ володіє властивістю*

$$F(\varphi_1(x)) = \varphi_2(F(x)),$$

де φ_i — оператор зсуву цифр $\bar{O}^i$-зображення.

Доведення. Дане твердження випливає з наступних співвідношень:

$$x = \bar{O}^1_{g_1 g_2 \ldots g_n \ldots} \xrightarrow{\varphi_1} x' = \bar{O}^1_{g_2 g_3 \ldots g_n \ldots}$$

$$F(x) = y = \bar{O}^2_{g_1 g_2 \ldots g_n \ldots} \xrightarrow{\varphi_2} y' = \bar{O}^2_{g_2 g_3 \ldots g_n \ldots} = F(x'). \qquad \square$$

4. Диференціальні властивості

Теорема 2. *1. В кожній раціональній точці $x \in [0,1]$ похідна функції не існує.*

2. Якщо в ірраціональній точці $x = \bar{O}^1(g_1, g_2, \ldots)$ похідна $F'(x)$ функції $F(x)$ існує, то вона виражається рівністю

$$F'(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{|\bar{O}^2_{g_1(x)\ldots g_m(x)}|}{|\bar{O}^1_{g_1(x)\ldots g_m(x)}|} = \tag{7}$$

$$= \lim_{m\to\infty} \frac{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_m(\sigma_m+1)}{a_m(a_m+1)}, \tag{8}$$

де $\sigma_k = \sigma(g_1, g_2, \ldots, g_k) = \sum\limits_{i=1}^{k} g_i(x)$,
$a_1 = g_1,\ a_2 = g_2 + a_1(a_1+1) - 1,$
. . . .
$a_m = g_m + a_{m-1}(a_{m-1}+1) - 1.$

Доведення. Якщо в точці x існує похідна функції $F(x)$, то для довільних двох послідовностей (u_n) і (v_n) таких, що $u_n \le x \le v_n$ для всіх $n \in N$ виконується

$$F'(x) = \lim_{v_n - u_n} \frac{F(v_n) - F(u_n)}{v_n - u_n}.$$

Якщо в якості u_n і v_n взяти кінці циліндра $\bar{O}^1_{g_1\ldots g_n}$ рангу n, який містить точку x, то отримаємо рівність (7). Приріст функції на такому циліндрі є довжиною циліндра $\bar{O}^2_{g_1(x)\ldots g_n(x)}$, тобто

$$F(\bar{O}^1_{g_1\ldots g_n}) = \left|\bar{O}^2_{g_1\ldots g_n}\right|.$$

Враховуючи вирази довжин циліндрів $\bar{O}^1_{g_1\ldots g_n}$ та $\bar{O}^2_{g_1\ldots g_n}$, отримуємо рівність (8). $\square$

Лема 5. *Нехай $(c_1, \ldots, c_m)$ — довільно вибраний набір натуральних чисел. Має місце рівність*

$$\lim_{n\to\infty}\left(|\bar{O}^2_{c_1\ldots c_m \underbrace{11\ldots1}_{n}}| \cdot |\bar{O}^1_{c_1\ldots c_m \underbrace{11\ldots1}_{n}}|^{-1} \right) = 0. \tag{9}$$

Доведення. Враховуючи, що

$$|\bar{O}^1_{c_1\ldots c_m \underbrace{11\ldots1}_{n}}| = \frac{(\sigma_m - 1)!}{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_{m-1}} \cdot \frac{1}{(\sigma_m+n+1)!} \equiv \frac{B}{(\sigma_m+n+1)!},$$

де $\sigma_1 = c_1$, $\sigma_k = c_1 + c_2 + \ldots + c_k$, $k = 2, 3, \ldots, m$, і

$$|\bar{O}^2_{c_1\ldots c_m\underbrace{11\ldots1}_{n}}| < \frac{1}{a^{2^{n-1}}},$$

де $a_1 = c_1$, $a_2 = c_2 + a_1(a_1 + 1) - 1$,
$a_k = c_k + a_{k-1}(a_{k-1} + 1) - 1 > 2^{2^{k-2}}$, $k = 2, 3, \ldots, m$,
$a \equiv a_m > 2^{2^{m-2}}$, маємо

$$|\bar{O}^2_{c_1\ldots c_m\underbrace{11\ldots1}_{n}}| \cdot |\bar{O}^1_{c_1\ldots c_m\underbrace{11\ldots1}_{n}}|^{-1} < B \cdot \frac{(\sigma_m + n - 1)!}{a^{2^{n-1}}} \equiv B\delta_n. \qquad (10)$$

Оскільки

$$\delta_{n+1} = \frac{\sigma_m + n}{a^{2^{n-1}}} \cdot \delta_n, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sigma_m + n}{a^{2^{n-1}}} = 0,$$

і послідовність (δ_n) є обмеженою (більше того, при $n > u_0$, де $\sigma_m + u_0 = a^{2^{u_0-1}}$ є монотонно спадною), то

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0.$$

Враховуючи (10), отримуємо (9). □

Наслідок 1. *Якщо в точці* $x = \bar{O}^1_{c_1\ldots c_m 11\ldots1\ldots}$ *існує* $F'(x)$, *то* $F'(x) = 0$.

Лема 6. *Нехай* $(c_1, \ldots, c_m, b)$ — *заданий набір натуральних чисел. Має місце рівність*

$$\lim_{n\to\infty}\left(|\bar{O}^2_{c_1\ldots c_m\underbrace{bb\ldots b}_{n}}| \cdot |\bar{O}^1_{c_1\ldots c_m\underbrace{bb\ldots b}_{n}}|^{-1}\right) = 0. \qquad (11)$$

Доведення. Враховуючи, що

$$\begin{aligned}|\bar{O}^1_{c_1\ldots c_m\underbrace{bb\ldots b}_{n}}| &= \frac{1}{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_m(\sigma_m + b)(\sigma_m + 2b)\ldots(\sigma_m + nb)(\sigma_m + nb + 1)} \geq \\ &\geq \frac{1}{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_m(l + 1)(l + 2)\ldots(l + n)(l + n + 1)} = \\ &= \frac{l!}{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_m} \cdot \frac{1}{b^{n+1}(l + n + 1)!},\end{aligned}$$

де $\sigma_1 = c_1$, $\sigma_k = c_1 + c_2 + \ldots + c_k$, $k = 2, 3, \ldots, m$, $l = \left[\frac{\sigma_m}{b}\right] + 1$,

$$|\bar{O}^2_{c_1\ldots c_m\underbrace{bb\ldots b}_{n}}| = \frac{1}{a_{m+n}(a_{m+n} + 1)} \leq \frac{1}{a^{2^{n+1}}},$$

де

$$\bar{O}^2_{c_1\ldots c_m\underbrace{bb\ldots b}_{n}} = O^2_{a_1\ldots a_m a_{m+1}\ldots a_{m+n}},$$

$a_1 = c_1$, $a_{k+1} = c_{k+1} + a_k(a_k + 1) - 1$, $k = 1, 2, 3, \ldots, m - 1$,
$a \equiv a_m = c_m + a_{m-1}(a_{m-1} + 1) - 1 > 2^{2^{m-2}}$,
$a_{m+1} = b + a(a + 1) - 1 > a^2$,

$a_{m+2} = b + a_{m-1}(a_{m-1}+1) - 1 > a^{2^2}$,

. . . .

$a_{m+n} = b + a_{m+n-1}(a_{m+n-1}+1) - 1 > a^{2^n}$,

маємо

$$\rho_n = |\bar{O}^2_{c_1\ldots c_m \underbrace{bb\ldots b}_{n}}| \cdot |\bar{O}^1_{c_1\ldots c_m \underbrace{bb\ldots b}_{n}}|^{-1} \le B \cdot \delta_n, \tag{12}$$

де

$$B = \frac{l!}{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_m} = \mathrm{const}, \qquad \delta_n = \frac{b^{n+1}(l+n+1)!}{a^{2^{n+1}}}.$$

Оскільки

$$\delta_{n+1} = \frac{b(l+n+1)}{a^{2^{n+1}}} \cdot \delta_n, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{b(l+n+1)}{a^{2^{n+1}}} = 0$$

і при $n > u_0$, де $b(l+u_0+1) = a^{2^{u_0+1}}$,

$$\frac{b(l+n+1)}{a^{2^{n+1}}} < 1,$$

то послідовність (δ_n) при $n > u_0$ є монотонно спадною.

З того, що

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b(l+n+1)}{a^{2^{n+1}}} = 0$$

маємо

$$\lim_{n\to\infty} \delta_n = 0.$$

Враховуючи (12), отримуємо (11). □

5. Інтегральні властивості

Теорема 3. *Має місце рівність*

$$\int_0^1 F(x)dx = \frac{1}{2}.$$

Доведення. Оскільки

$$\int_0^1 F(1-x)dx = \int_0^1 F(x)dx,$$

то з рівності (6) випливає твердження теореми. □

Література

[1] *Барановський О. М., Працьовитий М. В., Торбін Г. М.* Тополого-метричні властивості множин дійсних чисел з умовами на їх розклади в ряди Остроградського // Укр. мат. журн. — 2007. — Т. 59, № 9. — С. 1155–1168.

[2] *Дмитренко С. О., Кюрчев Д. В., Працьовитий М. В.* Ланцюгове A_2-зображення дійсних чисел та його геометрія // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, № 4. — С. 452–463.

[3] *Окстоби Дж.* Мера и категория: Пер. с англ. — Москва: Мир, 1974. — 160 с.

[4] *Працьовита І. М.* Ряди Остроградського 2-го виду і розподіли їх випадкових неповних сум // Наук. часоп. Нац. пед. ун-ту ім. М. П. Драгоманова. Сер. 1, Фіз.-мат. науки. — 2006. — № 7. — С. 174–189.

[5] *Працьовита І. М.* Про розклади чисел у знакозмінні s-адичні ряди і ряди Остроградського 1-та 2-го видів // Укр. мат. журн. — 2009. — Т. 61, № 7. — С. 958–968.

[6] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[7] *Працьовитий М. В., Барановський О. М.* Властивості розподілів випадкових величин з незалежними різницями послідовних елементів ряду Остроградського // Теорія ймовір. та матем. статист. — 2004. — № 70. — С. 131–143.

[8] *Ремез Е. Я.* О знакопеременных рядах, которые могут быть связаны с двумя алгорифмами М. В. Остроградского для приближения иррациональных чисел // Успехи мат. наук. — 1951. — Т. 6, № 5 (45). — С. 33–42.

[9] *Albeverio S., Baranovskyi O., Pratsiovytyi M., Torbin G.* The Ostrogradsky series and related Cantor-like sets // Acta Arith. — 2007. — Vol. 130, no. 3. — P. 215–230.

[10] *Albeverio S., Baranovskyi O., Pratsiovytyi M., Torbin G.* The set of incomplete sums of the first Ostrogradsky series and anomalously fractal probability distributions on it // Rev. Roumaine Math. Pures Appl. — 2009. — Vol. 54, no. 2. — P. 85–115.

[11] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Pratsiovyta I., Torbin G.* On Bernoulli convolutions generated by second Ostrogradsky series and their fine fractal properties. — Bonn, 2009. — (SFB 611 Preprint, Bonn University; 459). — 29 p.

[12] *Banach S.* Über die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionenmengen // Stud. Math. — 1931. — Bd. 3. — S. 174–179.

[13] *Mazurkiewicz S.* Sur les fonctions non dérivables // Stud. Math. — 1931. — Bd. 3. — P. 92–94.

[14] *Pratsiovytyi M., Kyurchev D.* Properties of the distribution of the random variable defined by A_2-continued fraction with independent elements // Random Oper. Stoch. Equ. — 2009. — Vol. 17, no. 1. — P. 91–101.

[15] *Sierpiński W.* Sur quelques algorithmes pour développer les nombres réels en séries // Sierpiński W. Oeuvres choisies. — Warszawa: PWN, 1974. — t. 1: Bibliographie, théorie des nombres et analyse mathématique. — P. 236–254.

[16] *Zamfirescu T.* Most monotone functions are singular // Amer. Math. Monthly. — 1981. — Vol. 88, no. 1. — P. 47–49.