*Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки*
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2008, № 9.— С. 66–80.

УДК 512.53

# Версія теорії аналітичних функцій кватерніонної змінної з елементами диференціального числення

М. В. Працьовитий, А. А. Томусяк
(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова,
Вінницький державний педагогічний університет ім. М. Коцюбинського)

Анотація. Розвивається аналіз для функцій кватерніонної змінної з використанням матричного подання алгебри кватерніонів. Знайдено вирази похідної для функцій введеного типу (показникової, логарифмічної, степеневої, тригонометричних тощо).

Abstract. We develop an analysis for functions of quaternion variable using the matrix representation for quaternion algebra. The expressions of derivative for some class of functions (exponent, logarithmic, power, trigonometric functions, et al.) are found.

## 1. Вступ

Багатство теорії функції комплексної змінної, ефективність її методів завжди слугували стимулом і джерелом ідей при побудові теорії функції гіперкомплексної змінної, зокрема теорії кватерніонних функцій.

Достатньо повний виклад результатів кватерніонного аналізу подається в [**1**]. Нестандартні версії умов Коші-Рімана можна знайти в [**2**].

Новизна нашого підхода у тому, що множина $\boldsymbol{H}$ розглядається як алгебра рангу 4 над полем $\boldsymbol{R}$ і для неї будується матричне подання "кватерніона", а через нього можна подати $n$-й степень кватерніона, а отже, суми певних степеневих рядів, в алгебраїчній формі.

У виділенному класі аналітичних функцій виконується версія умов Коші-Ріиана, запропонована в [**4**], що дає змогу побудувати фрагмент диференціального числення числення на основі поняття похідної, запропонованої там же.

## 2. Алгебра кватерніонів

Нехай маємо 2-матричне подання алгебри кватерніонів над полем $\boldsymbol{R}$, базовою множиною якої є лінійний простір

$$\boldsymbol{H} = \{x_0 + x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k} \mid x_0, x_1, x_2, x_3 \in \boldsymbol{R}\},$$

а множення елементів цього простору здійснюється згідно таблички

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \hline 1 & 1 & \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \boldsymbol{i} & \boldsymbol{i} & -1 & \boldsymbol{k} & -\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{j} & \boldsymbol{j} & -\boldsymbol{k} & -1 & \boldsymbol{i} \\ \boldsymbol{k} & \boldsymbol{k} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{i} & -1 \end{array}$$

Цю алгебру називають *алгеброю кватерніонів*, а її елементи кватерніонами.

Така алгебра мономорфно вкладається в повну матричну алгебру $M_4$, а саме відображення алгебри $\boldsymbol{H}$ в матричну підалгебру алгебри $M_4$

$$M_q = \left\{ \begin{pmatrix} x_0 & -x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_0 & x_3 & -x_2 \\ -x_2 & -x_3 & x_0 & -x_1 \\ -x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \end{pmatrix} : x_0, x_1, x_2, x_3 \in \boldsymbol{R} \right\}$$

за правилом

$$\boldsymbol{q} = x_0 + x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k} \mapsto \begin{pmatrix} x_0 & -x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_0 & x_3 & -x_2 \\ -x_2 & -x_3 & x_0 & -x_1 \\ -x_3 & x_2 & x_1 & x_0 \end{pmatrix} \qquad (1)$$

є ізоморфізмом. Отже, алгебра $\boldsymbol{H}$ має матричне подання, скориставшись яким, перенесемо на кватерніони деякі матричні характеристики.

Назвемо *алгебраїчною нормою* кватерніона $\boldsymbol{q}$ визначник його матричного його матричного подання (1), тобто

$$N_r\boldsymbol{q} := detQ(x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2. \qquad (2)$$

(Зазначимо, що, як правило, за алгебраїчну норму приймають число $x_0^2+x_1^2+x_2^2+x_3^2$. Ми ж слідуємо прийнятим "правилом гри"наділення кватерніонів певними характеристиками. Звичайно основна властивість алгебраїчної норми зберігається, а саме: для будь-яких $\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2 \in H N_r(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2) = N_r\boldsymbol{q}_1 N_r\boldsymbol{q}_2$.

*Власними значеннями кватерніона* $\boldsymbol{q} = x_0 + x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}$ назвемо власні значення його матричного подання (1), тобто кореня, характеристичного многочлена матриці $Q$, який в даному випадку має вигляд

$$det(\lambda E - Q) = ((\lambda - x_0)^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^2.$$

Отже кожен відмінний від нуля кватерніон має два власні значення

$$\lambda_{1,2} = x_0 \pm i\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2},$$

взагалі кажучи, кратності 2, які у подальшому позначаються

$$\lambda_{\boldsymbol{q}} = x_0 + ir, \overline{\lambda}_{\boldsymbol{q}}. \tag{3}$$

Побудуємо резольвенту матриці $Q$, яка є поданням кватерніона $\boldsymbol{q}$:

$$R(\lambda) = \frac{1}{(\lambda - x_0)^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \begin{pmatrix} \lambda - x_0 & -x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & \lambda - x_0 & x_3 & -x_2 \\ -x_2 & -x_3 & \lambda - x_0 & -x_1 \\ -x_3 & x_2 & x_1 & \lambda - x_0 \end{pmatrix} = . \tag{4}$$

$$= (\lambda E - Q)^{-1}.$$

Знайдемо власні проектори лінійного оператора [**3**, с.56-58], що подається в базисі $<1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}>$, які відповідають власним значенням $\lambda_{\boldsymbol{q}}, \overline{\lambda}_{\boldsymbol{q}}$:

$$P_{\lambda_{\boldsymbol{q}}} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{\lambda_{\boldsymbol{q}}}} R(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \begin{pmatrix} ir & -x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & ir & x_3 & -x_2 \\ -x_2 & -x_3 & ir & -x_1 \\ -x_3 & x_2 & x_1 & ir \end{pmatrix}, \tag{5}$$

$$P_{\overline{\lambda}_{\boldsymbol{q}}} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_{\overline{\lambda}_{\boldsymbol{q}}}} R(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \begin{pmatrix} ir & x_1 & -x_2 & -x_3 \\ -x_1 & ir & -x_3 & x_2 \\ x_2 & x_3 & ir & x_1 \\ x_3 & -x_2 & -x_1 & ir \end{pmatrix}, \tag{6}$$

де $C_{\lambda_{\boldsymbol{q}}}$ – коло з центром у точці $\lambda_{\boldsymbol{q}}$, радіуса меньшого $d(\lambda_{\boldsymbol{q}}, \overline{\lambda}_{\boldsymbol{q}})$, $C_{\overline{\lambda}_{\boldsymbol{q}}}$ – коло з центром у точці $\overline{\lambda}_{\boldsymbol{q}}$, радіуса меньшого $d(\overline{\lambda}_{\boldsymbol{q}}, \lambda_{\boldsymbol{q}})$. Тоді матричний квартеніона $\boldsymbol{q}$ матриця $Q$ подається у канонічному вигляді

$$Q = \lambda_{\boldsymbol{q}} P_{\lambda_{\boldsymbol{q}}} + \overline{\lambda}_{\boldsymbol{q}} P_{\overline{\lambda}_{\boldsymbol{q}}}. \tag{7}$$

А оскільки прообразами матриць $P_{\lambda_{\boldsymbol{q}}}$, $P_{\overline{\lambda}_{\boldsymbol{q}}}$ при відображені (1) є псевдокватерніони

$$q_{\lambda_{\boldsymbol{q}}} = \frac{1}{2} + \frac{x_1}{2ir}\boldsymbol{i} + \frac{x_2}{2ir}\boldsymbol{j} + \frac{x_3}{2ir}\boldsymbol{k}, \;\; q_{\overline{\lambda}_{\boldsymbol{q}}} = \frac{1}{2} - \frac{x_1}{2ir}\boldsymbol{i} - \frac{x_2}{2ir}\boldsymbol{j} - \frac{x_3}{2ir}\boldsymbol{k} = \overline{q}_{\lambda_q},$$

то квартеніон $\boldsymbol{q}$ можна подати у вигляді

$$\boldsymbol{q} = \lambda_{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{q}_{\lambda_{\boldsymbol{q}}} + \overline{\lambda}_{\boldsymbol{q}}\overline{\boldsymbol{q}}_{\lambda_{\boldsymbol{q}}} \tag{8}$$

або в розширеному вигляді

$$\boldsymbol{q} = x_0 + x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k} =$$

$$= (x_0 + ir)\left(\frac{1}{2} + \frac{x_1}{2ir}\boldsymbol{i} + \frac{x_2}{2ir}\boldsymbol{j} + \frac{x_3}{2ir}\boldsymbol{k}\right) + (x_0 - ir)\left(\frac{1}{2} - \frac{x_1}{2ir}\boldsymbol{i} - \frac{x_2}{2ir}\boldsymbol{j} - \frac{x_3}{2ir}\boldsymbol{k}\right)$$

звертаємо увагу на те, що $\boldsymbol{q}_{\lambda_{\boldsymbol{q}}}$, $\overline{\boldsymbol{q}}_{\lambda_{\boldsymbol{q}}}$ не є кватерніонами. Тут $\lambda_{\boldsymbol{q}}$, $\overline{\lambda}_{\boldsymbol{q}}$, $\boldsymbol{q}_{\lambda_{\boldsymbol{q}}}$, $\overline{\boldsymbol{q}}_{\lambda_{\boldsymbol{q}}}$ $\boldsymbol{i}$ – елемент з поля $C$, $i$ - виділений елемент алгебри $\boldsymbol{H}$ (множити $i$ на $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$ не можна).

Теорема

**Теорема** 1. *$n$ – ий степінь відмінного від нуля кватерніона* $\mathbf{q}$*, подаєтьcя у вигляді*

$$\mathbf{q}^n = \lambda_{\mathbf{q}}^n q_{\lambda_{\mathbf{q}}} + \overline{\lambda}_{\mathbf{q}}^n \overline{\mathbf{q}}_{\lambda_{\mathbf{q}}} \tag{9}$$

Доведення. Насамперед переконаємось, що характеристичні властивості проекторів (5) і (6), а саме:

$$P_{\lambda_q}P_{\lambda_q} = P_{\lambda_q}, \;\; P_{\overline{\lambda}_q}P_{\overline{\lambda}_q} = P_{\overline{\lambda}_q}, \;\; P_{\lambda_q}P_{\overline{\lambda}_q} = P_{\overline{\lambda}_q}P_{\lambda_q} = 0,$$

переносяться на псевдокватерніони $\boldsymbol{q}_{\lambda_q}, \overline{\boldsymbol{q}}_{\lambda_q}$.

Справді,

$$\boldsymbol{q}_{\lambda_q}^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{x_1}{2ir}\boldsymbol{i} + \frac{x_2}{2ir}\boldsymbol{j} + \frac{x_3}{2ir}\boldsymbol{k}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4r^2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + \frac{x_1}{2ir}\boldsymbol{i} + \frac{x_2}{2ir}\boldsymbol{j} + \frac{x_3}{2ir}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{q}_{\lambda_{\boldsymbol{q}}}.$$

Аналогічно

$$\overline{\boldsymbol{q}}_{\lambda_q}^2 = \overline{\boldsymbol{q}}_{\lambda_q}.$$

Крім того,

$$\boldsymbol{q}_{\lambda_q}\overline{\boldsymbol{q}}_{\lambda_q} = \frac{1}{2} + \left(\frac{x_1}{2ir}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{2ir}\right)^2 + \left(\frac{x_3}{2ir}\right)^2 = 0.$$

Отже,

$$\boldsymbol{q}^2 = (\lambda_{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{q}_{\lambda_{\boldsymbol{q}}} + \overline{\lambda}_{\boldsymbol{q}}\overline{\boldsymbol{q}}_{\lambda_{\boldsymbol{q}}})^2 = \lambda_{\boldsymbol{q}}^2\boldsymbol{q}_{\lambda_{\boldsymbol{q}}}^2 + \lambda_{\boldsymbol{q}}\overline{\lambda}_{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{q}_{\lambda_{\boldsymbol{q}}}\overline{\boldsymbol{q}}_{\lambda_{\boldsymbol{q}}} + \lambda_{\boldsymbol{q}}\overline{\lambda}_{\boldsymbol{q}}\overline{\boldsymbol{q}}_{\lambda_{\boldsymbol{q}}}\boldsymbol{q}_{\lambda_{\boldsymbol{q}}} + \overline{\lambda}_{\boldsymbol{q}}^2\overline{\boldsymbol{q}}_{\lambda_{\boldsymbol{q}}}^2 = \lambda_{\boldsymbol{q}}^2\boldsymbol{q}_{\lambda_{\boldsymbol{q}}} + \overline{\lambda}_{\boldsymbol{q}}^2\overline{\boldsymbol{q}}_{\lambda_{\boldsymbol{q}}}$$

І для кожного $n$ з того, що

$$\boldsymbol{q}^n = \lambda_{\boldsymbol{q}}^n\boldsymbol{q}_{\lambda_{\boldsymbol{q}}} + \overline{\lambda}_{\boldsymbol{q}}^n\overline{\boldsymbol{q}}_{\lambda_{\boldsymbol{q}}}$$

випливає

$$\boldsymbol{q}^{n+1} = \boldsymbol{q}^n \boldsymbol{q} = (\lambda_{\boldsymbol{q}}^n \boldsymbol{q}_{\lambda_{\boldsymbol{q}}} + \overline{\lambda}_{\boldsymbol{q}}^n \overline{\boldsymbol{q}}_{\lambda_{\boldsymbol{q}}})(\lambda_{\boldsymbol{q}} \boldsymbol{q}_{\lambda_{\boldsymbol{q}}} + \overline{\lambda}_{\boldsymbol{q}} \overline{\boldsymbol{q}}_{\lambda_q}) =$$
$$= \lambda_{\boldsymbol{q}}^{n+1} \boldsymbol{q}_{\lambda_q}^2 + \lambda_q^n \overline{\lambda}_q \boldsymbol{q}_{\lambda_q} \overline{\boldsymbol{q}}_{\lambda_{\boldsymbol{q}}} + \lambda_{\boldsymbol{q}} \overline{\lambda}_{\boldsymbol{q}}^n \overline{\boldsymbol{q}}_{\lambda_q} \boldsymbol{q}_{\lambda_q} + \overline{\lambda}_q^{n+1} \overline{q}_{\lambda_q}^2 = \lambda_{\boldsymbol{q}}^{n+1} \boldsymbol{q}_{\lambda_q} + \overline{\lambda}_q^{n+1} \overline{\boldsymbol{q}}_{\lambda_q}$$

І рівність (9) доведена. □

## 3. Алгебра $H$-повний нормований простір

Наділимо алгебру $\boldsymbol{H}$ нормою, а саме, скориставшись матричною нормою Гільберта-Шмідта, означимо

$$\|\boldsymbol{q}\| := \|Q\| = 2\sqrt{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}. \tag{10}$$

Очевидно, що норма 10 породжується скалярним добутком

$$(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2) = 4\sum_{k=0}^{3} x_k y_k.$$

Таким чином алгебра $\boldsymbol{H}$ *евклідів простір.*

В подальшому не будемо відходити від класики і приймемо $\|\boldsymbol{q}\| = |\boldsymbol{q}|$, $(\boldsymbol{q}_1, \boldsymbol{q}_2) = \sum\limits_{k=0}^{3} x_k y_k$, тоді набір кватерніонів $(1, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ є ортонормованим базисом простору $\boldsymbol{H}$.

Нехай маємо послідовності кватерніонів

$$(\boldsymbol{q}_n) = x_{0n} + x_{1n}\boldsymbol{i} + x_{2n}\boldsymbol{j} + x_{3n}\boldsymbol{k}.$$

В стандартний спосіб кватерніон $(\boldsymbol{q}_0) = (x_{00} + x_{10}\boldsymbol{i} + x_{20}\boldsymbol{j} + x_{30}\boldsymbol{k})$ назвемо *границею послідовності* $(\boldsymbol{q}_n)$, якщо для будь якого $\varepsilon > 0$ існує номер $n_0$ такий, що для всіх $n > n_0$ виконується нерівність

$$||\boldsymbol{q}_n - \boldsymbol{q}_0|| < \varepsilon$$

А оскільки послідовність кватерніонів $\boldsymbol{q}_n$ породжує чотири послідовності дійсних чисел $(x_{0n}), (x_{1n}), (x_{2n}), (x_{3n})$, неважко переконатися, що послідовність $(\boldsymbol{q}_n)$ збігається тоді і лише тоді, коли збігаються послідовності $(x_{0n}), (x_{1n}), (x_{2n}), (x_{3n})$ причому

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{q}_n = \lim_{n\to\infty} x_{0n} + \lim_{n\to\infty} x_{1n}\boldsymbol{i} + \lim_{n\to\infty} x_{2n}\boldsymbol{j} + \lim_{n\to\infty} x_{3n}\boldsymbol{k}. \tag{11}$$

*Приклад.* Покажемо, що для кожного $q \in H$ існує

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{\boldsymbol{q}}{n}\right)^n.$$

Справді, оскільки

$$\left(1 + \frac{\boldsymbol{q}}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{x_0}{n} + \frac{x_1}{n}\boldsymbol{i} + \frac{x_2}{n}\boldsymbol{j} + \frac{x_3}{n}\boldsymbol{k}\right)^n =$$

$$= \left(1 + \frac{x_0}{n} + i\frac{r}{n}\right)^n \left(\frac{1}{2} + \frac{x_1}{2ir}\boldsymbol{i} + \frac{x_2}{2ir}\boldsymbol{j} + \frac{x_3}{2ir}\boldsymbol{k}\right) + \left(1 + \frac{x_0}{n} - i\frac{r}{n}\right)^n \left(\frac{1}{2} - \frac{x_1}{2ir}\boldsymbol{i} - \frac{x_2}{2ir}\boldsymbol{j} - \frac{x_3}{2ir}\boldsymbol{k}\right),$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{\boldsymbol{q}}{n}\right)^n=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{x_0+ir}{n}\right)^n+\left(1+\frac{x_0-ir}{n}\right)^n\right)+$$
$$+\frac{x_1}{2ir}\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{x_0+ir}{n}\right)^n-\left(1+\frac{x_0-ir}{n}\right)^n\right)\boldsymbol{i}+$$
$$+\frac{x_2}{2ir}\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{x_0+ir}{n}\right)^n-\left(1+\frac{x_0-ir}{n}\right)^n\right)\boldsymbol{j}+$$
$$+\frac{x_3}{2ir}\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{x_0+ir}{n}\right)^n-\left(1+\frac{x_0-ir}{n}\right)^n\right)\boldsymbol{k}=$$
$$=\frac{1}{2}(e^{x_0+ir}+e^{x_0-ir})+\frac{x_1}{2ir}(e^{x_0+ir}-e^{x_0-ir})\boldsymbol{i}+\frac{x_2}{2ir}(e^{x_0+ir}-e^{x_0-ir})\boldsymbol{j}+\frac{x_3}{2ir}(e^{x_0+ir}-e^{x_0-ir})\boldsymbol{k}=$$
$$=e^{x_0}\cos r+\frac{x_1}{r}e^{x_0}\sin r\boldsymbol{i}+\frac{x_2}{r}e^{x_0}\sin r\boldsymbol{j}+\frac{x_3}{r}e^{x_0}\sin r\boldsymbol{k}.$$

Зазначимо, що алгебра $\boldsymbol{H}$ є повним нормованим простором.

## 4. Кватерніонні степеневі ряди

Вираз вигляду $\boldsymbol{q}_1+\boldsymbol{q}_2+\boldsymbol{q}_3+...=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{q}_n$ називається *кватерніонним рядом.* Він породжує чотири ряди з дійсними членами

$$\sum_{n=1}^{\infty}x_{0n},\sum_{n=1}^{\infty}x_{1n},\sum_{n=1}^{\infty}x_{2n},\sum_{n=1}^{\infty}x_{3n}.$$

Очевидно, що кватеріорний ряд збігається тоді і лише тоді, коли збігаються породжені ним чотири ряди, причому у випадку збіжності

$$\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{q}_n=\sum_{n=1}^{\infty}x_{0n}+\sum_{n=1}^{\infty}x_{1n}\boldsymbol{i}+\sum_{n=1}^{\infty}x_{2n}\boldsymbol{j}+\sum_{n=1}^{\infty}x_{3n}\boldsymbol{k}$$

Для прикладу розглянемо ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\boldsymbol{q}^n,$$

який можна подати у вигляді

$$\sum_{n=1}^{\infty}(x_0+ir)^n\left(\frac{1}{2}+\frac{x_1}{2ir}\boldsymbol{i}+\frac{x_2}{2ir}\boldsymbol{j}+\frac{x_3}{2ir}\boldsymbol{k}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}(x_0-ir)^n\left(\frac{1}{2}-\frac{x_1}{2ir}\boldsymbol{i}-\frac{x_2}{2ir}\boldsymbol{j}-\frac{x_3}{2ir}\boldsymbol{k}\right).$$

Якщо $|x_0+ir|<1$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty}x_{0,n}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x_0-ir}+\frac{1}{1-x_0+ir}\right)=\frac{1-x_0}{(1-x_0)^2+r^2},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{1,n} = \frac{x_1}{2ir}\left(\frac{1}{1-x_0-ir} + \frac{1}{1-x_0+ir}\right) = \frac{x_1}{(1-x_0)^2+r^2},$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{2,n} = \frac{x_2}{2ir}\left(\frac{1}{1-x_0-ir} + \frac{1}{1-x_0+ir}\right) = \frac{x_2}{(1-x_0)^2+r^2},$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} x_{3,n} = \frac{x_3}{2ir}\left(\frac{1}{1-x_0-ir} + \frac{1}{1-x_0+ir}\right) = \frac{x_3}{(1-x_0)^2+r^2}.$$

Отже, якщо $|x_0 - ir| < 1$, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{q}^n = \frac{1}{(1-x_0)^2+r^2}(1-x_0+x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j}+x_3\boldsymbol{k}) = \frac{1}{1-\boldsymbol{q}}.$$

Вираз виду

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \boldsymbol{q}^n, \tag{12}$$

де $a_n \in \boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{q} \in \boldsymbol{H}$, називається *кватерніонним степеневим рядом* з дійсними коефіцієнтами(Далі "кватерніонний степеневий ряд").

**Теорема** 2. *Якщо степеневий ряд*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \tag{13}$$

*збігається на інтервалі $(-R; R)$, то кватерніорний степеневий ряд (26) збігається для всіх кватерніонів, власні значення яких за модулем менші $R$, причому коли $S(x)$ - сума ряду (31) то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n q^n = \frac{1}{2}(S(x_0+ir)+S(x_0-ir)) + \frac{x_1}{2ir}(S(x_0+ir)+S(x_0-ir))\mathbf{i}+$$
$$+\frac{x_2}{2ir}(S(x_0+ir)+S(x_0-ir))\mathbf{j} + \frac{x_3}{2ir}(S(x_0+ir)+S(x_0-ir))\mathbf{k}. \tag{14}$$

Доведення. За рядом (31) побудуємо відповідні чотири дійснозначні ряди. А саме, врахувавши (9), маємо:

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda_{\boldsymbol{q}}^n q_{\lambda_q} + \overline{\lambda}_q^n \overline{q}_{\lambda_q}) =$$
$$= a_0\left(\frac{1}{2} + \frac{x_1}{2ir}\boldsymbol{i} + \frac{x_2}{2ir}\boldsymbol{j} + \frac{x_3}{2ir}\boldsymbol{k}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_q^n \left(\frac{1}{2} + \frac{x_1}{2ir}\boldsymbol{i} + \frac{x_2}{2ir}\boldsymbol{j} + \frac{x_3}{2ir}\boldsymbol{k}\right) +$$
$$+a_0\left(\frac{1}{2} - \frac{x_1}{2ir}\boldsymbol{i} - \frac{x_2}{2ir}\boldsymbol{j} - \frac{x_3}{2ir}\boldsymbol{k}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_q^n \left(\frac{1}{2} - \frac{x_1}{2ir}\boldsymbol{i} - \frac{x_2}{2ir}\boldsymbol{j} - \frac{x_3}{2ir}\boldsymbol{k}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\lambda_q^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\overline{\lambda}_q^n\right) + \frac{x_1}{2ir}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda_q^n - \overline{\lambda}_q^n)\boldsymbol{i}+$$

$$+\frac{x_2}{2ir}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda_q^n - \overline{\lambda}_q^n)\boldsymbol{j} + \frac{x_3}{2ir}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(\lambda_q^n - \overline{\lambda}_q^n)\boldsymbol{k}.$$

Отже, ввідповідні чотири ряди

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\lambda_q^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\overline{\lambda}_q^n\right), \frac{x_1}{2ir}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\lambda_q^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\overline{\lambda}_q^n\right),$$

$$\frac{x_2}{2ir}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\lambda_q^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\overline{\lambda}_q^n\right), \frac{x_3}{2ir}\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\lambda_q^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\overline{\lambda}_q^n\right)$$

при $|\lambda_q| < R$, їх суми дорівнюють відповідно

$$\frac{1}{2}\left(S(\lambda_q) + S(\overline{\lambda}_q)\right), \frac{x_1}{2ir}\left(S(\lambda_q) - S(\overline{\lambda}_q)\right),$$

$$\frac{x_2}{2ir}\left(S(\lambda_q) - S(\overline{\lambda}_q)\right), \frac{x_3}{2ir}\left(S(\lambda_q) - S(\overline{\lambda}_q)\right).$$

І рівність (32) доведена □

## 5. Елементарні функції кватерніонної змінної

Якраз теорема 2 дає інструментарій для побудови основних елементарних функцій кватерніонної змінної. Точніше, діємо за правилом: аналітичну функцію дійсної $f(x)$ подаємо у вигляді ряду, який збігається на інтервалі $(-R; R)$ ($R$ може рівнятись $+\infty$), тобто

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \text{ де } a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}.$$

Будуємо формальний ряд виду (26), який збігається для всіх кватерніонів, модуль власних значень яких меньший $R$.

Відповідність, яка кожному кватерніону, власне значення якого меньше $R$, відносить суму побудованого ряду, і будемо називати *аналітичною функцією кватерніонної змінної*, визначеною в області $G = \{\boldsymbol{q} : |\lambda_q| < R\}$, де $\lambda_q$ - власне значення кватерніона $\boldsymbol{q}$. Позначення збережемо, тобто коли функція кватерніонної змінної будувалась за функцією $f(x)$, то її будемо позначати $f(\boldsymbol{q})$ і записувати в алгебраїчній формі

$$f(\boldsymbol{q}) = f(x_0 + x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}) =$$

$$= \frac{1}{2}(f(x_0 + ir) + f(x_0 - ir)) + \frac{x_1}{2ir}(f(x_0 + ir) - f(x_0 - ir))\boldsymbol{i}+$$

$$+\frac{x_2}{2ir}(f(x_0+ir)-f(x_0-ir))\boldsymbol{j}+\frac{x_3}{2ir}(f(x_0+ir)-f(x_0-ir))\boldsymbol{k}, \tag{15}$$

де $f(x_0+ir), f(x_0-ir)$ - значення аналітичної функції $f(z)$ комплексної змінної. Якщо $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, то (15) можна записати у вигляді

$$f(\boldsymbol{q})=u(x_0,r)+\frac{x_1}{r}v(x_0,r)\boldsymbol{i}+\frac{x_2}{r}v(x_0,r)\boldsymbol{j}+\frac{x_3}{r}v(x_0,r)\boldsymbol{k}.$$

(1) *Показникова функція.* Для кожного $\mathbf{q}\in\boldsymbol{H}$, означимо

$$e^{\boldsymbol{q}}=\frac{1}{2}(e^{x_0+ir}+e^{x_0-ir})+\frac{x_1}{2ir}(e^{x_0+ir}-e^{x_0-ir})\boldsymbol{i}+\frac{x_2}{2ir}(e^{x_0+ir}-e^{x_0-ir})\boldsymbol{j}+$$

$$+\frac{x_3}{2ir}(e^{x_0+ir}-e^{x_0-ir})\boldsymbol{k}=e^{x_0}(\cos r+\frac{x_1}{r}\sin r\boldsymbol{i}+\frac{x_2}{r}\sin r\boldsymbol{j}+\frac{x_3}{r}\sin r\boldsymbol{k}).$$

(2) *Тригонометричні функції.* Для кожного $\boldsymbol{q}\in\boldsymbol{H}$, означимо

$$\cos\boldsymbol{q}=\frac{1}{2}(\cos(x_0+ir)+(\cos(x_0-ir))+\frac{x_1}{2ir}(\cos(x_0+ir)-(\cos(x_0-ir))\boldsymbol{i}+$$

$$+\frac{x_2}{2ir}(\cos(x_0+ir)-(\cos(x_0-ir))\boldsymbol{j}+\frac{x_3}{2ir}(\cos(x_0+ir)-(\cos(x_0-ir))\boldsymbol{k}=$$

$$=\cos x_0 chr-\sin x_0\frac{shr}{r}(x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j}+x_3\boldsymbol{k}),$$

$$\sin\boldsymbol{q}=\frac{1}{2}(\sin(x_0+ir)+(\sin(x_0-ir))+\frac{x_1}{2ir}(\sin(x_0+ir)-(\sin(x_0-ir))\boldsymbol{i}+$$

$$+\frac{x_2}{2ir}(\sin(x_0+ir)-(\sin(x_0-ir))\boldsymbol{j}+\frac{x_3}{2ir}(\sin(x_0+ir)-(\sin(x_0-ir))\boldsymbol{k}=$$

$$=\sin x_0 shr-\cos x_0\frac{chr}{r}(x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j}+x_3\boldsymbol{k}).$$

Очевидно, що

$$\cos^2\boldsymbol{q}+\sin^2\boldsymbol{q}=\cos^2 x_0 ch^2 r-\sin^2 x_0 sh^2 r+\sin^2 x_0 ch^2 r-\cos^2 x_0 sh^2 r=$$

$$=ch^2 r-sh^2 r=1.$$

Більше того, для прикладу

$$2\sin^2\boldsymbol{q}=1-\cos 2\boldsymbol{q},\ \ 2\cos^2\boldsymbol{q}=1+\cos 2\boldsymbol{q},$$

$$\sin 2\boldsymbol{q}=2\sin\boldsymbol{q}\cos\boldsymbol{q},\ \ \cos 2\boldsymbol{q}=\cos^2\boldsymbol{q}-\sin^2\boldsymbol{q}.$$

(3) *Логарифмічна функція.* Для кожного $\mathbf{q} \in H$, для яких $|\lambda_q| < 1(1 + x_0 > 0)$, означимо

$$\ln(1+\boldsymbol{q}) = \frac{1}{2}(\ln(1+x_0+ir)+\ln(1+x_0-ir))+$$

$$+\frac{x_1}{2ir}(\ln(1+x_0+ir)-\ln(1+x_0-ir))\boldsymbol{i}+\frac{x_2}{2ir}(\ln(1+x_0+ir)-\ln(1+x_0-ir))\boldsymbol{j}+$$

$$+\frac{x_3}{2ir}(\ln(1+x_0+ir)-\ln(1+x_0-ir))\boldsymbol{k}=$$

$$=\ln|1+\boldsymbol{q}|+\frac{1}{r}arctg\frac{r}{1+x_0}(x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j}+x_3\boldsymbol{k}).$$

Зазначимо, що тут будуються однозначні функції. Покажемо, що

$$e^{\ln(1+\boldsymbol{q})} = 1+\boldsymbol{q}.$$

Справді, оскільки для $\ln(1+\boldsymbol{q})$ дійсна частина рівняється $\ln|1+\boldsymbol{q}|$, а уявна $arctg\dfrac{r}{1+x_0}$, то

$$e^{ln(1+\mathbf{q})} = |1+\mathbf{q}|\cos arctg\frac{r}{1+x_0}+\frac{1}{r}|1+\boldsymbol{q}|\sin arqtg\frac{r}{1+x_0}(x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j}+x_3\boldsymbol{k}),$$

і врахувавши, що

$$\cos arctg\frac{r}{1+x_0} = \frac{1+x_0}{|1+\boldsymbol{q}|},$$

$$\sin arctg\frac{r}{1+x_0} = \frac{r}{|1+\boldsymbol{q}|},$$

дістаємо, що

$$e^{\ln(1+\boldsymbol{q})} = 1+x_0+x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j}+x_3\boldsymbol{k}.$$

(4) *Степенева функція.* Для кожного $\mathbf{q} \in H$, для яких $|\lambda_q| < 1(1 + x_0 > 0)$, означимо

$$(1+\boldsymbol{q})^\alpha := e^{\alpha\ln(1+\boldsymbol{q})}.$$

В алгебраїчній формі

$$(1+\boldsymbol{q})^\alpha = |1+\boldsymbol{q}|^\alpha\cos\left(|\alpha|arctg\frac{r}{1+x_0}\right)+$$

$$+\frac{\alpha|1+\boldsymbol{q}|^\alpha}{|\alpha|r}\sin\left(|\alpha|arctg\frac{r}{1+x_0}\right)(x_1\boldsymbol{i}+x_2\boldsymbol{j}+x_3\boldsymbol{k})$$

## 6. Узагальнення функції кватерніонної змінної

Нехай функція $f(x)$ визначена на інтервалі $(a,b)$, $f(z)$ її продовження з $(a,b)$ на комплексну площину таке, що $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$. Тоді

$$f(\boldsymbol{q}) := \frac{1}{2}(f(\lambda_{\boldsymbol{q}}) + f(\overline{\lambda}_{\boldsymbol{q}})) + \frac{x_1}{2ir}(f(\lambda_{\boldsymbol{q}}) - f(\overline{\lambda}_{\boldsymbol{q}}))\boldsymbol{i} + \frac{x_2}{2ir}(f(\lambda_{\boldsymbol{q}}) - f(\overline{\lambda}_{\boldsymbol{q}}))\boldsymbol{j} +$$

$$+\frac{x_3}{2ir}(f(\lambda_{\boldsymbol{q}}) - f(\overline{\lambda}_{\boldsymbol{q}}))\boldsymbol{k} = u(x_0,r) + \frac{1}{r}v(x_0,r)(x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}), \tag{16}$$

де $u(x_0,r) = Ref(\lambda_{\boldsymbol{q}})$, $v(x_0,r) = Imf(\lambda_{\boldsymbol{q}})$, $\lambda_{\boldsymbol{q}} = x_0 + ir$, $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Зазначимо, що для такого типу функцій мають місце рівності

$$\boldsymbol{q}f(\boldsymbol{q}) = f(\boldsymbol{q})\boldsymbol{q}, \ \ f(\boldsymbol{q})g(\boldsymbol{q}) = g(\boldsymbol{q})f(\boldsymbol{q}).$$

Як приклад, візьмемо функцію $f(x) = \dfrac{1}{x}$ визначену на $(0;+\infty)$, продовжимо її на праву півплощину функцією $f(z) = \dfrac{1}{z}$. Тоді, врахувавши, що $Re\dfrac{1}{x_0+ir} = \dfrac{x_0}{|\boldsymbol{q}|}, Im\dfrac{1}{x_0+ir} = \dfrac{-r}{|\boldsymbol{q}|}$, згідно з формули (16) дістанемо

$$f(\boldsymbol{q}) = \frac{1}{\boldsymbol{q}} = \frac{x_0}{|\boldsymbol{q}|} - \frac{1}{r}\frac{r}{|\boldsymbol{q}|}(x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}) = \frac{1}{|\boldsymbol{q}|}\overline{\boldsymbol{q}} = \frac{1}{\boldsymbol{q}}.$$

У такому вигляді можна записати многочлен кватерніонної змінної з дійсними коефіцієнтами, дробово-раціональні функції $\boldsymbol{q}$ з дійсними коефіцієнтами, означити $\ln \boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{q}^\alpha$ на області $G = \{\boldsymbol{q} | Re\boldsymbol{q} > 0\}$. Зрозуміло, що арифметичні операції над функціями, означеними формулою (16), дають функції такого ж типу.

Більше того, для такого типу кватерніонних функцій можна виконувати операцію композиції.

Справді, якщо маємо функції $f(\boldsymbol{q})$ і $g(\boldsymbol{q})$ типу (16), то

$$f(\boldsymbol{q}) = u(x_0,r) + \frac{1}{r}v(x_0,r)(x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}),$$

де $u(x,y) = Ref(z)$, $v(x,y) = Imf(z)$,

$$g(\boldsymbol{q}) = P(x_0,r) + \frac{1}{r}Q(x_0,r)(x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}),$$

де $P(x,y) = Reg(z)$, $Q(x,y) = Img(z)$. Щоб побудувати $g(f(\boldsymbol{q}))$ у подальшому $g(\mathbf{q})$ покладемо $u(x_0,r)$ замість $x_0$, $v(x_0,r)$ замість $r$. Тоді

$$g(f(\mathbf{q})) = P(u(x_0,r), |v(x_0,r)|) + \frac{v(x_0,r)}{r|v(x_0,r)|}Q(u(x_0,r), |v(x_0,r)|)(x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}).$$

Як приклад, функцію $\sin^2 \boldsymbol{q}$ будемо трактувати як композицію функцій $f(\boldsymbol{q}) = \sin \boldsymbol{q}$ і $g(\boldsymbol{q}) = \boldsymbol{q}^2$. У цьому випадку

$$u(x,y) = \sin x chy, \;\; v(x,y) = \cos x shy,$$

$$P(x,y) = x^2 - y^2, \;\; Q(x,y) = 2xy.$$

Отже, згідно нашої конструкції

$$\sin^2 q = \sin^2 x_0 ch^2 r - \cos^2 x_0 sh^2 r + \frac{2}{r}\cos x_0 \sin x_0 shrchr(x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}),$$

що збігається з результатом отриманим безпосередньо.

## 7. Диференціювання функції кватерніонної змінної

При побудові елементів диференціального числення функцій кватерніонної змінної введеного типу будемо виходити з природної рівності

$$(\boldsymbol{q}^n)' := n\boldsymbol{q}^{n-1}. \tag{17}$$

**Теорема** 3. *Похідна функції* $\mathbf{q}_n$ *означена рівністю* (17) *обчислюється за формулою*

$$(\mathbf{q}^n)' = \frac{\partial}{\partial x_0}(\mathbf{q}^n) \tag{18}$$

Доведення. Подамо $\boldsymbol{q}^n$ в алгебраїчній формі і знайдемо частинну похідну по $x_0$ (мова йде про координатні функції). Маємо:

$$\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x_0^{n-k}(ir)^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x_0^{n-k}(-ir)^k\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2ir}\left(\sum_{k=0}^{n} C_n^k x_0^{n-k}(ir)^k + \sum_{k=0}^{n} C_n^k x_0^{n-k}(-ir)^k\right)(x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k})\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (n-k) x_0^{n-1-k}(ir)^k + \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (n-k) x_0^{n-1-k}(-ir)^k\right) +$$

$$+ \frac{1}{2ir}\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (n-k) x_0^{n-1-k}(ir)^k - \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k (n-k) x_0^{n-1-k}(-ir)^k\right)(x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}) =$$

$$= n\left(\frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x_0^{n-1-k}(ir)^k + \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x_0^{n-1-k}(-ir)^k\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2ir}\left(\sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x_0^{n-1-k}(ir)^k - \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k x_0^{n-1-k}(-ir)^k\right)(x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k})\right) = n\boldsymbol{q}^{n-1}.$$

□

**Теорема** 4. *Якщо степеневий ряд* (31) *збігається на інтервалі* $(-R; R)$ *і має суму* $S(x)$, *то кватерніонний ряд* (26) *можна почленно диференціювати в розумінні (17), причому область збіжності ряду*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n \mathbf{q}^{n-1} \tag{19}$$

*не змінюється, а його сума дорівнює*

$$S'(\mathbf{q}) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n \mathbf{q}^{n-1} = \frac{\partial}{\partial x_0} S(\mathbf{q}).$$

Доведення. Нехай степеневий ряд (31) збігаються на інтервалі $(-R; R)$ і його сума рівняється $S'(x)$. Тоді за теоремою 2 кватерніонний степеневий ряд (26) збігається для всіх кватерніонів, власні значення яких за модулем менші $R$, причому сума цього ряду подається у вигляді (13).

Степеневий ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$$

також збігається на інтервалі $(-R; R)$ і його сума рівняється $S'(x)$. Тоді знову за теоремою 2 кватерніонний степеневий ряд (19) збігається для всіх кватерніонів, власні значення яких за модулем менші $R$, причому сума цього ряду подається у вигляді

$$\frac{1}{2}(S'(x_0 + ir) + S'(x_0 - ir)) + \frac{1}{2ir}(S'(x_0 + ir) - S'(x_0 - ir))(x_1 \boldsymbol{i} + x_2 \boldsymbol{j} + x_3 \boldsymbol{k})$$

Оскільки $S'(x_0 + ir)$, $S'(x_0 - ir)$ – значення похідної функції комплексної змінної $S(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то дістанемо

$$S'(x_0 + ir) + S'(x_0 - ir) = \frac{\partial}{\partial x_0} u(x_0, r) + i \frac{\partial}{\partial x_0} v(x_0, r) +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial x_0} u(x_0, r) - i \frac{\partial}{\partial x_0} v(x_0, r) = 2 \frac{\partial}{\partial x_0} u(x_0, r),$$

$$S'(x_0 + ir) - S'(x_0 - ir) = 2i \frac{\partial}{\partial x_0} v(x_0, r).$$

Отже,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n n \mathbf{q}^{n-1} = \frac{\partial}{\partial x_0} u(x_0, r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial x_0} v(x_0, r)(x_1 \boldsymbol{i} + x_2 \boldsymbol{j} + x_3 \boldsymbol{k}) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_0}(u(x_0, r) + \frac{1}{r} v(x_0, r)(x_1 \boldsymbol{i} + x_2 \boldsymbol{j} + x_3 \boldsymbol{k})) = \frac{\partial}{\partial x_0} S(\boldsymbol{q}).$$

Згідно з формулою (19) маємо:

$$(e^{\boldsymbol{q}})' = (e^{\boldsymbol{q}}), \ \ (cos \boldsymbol{q})' = -sin \boldsymbol{q}, \ \ (sin \mathbf{q})' = cos \mathbf{q},$$

$$(ln(1 + \boldsymbol{q}))' = \frac{\partial}{\partial x_0} \left( ln|1 + \boldsymbol{q}| + \frac{1}{r} arctg \frac{r}{1 + x_0} (x_1 \boldsymbol{i} + x_2 \boldsymbol{j} + x_3 \boldsymbol{k}) \right) =$$

$$= \frac{1+x_0}{|1+\boldsymbol{q}|^2} - \frac{1}{|1+\boldsymbol{q}|^2}(x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}) = \frac{1}{1+\boldsymbol{q}}.$$

$\square$

Якщо функція кватерніонної змінної означається за формулою (16), причому $f(x)$ диференційована на інтервалі $(a,b)$, то

$$f'(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial}{\partial x_0} f(\boldsymbol{q}).$$

Очевидно, що

$$(f(\boldsymbol{q}) + g(\boldsymbol{q}))' = f'(\boldsymbol{q}) + g'(\boldsymbol{q}).$$

Якщо

$$f(\boldsymbol{q}) = u(x_0,r) + \frac{1}{r}v(x_0,r)(x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}),$$
$$g(\boldsymbol{q}) = P(x_0,r) + \frac{1}{r}Q(x_0,r)(x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}),$$

то

$$f'(\boldsymbol{q}) = u'_{x_0}(x_0,r) + \frac{1}{r}v'_{x_0}(x_0,r)(x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}),$$
$$g'(\boldsymbol{q}) = P'_{x_0}(x_0,r) + \frac{1}{r}Q'_{x_0}(x_0,r)(x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}).$$

Тоді, з одного боку,

$$(f(\boldsymbol{q})g(\boldsymbol{q}))' = (u(x_0,r)P(x_0,r) - v(x_0,r)Q(x_0,r)) +$$
$$+(u(x_0,r)Q(x_0,r) + v(x_0,r)P(x_0,r))\left(\frac{x_1}{r}\boldsymbol{i} + \frac{x_2}{r}\boldsymbol{j} + \frac{x_3}{r}\boldsymbol{k}\right)' =$$
$$= u'_{x_0}(x_0,r)P(x_0,r) + u(x_0,r)P'_{x_0}(x_0,r) -$$
$$-v'_{x_0}(x_0,r)Q(x_0,r) - v(x_0,r)Q'_{x_0}(x_0,r) +$$
$$+(u'_{x_0}(x_0,r)Q(x_0,r) + u(x_0,r)Q'_{x_0}(x_0,r) +$$
$$+v'_{x_0}(x_0,r)P(x_0,r) + v(x_0,r)R'_{x_0}(x_0,r))\left(\frac{x_1}{r}\boldsymbol{i} + \frac{x_2}{r}\boldsymbol{j} + \frac{x_3}{r}\boldsymbol{k}\right),$$

а з другого боку,

$$f'(\boldsymbol{q})g(\boldsymbol{q}) + f(\boldsymbol{q})g'(\boldsymbol{q}) = (u'_{x_0}(x_0,r) + \frac{1}{r}v'_{x_0}(x_0,r)Q(x_0,r)(x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}))\times$$
$$\times(P(x_0,r) + \frac{1}{r}Q(x_0,r)(x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k})) + (u(x_0,r) + \frac{1}{r}v(x_0,r)(x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k}))\times$$
$$\times(P'_{x_0}(x_0,r) + \frac{1}{r}Q'_{x_0}(x_0,r)(x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k})) = (f(\boldsymbol{q})g(\boldsymbol{q}))'.$$

Таким чином, маємо:

$$(f(\boldsymbol{q})g(\boldsymbol{q}))' = f'(\boldsymbol{q})g(\boldsymbol{q}) + f(\boldsymbol{q})g'(\boldsymbol{q}).$$

Оскільки

$$f(\boldsymbol{q})\overline{g}(\boldsymbol{q}) = \overline{g}(\boldsymbol{q})f(\boldsymbol{q}),$$

то

$$\left(\frac{f(\boldsymbol{q})}{g(\boldsymbol{q})}\right)'$$

визначається однозначно. Неважко перевірити, що

$$\left(\frac{f(\boldsymbol{q})}{g(\boldsymbol{q})}\right)' = \left(\frac{f(\boldsymbol{q})\overline{g}(\boldsymbol{q})}{|g(\boldsymbol{q})|^2}\right)' =$$

$$= \frac{(f'(\boldsymbol{q})g(\boldsymbol{q}) - f(\boldsymbol{q})g'(\boldsymbol{q}))\overline{g}^2(\boldsymbol{q})}{|g^2(\boldsymbol{q})|^2} = \frac{f'(\boldsymbol{q})g(\boldsymbol{q}) - f(\boldsymbol{q})g'(\boldsymbol{q})}{g^2(\boldsymbol{q})}.$$

І якщо функції $f(\boldsymbol{q})$ і $g(\boldsymbol{q})$ є функції типу (16), для яких можна побудувати складну функцію $g(f(\boldsymbol{q}))$, то

$$(g(f(\boldsymbol{q})))' = g'(f'(\boldsymbol{q}))f'(\boldsymbol{q}).$$

Таким чином, основні правила диференціювання функції дійсної змінної (і звичайно функції комплексної змінної) переносяться на функції кватерніонної змінної типу (16).

І насамкінець, якщо $f(z)$ аналітична, $f(\overline{z}) = \overline{f(z)}$, $u(x,y) = Ref(z)$, $v(x,y) = Imf(z)$, то похідну функції кватерніонної змінної

$$f(\boldsymbol{q}) = u(x_0, r) + \frac{1}{r}v(x_0, r)(x_1\boldsymbol{i} + x_2\boldsymbol{j} + x_3\boldsymbol{k})$$

можна подати у вигляді

$$f'(\boldsymbol{q}) = \frac{\partial u}{\partial x_0} - \frac{\partial u}{\partial x_1}\boldsymbol{i} - \frac{\partial u}{\partial x_2}\boldsymbol{j} - \frac{\partial u}{\partial x_3}\boldsymbol{k}.$$

## Література


[1] Садбери Э. Кватернионный анализ // Пер. с англ. Гиперкомплексные числа в геометрии и физике, №2, 2004. – С. 130-157.

[2] Alayon-Solarg D. On some modifications of the Fueter operator //daniejdaniel@gmail.com 01.02.2008. –13p.

[3] Като Т. Теория возмущений линейных операторов . – М.:Мир, 1972. – 740 с.

[4] Khaled Abdel-Khaled. Quaternion analysis // ar Xiv: hep-th / 9607152 v 2 18.11.1996 – 8 p.

[5] Працьовитий М.В., Вотякова Л.А. Аналіз на алгебрі двічи стохастичних матриць // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова. – 2005, №6. – с.282-300.