Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2008, № 9.— С. 39–47.

УДК 517.9

Побудова періодичних розв'язків сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь із змінним запізненням аргументу та виродженням

К. В. Шатковська
(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

Анотація. Для лінійної сингулярно збуреної системи диференціальних рівнянь з тотожно виродженою матрицею при похідних та малим змінним запізненням аргументу побудовано асимптотику періодичного розв'язку. Досліджено "нерезонансний"і "резонансний"випадки.

Abstract. The asymptotic of the periodic solution for the linear singularly perturbed system of the differential equations with degenerated matrix near the derivatives and the small variable delay of the argument is constructed. The "nonresonance" and "resonance" cases are investigated.

Розглянемо систему рівнянь вигляду

$$\varepsilon B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)\,x(t,\varepsilon) + C(t)\,x(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon) + f(t)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \lambda(\tau)\,d\tau\right), \qquad (1)$$

де $x(t,\varepsilon)$, $f(t)$ — відповідно шуканий і заданий n-вимірні вектори, $(0 < \varepsilon \le \varepsilon_0 \ll 1)$ — малий параметр, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ — квадратні матриці n-го порядку, причому матриця $B(t)$ тотожно вироджена на $\mathbb{R}$.

Системи рівнянь даного типу з тотожно виродженою матрицею при похідних розглядались в роботі [3], де по аналогії з [4] будується асимптотика основної початкової задачі.

У даній статті, виходячи з теорії асимптотичного інтегрування сингулярно збурених систем диференціальних рівнянь з виродженням, розробленій в [2], вивчається питання про побудову періодичних розв'язків системи (1).

Будемо передбачати, що виконуються такі умови:

1°. Елементи матриць $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, вектор-функція $f(t)$ і функції $\lambda(t)$, $\Delta(t)$ T— періодичні та нескінченно диференційовні на $\mathbb{R}$;

2°. В'язка матриць $A\left(t\right)-\omega B\left(t\right)$ регулярна на $\mathbb{R}$ і має $n-1$ простих скінченних елементарних дільників $\omega-\lambda_i\left(t\right)$, $i=\overline{1,n-1}$ та один — нескінченний;

3°. Функція $\lambda(t)$ задовольняє умову

$$\int\limits_0^T \lambda\left(\tau\right)d\tau=0, \tag{2}$$

яка забезпечує T— періодичність по t експоненціальної функції $\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \lambda\left(\tau\right)d\tau\right)$.

Розглянемо два принципово відмінні випадки: "нерезонансний", коли функція $\lambda(t)$ не є коренем характеристичного рівняння системи (1)

$$\det\left\|A\left(t\right)-\lambda\left(t\right)B\left(t\right)+C\left(t\right)\exp\left(-\Delta\left(t\right)\lambda\right)\right\|=0, \tag{3}$$

і "резонансний", коли функція $\lambda(t)$ задовольняє рівняння (3) при всіх $t\in\mathbb{R}$ і є його простим коренем.

У першому випадку періодичний розв'язок системи (1) будемо шукати у вигляді

$$x\left(t,\varepsilon\right)=u\left(t,\varepsilon\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \lambda\left(\tau\right)d\tau\right), \tag{4}$$

де $u(t,\varepsilon)$ — n - вимірний вектор, який зображається формальним розвиненням

$$u\left(t,\varepsilon\right)=\sum_{s=0}^{\infty}\varepsilon^s u^{(s)}\left(t\right). \tag{5}$$

Покажемо, що коефіцієнти розвинення (5) можна визначити так, щоб вони були T— періодичними і вектор-функція (4) формально задовольняла систему (1).

Підставивши вираз (4) в систему (1), маємо

$$\varepsilon B\left(t\right)u'\left(t,\varepsilon\right)=\left(A\left(t\right)-\lambda\left(t\right)B\left(t\right)\right)u\left(t,\varepsilon\right)+$$
$$+C\left(t\right)u\left(t-\varepsilon\Delta\left(t\right),\varepsilon\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda\left(\tau\right)d\tau\right)+f\left(t\right). \tag{6}$$

Враховуючи (5) і вважаючи вектори $u^{(s)}\left(t\right)$, $s=0,1,\ldots$, нескінченно диференційовними на $\mathbb{R}$, як і в $[4, c.119]$, розкладемо в ряд за стенями ε вектор $u\left(t-\varepsilon\Delta\left(t\right),\varepsilon\right)$ і функцію $\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda\left(\tau\right)d\tau\right)$:

$$u\left(t-\varepsilon\Delta\left(t\right),\varepsilon\right)=u^{(0)}\left(t\right)+\frac{\varepsilon}{1!}\left(u^{(1)}\left(t\right)-\Delta\left(t\right)\frac{du^{(0)}\left(t\right)}{dt}\right)+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{2!}\left(2u^{(2)}\left(t\right)-2\Delta\left(t\right)\frac{du^{(1)}\left(t\right)}{dt}+\Delta^2\left(t\right)\frac{d^2u^{(0)}\left(t\right)}{dt^2}\right)+\ldots; \tag{7}$$

$$\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{t}^{t-\varepsilon\Delta(t)}\lambda(\tau)\,d\tau\right)=\exp\left(-\Delta(t)\,\lambda(t)\right)\Big[1+\varepsilon\Delta^2(t)\,\lambda'(t)+$$
$$+\frac{\varepsilon^2\Delta^3(t)}{2}\left(\frac{1}{4}\Delta(t)\,\lambda'^2(t)-\frac{1}{3}\lambda''(t)\right)+\ldots\Big]. \qquad (8)$$

Для визначення коефіцієнтів ряду (5) прирівняємо в (6) члени при однакових степенях параметра ε з урахуванням (7), (8). Матимемо:

$$G(\lambda(t),t)\,u^{(0)}(t)=f(t); \qquad (9)$$

$$G(\lambda(t),t)\,u^{(1)}(t)=-G'_\lambda(\lambda(t),t)\,\frac{du^{(0)}(t)}{dt}-$$
$$-C(t)\exp\left(-\Delta(t)\,\lambda(t)\right)\Delta^2(t)\,\lambda'(t)\,u^{(0)}(t)+f(t); \qquad (10)$$

$$G(\lambda(t),t)\,u^{(k)}(t)=-G'_\lambda(\lambda(t),t)\,\frac{du^{(k-1)}(t)}{dt}-$$
$$-C(t)\exp\left(-\Delta(t)\,\lambda(t)\right)\Delta^2(t)\,\lambda'(t)\,u^{(k-1)}(t)+F_k(t)\,,k=2,3,\ldots, \qquad (11)$$

де

$$G(\lambda(t),t)=A(t)-\lambda(t)\,B(t)+C(t)\exp\left(-\Delta(t)\,\lambda(t)\right),$$

а вираз $F_k(t)$ містить тільки ті вектор-функції $u^{(i)}(t)$, індекси яких $i<k-1$.

Оскільки в даному випадку $\det G(\lambda(t),t)\neq 0$, $t\in\mathbb{R}$, то з цих рівнянь однозначно визначаються коефіцієнти розвинення (5):

$$u^{(0)}(t)=G^{-1}(\lambda(t),t)\,f(t);$$

$$u^{(k)}(t)=G^{-1}(\lambda(t),t)\left[F_k(t)-G'_\lambda(\lambda(t),t)\,\frac{du^{(k-1)}(t)}{dt}-\right.$$
$$\left.-C(t)\exp\left(-\lambda(t)\,\Delta(t)\right)\Delta^2(t)\,\lambda'(t)\,u^{(k-1)}(t)\right],\ k=1,2,\ldots,$$

причому всі вони будуть T — періодичними по змінній t.

У "резонансному"випадку періодичний розв'язок даної системи також шукатимемо у вигляді (4), але вектор-функцію $u(t,\varepsilon)$ будемо будувати у вигляді розвинення, яке розпочиняється з від'ємного степеня:

$$u(t,\varepsilon)=\sum_{s=-1}^{\infty}\varepsilon^s u^{(s)}(t). \qquad (12)$$

Підставивши (4) в систему (1) і прирівнявши коефіцієнти при однакових степенях ε із врахуванням розвинень (12), (7), (8), дістанемо

$$G(\lambda(t),t)\,u^{(-1)}(t)=0; \qquad (13)$$

$$G(\lambda(t),t)\,u^{(0)}(t)=-G'_\lambda(\lambda(t),t)\,\frac{du^{(-1)}(t)}{dt}-$$
$$-C(t)\exp\left(-\Delta(t)\,\lambda(t)\right)\Delta^2(t)\,\lambda'(t)\,u^{(-1)}(t)+f(t); \qquad (14)$$

$$G\left(\lambda\left(t\right),t\right)u^{(k)}\left(t\right)=-G'_{\lambda}\left(\lambda\left(t\right),t\right)\frac{du^{(k-1)}\left(t\right)}{dt}-$$
$$-C\left(t\right)\exp\left(-\Delta\left(t\right)\lambda\left(t\right)\right)\Delta^{2}\left(t\right)\lambda'\left(t\right)u^{(k-1)}\left(t\right)+\Phi_{k}\left(t\right),k=1,2,\ldots,\qquad(15)$$

де вираз $\Phi_k\left(t\right)$ містить тільки ті вектор-функції $u^{(i)}(t)$, індекси яких $i<k-1$.

Оскільки за припущенням функція $\lambda(t)$ є простим коренем рівняння (3), то ранг матриці $G\left(\lambda\left(t\right),t\right)$ дорівнює $n-1$ при всіх $t\in\mathbb{R}$. Тому рівняння (13) має відмінний від нуля розв'язок, який визначається з точністю до довільного скалярного множника. Оскільки матриці $A(t)$, $B(t)$, функції $\Delta(t)$, $\lambda(t)$ T— періодичні та нескінченно диференційовні, то матриця $G\left(\lambda\left(t\right),t\right)$ також є
T— періодичною і нескінченно диференційовною. Отже, згідно з $[1,6]$ існує T— періодичний,нескінченно диференційовний розв'язок рівняння (13), який позначимо $\varphi(t)$. Аналогічно встано-влюємо існування T— періодичного та нескінченно диференційовного розв'язку союзної системи $G^{*}\left(\lambda\left(t\right),t\right)y=0$, який позначимо $\psi(t)$.

Отже, з рівняння (13) знайдемо

$$u^{(-1)}\left(t\right)=c_{-1}\left(t\right)\varphi\left(t\right),\qquad(16)$$

де $\varphi(t)$ — T — періодична нескінченно диференційовна функція, а $c_0\left(t\right)$— скалярний множник, який визначимо далі.

Рівняння (14) буде розв'язним відносно $u^{(1)}\left(t\right)$ тоді і тільки тоді, коли його права частина буде ортогональна до вектора $\psi(t)$. Із врахуванням (16) 4° умова запишеться у вигляді

$$\big(G\left(t\right)'_{\lambda}\left(\lambda\left(t\right),t\right)\varphi\left(t\right),\psi\left(t\right)\big)\frac{dc_{-1}\left(t\right)}{dt}+\big[\big(G\left(t\right)'_{\lambda}\left(\lambda\left(t\right),t\right)\varphi'\left(t\right),\psi\left(t\right)\big)+$$
$$+\left(C\left(t\right)\varphi\left(t\right),\psi\left(t\right)\right)\exp\left(-\Delta\left(t\right)\lambda\left(t\right)\right)\Delta^{2}\left(t\right)\lambda'\left(t\right)\big]c_{-1}\left(t\right)+\left(f\left(t\right),\psi\left(t\right)\right)=0,\qquad(17)$$

де

$$\big(G\left(t\right)'_{\lambda}\left(\lambda\left(t\right),t\right)\varphi\left(t\right),\psi\left(t\right)\big)\neq0,\quad\forall,t\in\mathbb{R}.$$

Якщо

4°. $\int\limits_0^T\left(G'_{\lambda}\left(\lambda\left(t\right),t\right)\varphi\left(t\right),\psi\left(t\right)\right)^{-1}\times$

$$\times\big[\left(G'_{\lambda}\left(\lambda\left(t\right),t\right)\varphi'\left(t\right),\psi\left(t\right)\right)+\left(C\left(t\right)\varphi\left(t\right),\psi\left(t\right)\right)\exp\left(-\Delta\left(t\right)\lambda\left(t\right)\right)\Delta^{2}\left(t\right)\lambda'\left(t\right)\big]dt\neq0,$$

то рівняння (17) матиме єдиний T— періодичний розв'язок $c_{-1}\left(t\right)$, підставивши який у (16), дістанемо T— періодичний вектор $u^{(-1)}\left(t\right)$.

Забезпечивши розв'язність рівняння (14) , знайдемо

$$u^{(0)}\left(t\right)=G^{+}\left(\lambda\left(t\right),t\right)b_{0}\left(t\right)+c_{0}\left(t\right)\varphi\left(t\right),$$

де $G^{+}(\lambda(t),t)$—напівобернена матриця $[2, c.25]$ до матриці $G(\lambda(t),t)$, $b_0(t)$—вектор у правій частині (14), а $c_0(t)$—скалярна функція, яка визначається аналогічно на наступному кроці. Згідно з [2] матрицю $G^{+}(\lambda(t),t)$ можна визначити так, щоб вона була T— періодичною і нескінченно диференційовною; такою ж властивістю володіють і вектори $b_0(t)$ та $\varphi(t)$. Виконання умови 4° забезпечує існування єдиної T— періодичної функції $c_0(t)$, яка визначатиметься з диференціального рівняння, аналогічного (17).

Таким чином, нескінченна система алгебраїчних рівнянь (13) – (15) сумісна і вектор-функції $u^{(k)}(t)$, $k=-1,0,1,\dots$, які визначаються з неї за описаним алгоритмом, T— періодичні.

Покажемо, що побудований описаним способом T— періодичний відносно t формальний частинний розв'язок (4) має асимптотичний характер.

Для цього в системі (1) зробимо заміну

$$y(t,\varepsilon)=x_m(t,\varepsilon)-x(t,\varepsilon), \tag{18}$$

де $x_m(t,\varepsilon)=\sum\limits_{s=\alpha}^{m}\varepsilon^s u^{(s)}(t)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\lambda(\tau)\,d\tau\right)$, $\alpha=0$ в "нерезонансному"випадку і $\alpha=-1$ — у "резонансному", $x(t,\varepsilon)$- точний розв'язок системи (1), який на початковій множині $E_\triangle$ задовольняє умову

$$x_m(t,\varepsilon)-x(t,\varepsilon)=\mathrm{O}\left(\varepsilon^{m+1}\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\lambda(\tau)\,d\tau\right).$$

Взявши до уваги алгоритм визначення коефіцієнтів $u^{(k)}$, $k=\overline{\alpha,m}$, дістанемо:

$$\varepsilon B(t)\frac{dy(t,\varepsilon)}{dt}=A(t)\,y(t,\varepsilon)+C(t)\,y(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{m+1}\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\lambda(\tau)\,d\tau\right). \tag{19}$$

Доведемо, що рівняння (19) при досить малих ε має розв'язок $y(t,\varepsilon)$ такий, що $y(t,\varepsilon)=\mathrm{O}(\varepsilon^m)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\lambda(\tau)\,d\tau\right)$.

Оскільки згідно з умовою 2° в'язка матриць $A(t)-\omega B(t)$ має простий спектр, то відповідні жорданові ланцюжки матриці $A(t)$ відносно $B(t)$ і $B(t)$ відносно $A(t)$ мають довжину 1 і складаються лише з власних векторів [2].

Нехай $\varphi_i(t), i=\overline{1,n-1}$,—власні вектори матриці $A(t)$ відносно $B(t)$, $\tilde{\varphi}(t)$— власний вектор матриці $B(t)$, який відповідає її нульовому власному значенню; $\psi_i(t), i=\overline{1,n-1}$, та $\tilde{\psi}(t)$—елементи нуль-простору матриць $(A(t)-\lambda_i(t)B(t))^*$ та $B^*(t)$ відповідно. Вектори $\psi_i(t), i=\overline{1,n-1}$, та $\tilde{\psi}(t)$ визначимо так, щоб виконувалися рівності:

$$(B(t)\varphi_i(t),\psi_j(t))=\delta_{ij},\ i,j=\overline{1,n-1},$$

$$\left(A\left(t\right)\tilde{\varphi}(t),\tilde{\psi}(t)\right)=1, \tag{20}$$

δ_{ij}—символ Кронекера.

Зауважимо, що вектори $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\varphi_3(t),\ldots,\varphi_{n-1}(t),\tilde{\varphi}(t)$ та $\psi_1(t),\psi_2(t),\psi_3(t),\ldots,\psi_{n-1}(t),\tilde{\psi}(t)$ лінійно незалежні на відрізку $[0;T]$.

Як показано в $[2,c.93]$, однорідна система

$$\varepsilon B\left(t\right)\frac{dy\left(t,\varepsilon\right)}{dt}=A\left(t\right)y\left(t,\varepsilon\right) \tag{21}$$

має $n-1$ формальних лінійно незалежних розв'язків вигляду

$$y_i\left(t,\varepsilon\right)=v_i\left(t,\varepsilon\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\lambda_i\left(t,\varepsilon\right)dt\right),i=\overline{1,n-1}, \tag{22}$$

де

$$v_i\left(t,\varepsilon\right)=\varphi_i(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k v_k^{(i)}\left(t\right),\lambda_i\left(t,\varepsilon\right)=\lambda_i\left(t\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\varepsilon^k\lambda_k^{(i)}\left(t\right),i=\overline{1,n-1}. \tag{23}$$

Аналогічно [5], складемо квадратні матриці n-го порядку

$$Q\left(t,\varepsilon\right)=\left[V_m\left(t,\varepsilon\right),\tilde{\varphi}(t)\right],P\left(t\right)=\left[\Psi(t),\tilde{\psi}(t)\right]^*,$$

де

$$V_m\left(t,\varepsilon\right)=\left[v_m^{(1)}\left(t,\varepsilon\right),v_m^{(2)}\left(t,\varepsilon\right),...,v_m^{(n-1)}\left(t,\varepsilon\right)\right],\Psi(t)=\left[\psi_1(t),\psi_2(t),...,\psi_{n-1}(t)\right],$$

$$v_m^{(i)}\left(t,\varepsilon\right)=\varphi_i(t)+\sum_{k=1}^{m}\varepsilon^k v_k^{(i)}\left(t\right),i=\overline{1,n-1}.$$

Виконавши в системі (19) заміну

$$y\left(t,\varepsilon\right)=Q\left(t,\varepsilon\right)z\left(t,\varepsilon\right) \tag{24}$$

і домноживши обидві її частини зліва на $P(t)$, дістанемо

$$\varepsilon P\left(t\right)B\left(t\right)Q\left(t,\varepsilon\right)\frac{dz\left(t,\varepsilon\right)}{dt}=P\left(t\right)L\left(t,\varepsilon\right)Q\left(t,\varepsilon\right)z\left(t,\varepsilon\right)+D\left(t,\varepsilon\right)z\left(t-\varepsilon\Delta\left(t\right),\varepsilon\right)+$$

$$+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{m+1}\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\lambda\left(\tau\right)d\tau\right), \tag{25}$$

де $L\left(t,\varepsilon\right)=A\left(t\right)-\varepsilon B\left(t\right)\frac{d}{dt},D\left(t,\varepsilon\right)=P\left(t\right)C\left(t\right)Q\left(t-\varepsilon\Delta\left(t\right),\varepsilon\right)$.

Враховуючи структуру матриць $P(t)$, $Q(t,\varepsilon)$, систему (25) запишемо у вигляді

$$\varepsilon\begin{pmatrix}\Psi^*BV_m & \Psi^*B\tilde{\varphi}\\ \tilde{\psi}^*BV_m & \tilde{\psi}^*B\tilde{\varphi}\end{pmatrix}\frac{dz}{dt}=\begin{pmatrix}\Psi^*LV_m & \Psi^*L\tilde{\varphi}\\ \tilde{\psi}^*LV_m & \tilde{\psi}^*L\tilde{\varphi}\end{pmatrix}z+$$

$$+D\left(t,\varepsilon\right)z\left(t-\varepsilon\Delta\left(t\right),\varepsilon\right)+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{m+1}\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t\lambda\left(\tau\right)d\tau\right). \tag{26}$$

Оскільки за означенням векторів $\tilde{\varphi}(t), \tilde{\psi}(t)$

$$\Psi^* B\tilde{\varphi} = 0; \quad \tilde{\psi}^* B\tilde{\varphi} = 0; \quad \tilde{\psi}^* BV_m = 0;$$
$$\tilde{\psi}^* L\varphi = \left(A\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right) - \varepsilon\left(B\tilde{\varphi}', \tilde{\psi}\right) = \left(A\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\right) = 1,$$

а за побудовою формальних розв'язків (4)

$$L(t,\varepsilon) V_m(t,\varepsilon) = B(t) V_m(t,\varepsilon) \Lambda_m(t,\varepsilon) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{m+1}\right),$$

де

$$\Lambda_m(t,\varepsilon) = diag\left\{\lambda_m^{(1)}(t,\varepsilon), \lambda_m^{(2)}(t,\varepsilon), \ldots, \lambda_m^{(n-1)}(t,\varepsilon)\right\},$$
$$\lambda_m^{(i)}(t,\varepsilon) = \lambda_i(t) + \sum_{k=1}^{m} \varepsilon^k \lambda_k^{(i)}(t), i = \overline{1, n-1},$$

то з (26) маємо

$$\varepsilon \begin{pmatrix} \Psi^* BV_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} \Psi^* BV_m \Lambda_m + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{m+1}\right) & \Psi^* L\tilde{\varphi} \\ \mathrm{O}\left(\varepsilon^{m+1}\right) & 1 \end{pmatrix} z +$$
$$+ D(t,\varepsilon) z(t - \varepsilon\Delta(t), \varepsilon) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{m+1}\right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau\right), \tag{27}$$

де $D(t,\varepsilon)$ — деяка обмежена матриця.

Згідно з (20)

$$\Psi^*(t)B(t)V_m(t,\varepsilon) = \left\|(B\varphi_i, \psi_j)\right\|_1^{n-1} + \mathrm{O}(\varepsilon) = E_{n-1} + \mathrm{O}(\varepsilon),$$

де E_{n-1}—одинична матриця $(n-1)$-го порядку. Отже, матриця $\Psi^*(t)B(t)V_m(t,\varepsilon)$ неособлива при досить малих ε, а обернена до неї рівномірно обмежена на $\mathbb{R}$. Тому, помноживш систему (27) зліва на матрицю $diag\left\{\left(\Psi^*(t)B(t)V_m(t,\varepsilon)\right)^{-1}; 1\right\}$, дістанемо

$$\varepsilon\frac{dz_1}{dt} = \left[\Lambda_m(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1} C_1(t,\varepsilon)\right] z_1 + d_1(t,\varepsilon) z_2 +$$
$$+ \widetilde{D}_{11}(t,\varepsilon) z_1(t - \varepsilon\Delta(t), \varepsilon) + \widetilde{D}_{12}(t,\varepsilon) z_2(t - \varepsilon\Delta(t), \varepsilon) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{m+1}\right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau\right);$$
$$0 = \varepsilon^{m+1} c_1(t,\varepsilon) z_1 + z_2 + \widetilde{D}_{21}(t,\varepsilon) z_1(t - \varepsilon\Delta(t), \varepsilon) +$$
$$+ \widetilde{D}_{22}(t,\varepsilon) z_2(t - \varepsilon\Delta(t), \varepsilon) + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{m+1}\right) \exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int_0^t \lambda(\tau)\, d\tau\right),$$

де $z_1(t,\varepsilon)$ — $(n-1)$-вимірний вектор, координати якого збігаються з першими $n-1$ координатами вектора $z(t,\varepsilon)$, $z_2(t,\varepsilon)$ — n-а координата вектора $z(t,\varepsilon)$,

$$\widetilde{D}_{ij}(t,\varepsilon) = diag\left\{\left(\Psi^*(t)B(t)V_m(t,\varepsilon)\right)^{-1}; 1\right\} D(t,\varepsilon), \ i,j = 1,2,$$

— відповідні блоки матриці $\widetilde{D}(t,\varepsilon)$; $C_1(t,\varepsilon)$—квадратна матриця $(n-1)$-го порядку, рівномірно обмежена на $\mathbb{R}$; $d_1(t,\varepsilon)$—$(n-1)$-вимірний вектор-стовпець, $c_1(t,\varepsilon)$ — $(n-1)$-вимірний вектор-рядок, елементи яких також рівномірно обмежені на $\mathbb{R}$.

Взявши до уваги, що на початковій множині $E_\triangle$
$z(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon) = (\varepsilon^{m+1})\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \lambda(\tau)\,d\tau\right)$, звідси для першого кроку дістанемо таку систему рівнянь:

$$\varepsilon\frac{dz_1}{dt} = \left[\Lambda_m(t,\varepsilon) + \varepsilon^{m+1}C_2(t,\varepsilon)\right]z_1 + \varepsilon^{m+1}d_2(t,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \lambda(\tau)\,d\tau\right),$$

$$z_2 = \varepsilon^{m+1}c_2(t,\varepsilon)\,z_1 + \varepsilon^{m+1}\alpha(t,\varepsilon)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \lambda(\tau)\,d\tau\right), \qquad (28)$$

де $C_2(t,\varepsilon)$, $c_2(t,\varepsilon)$, $d_2(t,\varepsilon)$—рівномірно обмежені на $\mathbb{R}$ матричні і векторні функції відповідних розмірів, $\alpha(t,\varepsilon)$—скалярна функція, що володіє тією ж властивістю.

Припустивши, що

5°. $\mathrm{Re}\lambda_i(t) < 0, \quad \forall t\in\mathbb{R}, \quad i=\overline{1,n-1}$,

і дослідивши систему (28) методом [2], доведемо, що вона має єдиний розв'язок такий, що
$z(t,\varepsilon) = \mathrm{O}(\varepsilon^m)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \lambda(\tau)\,d\tau\right)$. Виходячи з цього, встановимо аналогічну оцінку для розв'язку даної системи й на наступних кроках. Врахувавши (18), (24) та рівномірну обмеженість матриці $Q(t,\varepsilon)$, отримаємо таку оцінку

$$\|x(t,\varepsilon) - x_m(t,\varepsilon)\| \le c\varepsilon^{m+1-r}\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \lambda(\tau)\,d\tau\right),$$

де c—деяка стала, що не залежить від ε, а r — кількість кроків на відрізку $[0;T]$.

В результаті доведено таку теорему.

Теорема. Якщо виконуються умови $1°-5°$, то при досить малих ε система рівнянь (1) має
T— періодичний відносно t розв'язок, який зображується асимптотичною формулою

$$x(t,\varepsilon) = \left(\sum_{k=\alpha}^{m}\varepsilon^k u^{(k)} + \mathrm{O}\left(\varepsilon^{m+1-r}\right)\right)\exp\left(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^t \lambda(\tau)\,d\tau\right),$$

у якій $\alpha=0$ в "нерезонансному"випадку і $\alpha=-1$ — у "резонансному".

Зауважимо, що даний результат можна узагальнити на систему рівнянь вигляду

$$\varepsilon^h B(t)\frac{dx}{dt} = A(t,\varepsilon)\,x(t,\varepsilon) + C(t,\varepsilon)\,x(t-\varepsilon\Delta(t),\varepsilon) + f(t,\varepsilon)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_0^t \lambda(\tau)\,d\tau\right),$$

де h—натуральне число, а $A(t,\varepsilon)$, $C(t,\varepsilon)$ і вектор-функція $f(t,\varepsilon)$ допускають рівномірні асимптотичні розвинення за степенями ε:

$$A\left(t,\varepsilon\right)\sim\sum_{k\geq0}\varepsilon^{k}A_{k}\left(t\right),\ C\left(t,\varepsilon\right)\sim\sum_{k\geq0}\varepsilon^{k}C_{k}\left(t\right),\ f\left(t,\varepsilon\right)\sim\sum_{k\geq0}\varepsilon^{k}f_{k}\left(t\right),$$

коефіцієнти яких T— періодичні по t. У цьому випадку T— періодичний розв'язок виражається формулою

$$x\left(t,\varepsilon\right)=\left(\sum_{k=\alpha}^{m}\varepsilon^{k}u^{(k)}+\mathrm{O}\left(\varepsilon^{m+1-h-r}\right)\right)\exp\left(\varepsilon^{-h}\int\limits_{0}^{t}\lambda\left(\tau\right)d\tau\right).$$

Література

[1] *А. М. Самойленко.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. – М.:Наука, 1987. – 304 с.

[2] *А. М. Самойленко, М. І. Шкіль, В. П. Яковець.* Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. – К.: Вища школа, 2000. – 294 с.

[3] *П. Ф. Самусенко.* Побудова асимптотичних розв'язків систем диференціальних рівнянь з відхиленням аргументу та виродженою матрицею при похідних // Нелінійні коливання, 2002. – т.5, №4. – С. 458–469.

[4] *С. Ф. Фещенко,М. І. Шкіль,Ю. П. Підченко,Н. А. Сотниченко.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. – К.:Наук.думка, 1981. – 294 с.

[5] *В. П. Яковець, А. М. Акименко.*Про періодичні розв'язки вироджених сингулярно збурених лінійних систем диференціальних рівнянь// Наукові записки Ніжинського державного педагогічного університету ім. М. В. Гоголя. Природничі та фізико-математичні науки. – Ніжин,1998. – С. 154–169.

[6] *Y. Sibuya.* Some global properties of functions of one variable // Math.Anal. – 1965. – 161, №1. – P.67–77