Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова.— 2008, № 9.— С. 128–147.

УДК 511.72

Розклади дійсних чисел в ряди Остроградського 2-го виду (O_2- та $\overline{O}_2$-зображення), їх геометрія та застосування

І. М. Працьовита
(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

Анотація. В даній роботі сформовані основи метричної теорії зображень чисел рядами Остроградського 2-го виду: описано властивості циліндричних множин, виведені основні метричні відношення, знайдена їх оцінка, розв'язано ряд метричних задач (про міру Лебега множин з обмеженнями на вживання "цифр"). Розглядаються деякі застосування цієї теорії в задачах теорії розподілів випадкових величин.

Abstract. In the present paper we formed basis of metric theory of representations of numbers by the second Ostrogradsky series. The properties of cylindrical sets are described. We also deduce the main metric relations and find their estimate. In this paper the row of metric tasks are found. In particular investigated task about the Lebesque measure of sets with limits on the use of numbers. Some applications of this theory are examined in the tasks of theory of distributions of random variables.

1. Вступ

Близько 1860-61 рр. М.В.Остроградський розглядав два алгоритми розкладу дійсних чисел в знакопочережні ряди, елементами яких є числа, обернені до натуральних. Про це свідчать його ескізні записи, виявлені в 1951 році в рукописному фонді Академії наук України (**[1]**,**[11]**) і розшифровані у статті Є.Я.Ремеза **[12]**. В коментарях наукового редактора до книги О.Я.Хінчина **[13]** ,Б.В.Гнєденко зазначає: "к сожалению до сих пор детальное их изучение, в том числе и для вычислительных целей, не осуществлено". Обидва розклади чисел зустрічаються в роботі Серпінського **[16]**. Один з них — це розклад числа в ряд вигляду

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_1q_2} + \frac{1}{q_1q_2q_3} - \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{q_1q_2q_3\cdots q_n} + \ldots, \quad \text{де} \quad q_{k+1} > q_k.$$

Пізніше такі розклади вивчав Пірс [**17**], після чого в англомовній літературі прижився термін "розклади Пірса" (що історично невиправдано). У вітчизняній літературі ([**4**], [**7**],[**8**],[**9**]) такі по справедливості називаються розкладами чисел в ряди Остроградського 1-го виду. Вони в останні десятиліття інтенсивно вивчаються [**1**]. Розклади чисел в ряди Остроградського 1-го виду мають формальну схожість з ланцюговими дробами, вони породжують ту ж топологію, але їм відповідає принципово інша геометрія чисел і метрична теорія. Ці розклади використовувались для моделювання і дослідження математичних об'єктів зі складною локальною будовою: фрактальних множин, сингулярних мір ([**7**],[**8**]), недиференційовних функцій [**2**] тощо. Дана робота присвячена малодослідженим розкладам чисел в ряди Остроградського 2-го виду ([**6**],[**10**]). Ми вивчаємо геометрію цього зображення чисел і розвиваємо метричну теорію.

Означення 1. Числовий ряд виду

$$\frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} - \ldots + \frac{(-1)^{k-1}}{q_k} + \ldots \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{q_k}, \tag{1}$$

де q_k — натуральні числа, причому

$$q_{k+1} \geq q_k(q_k+1) \quad \forall k \in N, \tag{2}$$

називається *рядом Остроградського 2-го виду.*

Згідно з теоремами Лейбніца та Даламбера ряд (1) є абсолютно збіжним, його сума є додатним числом, яке не перевищує $1/q_1$.

Прикладами рядів Остроградського 2-го виду є наступні ряди:

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot s^{-s^n}, \quad s \geq 3; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{2^{n-2}}}.$$

Теорема 1. *Сума S ряду Остроградського 2-го виду є ірраціональним числом, причому $q_1 = \left[\frac{1}{s}\right]$, де $[u]$ — ціла частина числа u.*

Лема 1. *Всі часткові суми*

$$S_n = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{q_n}$$

ряду Остроградського (1) *є додатними, причому: 1) часткові суми парного порядку є меншими його суми S і утворюють зростаючу послідовність; 2) часткові суми непарного порядку є більшими S і утворюють спадну послідовність, тобто*

$$0 < S_{2k} < S_{2k+2} < S < S_{2k+1} < S_{2k-1}.$$

Доведення цих фактів можна знайти в роботі [**5**].

Кожне число $x \in (0,1]$ можна подати рядом Остроградського 2-го виду, причому ірраціональне — єдиним чином (теорема Остроградського-Ремеза). Нижче ми наводимо доведення цього факту. Таке подання чисел має багато спільного з ланцюговими розкладами та розкладами Остроградського 1-го виду, але має й свої принципові відмінності. По-перше, ряди Остроградського 2-го виду швидше збігаються, ніж ряди Остроградського 1-го виду. Ми вивчаємо особливості зображення чисел рядами Остроградського 2-го виду, проводячи порівняльний аналіз зі згаданими вище розкладами.

2. Подання чисел знакопозмінними рядами Остроградського 2-го виду

Означення 2. Часткову суму $S_n = \frac{A_n}{B_n}$ ряду Остроградського 2-го виду називатимемо *підхідним числом порядку n суми ряду S*.

Наступне твердження виражає закон утворення підхідних чисел суми ряду (1).

Лема 2. *Для чисельників і знаменників підхідних чисел $\frac{A_n}{B_n}$ суми ряду (1) мають місце рівності:* $A_1 = 1, \quad B_1 = q_1$,

$$\begin{cases} A_n = q_n A_{n-1} + (-1)^{n-1} B_{n-1} = q_n A_{n-1} + (-1)^{n-1} q_1 \dots q_{n-1}, \\ B_n = q_n B_{n-1} = q_1 q_2 \dots q_n, \quad 1 < n \in N. \end{cases} \tag{3}$$

Доведення. Метод математичної індукції.

1. Рівності (3) при $n = 2$ виконуються:

$$S_2 = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} = \frac{1 \cdot q_2 - q_1}{q_1 q_2} = \frac{A_1 q_2 - B_1}{q_1 q_2} = \frac{A_2}{B_2}.$$

2. Припустимо, що рівності (3) мають місце при $n = k$, тобто

$$\begin{cases} A_k = q_k A_{k-1} + (-1)^{k-1} B_{k-1} = q_k A_{k-1} + (-1)^{k-1} q_1 \dots q_{k-1}, \\ B_k = q_k B_{k-1} = q_1 q_2 \dots q_k. \end{cases}$$

3. Розглянемо $n = k+1$:

$$S_{k+1} = S_k + \frac{(-1)^k}{q_{k+1}} = \frac{A_k}{B_k} + \frac{(-1)^k}{q_{k+1}} =$$
$$= \frac{q_{k+1} A_k + (-1)^k B_k}{B_k q_{k+1}} = \frac{A_{k+1}}{B_{k+1}}.$$

Отже, з припущення індукції випливає правильність рівностей (3) при $n = k+1$. Тому згідно з принципом математичної індукції ці рівності виконуються для довільного натурального n. □

Природним є запитання: скільки існує рядів Остроградського 2-го виду з рівними сумами? Вичерпну відповідь на це запитання дають наступні твердження.

Теорема Остроградського-Ремеза. *Для довільного дійсного числа $x \in (0,1]$ існує скінченний набір $(q_1, q_2, \dots, q_m)$ або нескінченна послідовність (q_n) натуральних чисел, таких, що $q_{n+1} \geq q_n(q_n+1)$ і*

$$x = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} - \ldots + \frac{(-1)^{m-1}}{q_m}, \tag{4}$$

або

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{q_n}. \tag{5}$$

Доведення. Оскільки

$$(0,1] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right],$$

то існує $q_1 \in N$ таке, що

$$x \in \left(\frac{1}{q_1+1}, \frac{1}{q_1}\right] \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{q_1+1} < x \leq \frac{1}{q_1}.$$

Якщо $x = \frac{1}{q_1}$, то теорему доведено. Нехай

$$\frac{1}{q_1+1} < x < \frac{1}{q_1}, \quad \text{тобто} \quad -\frac{1}{q_1(q_1+1)} < x - \frac{1}{q_1} \equiv -x_1 < 0.$$

Тоді

$$0 < x_1 < \frac{1}{q_1(q_1+1)}$$

і

$$\left(0, \frac{1}{q_1(q_1+1)}\right] = \bigcup_{n=q_1(q_1+1)}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right].$$

Отже, існує натуральне $q_2 \geq q_1(q_1+1)$ таке, що

$$x_1 \in \left(\frac{1}{q_2+1}, \frac{1}{q_2}\right] \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{q_2+1} < x_1 \leq \frac{1}{q_2}.$$

Якщо $x_1 = \frac{1}{q_2}$, то теорему доведено, оскільки тоді $x = \frac{1}{q_1} - x_1 = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2}$. Якщо ж

$$\frac{1}{q_2+1} < x_1 < \frac{1}{q_2}, \text{ то } -\frac{1}{q_2(q_2+1)} < x_1 - \frac{1}{q_2} \equiv -x_2 < 0.$$

Тоді

$$0 < x_2 < \frac{1}{q_2(q_2+1)}$$

і стосовно x_2 можна повторити міркування, які велись для x_1. А саме:

$$\left(0, \frac{1}{q_2(q_2+1)}\right] = \bigcup_{n=q_2(q_2+1)}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right],$$

тобто існує натуральне $q_3 \geq q_2(q_2+1)$ таке, що

$$x_2 \in \left(\frac{1}{q_3+1}, \frac{1}{q_3}\right] \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{q_3+1} < x_2 \leq \frac{1}{q_3}.$$

Якщо $x_2 = \frac{1}{q_3}$, то $x = \frac{1}{q_1} - x_1 = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} + x_2 = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3}$ і теорему доведено. Якщо ж мають місце нерівності

$$\frac{1}{q_3+1} < x < \frac{1}{q_3},$$

то процес продовжується.

За скінченну кількість кроків ми отримаємо

$$x = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{q_2} + \ldots + \frac{(-1)^{m-1}}{q_m} + (-1)^m x_m,$$

де $q_{n+1} \geq q_n(q_n+1)$,

$$0 \leq x_m < \frac{1}{q_m(q_m+1)} \to 0 \ (m \to \infty). \tag{6}$$

Якщо $x_m = 0$, то процес закінчився і отримаємо розклад (4).
Якщо $x_m > 0$ для довільного $m \in N$, то процес продовжуватиметься до нескінченності і отримаємо рівність (5). Зазначимо, що збіжність ряду (5) до числа x випливає з відношень (6). Теорему доведено. □

Наслідок 1. *Число q_1 в розкладі числа $x \in (0,1]$ в ряд Остроградського 2-го виду є цілою частиною числа $\frac{1}{x}$.*

Наслідок 2. *Дробова частина довільного дійсного числа розкладається в ряд*

$$1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{q_n}, \quad \text{де } q_{n+1} \geq q_n(q_n+1),$$

зі скінченною або нескінченною кількістю доданків.

Зауваження 1. *Наше доведення теореми Остроградського-Ремеза відрізняється від доведення, наведеного в* **[1]**,**[10]**. *Воно є більш геометричним, оскільки відображає геометричну суть чисел q_n.*

Зауваження 2. *Подання чисел у вигляді (4) чи (5) називається його розкладом в ряд Остроградського 2-го виду. Рівність (4) символічно записуватимемо $x = O^2(q_1, q_2, \ldots, q_m)$, а рівність (5)— у вигляді $x = O^2(q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots)$. Праві частини останніх двох рівностей називаються O^2- зображенням числа x.*

3. Розклади раціональних та ірраціональних чисел

Лема 3. *Розклад ірраціонального числа в ряд Остроградського 2-го виду містить нескінченну кількість доданків, а раціонального — скінченну.*

Доведення. Якщо число x — ірраціональне, то його розклад очевидно є нескінченним, оскільки сума скінченного числа раціональних чисел є числом раціональним.

Те, що в розкладі раціонального числа міститься скінченна кількість доданків, випливає з теореми 1. □

Зауваження 3. *Алгоритм вибору натуральних чисел q_n, який використовувався при доведенні теореми Остроградського-Ремеза, дозволяє єдиним чином розкласти число в ряд Остроградського 2-го виду, але очевидно, що має місце рівність*

$$\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}\frac{1}{q_i}+(-1)^{n-1}\frac{1}{q_n+1}=\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^{i-1}\frac{1}{q_i}+(-1)^{n-1}\frac{1}{q_n}+(-1)^{n}\frac{1}{q_n(q_n+1)}.$$

Це є свідченням того, що деякі числа мають принаймні два різних O^2-зображення, оскільки

$$O^2(q_1,q_2,\ldots,q_{n-1},q_n+1)=O^2(q_1,q_2,\ldots,q_n,q_n(q_n+1)).$$

Лема 4. *Кожне з чисел виду $\frac{1}{n}$, де $1<n\in N$, має рівно два розклади в ряд Остроградського 2-го виду:*

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{(n-1)n}, \tag{7}$$

а отже, два зображення — $O_2(n)$ і $O_2\left(n-1,(n-1)n\right)$.

Доведення. Те, що має місце рівність (7) очевидно. Доведемо, що інших розкладів чисел, які розглядаються, не існує.

Згідно з лемою 3 число $\frac{1}{n}$ має скінченний розклад. Нехай

$$\frac{1}{n}=\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}+\ldots+\frac{(-1)^{k-1}}{q_k},\quad \text{де}\quad q_{i+1}\geq q_i(q_i+1),\quad 1\leq i<k\geq 2.$$

Оскільки

$$\frac{1}{q_1+1}\leq\frac{1}{q_1}-\frac{1}{q_2}\leq\frac{1}{n}<\frac{1}{q_1},$$

то

$$q_1<n\leq q_1+1, \tag{8}$$

причому рівність має місце лише у випадку, коли $k=2$ *і* $q_2=q_1(q_1+1)$. Враховуючи, що q_1 натуральне, бачимо, що при $k>2$ не існує натуральних q_1, які б задовольняли (8). При $k=2$ маємо $q_1=n-1$ і при цьому $q_2=(n-1)n$. Отже, інших, крім розкладів (7), число $\frac{1}{n}$ не має. Лему доведено. □

Лема 5. *Кожне раціональне число інтервала $(0,1)$ має два різних O_2-зображення.*

Доведення. Нехай x — довільне раціональне число з $(0,1)$, $O_2(q_1,\dots,q_n,q_{n+1})$ — його O_2-зображення, існування якого стверджує теорема Остроградського-Ремеза і лема 3. Можливі випадки: 1) $q_{n+1}=q_n(q_n+1)$; 2) $q_{n+1}>q_n(q_n+1)$.

У першому випадку:

$$\frac{1}{q_n}-\frac{1}{q_{n+1}}=\frac{1}{q_n}-\frac{1}{q_n(q_n+1)}=\frac{1}{q_n+1} \quad i \quad x=O_2(q_1,\dots,q_{n-1},q_n+1),$$

а у другому випадку маємо:

$$\frac{1}{q_n}-\frac{1}{q_{n+1}}=\frac{1}{q_n}-\frac{1}{q_{n+1}-1}+\frac{1}{(q_{n+1}-1)q_{n+1}}$$

і

$$x=O_2(q_1,\dots,q_n,q_{n+1}-1,(q_{n+1}-1)q_{n+1}).$$

Лему доведено. □

Приклади розкладів:

$$1)\ \frac{5}{6}=1-\frac{1}{6}=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5\cdot 6};$$

$$2)\ \frac{799}{1000}=\frac{1}{1}-\frac{1}{5}+\frac{1}{1000}=O_2(1,5,1000)=$$

$$=\frac{1}{1}-\frac{1}{5}+\frac{1}{999}-\frac{1}{999\cdot 1000}=O_2(1,5,999,999000)$$

Лема 6. *Для того, щоб два числа $x=O_2(q_1,\dots,q_k)$ і $x'=O_2(q'_1,\dots,q'_k,\dots,q'_{k+n})$ були рівними, необхідно і достатньо, щоб*

$$\begin{cases} n=0,\\ q_i=q'_i; \end{cases} \qquad \textit{або} \qquad \begin{cases} n=1,\\ q'_{k+1}=q'_k(q'_k+1),\\ q_k=q'_k+1. \end{cases} \tag{9}$$

Доведення. Достатність умов (9) для рівності x і x' очевидна. Доведемо необхідність, тобто, що з рівності $x=x'$ випливають умови (9).

Якщо $q_i=q'_i$ при всіх $i\le k$, то очевидно, що рівність $x=x'$ можлива лише при умові $n=0$.

Розглянемо випадок, коли знайдеться $m\le k$ таке, що $q_m\ne q'_m$, але $q_i=q'_i$ при $i<m$. Тоді різниця

$$x-x'=(-1)^{m-1}\left(\frac{1}{q_m}-\frac{1}{q'_m}+\sum_{i=1}^{k+n-m}\frac{(-1)^{i-1}}{q'_{m+i}}-\sum_{i=1}^{k-m}\frac{(-1)^{i-1}}{q_{m+i}}\right)$$

дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли

$$\frac{1}{q'_m}-\frac{1}{q_m}=\sum_{i=1}^{k+n-m}\frac{(-1)^{i-1}}{q'_{m+i}}-\sum_{i=1}^{k-m}\frac{(-1)^{i-1}}{q_{m+i}}.$$

Розглянемо два взаємно доповнюючі випадки:

$$1) q_m > q'_m \quad i \quad 2) q_m < q'_m.$$

Розглянемо перший випадок. Оскільки

$$\frac{1}{q'_m} - \frac{1}{q_m} = \frac{1}{q'_{m+1}} - \left(\frac{1}{q'_{m+2}} - \frac{1}{q'_{m+3}} + \ldots + \frac{(-1)^{k+n-m}}{q'_{k+n}}\right) -$$
$$- \left(\frac{1}{q_{m+1}} - \frac{1}{q_{m+2}} + \ldots + \frac{(-1)^{k-m}}{q_k}\right)$$

і вирази в дужках є невід'ємними, то різниця є меншою або рівною $\frac{1}{q'_{m+1}}$, причому рівною тоді і тільки тоді, коли $k = m$ i $n = 1$ одночасно. Отже,

$$\frac{1}{q'_m} - \frac{1}{q_m} \le \frac{1}{q'_{m+1}} \le \frac{1}{q'_m(q'_m + 1)},$$

причому остання рівність має місце лише при $q'_{m+1} = q'_m(q'_m + 1)$.

Оскільки $q_m > q'_m$, то $q_m \ge q'_m + 1$ і

$$\frac{1}{q'_m(q'_m + 1)} = \frac{1}{q'_m} - \frac{1}{q'_m + 1} \le \frac{1}{q'_m} - \frac{1}{q_m} \le \frac{1}{q'_m(q'_m + 1)},$$

тобто

$$\frac{1}{q'_m} - \frac{1}{q_m} = \frac{1}{q'_m(q'_m + 1)},$$

що рівносильно $n = 0$, $k = m$ і $q_k = q'_k + 1$, що й вимагалось довести.

Нехай тепер $q_m < q'_m$. Виразимо різницю

$$\frac{1}{q_m} - \frac{1}{q'_m} = \frac{1}{q_{m+1}} - \left(\frac{1}{q_{m+2}} - \frac{1}{q_{m+3}} + \ldots + \frac{(-1)^{k-m}}{q_k}\right) -$$
$$- \left(\frac{1}{q'_{m+1}} - \frac{1}{q'_{m+2}} + \ldots + \frac{(-1)^{k+n-m}}{q'_{k+n}}\right),$$

звідки випливає строга нерівність

$$\frac{1}{q_m} - \frac{1}{q'_m} < \frac{1}{q_{m+1}} \le \frac{1}{q_m(q_m + 1)}.$$

Оскільки $q_m < q'_m$, то $q_m + 1 \le q'_m$. Звідки

$$\frac{1}{q_m(q_m + 1)} = \frac{1}{q_m} - \frac{1}{q_m + 1} \le \frac{1}{q_m} - \frac{1}{q'_m} < \frac{1}{q_m(q_m + 1)}.$$

Остання система нерівностей є несумісною. □

Теорема 2. *Кожне раціональне число має рівно два формально різні O_2-зображення:*

$$O_2(q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}, q_n + 1) \quad i \quad O_2(q_1, q_2, \ldots, q_n, q_n(q_n + 1)).$$

Доведення. Дана теорема є наслідком двох попередніх лем. □

Зауваження 4. *Множина всіх часткових сум всеможливих нескінченних рядів Остроградського 2-го виду співпадає з множиною раціональних чисел* $(0,1]$.

Теорема 3. *Кожне ірраціональне число має єдине O_2-зображення.*

Доведення. Для доведення даного твердження використаємо метод від супротивного. Припустимо, що $O_2(q_1, q_2, \ldots, q_m, \ldots)$ і $O_2(q'_1, q'_2, \ldots, q'_m, \ldots)$ — два різні зображення одного числа x. Оскільки вони різні, то існує таке натуральне m, що

$$q_i = q'_i \text{ при } i < m \ \text{ і } \ q_m \neq q'_m.$$

Не порушуючи загальності, вважатимемо, що $q_m > q'_m$.
Рівність

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{q_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{q'_i}$$

можна переписати у вигляді

$$\begin{gathered} \frac{1}{q'_m} - \frac{1}{q_m} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{q'_{m+i}} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{q_{m+i}} = \\ = \frac{1}{q'_{m+1}} - \sum_{i=2}^{\infty} \frac{(-1)^{i}}{q'_{m+i}} - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i-1}}{q_{m+i}} < \\ < \frac{1}{q'_{m+1}} \leq \frac{1}{q'_m(q'_m+1)}. \end{gathered}$$

Оскільки $q_m > q'_m$, то $q_m \geq q'_m + 1$ і

$$\frac{1}{q'_m(q'_m+1)} = \frac{1}{q'_m} - \frac{1}{q'_m+1} \leq \frac{1}{q'_m} - \frac{1}{q_m} < \frac{1}{q'_m(q'_m+1)}.$$

Звідки отримуємо протиріччя:

$$q'_m(q'_m+1) > q'_m(q'_m+1),$$

яке доводить теорему. □

4. Геометрія O_2-зображення чисел

Означення 3. Розклад числа $x \in (0,1]$ в скінченний чи нескінченний ряд Остроградського 2-го виду, здійснений за алгоритмом (і йому відповідне O_2-зображення) називатимемо *канонічним.*

Як випливає з попереднього, кожне O_2-зображення ірраціонального числа є канонічним, але це не так для чисел раціональних. Канонічне O_2-зображення раціонального числа містить на один O_2-символ менше іншого зображення.

Означення 4. Число $q_k = q_k(x)$ в канонічному розкладі числа x називається *k-им елементом розкладу Остроградського 2-го виду* та *k-им символом O_2-зображення числа x.*

Канонічне O_2-зображення зручне для порівняння чисел. Очевидним є твердження: *якщо $q_k(x) = q_k(y)$ при $k < m$ і $q_m(x) < q_m(y)$, то $x < y$, якщо m — парне, і $x > y$, якщо m — непарне.*

Розклади чисел в ряди Остроградського 2-го виду можна використати для створення метричної та ймовірнісної теорій дійсних чисел, арифметичного моделювання випадкових величин та процесів, задання і дослідження динамічних систем та функцій, як це робилося раніше з допомогою систематичних та ланцюгових дробів, $\tilde{Q}$-представлень та рядів Остроградського 1-го виду.

Означення 5. Нехай $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — заданий набір натуральних чисел, такий, що $c_{k+1} \geq c_k(c_k + 1)$, $k = \overline{1, n-1}$. *Циліндром рангу n з основою $c_1c_2 \ldots c_n$* називається множина $\Delta^{O_2}_{c_1c_2\ldots c_n}$ всіх $x \in (0, 1]$ виду $x = O_2(q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots)$, $q_i = c_i$, $i = \overline{1, n}$, тобто

$$\Delta^{O_2}_{c_1c_2\ldots c_n} = \{x : x = O_2(q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots), q_i = c_i, i = \overline{1, n}\}.$$

Інтервал з тими ж кінцями, що й циліндр $\Delta^{O_2}_{c_1c_2\ldots c_n}$, будемо позначати $\nabla^{O_2}_{c_1c_2\ldots c_n}$ і називати *циліндричним інтервалом рангу n з основою $c_1c_2 \ldots c_n$.*

Зауваження 5. *Враховуючи, що кожне раціональне число має не одне O_2-зображення, вважатимемо, що воно належить циліндру, якщо принаймні одне з них має вказану в означенні циліндра форму.*

Циліндричні множини мають наступні властивості.

1. $\Delta^{O_2}_{c_1\ldots c_n} = \bigcup\limits_{i=c_n(c_n+1)}^{\infty} \Delta^{O_2}_{c_1\ldots c_n i}$.
2. $\inf \Delta^{O_2}_{c_1\ldots 2m-1} = \sum\limits_{k=1}^{2m-1} \frac{(-1)^{k-1}}{c_k} - \frac{1}{c_{2m-1}(c_{2m-1}+1)} = O_2(c_1, \ldots, c_{2m-1}, c_{2m-1}(c_{2m-1} + 1)) =$
   $= O_2(c_1, \ldots, c_{2m-2}, c_{2m-1} + 1) \in \Delta^{O_2}_{c_1\ldots c_{2m-1}}$;
   $\sup \Delta^{O_2}_{c_1\ldots 2m-1} = \sum\limits_{k=1}^{2m-1} \frac{(-1)^{k-1}}{c_k} = O_2(c_1, \ldots, c_{2m-1}) \in \Delta^{O_2}_{c_1\ldots c_{2m-1}}$;
   $\inf \Delta^{O_2}_{c_1\ldots 2m} = \sum\limits_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k-1}}{c_k} = O_2(c_1, \ldots, c_{2m}) \in \Delta^{O_2}_{c_1\ldots c_{2m}}$;
   $\sup \Delta^{O_2}_{c_1\ldots 2m} = \sum\limits_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k-1}}{c_k} + \frac{1}{c_{2m}(c_{2m}+1)} = O_2(c_1, \ldots, c_{2m}, c_{2m}(c_{2m} + 1)) =$
   $= O_2(c_1, \ldots, c_{2m-1}, c_{2m} + 1) \in \Delta^{O_2}_{c_1\ldots c_{2m}}$.
3. $\sup \Delta^{O_2}_{c_1\ldots c_{2m-1}i} = \inf \Delta^{O_2}_{c_1\ldots c_{2m-1}(i+1)}$;
   $\inf \Delta^{O_2}_{c_1\ldots c_{2m}i} = \sup \Delta^{O_2}_{c_1\ldots c_{2m}(i+1)}$.

Лема 7. *Циліндр $\Delta^{O_2}_{c_1\ldots c_n}$ є відрізком $[a,b]$, де*

$$a=\begin{cases} O_2(c_1,\ldots,c_n,c_n(c_n+1)), & \text{якщо } n\text{-непарне}\ ,\\ O_2(c_1,\ldots,c_n), & \text{якщо } n\text{-парне}\ ;\end{cases}$$

$$b=\begin{cases} O_2(c_1,\ldots,c_n), & \text{якщо } n\text{-непарне}\ ,\\ O_2(c_1,\ldots,c_n(c_n+1)), & \text{якщо } n\text{-парне}\ .\end{cases}$$

Доведення. Очевидно, що $\Delta^{O_2}_{c_1\ldots c_n}\subset[a,b]$. Доведемо, що $[a,b]\subset\Delta^{O_2}_{c_1\ldots c_n}$. Оскільки $a,b\in\Delta^{O_2}_{c_1\ldots c_n}$, то досить показати, що довільне $x\in(a,b)$ належить $\Delta^{O_2}_{c_1\ldots c_n}$.

Якщо $a<x<b$, то

$$x=a+x_1,\ \text{де}\ a<x_1<b-a=\frac{1}{c_n(c_n+1)}.$$

Згідно з теоремою Остроградського-Ремеза x_1 можна розкласти в ряд Остроградського 2-го виду:

$$x_1=\frac{1}{q'_1}-\frac{1}{q'_2}+\frac{1}{q'_3}-\ldots+(-1)^{k-1}\frac{1}{q'_k}+\ldots.$$

Покажемо, що $q'_1\geq c_n(c_n+1)$. Оскільки

$$\frac{1}{q'_1+1}\leq\frac{1}{q'_1}-\frac{1}{q'_2}\leq x_1\leq\frac{1}{q'_1},$$

то

$$\frac{1}{q'_1+1}\leq x_1<\frac{1}{c_n(c_n+1)}.$$

Звідки $c_n(c_n+1)<q'_1+1$ і $c_n(c_n+1)\leq q'_1$.

Таким чином, x має наступне O_2-зображення $x=O_2(c_1,\ldots,c_n,q'_1,q'_2,\ldots)$, а отже, $x\in\Delta^{O_2}_{c_1\ldots c_n}$, що й вимагалось довести. $\square$

Наслідок 3. *Для довжини циліндричного відрізка рангу n мають місце співвідношення:*

$$|\Delta^{O_2}_{c_1\ldots\ldots c_n}|=\frac{1}{c_n(c_n+1)}\to 0\quad(n\to\infty).$$

Наслідок 4. *Довжина циліндра залежить виключно від останнього символа основи, тобто*

$$|\Delta^{O_2}_{c_1\ldots c_n i}|=\frac{1}{i(i+1)}=|\Delta^{O_2}_{s_1\ldots s_n i}|.$$

Наслідок 5. *Мають місце співвідношення:*

$$\frac{|\Delta^{O_2}_{c_1\ldots\ldots c_n c_{n+1}}|}{|\Delta^{O_2}_{c_1\ldots\ldots c_n}|}=\frac{c_n(c_n+1)}{c_{n+1}(c_{n+1}+1)}\leq\frac{c_n(c_n+1)}{c_n(c_n+1)(c_n(c_n+1)+1)}=$$
$$=\frac{1}{c_n(c_n+1)+1}\to 0\quad(n\to\infty).$$

Наслідок 6. *Якщо $c_1, \dots, c_n, j$ — фіксований набір, то*

$$\frac{|\Delta^{O_2}_{c_1\dots c_n i}|}{|\Delta^{O_2}_{c_1\dots c_n (i+j)}|} = \frac{(i+j)(i+j+1)}{i(i+1)} \to 1 \quad (i \to \infty).$$

Наслідок 7. $\Delta^{O_2}_{c_1\dots c_n} = \Delta^{O_2}_{s_1\dots s_n} \;\Leftrightarrow\; c_i = s_i,\; i = \overline{1,n}.$

Наслідок 8. *Нехай $k, n \in N$ і $k \leq n$. Тоді*

$$\nabla^{O_2}_{c_1\dots c_k} \bigcap \nabla^{O_2}_{s_1\dots s_n} = \begin{cases} \nabla^{O_2}_{s_1\dots s_n}, & \text{якщо} \quad c_i = s_i, i = \overline{1,k}, \\ \varnothing, & \text{якщо} \quad c_i \neq s_i, j \leq k. \end{cases}$$

Зауваження 6. *З властивостей циліндрів, леми 7 та її наслідків випливає рівність:*

$$O_2(q_1, q_2, \dots, q_n, \dots) = \bigcap_{n=1}^{\infty} c_1 \dots c_n \equiv \Delta^{O_2}_{c_1\dots c_n \dots}.$$

Лема 8. *Кінці циліндра $\Delta^{O_2}_{c_1\dots c_n}$ є числами*

$$\frac{A_n}{B_n} \quad i \quad \frac{A_n + A_{n-1}}{B_n + B_{n-1}},$$

де $\frac{A_n}{B_n} = O_2(c_1, \dots, c_n)$ *і* $\frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} = O_2(c_1, \dots, c_{n-1})$.

Доведення. Нехай $n = 2m - 1$. Тоді (див. власт. 2)

$$\inf \Delta^{O_2}_{c_1\dots c_n} = \frac{A_n}{B_n} - \frac{1}{c_n(c_n+1)} = \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} + \frac{1}{c_n} - \frac{1}{c_n} + \frac{1}{c_n+1} =$$

$$= \frac{(c_n+1)A_{n-1} + B_{n-1}}{(c_n+1)B_{n-1}} = \frac{c_n A_{n-1} + B_{n-1} + A_{n-1}}{c_n B_{n-1} + B_{n-1}} =$$

$$= \frac{A_n + A_{n-1}}{B_n + B_{n-1}},$$

$$\sup \Delta^{O_2}_{c_1\dots c_n} = \frac{A_n}{B_n}.$$

Нехай тепер $n = 2m$. Тоді (див. властивість 2)

$$\inf \Delta^{O_2}_{c_1\dots c_n} = \frac{A_n}{B_n},$$

$$\sup \Delta^{O_2}_{c_1\dots c_n} = \frac{A_n}{B_n} + \frac{1}{c_n(c_n+1)} = \frac{A_{n-1}}{B_{n-1}} - \frac{1}{c_n} + \frac{1}{c_n} - \frac{1}{c_n+1} =$$

$$= \frac{c_n A_{n-1} - B_{n-1} + A_{n-1}}{c_n B_{n-1} + B_{n-1}} = \frac{A_n + A_{n-1}}{B_n + B_{n-1}}.$$

Лему доведено. □

Зауваження 7. *Один з кінців циліндра $\Delta^{O_2}_{c_1\dots c_n}$ є підхідним числом порядку n, а інший — медіантою підхідних чисел порядку n і $(n-1)$ числа $x = O_2(q_1, q_2, \dots, q_n)$.*

Однією з найпростіших задач метричної теорії O_2-зображень є задача про міру Лебега множини $\Delta_s^k = \{x: \ q_k(x) = s\}$. Легко бачити, що

$$\Delta_s^k = \begin{cases} \varnothing, & \text{якщо} \quad s < l_k = l_{k-1}(l_{k-1}+1), l_1 = 1, \\ \Delta_{126\ldots l_{k-1}s}, & \text{якщо} \quad s = l_k, \\ \bigcup\limits_{(c_1\ldots c_{k-1})} \Delta_{c_1\ldots c_{k-1}s}, & \text{якщо} \quad s > l_k. \end{cases}$$

Останнє об'єднання здійснюється за всеможливими наборами $(c_1, c_2, \ldots, c_{k-1})$, які задовольняють вимоги:

$$c_{m-1}(c_{m-1}+1) \leq c_m, \ m \leq k-1, \ і \ c_{k-1}(c_{k-1}+1) \leq s.$$

Очевидно, що таких наборів скінченне число, нехай A. Тоді, враховуючи, що всі циліндри, які входять в об'єднання, мають однакову довжину $\frac{1}{s(s+1)}$ при $s \geq l_k$

$$\lambda\left(\Delta_s^k\right) = \frac{A}{s(s+1)}, \quad ge \quad A > s - l_k.$$

5. $\bar{O}_2$-зображення числа

Означення 6. Якщо $O_2(q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots)$ — зображення числа x, то його зображення у вигляді

$$x = \bar{O}_2(d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots), \tag{10}$$

де $d_1 = q_1, \ d_n = q_n + 1 - q_{n-1}(q_{n-1}+1), \ n = 2, 3, \ldots$, називається *$\bar{O}_2$-зображенням* або *різницевим зображенням числа x рядом Остроградського 2-го виду.*

Зазначимо, що O_2-зображення числа в якості алфавіту (набору "цифр") використовує множину всіх натуральних чисел, але другий символ не може набувати значення 1, третій — 1,2,3,4,5 і т.д., що робить їх "нерівноправними"у вказаному відношенні. Цього недоліку не має $\bar{O}_2$-зображення, оскільки кожен із символів, незалежно від значення попереднього, може набувати всіх натуральних значень.

ЗАУВАЖЕННЯ 8. *Кожен з циліндрів O_2-зображення може бути однозначно перепозначений у термінах $\bar{O}_2$-зображення, а саме:*

$$\Delta^{O_2}_{c_1\ldots c_n} \equiv \Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots\ldots a_n},$$

де $a_1 = c_1, \ a_k = c_k + 1 - c_{k-1}(c_{k-1}+1), \ 1 < k < n.$

Властивості циліндрів, що відповідають O_2-зображенню, породжують аналогічні властивості для циліндрів, що відповідають $\bar{O}_2$-зображенню. Зокрема,

1. $\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n} = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n i}.$

2. Для довільної послідовності натуральних чисел (a_n) :

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_m} = x \equiv \Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_m\ldots} = \bar{O}_2(a_1, \ldots, a_m, \ldots).$$

Зауважимо, що коли задано циліндр $\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1a_2\ldots a_n}$, то символи c_n відповідного йому циліндра $\Delta^{O_2}_{c_1c_2\ldots c_n}$ однозначно визначаються набором символів $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$c_1 = a_1, \quad c_k = c_{k-1}(c_{k-1}+1) + a_k - 1, \quad 1 < k \leq n.$$

Тому запис $c_n = c_n(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ символізує визначення числа c_n набором $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Зауваження 9. *Для довільного циліндра m-го рангу $(m > 1)$ існує циліндр 1-го рангу з такою ж довжиною. Це спостереження легко узагальнюється.*

З виразу довжини циліндра, що відповідає O_2-зображенню, випливає наступне твердження: якщо $c_n(a_1, a_2, \ldots, a_n) = c_m(s_1, s_2, \ldots, s_m)$, то

$$|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1a_2\ldots a_n}| = |\Delta^{\bar{O}_2}_{s_1s_2\ldots s_m}|.$$

Наприклад, $\Delta^{\bar{O}_2}_{16} = \Delta^{O_2}_{17}$ і $\Delta^{\bar{O}_2}_{21} = \Delta^{O_2}_{26}$, тому $|\Delta^{\bar{O}_2}_{16}| = |\Delta^{\bar{O}_2}_{21}|$;
$\Delta^{\bar{O}_2}_{123} = \Delta^{O_2}_{13(14)}$ і $\Delta^{\bar{O}_2}_{29} = \Delta^{O_2}_{1(14)}$, тому $|\Delta^{\bar{O}_2}_{123}| = |\Delta^{\bar{O}_2}_{29}|$.

6. Основне метричне відношення

Вираз довжини циліндра $\Delta^{O_2}_{c_1c_2\ldots c_n}$ дозволяє отримати ряд метричних відношень, які лежать в основі метричної "геометрії" зображення чисел рядами Остроградського 2-го виду.

Лема 9. *Якщо $\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1a_2\ldots a_n} = \Delta^{O_2}_{c_1c_2\ldots c_n}$ — фіксований циліндр, то*

$$\frac{|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1a_2\ldots a_n i}|}{|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1a_2\ldots a_n}|} = \frac{c_n(c_n+1)}{(c_n(c_n+1)+i-1)(c_n(c_n+1)+i)} = \frac{1}{c_n(c_n+1) + \frac{i(i-1)}{c_n(c_n+1)} + 2i - 1}, \quad (11)$$

де $c_1 = a_1, \quad c_k = c_{k-1}(c_{k-1}+1) + a_k - 1, \quad 1 < k \leq n.$

Доведення. Нехай $\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1a_2\ldots\ldots a_n i} = \Delta^{O_2}_{c_1c_2\ldots c_n c_{n+1}}$. Оскільки

$$c_{n+1} = c_n(c_n+1) + i - 1,$$

то

$$\frac{|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1a_2\ldots a_n i}|}{|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1a_2\ldots a_n}|} = \frac{c_n(c_n+1)}{(c_n(c_n+1)+i-1)(c_n(c_n+1)+i)} = \quad (12)$$

$$= \frac{1}{(1+\frac{i-1}{c_n(c_n+1)})(c_n(c_n+1)+i)} = \quad (13)$$

$$= \frac{1}{c_n(c_n+1) + \frac{i(i-1)}{c_n(c_n+1)} + 2i - 1}. \quad (14)$$

Лему доведено. □

Наслідок 9. *Має місце рівність:*

$$\frac{|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1a_2\ldots a_n1}|}{|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1a_2\ldots a_n}|}=\frac{1}{c_n(c_n+1)+1}. \tag{15}$$

Наслідок 10. *Якщо* $i=kc_n(c_n+1)+1$, *то*

$$\frac{|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1a_2\ldots a_ni}|}{|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1a_2\ldots a_n}|}=\frac{1}{(k+1)c_n(c_n+1)\left((k+1)c_n(c_n+1)+1\right)}. \tag{16}$$

Наслідок 11. *Якщо* $c_n(a_1,a_2,\ldots,a_n)=c_m(s_1,s_2,\ldots,s_m)$, *то*

$$\frac{|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_ni}|}{|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n}|}=\frac{|\Delta^{\bar{O}_2}_{s_1\ldots s_mi}|}{|\Delta^{\bar{O}_2}_{s_1\ldots s_m}|}.$$

7. Оцінки основного метричного відношення

Очевидно, що значення основного метричного відношення (11) залежить від усього набору символів $(a_1,a_2,\ldots,a_n,i)$, оскільки

$$c_k=a_k+c_{k-1}(c_{k-1}+1)-1,\quad 2\le k\le n. \tag{17}$$

Враховуючи основне метричне відношення, (17) і те, що $c_n(c_n+1)\ge 2$, отримуємо

$$\frac{|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1a_2\ldots a_ni}|}{|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1a_2\ldots a_n}|}\le\frac{1}{2i+1}\le\frac{1}{3}.$$

Зрозуміло, що ця оцінка є достатньо грубою для $n>1$ або $a_1>1$.

Уточнимо її, використовуючи раніше отримані співвідношення,

$$c_n\ge n!,\qquad c_n>{c_2}^{2^{n-2}}\ge 2^{2^{n-2}},\qquad c_{n+1}\ge {c_1}^{2^{n+1}}.$$

Лема 10. *Якщо* $\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1a_2\ldots a_n}=\Delta^{O_2}_{c_1c_2\ldots c_n}$ *і* $S_n=c_n(c_n+1)$, *то*

$$\frac{S_n}{(S_n+i)^2}<\frac{|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1a_2\ldots a_ni}|}{|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1a_2\ldots a_n}|}<\frac{S_n}{(S_n+i-1)^2}; \tag{18}$$

$$\frac{|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1a_2\ldots a_ni}|}{|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1a_2\ldots a_n}|}\le\frac{1}{S_n+i}<\frac{1}{(n!)^2+2i-1}. \tag{19}$$

Доведення. Співвідношення (18) випливають з рівності (11). З неї ж слідує перша з нерівностей (19), а друга випливає з того, що $S_n>(n!)^2$ і

$$\frac{1}{S_n+\frac{i-1}{S_n}+2i-1}<\frac{1}{(n!)^2+0+2i-1}.$$

□

Наслідок 12. *Оскільки c_n може бути як завгодно великим, то не існує додатної константи λ, залежної лише від i та n (яка не є залежною від набору $a_1, a_2, \ldots, a_n$), що відокремлює основне метричне відношення від нуля. Аналогічна ситуація мала місце для рядів Остроградського 1-го виду, на відміну від ланцюгового зображення.*

Лема 11. *Відношення довжин циліндрів $\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n i}$ рангу $n+1$ та $\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n}$ рангу n задовольняє нерівності:*

$$\frac{|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n i}|}{|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n}|} \leq \frac{1}{l_n(l_n+1)+i} < \frac{1}{l_n^2+i} < \frac{1}{(n!)^2+i} < \frac{1}{n^2+i}.$$

Доведення. Враховуючи основне метричне відношення і порядок росту членів послідовності c_n, очевидними є наступні нерівності:

$$\frac{|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n i}|}{|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n}|} = \frac{1}{\left(1+\frac{i-1}{c_n(c_n+1)}\right)(c_n(c_n+1)+i)} < \frac{1}{c_n(c_n+1)+i} \leq$$

$$\leq \frac{1}{l_n(l_n+1)+i} < \frac{1}{l_n^2+i} < \frac{1}{(n!)^2+i} < \frac{1}{n^2+i}.$$

□

8. Деякі метричні задачі

Лема 12. *Якщо $\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1a_2\ldots a_n} = \Delta^{O_2}_{c_1c_2\ldots c_n}$ — фіксований циліндр, $S_n = c_n(c_n+1)$, то для міри Лебега має місце рівність:*

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{m} \Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n i}\right) = \frac{m}{S_n+m}|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n}|.$$

Доведення. Оскільки

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{m} \Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n i}\right) = \sum_{i=1}^{m} |\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n i}|,$$

то враховуючи лему 9, маємо:

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{m} \Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n i}\right) = \sum_{i=m+1}^{\infty} |\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n i}| =$$

$$= \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{S_n}{(S_n+i-1)(S_n+i)}|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n}| = |\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n}| \sum_{i=1}^{m} \frac{S_n}{(S_n+i-1)(S_n+i)} =$$

$$= S_n \cdot |\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n}| \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{(S_n+i-1)(S_n+i)} = S_n \cdot |\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n}| \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{1}{S_n+i-1} - \frac{1}{S_n+i}\right) =$$

$$= S_n \cdot |\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n}| \left(\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_n+m}\right) = \frac{S_n \cdot m}{S_n(S_n+m)}|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n}| = \frac{m}{S_n+m}|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n}|,$$

що й вимагалось довести. □

Наслідок 13. *При довільному натуральному k має місце рівність:*

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{kS_n} \Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n i}\right) = \frac{k}{k+1}|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n}|,$$

зокрема

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{S_n} \Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n i}\right) = \frac{1}{2}|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n}|.$$

Наслідок 14. *При довільному натуральному k виконується рівність:*

$$\lambda\left(\bigcup_{j=kS_n+1}^{\infty} \Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n j}\right) = \frac{1}{k+1}|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n}|.$$

Лема 13. *Якщо $\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1 a_2\ldots a_n} = \Delta^{O_2}_{c_1 c_2\ldots c_n}$ — фіксований циліндр, $S_n = c_n(c_n+1)$, то*

$$\lambda\left(\bigcup_{i=m+1}^{\infty} \Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n i}\right) = \frac{S_n}{S_n+m}|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n}|.$$

Доведення. Враховуючи вираз довжини циліндра і лему 9, маємо:

$$\lambda\left(\bigcup_{i=m+1}^{\infty} \Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n i}\right) = \sum_{i=m+1}^{\infty} |\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n i}| =$$

$$= \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{S_n}{(S_n+i-1)(S_n+i)}|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n}| = S_n \cdot |\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n}| \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{(S_n+i-1)(S_n+i)} =$$

$$= S_n \cdot |\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n i}| \sum_{i=m+1}^{\infty} \left(\frac{1}{S_n+i-1} - \frac{1}{S_n+i}\right) = \frac{S_n}{S_n+m}|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_n i}|,$$

що й вимагалось довести. □

Теорема 4. *Множина E всіх чисел $(0,1]$, множина $\bar{O}_2$-символів яких є обмеженою, тобто $E = \{x : \ \ d_k(x) < r(x) = const \ \forall k \in N\}$ має нульову міру Лебега.*

Доведення. Нехай $r \in N$. Позначимо через E_r множину всіх чисел $(0,1)$, $\bar{O}_2$-символи яких менші за r.

Якщо $\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_m} = \Delta^{O_2}_{c_1\ldots\ldots c_m}$ — заданий циліндр рангу m, точки якого задовольняють умову

$$d_k(x) = a_i < r, \quad k = \overline{1,m}, \tag{20}$$

то згідно з лемою

$$|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_m i}| > \frac{S_m}{(S_m+1)^2}|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_m}| \geq \frac{l_m}{(l_m+i)^2}|\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_m}|,$$

де $S_m = c_m(c_m+1), l_1 = r, l_2 = r(r+1), l_3 = l_2(l_2+1), \ldots, l_m = l_m(r) = l_{m-1}(l_{m-1}+1)$.

Тоді

$$\lambda\left(\bigcup_{i=r}^{\infty} \Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_m i}\right) = \sum_{i=r}^{\infty} |\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_m i}| > |\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_m}| \cdot l_m \cdot \sum_{i=m}^{\infty} \frac{1}{(l_m+i)^2} >$$

$$> |\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_m}| \cdot l_m \cdot \int\limits_{l_m+r}^{\infty} \frac{1}{u^2} =$$

$$= \frac{l_m}{l_m+r} |\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_m}|.$$

Оскільки

$$\nabla^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_m} = \left[\bigcup_{i=1}^{r-1} \nabla^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_m i}\right] \bigcup \left[\bigcup_{i=r}^{\infty} \nabla^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_m i}\right],$$

то

$$\lambda\left(\bigcup_{i=1}^{r-1} \Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_m i}\right) = |\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_m}| - \lambda\left(\bigcup_{i=r}^{\infty} \Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_m i}\right) <$$

$$< |\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_m}| - \frac{l_m}{l_m+r} |\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_m}| =$$

$$= \left[1 - \frac{l_m}{l_m+r}\right] |\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_m}| = \frac{r}{l_m+r} |\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1\ldots a_m}|. \quad (21)$$

Позначимо через E^r_m множину всіх чисел $(0,1)$, які задовольняють умову (20). Очевидно, що вона є об'єднанням r^m циліндрів рангу m. З нерівності (20) випливає, що частина множини E^r_{m+1}, яка міститься у циліндрі $\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1 a_2 \ldots a_m}$ має міру Лебега, що є меншою за

$$\frac{r}{l_m+r} |\Delta^{\bar{O}_2}_{a_1 a_2 \ldots a_m}|.$$

Тому

$$\lambda\left(E^r_{m+1}\right) < \frac{r}{l_m+r} \lambda\left(E^r_m\right) < \frac{r}{l_m+r} \cdot \frac{r}{l_{m-1}+r} \lambda\left(E^r_{m-1}\right) < \ldots <$$

$$< \lambda\left(E^r_1\right) \prod_{i=1}^{m} \frac{r}{l_i+r}.$$

Звідки $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda\left(E^r_m\right) = 0$. Оскільки $E^r \subset E^r_m$ для довільного $m \in N$, то $\lambda\left(E^r\right) = 0$.

Очевидно, що $E = \bigcup\limits_{r=1}^{\infty} E^r$. Тому

$$\lambda(E) \le \sum_{r=1}^{\infty} \lambda(E^r) = 0.$$

Отже, $\lambda(E) = 0$, що й вимагалось довести. $\square$

Наслідок 15. *Майже кожне (в розумінні міри Лебега) число* $(0,1)$ *має властивість: його* $\bar{O}_2$*-зображення містить як завгодно великі* $\bar{O}_2$*-символи, тобто*

$$\lambda\left(\{x:\ \overline{\lim}_{n\to\infty} d_n(x)=\infty\}\right)=1.$$

Зауваження 10. *Властивість числа* $x\in(0,1)$*:*

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} d_n(x)=\infty$$

є нормальною.

Теорема 5. *Нехай* k *— задане натуральне число,*

$$G_1=\bigcup_{a_1=1}^{\infty}\bar{\Delta}_{a_1},\quad G_{m+1}=\bigcup_{a_1=1}^{\infty}\bigcup_{a_2=1}^{kS_1}\dots\bigcup_{a_n=1}^{kS_{n-1}}\bigcup_{a_{m+1}=1}^{kS_n}\bar{\Delta}_{a_1\dots a_m a_{m+1}}.$$

Міра Лебега множини

$$G=\bigcap_{m=1}^{\infty}G_m$$

дорівнює нулю.

Доведення. Згідно з лемою 13

$$\lambda(G_2)=\frac{k}{k+1}\lambda(G_1)=\frac{k}{k+1},$$

$$\lambda(G_3)=\frac{k}{k+1}\lambda(G_2)=(\frac{k}{k+1})^2,$$

$$\lambda(G_{m+1})=\frac{k}{k+1}\lambda(G_m)=(\frac{k}{k+1})^m.$$

Оскільки $G_1\supset G_2\supset\ldots\supset G_m\supset G_{m+1}\supset\ldots,\quad G\subset G_m\ \ \forall m\in N$ і $\lim\limits_{m\to\infty}\lambda(G_m)=0$, то $\lambda(G)=0$, що й вимагалось довести. $\square$

Література

[1] *Гнеденко Б.В., Ремез Є.Я.* Попереднє повідомлення про рукописи М.В. Остроградського // Вісник АН УРСР. — 1951. — № 8 (177). — С. 52-63.

[2] *Барановський О.М.* Задання ніде не диференційовних функцій за допомогою представлення чисел рядами Остроградського // Фрактальний аналіз та суміжні питання. — Київ: Ін-т математики НАН України; НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — №2. — С. 215-221.

[3] *Барановський О.М.* Ряди Остроградського як засіб аналітичного задання множин і випадкових величин // Фрактальний аналіз та суміжні питання.— Київ: Ін-т математики НАН України; НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — №1. — С.91-102.

[4] *Барановський О.М, Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Тополого-метричні властивості множин дійсних чисел з умовами на їх розклади в ряди Остроградського // Укр. мат. журн. — 2007. — 59, №9. — С. 1155-1168.

[5] *Працьовита І.М.* Ряди Остроградського 2-го виду і розподіли їх випадкових сум // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1.Фізико-математичні науки. — 2006, № 7. — С. 174-189.

[6] *Працьовитий М.В.* Геометрія чисел, представлених знакозмінними рядами за допомогою другого алгоритму Остроградського // Наукові записки НПУ імен М.П.Драгоманова. Вип.2. — К.:НПУ імені М.П.Драгоманова , 1998. — С. 159-164.

[7] *Працьовитий М.В., Барановський О.М.* Властивості розподілів випадкових величин з незалежними різницями послідовних елементів ряду Остроградського // Теорія ймовірностей та математична статистика. — 2004. — №70. — С. 131-144.

[8] *Працьовитий М.В., Барановський О.М.* Використання рядів Остроградського для аналітичного задання розподілів випадкових величин і відображень // Динамічні системи: Праці Українського математичного конгресу — 2001. — Київ: Ін-т математики НАН України, 2003.

[9] *Працьовитий М.В., Барановський О.М.* Про міру Лебега деяких множин чисел, визначених властивостями їх розкладу в ряд Остроградського // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова, 2004. — №5. — С. 217-227.

[10] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296с.

[11] *Ремез Е.Я.* О математических рукописях академика М.В.Остроградского // Историко-математические исследования. Вып.IV – 1951. – Т.6, №5(45). – — Москва: Гостехтеоретиздат, 1951. — С. 9-98.

[12] *Ремез Е.Я.* О знакопеременных рядах,которые могут быть связаны двумя алгоритмами М.В.Остроградского для приближения иррациональных чисел // Успехи математических наук. — 1951. — Т. 6, №5(45). — С. 33-44.

[13] *Хинчин А.Я.* Цепные дроби.— Москва: Физматгиз, 1978. — 116 с.

[14] *Albeverio S., Pratsiovytyi M., Baranovskyi O.,Torbin G.* The Ostrogradsky series and related Cantor-like sets // Acta Arithmetics. — 2007. — Vol. 130, no. 3. — P. 215-230.

[15] *Schweiger F.* Ergodic Theory of Fibred Systems and Metric Number Theory. — Oxford: Clarendon Press, 1995. — 295 p.

[16] *Sierpinski W.* O kilku algorytmach dla rozwijania liczb rzeczywistych na szeregi. — Warsawa: STNW, 1911. —Vol.3. — P. 56-77.

[17] *Pierce T.A.* On an algorothm and its use in approximating roots of an algebraic equation // Amer. Math. Monthly. — 1929. — Vol. 36. — P. 523-525.