Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова.— 2008, № 9.— С. 18–24.

УДК 517.9

Знаходження точних розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь із симетричною змінною матрицею другого порядку

Ю. П. Підченко
(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

Анотація. В даній статті запропоновано новий оригінальний метод знаходження точних розв'язків системи лінійних диференціальних рівнянь іззмінною матрицею другого порядку. Розглянуто випадок, коли добуток елеметів побічної діагоналі є додатним.

Abstract. In this paper, we study the system of linear differential equations with variable matrix of second order. New original method of solving this system for exact solutions is found. We examine the case if the product of elements of secondary diagonal is positive.

Розглянемо систему лінійних диференціальних рівнянь

$$x' = A\,(t)\,x, \tag{1}$$

де

$$A\,(t) = \begin{pmatrix} a_{11}\,(t) & a_{12}\,(t) \\ a_{21}\,(t) & a_{22}\,(t) \end{pmatrix}, \qquad x = \begin{pmatrix} x_1\,(t) \\ x_2\,(t) \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$a_{ij}(t)$ — задані диференціальні функції для $\forall t \in [a, b]$.

Добре відоме широке застосування систем (1), (2), а також неоднорідних систем

$$x' = A\,(t)\,x + f\,(t)$$

у фізиці і техніці. До них також зводяться лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку із змінними коефіцієнтами [1] та рівняння Ріккаті.

Так у 1958 р. М.П. Єругін показав [2], що розв'язком рівняння Ріккаті

$$\frac{dy}{dx} = a\,(x)\,y^2 + b\,(x)\,y + c\,(x)\,,$$

де $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$ — неперервні функції у проміжку $A \leq x \leq B$, є функція $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, де $P(x)$ і $Q(x)$ — розв'язок системи $\begin{cases} \frac{dP}{dx} = bP + cQ, \\ \frac{dQ}{dx} = -aP. \end{cases}$

Але, на жаль, не існувало теорії знаходження точних розв'язків таких систем. Під точним розв'язком будемо розуміти розв'язок у квадратурах.

Автор намагається розробити таку теорію. Ним опубліковано ряд робіт, присвячений цій тематиці (зокрема, [3], [4]).

При цьому з'ясувалося, що алгоритм знаходження точних розв'язків системи залежить від знаку добутку елементів побічної діагоналі. Тому виникає необхідність розглядати два випадки:
1)$a_{21}(t)\, a_{12}(t) > 0$ і 2)$a_{21}(t)\, a_{12}(t) < 0$.

Проте, запропоновані в [3], [4] методи є досить громіздкі і практичне їх застосування майже неможливе. Тому виникла необхідність шукати інші підходи до вирішення цих проблем.

Дана робота є продовженням дослідження, розпочатого в [3], де досліджується випадок, коли добуток елементів побічної діагоналі є додатним, тобто $a_{21}(t)\, a_{12}(t) > 0 \quad \forall t \in [a, b]$. Тоді, не обмежуючи загальності міркувань, можна вважати, що

$$a_{21}(t) = a_{12}(t),\ \forall t \in [a, b]\,,$$

тобто матриця $A(t)$ в системі (1) — (2) є симетричною. Справді, підстановкою

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \beta(t) \end{pmatrix},$$

де $\beta(t) = \sqrt{a_{21}(t)/a_{12}(t)}$, $\forall t \in [a, b]$, система (1) — (2) зводиться до системи із симетричною матрицею.

В даній статті пропонується новий оригінальний спосіб побудови точного розв'язку такої системи.

Доведемо спочатку таке допоміжне твердження [3].

Лема 1. *Якщо матриця $A(t)$ — симетрична і перетворююча матриця із власних векторів $T(t)$, що зводить матрицю $A(t)$ до псевдодіагонального вигляду має вигляд $T(t) = \begin{pmatrix} c_1 f_1 & c_2 \\ c_1 & c_2 f_2 \end{pmatrix}$, де $c_1(t)$, $c_2(t)$ — деякі довільні функції, то*

$$f_1(t) + f_2(t) = 0.$$

Зауваження. Для числової симетричної матриці існує перетворююча матриця, утворена із власних векторів, що зводить дану матрицю до діагонального вигляду.

Для матриці функціональної існує перетворююча матриця $T(t)$, яка зводить дану матрицю до суми діагональної матриці $\Lambda(t)$ і матриці $-T^{-1}T'(t)$.

Доведення. Щоб побудувати перетворюючу матрицю $T(t)$, знайдемо спочатку власні значення цієї матриці:

$$|A(t)-\lambda E| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - (a_{11}+a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{a_{11}+a_{22} \mp \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4a_{11}a_{22} + 4a_{12}^2}}{2} = \frac{a_{11}+a_{22} \mp \sqrt{(a_{11}-a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2}.$$

Отже, $\lambda_1 = \frac{a_{11}+a_{22}-\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2}}{2}$, $\lambda_2 = \frac{a_{11}+a_{22}+\sqrt{(a_{11}-a_{22})^2+4a_{12}^2}}{2}$.

Знайдемо власні вектори, що відповідають цим власним значенням:

1) $\lambda = \lambda_1$

$$(a_{11}-\lambda_1)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{a_{12}}{\lambda_1 - a_{11}}x_2 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} f_1c_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \text{де} \;\; f_1 = \frac{a_{12}}{\lambda_1 - a_{11}}, \;\; c = x_2$$

2) $\lambda = \lambda_2$

$$(a_{11}-\lambda_2)x_1 + a_{12}x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}}x_1 \Rightarrow x = \begin{pmatrix} c_2 \\ f_2c_2 \end{pmatrix}, \text{де} \;\; f_2 = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}}, \;\; c_2 = x_1.$$

Покажемо, що $f_1 + f_2 = 0$.

Справді,

$$f_1+f_2 = \frac{a_{12}}{\lambda_1 - a_{11}} + \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}^2 + (\lambda_2 - a_{11})(\lambda_1 - a_{11})}{a_{12}(\lambda_1 - a_{11})} = \frac{a_{12}^2 + \lambda_1\lambda_2 - a_{11}(\lambda_1+\lambda_2) + a_{11}^2}{a_{12}(\lambda_1 - a_{11})} =$$

$$= \frac{a_{12}^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 - a_{11}(a_{11}+a_{22}) + a_{11}^2}{a_{12}(\lambda_1 - a_{11})} = \frac{a_{12}^2 + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 - a_{11}^2 - a_{11}a_{22} + a_{11}^2}{a_{12}(\lambda_1 - a_{11})} =$$

$$= \frac{0}{a_{12}(\lambda_1 - a_{11})} = 0.$$

Лема доведена.

Теорема 1. *Система рівнянь (1) — (2) із симетричною матрицею інтегрується у квадратурах.*

Доведення. Нехай матриця $A(t)$ у системі (1) — (2) є симетричною, тобто $a_{12}(t) = a_{21}(t)$ для $\forall t \in [a,b]$.

Виберемо матрицю перетворення $T(t)$ для матриці A у вигляді

$$T = \begin{pmatrix} c_1f_1 & c_2 \\ c_1 & c_2f_2 \end{pmatrix}, \text{де} \;\; f_1 = \frac{a_{12}(t)}{\lambda_1 - a_{11}(t)}, \quad f_2 = \frac{\lambda_2 - a_{11}(t)}{a_{12}(t)} \tag{3}$$

c_1, c_2 — довільні диференційовні функції від t; $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ — власні значення матриці $A(t)$. Матриця $A(t)$ симетрична, тому згідно леми

$$f_1(t) + f_2(t) = 0, \tag{4}$$

отже,

$$\det T = c_1 c_2 \left(f_1 f_2 - 1\right) = -c_1 c_2 \left(f_1^2(t) + 1\right) \neq 0. \tag{5}$$

Виконавши в системі (1) підстановку

$$x(t) = T(t) z \tag{6}$$

де z — новий двовимірний невідомий вектор, приходимо до системи

$$z' = \Lambda z - \frac{1}{\Delta} B z, \tag{7}$$

де $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ — діагональна матриця,

$$\Delta = \det T \neq 0, \tag{8}$$

$$\frac{1}{\Delta} B = T^{-1}(t)\, T'(t) = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} c_1' c_2 \left(f_1 f_2 - 1\right) & -c_2^2 f_2' \\ -c_1^2 f_1' & c_2' c_1 \left(f_1 f_2 - 1\right) + c_1 c_2 f_2' f_1 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Враховуючи (4), (5) і (9), одержимо

$$\frac{1}{\Delta} B = T^{-1} T' = \begin{pmatrix} \frac{c_1'}{c_1} + q(t) & -u(t) p(t) \\ \frac{p(t)}{u(t)} & \frac{c_2'}{c_2} + q(t) \end{pmatrix}, \tag{10}$$

$$\text{де} \quad q(t) = \frac{f_1(t) f_1'(t)}{f_1^2(t) + 1}, \quad p(t) = \frac{f_1'(t)}{f_1^2(t) + 1}, \quad u(t) = \frac{c_2(t)}{c_1(t)}. \tag{11}$$

Тоді рівняння (7) набуває вигляду

$$z' = \overline{B}(t) z, \tag{12}$$

де $\overline{B}(t) = \begin{bmatrix} \overline{b_{11}}(t) & \overline{b_{12}}(t) \\ \overline{b_{21}}(t) & \overline{b_{22}}(t) \end{bmatrix}$,

причому $\overline{b_{11}}(t) = \lambda_1(t) - \frac{c_1'}{c_1} - q(t)$, $\overline{b_{12}}(t) = u(t) p(t)$, $\overline{b_{21}}(t) = -\frac{p(t)}{u(t)}$, $\overline{b_{22}}(t) = \lambda_2(t) - \frac{c_2'}{c_2} - q(t)$. (14)

Далі, виконавши в системі (12) заміну

$$z(t) = Q(t) v(t), \tag{15}$$

$$\text{де} \quad Q(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta(t) \end{pmatrix}, \tag{16}$$

— новий невідомий двовимірний вектор, а функція $\delta(t)$ буде визначена пізніше, прийдемо до системи

$$v'(t) = \overline{\overline{B}}(t) v(t) \tag{17}$$

де

$$\overline{\overline{b_{11}}}(t) = \overline{b_{11}}(t),\ \overline{\overline{b_{12}}}(t) = \delta(t)\overline{b_{12}}(t),\ \overline{\overline{b_{21}}}(t) = \frac{1}{\delta(t)}\overline{b_{21}}(t),\ \overline{\overline{b_{22}}}(t) = \overline{b_{22}}(t) - \frac{\delta'(t)}{\delta(t)}. \tag{18}$$

Матриця $\overline{\overline{B}}(t)$ — неособлива (що буде видно з подальших міркувань). Тому систему (17) запишемо у вигляді

$$v(t) = \left(\overline{\overline{B}}(t)\right)^{-1} v'(t). \tag{19}$$

Виконаємо в системі (19) заміну

$$v(t) = Q_1(t)w(t), \quad \text{де} \tag{20}$$

$$Q_1(t) = \begin{pmatrix} 1 & c(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Тоді система (19) зведеться до системи

$$w(t) = Q_1^{-1}(t)\left(\overline{\overline{B}}(t)\right)^{-1} Q_1'(t)w(t) + Q_1^{-1}(t)\left(\overline{\overline{B}}(t)\right)^{-1} Q_1(t)w'(t). \tag{22}$$

Знайдемо матриці $Q_1^{-1}(t)\left(\overline{\overline{B}}(t)\right)^{-1} Q_1'(t)$ і $Q_1^{-1}(t)\left(\overline{\overline{B}}(t)\right)^{-1} Q_1(t)$:

$$\begin{gathered} Q_1^{-1}(t)\left(\overline{\overline{B}}(t)\right)^{-1} Q_1'(t) = \frac{1}{\Delta_1(t)}\begin{pmatrix} 1 & -c(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{\overline{b_{22}}} & -\overline{\overline{b_{12}}} \\ -\overline{\overline{b_{21}}} & \overline{\overline{b_{11}}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c'(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{\Delta_1(t)}\begin{pmatrix} \overline{\overline{b_{22}}} + c(t)\overline{\overline{b_{21}}} & -\overline{\overline{b_{12}}} - c(t)\overline{\overline{b_{11}}} \\ -\overline{\overline{b_{21}}} & \overline{\overline{b_{11}}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & c'(t) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{\Delta_1(t)}\begin{pmatrix} 0 & c'(t)\overline{\overline{b_{22}}} + c'(t)c(t)\overline{\overline{b_{21}}} \\ 0 & -c'(t)\overline{\overline{b_{21}}} \end{pmatrix}; \end{gathered} \tag{23}$$

$$\begin{gathered} Q_1^{-1}(t)\left(\overline{\overline{B}}(t)\right)^{-1} Q_1(t) = \frac{1}{\Delta_1(t)}\begin{pmatrix} 1 & -c(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{\overline{b_{22}}} & -\overline{\overline{b_{12}}} \\ -\overline{\overline{b_{21}}} & \overline{\overline{b_{11}}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{\Delta_1(t)}\begin{pmatrix} \overline{\overline{b_{22}}} + (t)\overline{\overline{b_{21}}} & -\overline{\overline{b_{12}}} - c(t)\overline{\overline{b_{11}}} \\ -\overline{\overline{b_{21}}} & \overline{\overline{b_{11}}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & c'(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\ = \frac{1}{\Delta_1(t)}\begin{pmatrix} \overline{\overline{b_{22}}} + c(t)\overline{\overline{b_{21}}} & c(t)\overline{\overline{b_{22}}} + c^2(t)\overline{\overline{b_{21}}} - \overline{\overline{b_{12}}} - c(t)\overline{\overline{b_{11}}} \\ -\overline{\overline{b_{21}}} & -c(t)\overline{\overline{b_{21}}} + \overline{\overline{b_{11}}} \end{pmatrix}, \end{gathered} \tag{24}$$

де

$$\Delta_1(t) = \det \overline{\overline{B}}(t) = \overline{\overline{b_{11}}}(t)\overline{\overline{b_{22}}}(t) - \overline{\overline{b_{21}}}(t)\overline{\overline{b_{12}}}(t). \tag{25}$$

Далі виберемо функції $c(t)$, $u(t)$ і $\delta(t)$ так, щоб виконувались рівності:

$$\begin{cases} c'(t)\overline{\overline{b_{22}}}(t) + c'(t)c(t)\overline{\overline{b_{21}}}(t) = 0, \\ c(t)\overline{\overline{b_{22}}}(t) + c^2(t)\overline{\overline{b_{21}}}(t) - \overline{\overline{b_{12}}}(t) - c(t)\overline{\overline{b_{11}}}(t) = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Із першої рівності маємо:

$$\overline{\overline{b_{22}}}(t) + c(t)\overline{\overline{b_{21}}}(t) = 0. \tag{27}$$

Звідси, враховуючи (18), одержуємо

$$\overline{b_{22}}(t) - \frac{\delta'(t)}{\delta(t)} + c(t)\frac{1}{\delta(t)}\overline{b_{21}}(t) = 0; \tag{28}$$

враховуючи (14), приходимо до рівності

$$\overline{b_{22}}(t) - \frac{\delta'(t)}{\delta(t)} - c(t)\frac{1}{\delta(t)}\frac{p(t)}{u(t)} = 0 \tag{29}$$

Нехай

$$\overline{b_{22}}(t) \equiv 0, \tag{30}$$

тоді

$$\frac{\delta'(t)}{\delta(t)} - c(t)\frac{1}{\delta(t)}\frac{p(t)}{u(t)} = 0. \tag{31}$$

Поклавши тут

$$c(t) = u(t), \tag{32}$$

а $\delta'(t) = -p(t)$ знаходимо

$$\delta(t) = -\int p(t)dt. \tag{33}$$

Тоді

$$\Delta_1 = \det \overline{B}(t) = \overline{b_{11}}(t)\overline{b_{22}}(t) - \overline{b_{21}}(t)\overline{b_{12}}(t) = \overline{b_{11}}(t)\cdot 0 + p^2(t) \neq 0. \tag{34}$$

Оскільки $\det \overline{\overline{B}}(t) = \det \overline{B}(t) \det Q(t) = p^2(t)\delta(t) \neq 0$, то $\overline{\overline{B}}(t)$ — неособлива матриця.

Із другої рівності (26) знайдемо $u(t)$. Дійсно, друге рівняння, на підставі (18), запишемо так

$$\overline{b_{22}}(t) - \frac{\delta'(t)}{\delta(t)} + c(t)\frac{1}{\delta(t)}\overline{b_{21}}(t) - \frac{1}{(t)}\delta(t)\overline{b_{12}}(t) - \overline{b_{11}}(t) = 0 \tag{35}$$

Звідси

$$-\left(\overline{b_{11}}(t) - \overline{b_{22}}(t)\right) - \frac{1}{\delta(t)}c(t)\frac{p(t)}{u(t)} - \delta(t)\frac{1}{c(t)}u(t)p(t) - \frac{\delta'(t)}{\delta(t)} = 0. \tag{36}$$

Враховуючи (11), (14) і (32), одержимо $-\frac{u'(t)}{u(t)} + \lambda_2(t) - \lambda_1(t) - \frac{1}{\delta(t)}p(t) - \delta(t)p(t) - \frac{\delta'(t)}{\delta(t)} = 0$. Звідси

$$\frac{u'(t)}{u(t)} = \psi(t) \quad \text{і} \quad u(t) = e^{\int \psi(t)dt} \tag{37}$$

де

$$\psi(t) = \lambda_2(t) - \lambda_1(t) - \frac{1}{\delta(t)}\left(p(t) + \delta^2(t)p(t) + \delta'(t)\right) \tag{38}$$

або, враховуючи (33), $\psi(t) = \lambda_2(t) - \lambda_1(t) + p(t)\int p(t)dt$. Зауважимо, що із рівності (30) і (14) визначається функція $c_2(t)$: $\overline{b_{22}}(t) \equiv 0 \Rightarrow \lambda_2(t) - \frac{c_2'(t)}{c_2(t)} - q(t) = 0$. Звідси $\frac{c_2'(t)}{c_2(t)} = \lambda_2(t) - q(t) \Rightarrow c_2(t) = e^{\int (\lambda_2(t) - q(t))dt}$. Знаючи $u(t)$ і $c_2(t)$, на підставі (11), можна визначити і функцію $c_1(t)$: $c_2(t) = \frac{2(t)}{u(t)}$. Отже, у матриці $\overline{B}(t)$ всі елементи визначені.

Повернемось тепер до системи (22). На підставі (14), (18), (26), (34), одержуємо:

$$w(t) = \frac{1}{\Delta_1(t)}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{c'(t)p(t)}{\delta(t)u} \end{pmatrix} w(t) + \frac{1}{\Delta_1(t)}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{p(t)}{\delta(t)u(t)} & \overline{b_{11}} + \frac{p(t)}{\delta(t)} \end{pmatrix} w'(t) \tag{41}$$

Звідси знаходимо

$$\begin{cases} w_1(t) = 0 \\ \left(1 - \dfrac{c'(t)p(t)}{\Delta_1(t)\delta(t)u(t)}\right) w_2(t) = \left(\overline{b_{11}}(t) + \dfrac{p(t)}{\delta(t)}\right) w_2'(t) \end{cases} \tag{42}$$

Із другого рівняння знаходимо

$$\frac{w_2'(t)}{w_2(t)} = \frac{1 - \frac{c'(t)p(t)}{\Delta_1(t)\delta(t)u(t)}}{\overline{b_{11}}(t) + \frac{p(t)}{\delta(t)}} \Rightarrow \frac{w_2'(t)}{w_2(t)} = \frac{1 - \frac{c'(t)p(t)}{p^2(t)\delta(t)u(t)}}{\overline{b_{11}}(t) + \frac{p(t)}{\delta(t)}} \Rightarrow \frac{w_2'(t)}{w_2(t)} = \frac{1 + \frac{\psi(t)}{p(t)\int p(t)dt}}{\lambda_1(t) - \frac{c_1'(t)}{c_1(t)} - q(t) - \frac{p(t)}{\int p(t)dt}}$$

Отже,

$$w_2(t) = e_1^{\int \varphi(t)dt}, \qquad \text{де} \qquad \varphi(x) = \frac{p(t)\int p(t)dt + \psi(t)}{\left(\lambda_1(t) - \frac{c_1'(t)}{c_1(t)} - q(t)\right) p(t)\int p(t)dt - p^2(t)}. \tag{44}$$

Отже, вектор $w(t)$визначений повністю.

Тепер за формулами (20), (21) і (32) знайдемо вектор $v(t)$:

$$v(t) = \begin{pmatrix} 1 & u(t) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ w_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(t)w_2(t) \\ w_2(t) \end{pmatrix}. \tag{45}$$

Тоді, повертаючись до шуканого початкового вектора $x(t)$, знаходимо на підставі (6) і (15) $x(t) = T(t)Q(t)v(t)$, який є розв'язком початкової системи (1) — (2). Оскільки матриці $T(t)$, $Q(t)$ і вектор $v(t)$ визначені, то і шуканий вектор $x(t)$ визначений.

Отже, знайдено один розв'язок системи (1) - (2).

Аналогічним способом можна одержати інший розв'язок системи (1) — (2), взявши при знаходженні $\delta(t)$ із (33) довільну сталу інтегрування відмінною від нуля. Одержаний новий вектор $x(t)$, як це легко бачити, є лінійно незалежним до побудованого раніше. Отже, маємо два лінійно незалежні вектори, що є розв'язками системи (1) — (2). Тоді їх лінійна комбінація є загальним розв'язком цієї системи. Можна другий вектор будувати при тому ж самому $\delta(t)$, вибравши по іншому $u(t)$.

Теорема доведена.

Література

[1] *Еругин Н.П., Штокало Й.З. и др.* Курс обыкновенных дифференциальных уравнений. — К.: Высшая школа, 1974. — 472с.

[2] *Еругин Н.П.* К теории уравнения Риккати // ДАН БССР, 1958. — 1, №9. — С.359 - 362.

[3] *Підченко Ю.П.* Знаходження точних розв'язків системи диференціальних рівнянь з матрицею другого порядку. I випадок //Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. Фізико-математичні науки. — 1999, №1. — С.145 - 153.

[4] *Підченко Ю.П.* Знаходження точних розв'язків лінійної системи диференціальних рівнянь з матрицею другого порядку. II випадок // Наукові записки НПУ ім. М.П.Драгоманова. Фізико-математичні науки. 2001, №2 — С. 246-255.