Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова.— 2008, № 9.— С. 121–127.

УДК 511.33

Поведінка модуля характеристичної функції випадкової величини з незалежними s-адичними цифрами на нескінченності

Я. В. Гончаренко, І. О. Микитюк
(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

Анотація. Досліджено поведінку модуля характеристичної функції розподілу випадкової величини з незалежними s-адичними ($s = 3$) цифрами на нескінченності. Знайдено умови, при яких $L_\xi = \lim\limits_{|t|\to\infty} \sup |f_\xi(t)| = 0$.

Abstract. We investigate the asymptotic behaviour of the absolute value of the characteristic function of random variable with independent s-adic ($s = 3$) symbols at infinity.

Нехай s — фіксоване натуральне число, більше 1. Розглядається випадкова величина

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} s^{-k}\eta_k, \tag{1}$$

s-адичні цифри η_k якої є незалежними, причому η_k набувають значень 0, 1, ..., $s-1$ з ймовірностями p_{0k}, p_{1k}, ..., $p_{(s-1)k}$ відповідно ($p_{ak} \geq 0$, $p_{0k} + p_{1k} + ... + p_{(s-1)k} = 1$). Випадкова величина ξ задовольняє умови теореми Джессена-Вінтнера [**3, 5**] і тому має чистий розподіл (або чисто дискретний, або чисто сингулярний, або чисто абсолютно неперервний). Необхідні і достатні умови належності розподілу ξ до кожного з чистих типів добре відомі [**5, 9**]. Властивості випадкової величини ξ визначаються матрицею $||p_{ak}||$. Вони вивчались в роботах [**5, 9**]. Разом з цим, задача про поведінку модуля характеристичної функції випадкової величини ξ на нескінченності в загальній постановці, на скільки нам відомо, раніше не розв'язувалась. Саме їй присвячена дана робота. Оскільки випадок $s = 2$ вивчено в роботі [**1**], то всюди далі $s \geq 3$.

Нагадаємо [**4**], що *характеристичною функцією* випадкової величини ζ називається комплекснозначна функція $f_\zeta(t) = Me^{it\zeta}$, де M — математичне сподівання. Відомо [**4**], що коли ζ має дискретний розподіл, то

$$L_\zeta = \lim_{|t|\to\infty} \sup |f_\zeta(t)| = 1.$$

Якщо розподіл ζ є абсолютно неперервним, то $L_\zeta = 0$; якщо — сингулярним, то $0 \leq L_\zeta \leq 1$. Отже, за поведінкою модуля характеристичної функції на нескінченності (тобто за величиною L_ζ) можна частково судити про тип розподілу. У випадку чистоти розподілу ζ умова $L_\zeta = 0$ є необхідною для абсолютної неперервності, а умова $0 < L_\varsigma < 1$ —достатньою для сингулярності ζ. Якщо ζ має чистий і неперервний розподіл, то з умови $L_\zeta > 0$ випливає сингулярність ζ.

Дослідимо поведінку модуля характеристичної функції для випадку $s = 3$.

Лема 1. *Характеристична функція $f_\xi(t)$ випадкової величини ξ з незалежними трійковими цифрами представляється у вигляді*

$$f_\xi(t) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(t), \tag{2}$$

де

$$f_k(t) = \left(p_{0k} + p_{1k}\cos\frac{t}{3^k} + p_{2k}\cos\frac{2t}{3^k}\right) + i\left(p_{1k}\sin\frac{t}{3^k} + p_{2k}\sin\frac{2t}{3^k}\right), \tag{3}$$

а її модуль — у вигляді:

$$|f_\xi(t)| = \prod_{k=1}^{\infty} |f_k(t)|, \tag{4}$$

де

$$|f_k(t)| = \sqrt{1 - 4\left(p_{1k}(1-p_{1k})\sin^2\frac{t}{2\cdot 3^k} + p_{0k}p_{2k}\sin^2\frac{t}{3^k}\right)}. \tag{5}$$

Доведення. Враховуючи означення характеристичної функції випадкової величини і незалежність η_k, маємо

$$f_\xi(t) = Me^{it\xi} = Me^{it\sum\limits_{k=1}^{\infty}\eta_k 3^{-k}} = M\prod_{k=1}^{\infty} e^{it\eta_k 3^{-k}} = \prod_{k=1}^{\infty} Me^{it\eta_k 3^{-k}} =$$
$$= \prod_{k=1}^{\infty}\left(p_{0k} + p_{1k}e^{it3^{-k}} + p_{2k}e^{2it3^{-k}}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(t).$$

З рівності (3) отримуємо

$$\begin{aligned} |f_k(t)|^2 &= p_{0k}^2 + p_{1k}^2 + p_{2k}^2 + 2p_{0k}p_{1k}\cos\frac{t}{3^k} + 2p_{0k}p_{2k}\cos\frac{2t}{3^k} + \\ &\qquad + 2p_{1k}p_{2k}\left(\cos\frac{t}{3^k}\cos\frac{2t}{3^k} + \sin\frac{t}{3^k}\sin\frac{2t}{3^k}\right) = \\ &= 1 - 2(p_{0k}p_{1k} + p_{0k}p_{2k} + p_{1k}p_{2k}) + 2(p_{0k}p_{1k} + p_{1k}p_{2k})\cos\frac{t}{3^k} + 2p_{0k}p_{2k}\cos\frac{2t}{3^k} = \\ &= 1 - 4\left(p_{1k}(1-p_{1k})\sin^2\frac{t}{2\cdot 3^k} + p_{0k}p_{2k}\sin^2\frac{t}{3^k}\right). \end{aligned}$$

Очевидно, що останню рівність можна переписати у формі (5). □

Лема 2. *Для будь-якого дійсного $t \geq 2\pi$ існує номер*

$$k_0 = k_0(t) = 2 + \left[\log_3 \frac{t}{2\pi}\right], \tag{6}$$

для якого виконується нерівність

$$|f_{k_0+1}(t)| > \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Доведення. Розглянемо найбільше ціле число k_0, що задовольняє нерівність

$$\frac{t}{3^{k_0}} < \frac{2\pi}{3}.$$

Тоді

$$\frac{t}{2 \cdot 3^{k_0+1}} < \frac{t}{3^{k_0+1}} < \frac{2\pi}{9}.$$

Оскільки для гострих кутів $\sin x_1 < \sin x_2 < x_2$, якщо $x_1 < x_2$, то

$$|f_{k_0+1}(t)|^2 \geq 1 - 4\left(p_{1(k_0+1)}(1 - p_{1(k_0+1)})\left(\frac{t}{2 \cdot 3^{k_0+1}}\right)^2 + p_{0(k_0+1)}p_{2(k_0+1)}\left(\frac{t}{3^{k_0+1}}\right)^2\right) >$$

$$> 1 - \left(p_{1(k_0+1)}(1 - p_{1(k_0+1)}) + p_{0(k_0+1)}p_{2(k_0+1)}\right) \cdot \frac{4\pi^2}{81} \geq 1 - \frac{16\pi^2}{81} \cdot \frac{1}{3} = 1 - \frac{16\pi^2}{243} > \frac{1}{3}.$$

□

Лема 3. *Для довільного дійсного $t > 2\pi$ нескінченний добуток*

$$D_t = \prod_{k=k_0(t)+1}^{\infty} |f_k(t)|,$$

де $k_0(t)$ визначається за формулою (6)*, збігається.*

Доведення. Якщо $k_0 = k_0(t)$ — число, визначене рівністю (6), то з (5) отримуємо

$$D_t = \prod_{j=1}^{\infty}\left(1 - 4\left(p_{1(k_0+j)}(1 - p_{1(k_0+j)}) \sin^2 \frac{t}{2 \cdot 3^{k_0+j}} + p_{1(k_0+j)}p_{2(k_0+j)} \sin^2 \frac{t}{3^{k_0+j}}\right)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Враховуючи, що

1. $\dfrac{t}{2 \cdot 3^{k_0+j}} \leq \dfrac{t}{3^{k_0+j}} < \dfrac{2\pi}{3^{j+1}}$, $j \in N$;
2. $\sin x \leq x$ при $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;
3. $p_{0k}p_{1k} + p_{1k}p_{2k} + p_{0k}p_{2k} \leq \dfrac{1}{3}$ для всіх $p_{ik} \geq 0$, $i = 0, 1, 2$, таких, що $p_{0k} + p_{1k} + p_{2k} = 1$, $k \in N$;
4. $|f_{k_0+1}(t)| > \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ (див. попередню лему 1),

отримуємо

$$D_t \geq |f_{k_0+1}(t)| \prod_{j=2}^{\infty}\left(1 - 4\left(p_{1(k_0+j)}(1 - p_{1(k_0+j)}) \sin^2 \frac{t}{2 \cdot 3^{k_0+j}} + p_{1(k_0+j)}p_{2(k_0+j)} \sin^2 \frac{t}{3^{k_0+j}}\right)\right)^{\frac{1}{2}} >$$

$$> \frac{1}{\sqrt{3}} \prod_{j=2}^{\infty} \left(1 - \frac{16\pi^2}{3^{2j+3}}\right)^{\frac{1}{2}} \equiv C > 0. \qquad (7)$$

$\square$

Наслідок 1. *Для модуля характеристичної функції $f_\xi(t)$ випадкової величини ξ мають місце нерівності*

$$A_t \cdot C \le |f_\xi(t)| \le A_t, \quad \forall t > 0,$$

де $A_t = \prod_{k=1}^{k_0(t)} |f_k(t)|$, *а константа C визначається рівністю (7), а число $k_0(t)$ — (6).*

Наслідок 2. *Для модуля характеристичної функції $f_\xi(t)$ випадкової величини ξ мають місце співвідношення*

$$|f_\xi(t)| \to 0 \ \ (t \to \infty) \quad \Leftrightarrow \quad A_t \to 0 \ \ (t \to \infty).$$

Теорема 1. *Якщо для характеристичної функції f_ξ випадкової величини ξ має місце рівність $L_\xi = 0$, то*

$$\lim_{n\to\infty} p_{in} = \frac{1}{3}, \quad i = 0, 1, 2. \qquad (8)$$

Доведення. Оскільки $L_\xi = 0$, то для кожної послідовності $\{t_n\}$ такої, що $t_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ виконується рівність $\lim\limits_{n\to\infty} |f_\xi(t_n)| = 0$.

Розглянемо послідовність $t_n = 2\pi 3^n$. Для всіх $k \le n$ виконується рівність $|f_k(t_n)| = 1$, оскільки $\sin \frac{t_n}{2 \cdot 3^k} = \sin \frac{t_n}{3^k} = 0$. Тому, враховуючи, що $k_0(t_n) = 2 + n$, маємо $A_{t_n} = |f_{n+1}(t_n)| \cdot |f_{n+2}(t_n)|$. В силу наслідку 2 отримуємо

$$\lim_{n\to\infty} A_{t_n} = \lim_{n\to\infty} |f_{n+1}(t_n)| \cdot |f_{n+2}(t_n)| = 0. \qquad (9)$$

Розглянемо

$$|f_{n+1}(t_n)| = \left(1 - 4\left(p_{1(n+1)}(1 - p_{1(n+1)}) \sin^2 \frac{\pi}{3} + p_{0(n+1)} p_{2(n+1)} \sin^2 \frac{2\pi}{3}\right)\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(1 - 3\left(p_{1(n+1)}(1 - p_{1(n+1)}) + p_{0(n+1)} p_{2(n+1)}\right)\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$|f_{n+2}(t_n)| = \left(1 - 4\left(p_{1(n+2)}(1 - p_{1(n+2)}) \sin^2 \frac{\pi}{9} + p_{0(n+2)} p_{2(n+2)} \sin^2 \frac{2\pi}{9}\right)\right)^{\frac{1}{2}} \ge$$

$$\ge \left(1 - \frac{16\pi^2}{81}(p_{0(n+2)} p_{1(n+2)} + p_{1(n+2)} p_{2(n+2)} + p_{0(n+2)} p_{2(n+2)})\right)^{\frac{1}{2}} \ge \left(1 - \frac{16\pi^2}{273}\right)^{\frac{1}{2}} > 0.$$

Отже, рівність (9) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\lim_{n\to\infty} |f_{n+1}(t_n)| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} (p_{0n} p_{1n} + p_{1n} p_{2n} + p_{0n} p_{2n}) = \frac{1}{3}.$$

Припустимо, що $\lim\limits_{n\to\infty} p_{in} = p_0 \neq \dfrac{1}{3}$ для деякого i, $i = 0, 1, 2$. Тоді

$$\lim_{n\to\infty}(p_{0n}p_{1n} + p_{1n}p_{2n} + p_{0n}p_{2n}) \leq p_0(1-p_0) + \frac{(1-p_0)^2}{4} = \frac{-3\left(p_0 - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{4}{3}}{4} < \frac{1}{3}.$$

В цьому випадку $L_\xi = \lim\limits_{n\to\infty} |f_\xi(t_n)| \neq 0$, що суперечить умові. □

Теорема 2. *Якщо* $\lim\limits_{n\to\infty} p_{in} = \dfrac{1}{3}$, $i = 0, 1, 2$, *то* $L_\xi(t)(t) = 0$.

Доведення. Нехай t_n — довільна послідовність така, що $t_n \to \infty$ $(n \to \infty)$. Розглянемо послідовність

$$a_n = \frac{t_n}{3^{k_0}}, \quad \text{де} \quad k_0 = k_0(t_n) = 2 + \left[\log_3 \frac{t_n}{2\pi}\right].$$

Вона є обмеженою, $a_n \in \left[\dfrac{2\pi}{9}; \dfrac{2\pi}{3}\right)$. Можливі випадки:

1. Послідовність $\{a_n\}$ збігається до деякого числа a.

2. Послідовність $\{a_n\}$ границі не має.

Розглянемо випадок **1**. Нехай $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Тоді $a \in \left[\dfrac{2\pi}{9}; \dfrac{2\pi}{3}\right]$.

1.1. Якщо $a = \frac{2\pi}{3}$, то

$$\lim_{n\to\infty}|f_{k_0}(t_n)| = \lim_{n\to\infty}\left(1 - 4\left(p_{1k_0}(1-p_{1k_0})\sin^2\frac{2\pi}{3} + p_{0k_0}p_{2k_0}\sin^2\frac{\pi}{3}\right)\right)^{\frac{1}{2}} = |f_{k_0}\left(\frac{2\pi}{3}\right)| = 0.$$

1.2. Якщо $a = \frac{2\pi}{9}$, то аналогічно

$$\lim_{n\to\infty}|f_{k_0-1}(t_n)| = |f_{k_0}\left(\frac{2\pi}{3}\right)| = 0.$$

Оскільки

$$|f_\xi(t)| \leq |f_k(t)| \quad \forall t > 2\pi, \ \ \forall k \in N,$$

то

$$|f_\xi(t_n)| \leq |f_{n+j}(t_n)| \quad \text{і} \quad \lim_{n\to\infty}|f_\xi(t_n)| = 0.$$

1.3. Нехай тепер $\dfrac{2\pi}{9} < a < \dfrac{2\pi}{3}$. Тоді $a = 2\pi q$, де $\dfrac{1}{9} < q < \dfrac{1}{3}$ і трійковий розклад числа q має вид:

$$q = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k(q)3^{-k} = 0, \alpha_1(q), ..., \alpha_k(q), ...,$$

причому $\alpha_1(q) = 0$, $\alpha_2(q) \neq 0$. Можливі наступні випадки:

а) q — число трійково-раціональне, тобто таке, що його трійковий розклад містить період (0) або (2);

б) q — число трійково-ірраціональне, тобто таке, що не містить вказаних періодів.

В першому випадку існує два трійкових розклади числа q:

$$q = 0,0\alpha_2\alpha_3...\alpha_{c-1}\alpha_c(0) \tag{10}$$

або

$$q = 0,0\alpha_2\alpha_3...\alpha_{c-1}(\alpha_c - 1)(s-1). \tag{11}$$

Не порушуючи загальності, будемо вважати, що послідовність $q_n = \dfrac{a_n}{2\pi}$ монотонна.

Якщо $q_n \downarrow q$, то використовуватимо представлення (10).

Для довільного $m \in N$ існує $n^*(m)$ таке, що для будь-якого $n > n^*(m)$ q_n можна подати у вигляді:

$$q_n = 0,0\alpha_2\alpha_3...\alpha_{c-1}\alpha_c\underbrace{0...0}_{m}\alpha_{c+m+1}... \ .$$

Тоді

$$\frac{t_n}{3^{k_0-c+1}} = 2\pi\cdot\alpha_2\alpha_3...\alpha_{c-1},\alpha_c\underbrace{0...0}_{m}\alpha_{c+m+1}...,$$

$$\sin^2\frac{t_n}{3^{k_0-c+1}} \to \sin^2(2\pi\cdot 0,\alpha_c\underbrace{0...0}_{m}\alpha_{c+m+1}... \to \sin^2\frac{2\pi\alpha_c}{3} \to \frac{3}{4}.$$

Отже,

$$|f_{k_0-c+1}(t_n)| \to |f_{k_0-c+1}\left(\frac{2\pi}{3}\right)| \to 0.$$

Нехай q — трійково-ірраціональне число. Для довільного $d \in N$ існує $n^*(d)$ таке, що для будь-якого $n > n^*(d)$ трійковий розклад q_n містить хоча б d пар цифр 01, 02 або 12.

Для даного t_n розглянемо послідовність $r_k^{(n)} = r_k(q_n)$ натуральних чисел, таких, що

$$3^{r_k}q_n = 0,\alpha_{r_k+1}ab\alpha_{r_k+4}... \ .$$

Нехай $l_{kn} = k_0(t_n) - r_k + 1$. Розглянемо послідовність:

$$A_{kn} = |f_{l_{kn}+1}(t_n)|^2 =$$

$$= 1 - 4\left(p_{1(l_{kn}+1)}(1-p_{1(l_{kn}+1)})\sin^2\frac{t_n}{2\cdot 3^{k_0-r_k+2}} + p_{0(l_{kn}+1)}p_{2(l_{kn}+1)}\sin^2\frac{t_n}{3^{k_0-r_k+2}}\right) \to$$

$$\to 1 - \frac{4}{9}(2\sin^2(\pi\cdot 0,00\alpha_{r_k+1}ab\alpha_{r_k+4}...) + \sin^2(2\pi\cdot 0,00\alpha_{r_k+1}ab\alpha_{r_k+4}...)).$$

Оскільки $0,00\alpha_{r_k+1}ab\alpha_{r_k+4}... \in \left[\dfrac{1}{243};\dfrac{8}{81}\right]$, то

$$\sin^2(\pi\cdot 0,00\alpha_{r_k+1}ab\alpha_{r_k+4}...) \in [0,0001;\ 0,094],$$

$$\sin^2(2\pi\cdot 0,00\alpha_{r_k+1}ab\alpha_{r_k+4}...) \in [0,0007;\ 0,34].$$

Тоді

$$\lim_{n\to\infty} A_{kn} \le 0,9996 < 1.$$

Оскільки $|f_\xi(t_n)|^2 \leq \prod\limits_{k=1}^{d} A_{kn}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} |f_\xi(t_n)| = 0$.

2. Нехай послідовність a_n не має границі при $n \to \infty$. Припустимо, що $L_\xi = b_0 > 0$. Тоді існує послідовність $\{t'_n\}$ така, що $\lim\limits_{n\to\infty} |f_\xi(t'_n)| = b_0$. Оскільки послідовність $\{a'_n\} = \left\{\dfrac{t'_n}{3^{k_0}}\right\}$ обмежена, то з неї можна виділити збіжну підпослідовність $\{a'_{n_l}\}$. Тоді $\lim\limits_{l\to\infty} |f_\xi(t'_{n_l})| = b_0$, що суперечить доведеному у випадку **1** результату $\lim\limits_{l\to\infty} |f_\xi(t'_{n_l})| = 0$. □

Література

[1] *Albeverio S., Gontcharenko Ya., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Convolutions of distributions of random variables with independent binary digits // Random Oper. Stochastic Equations, 2007, Vol. 15., No. 1.

[2] *Albeverio S., Gontcharenko Ya., Pratsiovytyi M., Torbin G.* Fractal properties of the distributions of some class of random variables of the Jessen-Wintner type // Mathematische Nachrichten. – Vol.279, 2006, No.15.

[3] *Jessen B., Wintner A.* Distribution functions and Rieman Zeta-function // Trans. Amer. Math. Soc.— 1935.— 38. №1.— P.48-88.

[4] *Лукач Е.* Характеристические функции.— М.: Наука, 1979.— 424с.

[5] *Гончаренко Я.В., Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Тополого-метричні та фрактальні властивості згортки двох сингулярних розподілів випадкових величин з незалежними двійковими цифрами // Теор. ймов. та мат. стат. — 2002. — Вип. 67. — С.9–13.

[6] *Гончаренко Я.В., Працьовитий М.В., Торбін Г.М.* Фрактальні властивості множин точок недиференційовності абсолютно неперервної та сингулярної функцій розподілу // Теор. ймов. та мат. стат. — 2001. — Вип. 65. — С.27–34.

[7] *Працьовитий М.В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998. — 296 с.

[8] *Працьовитий М.В.* Згортки сингулярних розподілів // Доп. НАН України. — 1997. — № 9. — С.36–42.

[9] *Турбин А.Ф., Працевитый М.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наукова думка, 1992. — 208с.

[10] *Lyons R.* Seventy years of Rajchmann measures // J. Fourier Anal. Appl., Kahane Spesial Issue. — 1995. — P. 363-377.