Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2008, № 9. — С. 161–170.

Інваріантні точки одного неперервного недиференційовного відображення

О. В. Котова
(Херсонський державний університет)

Анотація. В даній роботі доводиться існування трійково-раціональних та трійково-ірраціональних інваріантних точок однієї неперервної ніде не диференційовної з фрактальними рівнями функції, яка формально просто задається за допомогою трійкового зображення аргумента і двійкового зображення своїх значень. Вказано алгоритм їх знаходження.

Abstract. In this paper we consider one continuous nowhere differentiable function with fractal level sets. This function has a simple definition by means of ternary representation of argument and binary representation of value of function. We prove that this function has ternary-rational and ternary-irrational fixed points and propose the algorithm for finding these fixed points.

Як було доведено С. Банахом [**1**] та С. Мазуркевичем [**2**] у 1931р., множина всіх неперервних ніде не диференційовних функцій в просторі $C[a,b]$ є множиною другої категорії Бера [**3**]. Такі функції все частіше з'являються в математичних моделях реальних процесів і явищ (дивись, наприклад, [**4**]) та фігурують в теоретичних дослідженнях [**4, 5, 6**]. Існує проблема розробки ефективного апарату формально простого задання таких функцій та методів їх досліджень [**5**]. Вона частково розв'язується використанням різних систем представлення чисел.

Один з найпростіших за заданням приклад неперервної ніде не диференційовної функції був запропонований Працьовитим М. В. [**7**]. Вона задається наступним чином.

Нехай $\Delta^s_{\gamma_1(u)\ldots\gamma_k(u)\ldots}$ — s-ковий розклад числа u, тобто

$$\Delta^s_{\gamma_1(u)\ldots\gamma_k(u)\ldots} = \frac{\gamma_1}{s} + \ldots + \frac{\gamma_k}{s^k} + \ldots,$$
$$\gamma_k = \gamma_k(u) \in \{0, 1, \ldots, s-1\}.$$

$y = f(x)$ — функція, яка аргументу $x = \Delta^3_{\alpha_1\ldots\alpha_k\ldots}$ ставить у відповідність значення $y = \Delta^2_{\beta_1\ldots\beta_k\ldots}$, де

$$\beta_1 = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \alpha_1(x) = 0, \\ \\ 1 & \text{при} \quad \alpha_1(x) \neq 0; \end{cases} \tag{1}$$

$$\beta_k = \begin{cases} \beta_{k-1} & \text{при} \quad \alpha_k(x) = \alpha_{k-1}(x), \\ \\ 1-\beta_{k-1} & \text{при} \quad \alpha_k(x) \neq \alpha_{k-1}(x). \end{cases} \tag{2}$$

Незважаючи на те, що двійково-раціональні точки мають два зображення, значення функції $f(x)$, визначеної рівностями (1)—(2), для різних зображень співпадають. В роботі [**7**] доведені неперервність та ніде не диференційовність даної функції. Робота [**8**] присвячена дослідженю фрактальних властивостей цієї функції, зокрема отримано вираз для фрактальної розмірності всіх її рівнів, тобто множин

$$f^{-1}(y_0) = \{x: \quad f(x) = y_0\},$$

де y_0 — елемент множини $E(f)$ значень функції $f(x)$. В роботі [**9**] доведено, що графік функції ($\Gamma_f = \{(x, f(x)) : x \in [0,1]\}$) є N-самоафінною множиною та обгрунтовано рівність $\int\limits_0^1 f(x)dx = \dfrac{4}{7}$.

З точки зору сучасної ергодичної теорії і теорій хаосу актуальними є дослідження динамічних систем з неперервним ніде не диференційовним відображенням. Дана робота присвячена задачі про інваріантні точки відображення f. Її основним результатом є доведення існування інваріантних точок, тобто існування розв'язків рівняння $x - f(x) = 0$.

Лема 1. *Рівняння $x - f(x) = 0$ не має трійково-раціональних коренів крім $x = 0$ і $x = 1$.*

Доведення. Припустимо супротивне, нехай $x = \Delta^3_{\alpha_1\ldots\alpha_{k(0)}}$ $(\alpha_k \neq 0)$ — корінь рівняння. Тоді

$$y = f(x) = \Delta^2_{\beta_1\ldots\beta_k(1-\beta_k)(1-\beta_k)\ldots}.$$

Можливі випадки: 1. $\beta_k = 1$; 2. $\beta_k = 0$.

Згідно з (1)—(2), в першому випадку $f(x) = \Delta^2_{\beta_1\ldots\beta_{k-1}1(0)}$, а в другому – $f(x) = \Delta^2_{\beta_1\ldots\beta_{k-1}0(1)}$, що дорівнює $\Delta^2_{\beta_1\ldots\beta_{k-1}1(0)}$. Тоді

$$x - f(x) = \frac{\lambda}{3^k} - \frac{\mu}{2^k} = \frac{2^k\lambda - 3^k\mu}{6^k},$$

де $(\lambda, 3) = (\mu, 2) = 1$.

Оскільки $2^k\lambda$ не ділиться на 3, то $2^k\lambda - 3^k\mu \neq 0$, а отже, $x - f(x) \neq 0$, що суперечить припущенню. Лему 1 доведено.

Теорема 1. *Для того, щоб число x було коренем рівняння*

$x - f(x) = 0$, *необхідно і достатньо, щоб*

$$-\frac{1}{3^m} < x_m - f(x_m) < \frac{1}{2^m} \qquad \forall m \in N, \tag{3}$$

де

$$x_m = x_m(x) = x - \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{\alpha_i(x)}{3^i} = \frac{\alpha_1}{3^1} + \frac{\alpha_2}{3^2} + \ldots + \frac{\alpha_m}{3^m}.$$

Доведення. *Необхідність*: якщо x — корінь рівняння $x - f(x) = 0$, то виконується подвійна нерівність (3).

Покажемо, що для $x = 0$ та $x = 1$ подвійна нерівність (3) виконується.

Справді, якщо $x = 0 = \Delta^3_{0\ldots0\ldots}$, то $\forall\ m \in N, x_m = 0$ і $f(x_m) = x_m = 0$.

Якщо $x = 1 = \Delta^3_{22\ldots2\ldots}$, то $x_m = \frac{2}{3} + \ldots + \frac{2}{3^m}$; $f(x_m) = \Delta^2_{\underbrace{11\ldots1}_{m}0\ldots0\ldots}$ і

$$x_m - f(x_m) = \left(\frac{2}{3} + \ldots + \frac{2}{3^m}\right) - \left(\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^m}\right) =$$

$$= 1 - \frac{1}{3^m} - 1 + \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^m} - \frac{1}{3^m}.$$

Отже, для $x = 0$ та $x = 1$ подвійна нерівність (3) виконується при довільному $m \in N$.

Доведемо тепер, що для коренів, які належать $(0, 1)$ (якщо такі існують) має місце подвійна нерівність (3). Скористаємось методом від супротивного. Припустимо супротивне, тобто що x — корінь рівняння для якого

$$x_m - f(x_m) \in \left(-\infty, -3^{-m}\right] \cup \left[2^{-m}, \infty\right), m \in N.$$

Якщо $x_m - f(x_m) \geq \frac{1}{2^m}$, то

$$x - f(x) = x_m + \frac{\alpha_{m+1}}{3^{m+1}} + \ldots - f(x_m) - \frac{\beta_{m+1}}{2^{m+1}} - \ldots >$$

$$> x_m - f(x_m) - \frac{\beta_{m+1}}{2^{m+1}} - \ldots > x_m - f(x_m) - \frac{1}{2^m} \geq \frac{1}{2^m} - \frac{1}{2^m} = 0.$$

Отже, $x - f(x) > 0$, що суперечить умові $x = f(x)$.

Якщо $x_m - f(x_m) \leq -\frac{1}{3^m}$, то

$$x - f(x) = x_m + \frac{\alpha_{m+1}}{3^{m+1}} + \ldots - f(x_m) - \frac{\beta_{m+1}}{2^{m+1}} - \ldots <$$

$$< x_m + \frac{\alpha_{m+1}}{3^{m+1}} + \ldots - f(x_m) < x_m - f(x_m) + \frac{1}{3^m} \leq \frac{1}{3^m} - \frac{1}{3^m} = 0.$$

Отже, $x - f(x) < 0$, що суперечить умові $x = f(x)$.

Достатність: якщо існує послідовність α_m, $\alpha_m \in \{0,1,2\}$ така, що для $x_i = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\alpha_i}{3^i}$ виконується $-\frac{1}{3^m} < x_m - f(x_m) < \frac{1}{2^m}$, то число x є коренем рівняння $x - f(x) = 0$.

Оскільки з $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = x$ випливає $\lim\limits_{m\to\infty} f(x_m) = f(x)$, то перейшовши до границь в нерівності (3), отримаємо $0 \le x - f(x) \le 0$, тобто
$x - f(x) = 0$. Теорему 1 доведено.

Лема 2. *Якщо існує таке x, що*

$$-\frac{1}{3^m} < x_m - f(x_m) < \frac{1}{2^m}$$

для деякого фіксованого m, то

$$-\frac{1}{3^n} < x_n - f(x_n) < \frac{1}{2^n} \qquad \forall n < m.$$

Доведення. Нехай існує таке x, що для деякого $x_m = x_m(x)$

$$-\frac{1}{3^m} < x_m - f(x_m) < \frac{1}{2^m}.$$

Оскільки

$$x_{m-1} = x_m - \frac{\alpha_m}{3^m}, f(x_{m-1}) = f(x_m) - \frac{\beta_m}{2^m},$$

то

$$-\frac{1}{3^m} - \frac{\alpha_m}{3^m} + \frac{\beta_m}{2^m} < x_{m-1} - f(x_{m-1}) < \frac{1}{2^m} - \frac{\alpha_m}{3^m} + \frac{\beta_m}{2^m}.$$

Але

$$-\frac{1}{3^m} - \frac{\alpha_m}{3^m} + \frac{\beta_m}{2^m} > -\frac{1}{3^m} - \frac{2}{3^m} = -\frac{1}{3^{m-1}},$$

$$\frac{1}{2^m} - \frac{\alpha_m}{3^m} + \frac{\beta_m}{2^m} < \frac{1}{2^m} + \frac{1}{2^m} = \frac{1}{2^{m-1}},$$

тому

$$-\frac{1}{3^{m-1}} < x_{m-1} - f(x_{m-1}) < \frac{1}{2^{m-1}}.$$

Тобто, якщо подвійна нерівність (3) виконується для деякого фіксованого m, то вона виконується і для $m-1$.

Повторивши міркування відносно $m-1$, отримаємо, що нерівність (3) виконується для $m-2$. І т.д. Лему 2 доведено.

Теорема 2. *Рівняння $x - f(x) = 0$ має нетривіальні, тобто відмінні від 0 і 1, розв'язки.*

Доведення. Основна ідея доведення теореми 2 полягає в наступному. Ми вкажемо збіжну послідовність трійково-раціональних точок $x_m = \frac{\alpha_1}{3} + \ldots + \frac{\alpha_m}{3^m}$ (через побудову послідовності цифр $\{\alpha_m\}$) таких, що

$$-\frac{1}{3^m} < x_m - f(x_m) < \frac{1}{2^m}.$$

Тоді число $x = \lim\limits_{m\to\infty} x_m$ є шуканим коренем рівняння, оскільки $\lim\limits_{m\to\infty} f(x_m) = f(x)$, завдяки неперервності $f(x)$, і $\lim\limits_{m\to\infty} (x_m - f(x_m)) = \lim\limits_{m\to\infty} x_m - \lim\limits_{m\to\infty} f(x_m) = x - f(x) = 0$.
Для цього ми вказуємо послідовність трійкових цифр

$\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 1$, $\alpha_5 = 1$, $\alpha_6 = 2$, $\alpha_7 = 2$, $\alpha_8 = 1$, $\alpha_9 = 2$, $\alpha_{10} = 0$, $\alpha_{11} = 1$, $\alpha_{12} = 2$, $\alpha_{13} = 2$, $\alpha_{14} = 2$, $\alpha_{15} = 0$, яка визначає число $x_{15} = \sum\limits_{i=1}^{15} \frac{\alpha_i}{3^i} = \Delta_{201112212012220}$, що задовольняє умову

$$x_{15} - f(x_{15}) = \frac{1}{2^{15}} - \delta_{15}, \text{де } \frac{1}{3^{15}} < \delta_{15} < \frac{1}{2^{15}}. \tag{4}$$

Згідно з лемою 2 кожне число $x_k = \sum\limits_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{3^i}$ $(k \le 15)$ задовольняє (3).

Далі для числа x_m, яке задовольняє (3), вказуємо алгоритм підбору цифр $\alpha_{m+1}, \ldots, \alpha_{m+n}$ таких, що

$x_{m+n} = x_m + \frac{\alpha_{m+1}}{3^{m+1}} + \ldots + \frac{\alpha_{m+n}}{3^{m+n}}$, задовольняє умови

$x_{m+n} - f(x_{m+n}) = \frac{1}{2^{m+n}} - \delta_{m+n}$, де $\frac{1}{3^{m+n}} < \delta_{m+n} < \frac{1}{2^{m+n}}$.

Згідно з тією ж лемою 2 всі $x_i = \sum\limits_{j=1}^{i} \frac{\alpha_j}{3^j}$ $(i \le m+n)$ задовольняють (3). За індукцією послідовність x_m $(m = 1, 2, \ldots)$, що задовольняє умови (3), визначена і $x = \lim\limits_{m\to\infty} x_m$ є, як уже зазначалося, коренем рівняння.

Тепер вкажемо алгоритм побудови за x_m, яке задовольняє умови (3),

$$x_{m+n} = x_m + \frac{\alpha_{m+1}}{3^{m+1}} + \ldots + \frac{\alpha_{m+n}}{3^{m+n}},$$

що має цю ж властивість.

Розглянемо трійково-раціональне число $x_m = x_{15} + \frac{\alpha_{16}}{3^{16}} + \ldots + \frac{\alpha_m}{3^m}$, яке задовольняє умови $x_m - f(x_m) = \frac{1}{2^m} - \delta_m$, де $\frac{1}{3^m} < \delta_m < \frac{1}{2^m} \, (m \ge 15)$. Такі числа існують, бо принаймні для $m = 15$, як показано вище, ці умови виконуються. Можливі випадки:

1. $x_m - f(x_m) > \frac{1}{2^{m+1}}$;
2. $x_m - f(x_m) < \frac{1}{2^{m+1}}$;

2.1. $x_m - f(x_m) = \dfrac{1}{2^{m+1}} - \varepsilon_m$, де $0 < \varepsilon_m < \dfrac{1}{3^{m+1}}$;

2.2. $x_m - f(x_m) = \dfrac{1}{2^{m+1}} - \varepsilon_m$, де $\dfrac{2}{3^{m+1}} < \varepsilon_m < \dfrac{1}{2^{m+1}}$;

2.3. $x_m - f(x_m) = \dfrac{1}{2^{m+1}} - \varepsilon_m$, де $\dfrac{1}{3^{m+1}} < \varepsilon_m < \dfrac{2}{3^{m+1}}$.

1. Якщо $x_m - f(x_m) > \dfrac{1}{2^{m+1}}$, то $\dfrac{1}{2^m} - \delta_m > \dfrac{1}{2^{m+1}}$, тобто $\delta_m < \dfrac{1}{2^{m+1}}$.

Візьмемо $\beta_{m+1} = 1$ і визначимо $\alpha_{m+1} = \lambda \in \{0;1;2\}$ таким, щоб для $x_{m+1} = \Delta^3_{\alpha_1 \ldots \alpha_m \alpha_{m+1}}$ виконувались рівності (1)—(2).

Тобто $f(x_{m+1}) = f(x_m) + \dfrac{1}{2^{m+1}}$. Тоді

$$x_{m+1} - f(x_{m+1}) = x_m + \frac{\lambda}{3^{m+1}} - f(x_m) - \frac{1}{2^{m+1}} =$$
$$= \frac{1}{2^m} - \delta_m - \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{\lambda}{3^{m+1}} = \frac{1}{2^{m+1}} - \delta_m + \frac{\lambda}{3^{m+1}} = \frac{1}{2^{m+1}} - \delta_{m+1},$$

де $\delta_{m+1} = \delta_m - \dfrac{\lambda}{3^{m+1}}$.

Оскільки $\dfrac{\lambda}{3^{m+1}} \geq 0$, то $\delta_{m+1} = \delta_m - \dfrac{\lambda}{3^{m+1}} \leq \delta_m < \dfrac{1}{2^{m+1}}$.

З іншого боку, $\delta_{m+1} = \delta_m - \dfrac{\lambda}{3^{m+1}} > \dfrac{1}{3^m} - \dfrac{\lambda}{3^{m+1}} \geq \dfrac{1}{3^{m+1}}$,

тобто $\delta_{m+1} > \dfrac{1}{3^{m+1}}$.

Таким чином,

$x_{m+1} - f(x_{m+1}) = \dfrac{1}{2^{m+1}} - \delta_{m+1}$, де $\dfrac{1}{3^{m+1}} < \delta_{m+1} < \dfrac{1}{2^{m+1}}$.

2. Якщо $x_m - f(x_m) < \dfrac{1}{2^{m+1}}$, то нехай $x_m - f(x_m) = \dfrac{1}{2^{m+1}} - \varepsilon_m$.

За умовою $x_m - f(x_m) = \dfrac{1}{2^m} - \delta_m$, де $\dfrac{1}{3^m} < \delta_m < \dfrac{1}{2^m}$.

Оскільки $x_m - f(x_m) > 0$, то $\varepsilon_m < \dfrac{1}{2^{m+1}}$.

Крім того, $x_m - f(x_m) < \dfrac{1}{2^{m+1}}$.

Отже, $0 < \varepsilon_m < \dfrac{1}{2^{m+1}}$.

2.1. Нехай $x_m - f(x_m) = \dfrac{1}{2^{m+1}} - \varepsilon_m$, де $\varepsilon_m < \dfrac{1}{3^{m+1}}$.

Візьмемо $\beta_{m+1} = 1$ і визначимо $\alpha_{m+1} = \lambda \in \{0;1;2\}$ таким, щоб для $x_{m+1} = \Delta^3_{\alpha_1 \ldots \alpha_m \alpha_{m+1}}$ виконувались рівності (1)—(2).

2.1.1. Якщо $\lambda \in \{1;2\}$, то $x_{m+1} - f(x_{m+1}) = x_m - f(x_m) - \dfrac{1}{2^{m+1}} +$
$+ \dfrac{\lambda}{3^{m+1}} = \dfrac{1}{2^{m+1}} - \varepsilon_m - \dfrac{1}{2^{m+1}} + \dfrac{\lambda}{3^{m+1}} = \dfrac{\lambda}{3^{m+1}} - \varepsilon_m > 0$, оскільки $\varepsilon_m < \dfrac{1}{3^{m+1}}$.

Покладемо $x_{m+1} - f(x_{m+1}) = \frac{1}{2^{m+1}} - \delta_{m+1}$, де $\delta_{m+1} = \frac{1}{2^{m+1}} - \frac{\lambda}{3^{m+1}} + \varepsilon_m$. Тоді $\delta_{m+1} = \frac{1}{2^{m+1}} - \left(\frac{\lambda}{3^{m+1}} - \varepsilon_m\right) < \frac{1}{2^{m+1}}$, оскільки $\frac{\lambda}{3^{m+1}} - \varepsilon_m > 0$.

Крім того, $\frac{1}{2^{m+1}} > \frac{1}{3^m}$ при $m > 1$. Тому $\delta_{m+1} = \frac{1}{2^{m+1}} - \frac{\lambda}{3^{m+1}} + \varepsilon_m >$
$> \frac{1}{3^m} - \frac{\lambda}{3^{m+1}} + \varepsilon_m = \frac{3-\lambda}{3^{m+1}} + \varepsilon_m > \frac{1}{3^{m+1}}$, оскільки $\varepsilon_m > 0$.
Таким чином,
$x_{m+1} - f(x_{m+1}) = \frac{1}{2^{m+1}} - \delta_{m+1}$, де $\frac{1}{3^{m+1}} < \delta_{m+1} < \frac{1}{2^{m+1}}$.

2.1.2. Якщо $\lambda = 0$, то

$$x_{m+1} - f(x_{m+1}) = x_m - f(x_m) - \frac{1}{2^{m+1}} = \frac{1}{2^{m+1}} - \varepsilon_m - \frac{1}{2^{m+1}} = -\varepsilon_m.$$

Оскільки $0 < \varepsilon_m < \frac{1}{3^{m+1}}$, то $-\frac{1}{3^{m+1}} < -\varepsilon_m < 0$.
Отже, $-\frac{1}{3^{m+1}} < x_{m+1} - f(x_{m+1}) < 0$.
Покладемо $\mu = \frac{1}{3^{m+1}} - \varepsilon_m$.
Оскільки $0 < \varepsilon_m < \frac{1}{3^{m+1}}$, то $0 < \mu < \frac{1}{3^{m+1}}$.
Нехай s — ціле невід'ємне число, яке задовольняє умовам:

$$\frac{1}{3^{m+s+2}} < \mu < \frac{1}{3^{m+s+1}}.$$

Покладемо $\alpha_{m+2} = \alpha_{m+3} = \ldots = \alpha_{m+s+2} = 2$ і визначимо $\beta_{m+2} = \beta_{m+3} = \ldots = \beta_{m+s+2} = 0$.
Розглянемо

$$x_{m+s+2} - f(x_{m+s+2}) = x_{m+1} - f(x_{m+1}) + \frac{2}{3^{m+2}} + \frac{2}{3^{m+3}} + \ldots + \frac{2}{3^{m+s+2}} =$$
$$= -\varepsilon_m + \frac{2}{3^{m+2}}\left(1 + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{3^s}\right) = -\varepsilon_m + \frac{2}{3^{m+2}}\frac{1-\frac{1}{3^{s+1}}}{1-\frac{1}{3}} =$$
$$= -\varepsilon_m + \frac{2}{3^{m+2}}\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\frac{1}{3^{s+1}}\right) = -\varepsilon_m + \frac{1}{3^{m+1}} - \frac{1}{3^{m+s+2}} = \mu - \frac{1}{3^{m+s+2}} > 0.$$

Нехай

$$x_{m+s+2} - f(x_{m+s+2}) = \frac{1}{2^{m+s+2}} - \delta_{m+s+2},$$

де δ_{m+s+2} визначимо з рівності:

$$\mu - \frac{1}{3^{m+s+2}} = \frac{1}{2^{m+s+2}} - \delta_{m+s+2};$$
$$\delta_{m+s+2} = \frac{1}{2^{m+s+2}} - \mu + \frac{1}{3^{m+s+2}}.$$

Оскільки $-\mu + \dfrac{1}{3^{m+s+2}} < 0$, то $\delta_{m+s+2} < \dfrac{1}{2^{m+s+2}}$.

З іншого боку, оскільки $\dfrac{1}{3^{m+s+1}} - \mu > 0$, то

$$\delta_{m+s+2} = \frac{1}{2^{m+s+2}} - \mu + \frac{1}{3^{m+s+2}} > \frac{1}{3^{m+s+1}} - \mu + \frac{1}{3^{m+s+2}} > \frac{1}{3^{m+s+2}}.$$

Таким чином, $x_{m+s+2} - f\left(x_{m+s+2}\right) = \dfrac{1}{2^{m+s+2}} - \delta_{m+s+2}$,
де $\dfrac{1}{3^{m+s+2}} < \delta_{m+s+2} < \dfrac{1}{2^{m+s+2}}$.

2.2. Нехай $x_m - f\left(x_m\right) = \dfrac{1}{2^{m+1}} - \varepsilon_m$, де $\varepsilon_m > \dfrac{2}{3^{m+1}}$. Візьмемо $\beta_{m+1} = 0$ і визначимо $\alpha_{m+1} = \lambda \in \{0;1;2\}$ таким, щоб для $x_{m+1} = \Delta^3_{\alpha_1 \ldots \alpha_m \alpha_{m+1}(0)}$ виконувались рівності (1)—(2).

2.2.1. Якщо $\lambda \in \{0;1\}$, то

$$x_{m+1} - f\left(x_{m+1}\right) = x_m - f\left(x_m\right) + \frac{\lambda}{3^{m+1}} = \frac{1}{2^{m+1}} - \varepsilon_m + \frac{\lambda}{3^{m+1}} = \frac{1}{2^{m+1}} - \delta_{m+1},$$

де $\delta_{m+1} = \varepsilon_m - \dfrac{\lambda}{3^{m+1}} > \dfrac{2}{3^{m+1}} - \dfrac{\lambda}{3^{m+1}} = \dfrac{2-\lambda}{3^{m+1}} \geq \dfrac{1}{3^{m+1}}$.

Отже, $\delta_{m+1} > \dfrac{1}{3^{m+1}}$.

З іншого боку,

$$x_{m+1} - f\left(x_{m+1}\right) = x_m - f\left(x_m\right) + \frac{\lambda}{3^{m+1}} \geq x_m - f\left(x_m\right) > 0.$$

Оскільки $x_{m+1} - f\left(x_{m+1}\right) = \dfrac{1}{2^{m+1}} - \delta_{m+1}$, то $\delta_{m+1} < \dfrac{1}{2^{m+1}}$.

Таким чином,
$x_{m+1} - f\left(x_{m+1}\right) = \dfrac{1}{2^{m+1}} - \delta_{m+1}$, де $\dfrac{1}{3^{m+1}} < \delta_{m+1} < \dfrac{1}{2^{m+1}}$.

2.2.2. Якщо $\lambda = 2$, то

$$x_{m+1} - f\left(x_{m+1}\right) = x_m - f\left(x_m\right) + \frac{2}{3^{m+1}} = \frac{1}{2^{m+1}} - \varepsilon_m + \frac{2}{3^{m+1}} = \frac{1}{2^{m+1}} - \delta_{m+1},$$

де $\delta_{m+1} = \varepsilon_m - \dfrac{2}{3^{m+1}} > 0$.

Якщо $\delta_{m+1} > \dfrac{1}{3^{m+1}}$,
то $x_{m+1} - f\left(x_{m+1}\right) = \dfrac{1}{2^{m+1}} - \delta_{m+1}$, де $\dfrac{1}{3^{m+1}} < \delta_{m+1} < \dfrac{1}{2^{m+1}}$.

Припустимо, що $\delta_{m+1} < \dfrac{1}{3^{m+1}}$.

Нехай s — ціле невід'ємне число, яке задовольняє умовам:

$$\frac{1}{3^{m+s+2}} < \delta_{m+1} < \frac{1}{3^{m+s+1}}.$$

Покладемо $\alpha_{m+2} = \alpha_{m+3} = \ldots = \alpha_{m+s+2} = 0$ і визначимо
$\beta_{m+2} = \beta_{m+3} = \ldots = \beta_{m+s+2} = 1$, $\delta_{m+s+2} = \delta_{m+1}$.

Розглянемо

$$x_{m+s+2} - f(x_{m+s+2}) = x_{m+1} - f(x_{m+1}) - \frac{1}{2^{m+2}} - \frac{1}{2^{m+3}} - \ldots - \frac{1}{2^{m+s+2}} =$$

$= \frac{1}{2^{m+s+2}} - \delta_{m+1} = \frac{1}{2^{m+s+2}} - \delta_{m+s+2}$, де $\frac{1}{3^{m+s+2}} < \delta_{m+s+2} < \frac{1}{3^{m+s+1}}$.

Оскільки $\frac{1}{2^{m+s+2}} > \frac{1}{3^{m+s+1}}$, то $\delta_{m+s+2} < \frac{1}{2^{m+s+2}}$.

Таким чином, $x_{m+s+2} - f(x_{m+s+2}) = \frac{1}{2^{m+s+2}} - \delta_{m+s+2}$,
де $\frac{1}{3^{m+s+2}} < \delta_{m+s+2} < \frac{1}{2^{m+s+2}}$.

2.3. Нехай $x_m - f(x_m) = \frac{1}{2^{m+1}} - \varepsilon_m$, де $\frac{1}{3^{m+1}} < \varepsilon_m < \frac{2}{3^{m+1}}$.

2.3.1. Якщо при $\beta_{m+1} = 0$, $\alpha_{m+1} = 0$ виконуються рівності (1)—(2), то

$$x_{m+1} - f(x_{m+1}) = x_m - f(x_m) = \frac{1}{2^{m+1}} - \delta_{m+1},$$

де $\delta_{m+1} = \varepsilon_m > \frac{1}{3_{m+1}}$, $\varepsilon_m < \frac{1}{2_{m+1}}$.

Таким чином, $x_{m+1} - f(x_{m+1}) = \frac{1}{2^{m+1}} - \delta_{m+1}$,
де $\frac{1}{3^{m+1}} < \delta_{m+1} < \frac{1}{2^{m+1}}$.

2.3.2. Якщо при $\beta_{m+1} = 0$, $\alpha_{m+1} = 1$ виконуються рівності (1)—(2), то

$$x_{m+1} - f(x_{m+1}) = x_m - f(x_m) + \frac{1}{3^{m+1}} = \frac{1}{2^{m+1}} - \varepsilon_m + \frac{1}{3^{m+1}} = \frac{1}{2^{m+1}} - \delta_{m+1},$$

де $\delta_{m+1} = \varepsilon_m - \frac{1}{3^{m+1}} > 0$, $\delta_{m+1} < \frac{1}{3^{m+1}}$.

Нехай s — ціле невід'ємне число, яке задовольняє умовам:

$$\frac{1}{3^{m+s+2}} < \delta_{m+1} < \frac{1}{3^{m+s+1}}.$$

Покладемо $\alpha_{m+2} = \alpha_{m+3} = \ldots = \alpha_{m+s+2} = 0$ і визначимо
$\beta_{m+2} = \beta_{m+3} = \ldots = \beta_{m+s+2} = 1$, $\delta_{m+s+2} = \delta_{m+1}$.
Тобто, ми отримали випадок 2.2.2.

2.3.3. Якщо при $\beta_{m+1} = 1$, $\alpha_{m+1} = 1$ виконуються рівності (1)—(2), то

$$x_{m+1} - f(x_{m+1}) = x_m - f(x_m) - \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} =$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}} - \varepsilon_m - \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+1}} = \frac{1}{3^{m+1}} - \varepsilon_m.$$

Тоді $-\frac{1}{3^{m+1}} < x_{m+1} - f(x_{m+1}) < 0$.

Покладемо $\mu = \frac{1}{3^{m+1}} - \varepsilon_m$.

Оскільки $0 < \varepsilon_m < \frac{1}{3^{m+1}}$, то $0 < \mu < \frac{1}{3^{m+1}}$.

Нехай s — ціле невід'ємне число, яке задовольняє умовам:

$$\frac{1}{3^{m+s+2}} < \mu < \frac{1}{3^{m+s+1}}.$$

Поклавши $\alpha_{m+2} = \alpha_{m+3} = \ldots = \alpha_{m+s+2} = 2$, отримуємо $\beta_{m+2} = \beta_{m+3} = \ldots = \beta_{m+s+2} = 0$, тобто приходимо до випадку 2.1.2.

2.3.4. Якщо при $\beta_{m+1} = 1$, $\alpha_{m+1} = 2$ виконуються рівності (1)—(2), то

$$x_{m+1} - f\left(x_{m+1}\right) = x_m - f\left(x_m\right) - \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{2}{3^{m+1}} =$$

$$= \frac{1}{2^{m+1}} - \varepsilon_m - \frac{1}{2^{m+1}} + \frac{2}{3^{m+1}} = \frac{2}{3^{m+1}} - \varepsilon_m = \frac{1}{2^{m+1}} - \delta_{m+1},$$

де $\delta_{m+1} = \frac{1}{2^{m+1}} - \frac{2}{3^{m+1}} + \varepsilon_m > \frac{1}{3^m} - \frac{2}{3^{m+1}} + \varepsilon_m = \frac{1}{3^{m+1}} + \varepsilon_m > \frac{1}{3^{m+1}}$, $\delta_{m+1} < \frac{1}{2^{m+1}}$.

Таким чином, $x_{m+1} - f\left(x_{m+1}\right) = \frac{1}{2^{m+1}} - \delta_{m+1}$, де $\frac{1}{3^{m+1}} < \delta_{m+1} < \frac{1}{2^{m+1}}$.

І т.д.

Отже, $x_{m+1} - f\left(x_{m+1}\right) \to 0$ при $m \to \infty$. Теорему 2 доведено.

Зауваження 1. Функція $f(x)$ має не єдину трійково-ірраціональну інваріантну точку.

Справді, легко вказати інше x_{15} (наприклад, $x_{15} = \Delta^3_{121222212212210}$), яке задовольняє умову (4) і застосувати вище вказаний алгоритм для побудови інших цифр числа x, що є „надбудовою“ x_{15} і коренем відповідного рівняння.

Література

[1] *Banach S.* Uber die Baire'sche Kategorie gewisser Funktionnenmengen // Stud. Math. — 1931. — 3. — P. 174–179.

[2] *Mazurkiewicz S.* Sur les functions non derivables // Stud. Math. — 1931. — 3. — P. 244.

[3] *Турбин А.Ф., Працевитый Н.В.* Фрактальные множества, функции, распределения. — Киев: Наукова думка, 1992. — 208 с.

[4] *Кравченко В. Ф., Масюк В. М.* Новый класс фрактальных функций в задачах анализа и синтеза антенн. — М.: ИПРЖР, 2002. — 72 с.

[5] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. — 296 с.

[6] *Falconer K. J.* Fractal geometry. — Chichester, Wiley, 1990. — 290 p.

[7] *Працевитый Н.В.* Непрерывные канторовские проекторы // Методы исследования алгебраических и топологических структур. — Киев: КГПИ, 1989. —С. 95–105.

[8] *Працьовитий М. В.* Фрактальні властивості однієї неперервної ніде недиференційовної функції // Наукові записки НПУ імені М.П. Драгоманова. — Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 2002. —Вип.3. — С. 351–362.

[9] *Коваль В. В.* Самоафінні графіки функцій // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки — Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2004, №5. — С. 292–299.