Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки
Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова. — 2008, № 9.— С. 81–103.

УДК 519.21

Ергодичні властивості Q_∞-зображень та фрактальні властивості ймовірнісних мір з незалежними Q_∞-символами

Р. О. Нікіфоров, Г. М. Торбін
(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

Анотація. У роботі досліджуються ергодичні властивості Q_∞-зображення дійсних чисел та властивості локально тонкої системи покриттів одиничного відрізка, що складається з циліндрів Q_∞-зображення. Знайдено достатні умови фрактальності таких систем покриттів. Досліджено властивості розподілів випадкових величин з незалежними символами Q_∞-зображення. Особлива увага приділена вивченню тонких фрактальних властивостей розподілів такого типу. У випадку однакової розподіленості доведено формулу для обчислення розмірності Хаусдорфа відповідної ймовірнісної міри.

Abstract. We study ergodic properties of the Q_∞-expansion of real numbers and properties of the corresponding fine covering system of the unit interval, consisting of cylinders of the Q_∞-expansion. Sufficient conditions for the faithfulness of such covering systems are found. Properties of distributions with independent Q_∞-symbols are also studied in details. A special attention ia paid to the fine fractal properties of the above mentioned probability distributions. For the i.i.d-case an explicit formulae for the determination of the Hausdorff dimension of the corresponding probability measure is proven.

1. Q_∞-зображення дійсних чисел та його ергодичні властивості

Нехай $Q_\infty = (q_0, q_1, \ldots, q_i, \ldots)$ – стохастичний вектор з додатними координатами. Нагадаємо означення Q_∞-розбиття одиничного інтервалу $[0, 1)$ (див. [**7**]).

Крок 1. Розбиваємо інтервал $[0, 1)$ (зліва направо) на інтервали Δ_{i_1}, $i_1 \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ (без спільних внутрішніх точок) довжини $|\Delta_{i_1}| = q_{i_1}$,

$$[0, 1) = \bigcup_{i_1=0}^{\infty} \Delta_{i_1}.$$

Інтервали Δ_{i_1} називаються циліндрами першого рангу.

Робота частково підтримана проектами DFG 436 113/97 та фондом Олександра фон Гумбольдта

Крок $k \geq 2$. Кожен з інтервалів $(k-1)$-рангу $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}}$ розкладаємо (зліва направо) в об'єднання інтервалів (без спільних внутрішніх точок) *k–го рангу* $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}$,

$$\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1}} = \bigcup_{i_k=0}^{\infty} \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k},$$

довжини яких

$$|\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}| = q_{i_1} \cdot q_{i_2} \cdots q_{i_k} = \prod_{s=1}^{k} q_{i_s} \tag{1}$$

відносяться наступним чином

$$\left|\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 0}\right| : \left|\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} 1}\right| : \cdots : \left|\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k}\right| : \cdots = q_0 : q_1 : \cdots : q_{i_k} : \cdots \qquad .$$

Для довільної послідовності індексів $\{i_k\}$, $i_k \in \{0, 1, 2 \ldots\}$, існує послідовність вкладених інтервалів

$$\Delta_{i_1} \supset \Delta_{i_1 i_2} \supset \cdots \supset \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k} \supset \cdots$$

таких, що $|\Delta_{i_1 \ldots i_k}| \to 0$, $k \to \infty$, завдяки (1). Отже, існує єдина точка $x \in [0,1]$, що належить всім цим інтервалам Δ_{i_1}, $\Delta_{i_1 i_2}$, ..., $\Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k}$, ...

І навпаки, для довільної точки $x \in [0,1)$ існує послідовність вкладених інтервалів $\Delta_{i_1} \supset \Delta_{i_1 i_2} \supset \ldots \supset \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k} \supset \ldots$, що містять x, тобто,

$$x = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \Delta_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_k(x)} =: \Delta_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_k(x) \ldots} \tag{2}$$

Вираз (2) називається Q_∞*–зображенням* (представленням) точки $x \in [0,1)$.

Нехай $\Omega_k = \{0, 1, 2 \ldots\}$, $\mathcal{A}_k = 2^{\Omega_k}$. Розглянемо бівимірне відображення $\varphi : \Omega \to [0,1)$, яке означене наступним чином:

$$\forall \omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_k, ...) \in \Omega : \quad \varphi(\omega) = x = \Delta_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_k(x) \ldots}$$

з $\omega_k = i_k(x)$, $k \in N$. Кожна точка $x \in [0,1)$ має єдине Q_∞–представлення.

Q_∞-представлення дійсних чисел дозволяє формально просто задавати і досліджувати широкий клас одновимірних фракталів та інших об'єктів з фрактальними властивостями.

З метою розвитку метричної та ергодичної теорії Q_∞-розкладів розглянемо символьну динамічну систему, яка породжується відображенням T^* одностороннього зсуву по Q_∞-зображенню:

$$\forall\, x = \Delta_{i_1(x) i_2(x) \ldots i_k(x) \ldots} \quad T^*(x) = \Delta_{i_2(x) i_3(x) \ldots i_k(x) \ldots}$$

Нехай $T^{-1}A = \{x : T(x) \in A\}, A \subset [0,1)$. Нагадаємо, що множина A називається інваріантною або нерухомою відносно перетворення T, якщо $A = T^{-1}A$. Міра μ називається ергодичною відносно перетворення T, якщо довільна інваріантна множина

$A \subset [0,1)$ є множиною або нульової або одиничної міри. Міра μ називається інваріантною відносно перетворення T, якщо для довільної множини $E \subset [0,1)$ виконується рівність $\mu(T^{-1}E) = \mu(E)$.

Означимо міри μ_k та ϑ_k наступним чином:

$$\mu_k(i) = p_{ik}; \ \ \vartheta_k(i) = q_i, \quad i \in \Omega_k.$$

Нехай

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \prod_{k=1}^{\infty}(\Omega_k, \mathcal{A}_k, \mu_k), \quad (\Omega, \mathcal{A}, \vartheta) = \prod_{k=1}^{\infty}(\Omega_k, \mathcal{A}_k, \vartheta_k).$$

Означимо міри μ^* та ϑ^* як образи мір μ та ϑ під дією φ:

$$\mu^*(B) = \mu(\varphi^{-1}(B)), \quad \vartheta^*(B) = \vartheta(\varphi^{-1}(B)), \forall B \in \mathcal{B}. \tag{3}$$

Зрозуміло, що ϑ^* співпадає з мірою Лебега λ на $[0,1)$

Теорема 1. *1) Ймовірнісна міра μ^* є ергодичною відносно перетворення T^*.*

2) Якщо $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k = ...$, то міра μ^* буде інваріантною відносно перетворення T^*.

Доведення. Розглянемо відображенням T одностороннього зсуву, яке діє в просторі $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$:

$$\forall\ \omega = (\omega_1\omega_2\dots\omega_k\dots)$$
$$T(\omega) = (\omega_2\omega_3\dots\omega_{k+1}\dots)$$

В роботі [**8**] було доведено, що продакт–міра μ є ергодичною відносно перетворення T, і якщо $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k = ...$, то продакт–міра μ буде також інваріантною відносно перетворення T.

Нехай A^* – деяка борелівська множина, яка інваріантна відносно T^*. Оскільки φ – бієктивне відображення, то $A = \varphi^{-1}(A^*)$ є інваріантною відносно T. Тому, за доведеною теоремою $\mu(A) = 0$ або $\mu(A) = 1$. Оскільки відображення φ є бієктивним і бівимірним, то $\mu(A) = \mu^*(\varphi(A))$ для будь-якого $A \in \mathcal{A}$. Тому $\mu^*(A^*) = 0$ або $\mu^*(A^*) = 1$. Отже, μ^* є ергодичною відносно T^*.

Нехай $\mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k = ...$. Оскільки σ-алгебра борелівських підмножин одиничного відрізка породжується сімейством циліндричних відрізків Q_∞–зображення, то достатньо довести інваріантність міри μ^* на довільному циліндричному відрізку. Очевидно, що $\mu^*(\Delta_{c_1c_2\dots c_n}) = p_{c_1} \cdot p_{c_2} \cdot \dots \cdot p_{c_n}$. Оскільки $T^{-1}(\Delta_{c_1c_2\dots c_n}) = \Delta_{i\ c_1c_2\dots c_n}, i \in N$, то

$$\mu^*(T^{-1}(\Delta_{c_1c_2\dots c_n})) = \sum_{i=1}^{\infty}\mu^*(\Delta_{i\ c_1c_2\dots c_n}) =$$

$$= p_{c_1} \cdot p_{c_2} \cdot \ldots \cdot p_{c_n} \sum_{i=1}^{\infty} p_i = p_{c_1} \cdot p_{c_2} \cdot \ldots \cdot p_{c_n} = \mu^*(\Delta_{c_1 c_2 \ldots c_n}),$$

що і треба було довести. □

Оскільки міра Лебега за побудовою є образом продакт-міри з однаково розподіленими Q_∞-символами ($p_i = q_i\ \forall i \in N$), то має місце

Наслідок 1. *Міра Лебега є інваріантною та ергодичною відносно перетворення T^*.*

Наведене твердження дозволяє використовувати методи ергодичної теорії для дослідження властивостей Q_∞-представлення.

Позначимо через $N_i(x,k)$ кількість символів «i» в Q_∞-зображенні числа x до k-го місця включно.

Означення 1. Якщо існує границя $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k}$, то значення $\nu_i(x)$ цієї границі називається *частотою цифри «i» в Q_∞-зображенні числа x.*

Теорема 2. *Для майже всіх (в смислі міри Лебега) чисел одиничного відрізка мають місце рівності*

$$\nu_i(x) = q_i \quad (i \in \{0, 1, 2, \ldots\}).$$

Доведення. За ергодичною теоремою Біркгофа [**4**]

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(T^0(x)) + f(T^1(x)) + \cdots + f(T^{n-1}(x))}{n} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d\lambda(x)$$

для довільної $f \in L_1(dx)$. Виберемо

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i_1(x) \neq i, \\ 1, & \text{якщо } i_1(x) = i. \end{cases}$$

Тоді $f(x) + f(Tx) + \cdots + f(T^{n-1}x) = N_i(x,n)$.

З іншого боку,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d\lambda(x) = \int_0^1 f(x) dx = \int_{\Delta_i} 1 dx = |\Delta_i| = q_i,$$

де $\Delta_i = \{x : i_1(x) = i\}$.

Отже, для λ-майже всіх $x \in [0,1)$ границя $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{N_i(x,k)}{k}$ існує і дорівнює q_i. Позначимо множину таких чисел $N_i(Q_\infty)$. Нехай

$$N(Q_\infty) = \bigcap_{i=0}^{\infty} N_i(Q_\infty) = \{x : \nu_i(x) = q_i, \forall i \in \{0, 1, 2, \ldots\}\}.$$

Оскільки $\lambda(N_i(Q_\infty)) = 1$, то $\lambda(N(Q_\infty)) = 1$.

Теорема доведена. □

Теорема 3. *Якщо стохастичний вектор $(q_0, q_1, \ldots, q_i, \ldots)$ має скінченну ентропію, то для λ-майже всіх $x \in [0,1)$ виконується*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{q_{i_1(x)} q_{i_2(x)} \cdot \ldots \cdot q_{i_n(x)}} = e^{-H}, \tag{4}$$

де $H = -\sum\limits_{i=0}^{\infty} q_i \ln q_i$.

Доведення. Виберемо функцію $f(x) = \ln q_{i_1(x)}$. Тоді

$$\frac{f(x) + f(T(x)) + \ldots + f(T^{n-1}(x))}{n} = \frac{\ln q_{i_1(x)} + \ln q_{i_2(x)} + \ldots + \ln q_{i_n(x)}}{n} =$$
$$= \ln \sqrt[n]{q_{i_1(x)} \cdot q_{i_2(x)} \cdot \ldots \cdot q_{i_n(x)}}.$$

Застосуємо ергодичну теорему Біркгофа і отримаємо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x) + f(T(x)) + \ldots + f(T^{n-1}(x))}{n} = \lim_{n\to\infty} \ln \sqrt[n]{q_{i_1(x)} \cdot q_{i_2(x)} \cdot \ldots \cdot q_{i_n(x)}} =$$
$$= \int_0^1 \ln q_{i_1(x)} dx = \sum_{i=1}^{\infty} \ln q_i \cdot |\Delta_i| = \sum_{i=0}^{\infty} q_i \ln q_i.$$

Якщо $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q_i \ln q_i < \infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q_{i_1(x)} \cdot q_{i_2(x)} \cdot \ldots \cdot q_{i_n(x)}} = e^{-H}$. $\square$

Вибираючи інші функції f та застосовуючи ергодичну теорему можна отримувати нові нормальні властивості дійсних чисел, сформульованих в термінах їх Q_∞−зображення.

2. Про еквівалентність і нееквівалентність означення розмірності Хаусдорфа–Безиковича

Нехай Φ — сімейство підмножин з $[0,1]$ таке, що для довільної множини $E \subset [0,1]$ і будь-якого $\varepsilon > 0$ існує не більш як зчисленне ε-покриття $\{E_j\}$ множини E ($E_j \in \Phi$, $|E_j| \le \varepsilon$). Нехай α — додатне число. α-мірною мірою Хаусдорфа обмеженої множини E відносно сімейства підмножин Φ називається

$$H^\alpha(E, \Phi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\inf_{d(E_j)\le\varepsilon} \left\{ \sum_j |(E_j)|^\alpha \right\} \right] = \lim_{\varepsilon\to 0} m_\varepsilon^\alpha(E, \Phi),$$

де інфімум береться по всеможливим не більш як зчисленним ε-покриттям $\{E_j\}$ множини E, $E_j \in \Phi$.

Взагалі кажучи, $H^\alpha(E, \Phi)$ залежить від сімейства Φ. Сімейство всіх обмежених множин, сімейство всіх відкритих множин і сімейство всіх замкнених множин дають одну і ту саму α-мірну міру Хаусдорфа ([**7**]), яку позначають $H^\alpha(E)$.

Означення 2. Розмірністю Хаусдорфа–Безиковича множини E відносно сімейства підмножин Φ називається таке невід'ємне число, що

$$\dim_H(E,\Phi) = \inf\{\alpha : \quad H^\alpha(E,\Phi) = 0\}. \tag{5}$$

Якщо Φ є сімейством всіх підмножин з $[0,1]$ або є сімейством всіх замкнених (відкритих) підмножин з $[0,1]$, то використовують позначення $\dim_H E$ і говорять про розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини E. Залежність розмірності Хаусдорфа–Безиковича від обраного класу допустимих покриттів досліджувалась багатьма авторами (див. [**4, 3, 16**]), але у всіх цих роботах клас допустимих покриттів породжувався або зображенням дійсних чисел зі скінченним алфавітом, або задовольняв додаткові BVC-умови (bounded Vitali covering), тобто для кожної точки x з одиничного відрізка вимагалось існування послідовності $\{I_j(x)\}$ множин (інтервалів) з Φ таких, що:

$$x \in I_j(x), \forall j \in N; \quad \lim_{j \to \infty} |I_j(x)| = 0; \quad \inf_j \frac{|I_{j+1}(x)|}{|I_j(x)|} > 0.$$

Очевидно, що для системи циліндрів Q_∞-зображення вказані припущення не виконуються.

Надалі під сімейством Φ будемо розуміти сімейство, яке складається з циліндрів всеможливих рангів Q_∞-розбиття інтервалу $[0,1)$, тобто,

$$\Phi = \{E : E = \Delta_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}, \quad n \in N, \ \alpha_i \in N \cup 0, \ i = 1,2,...,n\}. \tag{6}$$

Теорема 4. *Якщо* $q_i = \frac{1}{2^i}$, *то* $\dim_H(E,\Phi) = \dim_H E, \forall E \subset [0,1)$.

Доведення. Розглянемо Q_∞-розбиття відрізка $[0,1)$, породжене матрицею

$$Q_\infty = (\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \ldots \frac{1}{2^n} \ldots).$$

Нехай $E \subset [0,1)$ і $\{E_j\}$ — довільне ε-покриття множини E відрізками E_j ($|E_j| \le \varepsilon$, $E \subset \bigcup_j E_j$).

Нехай $E_j = [a_j, b_j]$ - довільний відрізок розглядуваного покриття, а $\Delta_{n_j}^{k_j}$ — циліндр максимальної довжини і (при рівності довжин) мінімального рангу n_j, який повністю належить до E_j, де k_j — номер циліндра $\Delta_{n_j}^{k_j}$ в циліндрі Δ_{n_j-1} попереднього рангу, що містить $\Delta_{n_j}^{k_j}$. $\Delta_{n_j}^{k_j} \subset \Delta_{n_j-1}$, $\Delta_{n_j}^{k_j} \subset E_j$, $\Delta_{n_j-1} \not\subset E_j$.

Розглянемо можливі варіанти розміщення відрізка $\Delta_{n_j}^{k_j}$ у відрізку E_j.

1) $E_j \subset \Delta_{n_j-1}$.

Оскільки $\Delta_{n_j}^{k_j}$ — найбільший серед циліндричних відрізків, які містяться в E_j, то він буде найлівішим серед всіх циліндрів n_j–го рангу, які повністю містяться в E_j. Тому відрізок $\Delta_{n_j}^{k_j-1}$ містить точку a і має довжину вдвічі більшу за довжину циліндра $\Delta_{n_j}^{k_j}$: $|\Delta_{n_j}^{k_j-1}| = 2|\Delta_{n_j}^{k_j}|$.

Покриємо множину E_j циліндричними відрізками n_j–го рангу, які містяться в Δ_{n_j-1} :

$$\Delta_{n_j}^{k_j-1}, \Delta_{n_j}^{k_j}, \Delta_{n_j}^{k_j+1}, \Delta_{n_j}^{k_j+2}, \ldots, \Delta_{n_j}^{k_j+i}, \ldots.$$

Тоді α–об'єм покриття множини E_j циліндричними відрізками буде

$$\begin{aligned} |\Delta_{n_j}^{k_j-1}|^\alpha &+ |\Delta_{n_j}^{k_j}|^\alpha + |\Delta_{n_j}^{k_j+1}|^\alpha + \ldots + |\Delta_{n_j}^{k_j+i}|^\alpha + \ldots \leq \\ &\leq 2|\Delta_{n_j}^{k_j}|^\alpha + |\Delta_{n_j}^{k_j}|^\alpha + \sum_{i=1}^{\infty} |\Delta_{n_j}^{k_j+i}|^\alpha = \\ &= 3|\Delta_{n_j}^{k_j}|^\alpha + \sum_{i=1}^{\infty} |\Delta_{n_j}^{k_j}|^\alpha \left(\frac{1}{2^i}\right)^\alpha = \\ &= 3|\Delta_{n_j}^{k_j}|^\alpha + |\Delta_{n_j}^{k_j}|^\alpha \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^\alpha}\right)^i. \end{aligned}$$

При будь-якому $\alpha > 0$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^\alpha}\right)^i = \frac{1}{2^\alpha - 1} = f(\alpha) < \infty$.

Отже,

$$\begin{aligned} |\Delta_{n_j}^{k_j-1}|^\alpha &+ |\Delta_{n_j}^{k_j}|^\alpha + |\Delta_{n_j}^{k_j+1}|^\alpha + \ldots + |\Delta_{n_j}^{k_j+i}|^\alpha + \ldots \leq \\ &\leq |\Delta_{n_j}^{k_j}|^\alpha (3 + f(\alpha)), \end{aligned}$$

Тому

$$\begin{aligned} |E_j|^\alpha &\geq |\Delta_{n_j}^{k_j}|^\alpha = \frac{1}{3+f(\alpha)}(3+f(\alpha))|\Delta_{n_j}^{k_j}|^\alpha \geq \\ &\geq \frac{1}{3+f(\alpha)} \sum_{i=0}^{\infty} |\Delta_{n_j}^{k_j-1+i}|^\alpha. \end{aligned}$$

Отримали нерівність

$$\frac{1}{3+f(\alpha)} \sum_{i=0}^{\infty} |\Delta_{n_j}^{k_j-1+i}|^\alpha \leq |E_j|^\alpha, \tag{7}$$

де $\bigcup\limits_{i=0}^{\infty} \Delta_{n_j}^{k_j-1+i} \supset E_j$, $|\Delta_{n_j}^{k_j-1+i}| \leq 2\varepsilon$, $\forall i$.

2)$b_j \in \Delta_{n_j-1}$, $a_j \notin \Delta_{n_j-1}$

Циліндр $\Delta_{n_j}^{k_j}$ буде найбільшим і найлівішим серед всіх циліндричних відрізків з Δ_{n_j-1}, тому $k_j = 0$ і $2|\Delta_{n_j}^{k_j}| = |\Delta_{n_j-1}|$.

Нехай $\Delta_{n_j-1,\, L}$ — циліндр (n_j-1)-го рангу, який суміжний до Δ_{n_j-1} і знаходиться зліва від нього. Тоді $|\Delta_{n_j-1,\, L}| = 4|\Delta_{n_j}^{k_j}|$. Очевидно, що $a \in \Delta_{n_j-1,\, L}$ (оскільки, якщо б $a \notin \Delta_{n_j-1,\, L}$, то $\Delta_{n_j-1,\, L} \subset E_j$ і $|\Delta_{n_j-1,\, L}| > |\Delta_{n_j}^{k_j}|$).

Відрізок E_j можемо покрити циліндрами

$$\Delta_{n_j-1,\, L}, \Delta_{n_j}^{k_j}, \Delta_{n_j}^{k_j+1}, \ldots, \Delta_{n_j}^{k_j+i}, \ldots.$$

$$\begin{aligned}|\Delta_{n_j-1,\,L}|^\alpha &+ |\Delta_{n_j}^{k_j}|^\alpha+|\Delta_{n_j}^{k_j+1}|^\alpha+\ldots+|\Delta_{n_j}^{k_j+i}|^\alpha+\ldots\le\\ &\le 4|\Delta_{n_j}^{k_j}|^\alpha+|\Delta_{n_j}^{k_j}|^\alpha+|\Delta_{n_j}^{k_j}|^\alpha\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^\alpha}\right)^i=|\Delta_{n_j}^{k_j}|^\alpha(5+f(\alpha)).\end{aligned}$$

Тому

$$\frac{1}{5+f(\alpha)}\left(|\Delta_{n_j-1,\,L}|^\alpha+\sum_{i=0}^{\infty}|\Delta_{n_j}^{k_j+i}|^\alpha\right)<|E_j|^\alpha, \tag{8}$$

де $|\Delta_{n_j-1,\,L}|\le 4\varepsilon$, $|\Delta_{n_j}^{k_j+i}|\le\varepsilon$.

3) $a_j\in\Delta_{n_j-1}$, $b_j\notin\Delta_{n_j-1}$

Нехай $\Delta_{n_j-1,\,R}$ — циліндр (n_j-1)–го рангу, який суміжний з Δ_{n_j-1} і знаходиться справа від нього. $|\Delta_{n_j-1,\,R}|=\frac{1}{2}|\Delta_{n_j-1}|$. Довжина циліндра $\Delta_{n_j-1,\,R}$ дорівнює довжині найбільшого циліндра n_j–го рангу, який міститься в Δ_{n_j-1}. Цей циліндр не міститься в E_j, оскільки б тоді весь циліндр Δ_{n_j-1} містився в E_j. Зрозуміло, що $b_j\in\Delta_{n_j-1,\,R}$ (якщо б $b_j\notin\Delta_{n_j-1,\,R}$, то $\Delta_{n_j-1,\,R}\subset E_j$ і $|\Delta_{n_j-1,\,R}|\ge|\Delta_{n_j}^{k_j}|$.)

Нехай $\Delta_{n_j-1,\,R}=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}\Delta_{n_j,\,R}^{i}$.

Можливі наступні ситуації:

а) $b_j\notin\Delta_{n_j,\,R}^{0}$

В такому випадку точка b_j лежить в якомусь з правіших циліндрів з $\Delta_{n_j-1,\,R}$ і $\Delta_{n_j,\,R}^{0}\subset E_j$, $|\Delta_{n_j,\,R}^{0}|\le|\Delta_{n_j}^{k_j}|$. Отже, відрізок E_j можемо покрити циліндрами

$$\Delta_{n_j}^{k_j-1},\Delta_{n_j}^{k_j},\Delta_{n_j}^{k_j+1},\ldots,\Delta_{n_j}^{k_j+i},\ldots,\Delta_{n_j,\,R}^{0},\Delta_{n_j,\,R}^{1},\ldots.$$

Відповідно

$$\begin{aligned}|\Delta_{n_j}^{k_j-1}|^\alpha &+ |\Delta_{n_j}^{k_j}|^\alpha+|\Delta_{n_j}^{k_j+1}|^\alpha+\ldots+|\Delta_{n_j}^{k_j+i}|^\alpha+\ldots+|\Delta_{n_j,\,R}^{0}|^\alpha+|\Delta_{n_j,\,R}^{1}|^\alpha+\ldots\le\\ &\le 2|\Delta_{n_j}^{k_j}|^\alpha+|\Delta_{n_j}^{k_j}|^\alpha+\sum_{i=1}^{\infty}|\Delta_{n_j}^{k_j+1}|^\alpha+|\Delta_{n_j}^{k_j}|^\alpha+\sum_{i=1}^{\infty}|\Delta_{n_j}^{k_j+1}|^\alpha=\\ &= 4|\Delta_{n_j}^{k_j}|^\alpha+2f(\alpha)|\Delta_{n_j}^{k_j}|^\alpha=(4+2f(\alpha))|\Delta_{n_j}^{k_j}|^\alpha.\end{aligned}$$

Тому

$$\frac{1}{4+2f(\alpha)}\left(\sum_{i=0}^{\infty}|\Delta_{n_j}^{k_j-1+i}|^\alpha+\sum_{i=0}^{\infty}|\Delta_{n_j,\,R}^{i}|^\alpha\right)<|E_j|^\alpha, \tag{9}$$

де $|\Delta_{n_j}^{k_j-1+i}|\le 2\varepsilon$, $|\Delta_{n_j,\,R}^{i}|\le\varepsilon$.

б)$b_j\in\Delta_{n_j,\,R}^{0}$ і $|\Delta_{n_j,\,R}^{0}|\le|\Delta_{n_j}^{k_j}|$

Відрізок E_j можемо покрити циліндрами

$$\Delta_{n_j}^{k_j-1},\Delta_{n_j}^{k_j},\Delta_{n_j}^{k_j+1},\ldots,\Delta_{n_j}^{k_j+i},\ldots,\Delta_{n_j,\,R}^{0}.$$

Відповідно

$$|\Delta^{k_j-1}_{n_j}|^\alpha + |\Delta^{k_j}_{n_j}|^\alpha + |\Delta^{k_j+1}_{n_j}|^\alpha + \ldots + |\Delta^{k_j+i}_{n_j}|^\alpha + \ldots |\Delta^{0}_{n_j,\,R}|^\alpha \leq$$
$$2|\Delta^{k_j}_{n_j}|^\alpha + |\Delta^{k_j}_{n_j}|^\alpha + \sum_{i=1}^{\infty}|\Delta^{k_j+i}_{n_j}|^\alpha + |\Delta^{k_j}_{n_j}|^\alpha = 4|\Delta^{k_j}_{n_j}|^\alpha + |\Delta^{k_j}_{n_j}|^\alpha f(\alpha) =$$
$$= (4+f(\alpha))|\Delta^{k_j}_{n_j}|^\alpha.$$

Отже,

$$\frac{1}{4+f(\alpha)}\left(\sum_{i=0}^{\infty}|\Delta^{k_j-1+j}_{n_j}|^\alpha + |\Delta^{0}_{n_j,\,R}|^\alpha\right) < |E_j|^\alpha. \tag{10}$$

де всі вказані циліндри не перевищують 2ε.

в) $b \in \Delta^0_{n_j,\,R}$ і $|\Delta^0_{n_j,\,R}| > |\Delta^{k_j}_{n_j}|$

Поділимо відрізок $\Delta^0_{n_j,\,R}$ навпіл і візьмемо ліву половину. Це буде циліндричний відрізок (n_j+1)–го рангу. Позначимо його як $\Delta^0_{n_j+1,\,R}$. Поділимо отриманий відрізок знову навпіл і візьмемо праву частину, яку позначимо $\Delta^0_{n_j+2,\,R}$.

Повторюючи процедуру k_j-1 разів отримаємо циліндричний відрізок $\Delta^0_{n_j+k_j-1}$ довжина якого буде рівна довжині $\Delta^{k_j}_{n_j}$.

Якщо $b_j \notin \Delta^0_{n_j+k_j-1}$, то $\Delta^0_{n_j+k_j-1} \subset E_j$ і отримаємо випадок аналогічний до випадку а і отримаємо нерівність

$$\frac{1}{4+2f(\alpha)}\left(\sum_{i=0}^{\infty}|\Delta^{k_j-1+i}_{n_j}|^\alpha + \sum_{i=0}^{\infty}|\Delta^{i}_{n_j+k_j-1,\,R}|^\alpha\right) < |E_j|^\alpha, \tag{11}$$

де всі вказані циліндри не довші за 2ε.

Якщо $b_j \in \Delta^0_{n_j+k_j-1,\,R}$, то отримаємо випадок аналогічний до випадку б і має місце нерівність

$$\frac{1}{4+f(\alpha)}\left(\sum_{i=0}^{\infty}|\Delta^{k_j-1+i}_{n_j}|^\alpha + |\Delta^{0}_{n_j+k_j-1,\,R}|^\alpha\right) < |E_j|^\alpha, \tag{12}$$

де всі вказані циліндри не перевищують 2ε. Отже, для $\forall\varepsilon > 0$, $\forall E_j$, $\forall\alpha > 0$ існує скінчений чи зчисленний набір циліндрів, діаметри яких не перевищують 4ε і об'єднання яких містить E_j. В кожному з можливих випадків занумеруємо вказані циліндри і позначимо через $\Delta(j,i)$.

З нерівностей (7), (8), (9), (10), (11), (12) слідує, що

$$\sum_i |\Delta(j,i)|^\alpha \leq (5+2f(\alpha))|E_j|^\alpha$$

і

$$\bigcup_i \Delta(j,i) \supset E_j.$$

Тому

$$\sum_j \sum_i |\Delta(j,i)|^\alpha \leq (5+2f(\alpha)) \sum_j |E_j|^\alpha.$$

Отже,

$$H^\alpha_{4\varepsilon}(E,\Phi) \leq (5+2f(\alpha)) \sum_j |E_j|^\alpha, \quad \forall \{E_j\}, |E_j| \leq \varepsilon.$$

Тоді

$$\begin{aligned} H^\alpha_{4\varepsilon}(E,\Phi) &\leq (5+2f(\alpha))H^\alpha_\varepsilon(E), \\ H^\alpha(E,\Phi) &\leq (5+2f(\alpha))H^\alpha. \end{aligned}$$

За властивостями α–мір Хаусдорфа $H^\alpha(E) \leq H^\alpha(E,\Phi)$. Тому

$$H^\alpha(E) \leq H^\alpha(E,\Phi) \leq (5+2f(\alpha))H^\alpha(E)$$

і $H^\alpha(E)$ і $H^\alpha(E,\Phi)$ одночасно прямують до нуля та нескінченності. Тому $\dim_H(E,\Phi) = \dim_H E$, тобто, для обчислення розмірності Хаусдорфа-Безиковича довільної підмножини одиничного відрізка можна обмежитись аналізом покриттів даної множини циліндричними відрізками Q_∞–розбиття з матрицею $Q_\infty = (\frac{1}{2}\, \frac{1}{4}\, \frac{1}{8}\, \ldots\, \frac{1}{2^i}\, \ldots)$. □

3. Ймовірнісні міри з незалежними Q_∞-символами та їх лебегівська і спектральна структура

Нехай $\{\xi_k\}$ — послідовність незалежних випадкових величин з наступними розподілами:

$$P(\xi_k = i) := p_{ik} \geq 0, \quad \text{де} \quad \sum_{i=0}^{\infty} p_{ik} = 1, \quad \forall k \in \mathbf{N}.$$

Використовуючи послідовність $\{\xi_k\}$ та Q_∞-представлення, розглянемо наступну випадкову величину:

$$\xi := \Delta_{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_k \ldots}\ , \tag{13}$$

яку називають випадковою величиною з незалежними Q_∞-символами (цифрами).

Розподіл ξ повністю визначається двома матрицями: Q_∞ та $P = ||p_{ik}||$. Позначимо через μ_ξ відповідну ймовірнісну міру, яку будемо називати ймовірнісною мірою з незалежними Q_∞–символами. Властивості мір μ_ξ вивчались в роботах [**7, 12, 14, 1**].

Очевидно, що ймовірнісна міра μ_ξ співпадає з образ-мірою μ_*, яка була описана в Розділі 2. Тому наступне твердження є прямим наслідком теореми 1

Твердження 1. *Якщо ξ_k незалежні і однаково розподілені випадкові величини, то μ_ξ є інваріантною і ергодичною відносно перетворення одностороннього зсуву T.*

Оскільки [**4**] будь-які дві ергодичні і інваріантні міри або співпадають або взаємно ортогональні, то отримаємо

Теорема 5. *Нехай μ_{ξ^*} і $\mu_{\xi^{**}}$ — міри з незалежними однаково розподіленими Q_∞–символами. Тоді ці міри або співпадають, або є взаємно ортогональними.*

Якщо $p_i = q_i, \forall i \in N$, то міра μ_ξ співпадає з мірою Лебега.

Якщо $p_i \neq q_i$ хоча б для одного $i \in N$, то міра μ_ξ є сингулярною відносно міри Лебега.

Зауваження 1. *Інше (значно громіздкіше) доведення цього факту можна знайти в роботах* [**14, 7**].

Наступна теорема повністю описує лебегівську структуру розподілу випадкової величини ξ для випадку, коли символи Q_∞−зображення є незалежними і, взагалі кажучи, різнорозподіленими випадковими величинами.

Теорема 6. *Випадкова величина ξ має розподіл чистого типу, причому*

1) μ_ξ є чисто абсолютно неперервною тоді і тільки тоді, коли

$$\rho := \prod_{k=1}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{p_{ik} \cdot q_i} \right\} > 0; \tag{14}$$

2) μ_ξ є чисто дискретною тоді і тільки тоді, коли

$$P_{max} := \prod_{k=1}^{\infty} \max_i \{p_{ik}\} > 0; \tag{15}$$

3) μ_ξ є чисто сингулярно неперервною у всіх інших випадках, тобто тоді і тільки тоді, коли

$$\rho = 0 = P_{max}. \tag{16}$$

Доведення. Міри μ^* і ϑ^* були означенні в (3). Зрозуміло, що $\mu^* \equiv \mu_\xi$. Відображення φ є бівимірним (тобто, φ і φ^{-1} є вимірними) і бієктивним. Тому за теоремою 1 з [**8**] міра μ_ξ є абсолютно неперервною (сингулярною) відносно міри Лебега тоді і лише тоді, коли μ є абсолютно неперервною (сингулярною) відносно міри ϑ. Оскільки $q_i > 0$, то $\mu_k \ll \vartheta_k$, $\forall k \in N$. Застосовуючи теорему Какутані [**?**] та беручи до уваги факт бівимірності та бієктивності відображення φ, отримуємо

$$\mu_\xi \ll \lambda \;\Leftrightarrow\; \prod_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega_k} \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\vartheta_k}} d\vartheta_k > 0 \;\Leftrightarrow\; \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{p_{ik} q_i} \right) > 0, \tag{17}$$

$$\mu_\xi \perp \lambda \;\Leftrightarrow\; \prod_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega_k} \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\vartheta_k}} d\vartheta_k = 0 \;\Leftrightarrow\; \prod_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sqrt{p_{ik} q_i} \right) = 0. \tag{18}$$

Звичайно, сингулярно розподілена відносно міри Лебега випадкова величина ξ може бути розподілена дискретно. Для довільної точки $x \in [0, 1)$ множина $\varphi^{-1}(x)$ складається з єдиної точки з Ω. Отже, міра μ_ξ є дискретною тоді і тільки тоді, коли міра μ є дискретною.

Якщо $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_i p_{ik} = 0$, то

$$\mu(\omega) = \prod_{k=1}^{\infty} p_{\omega_k k} \leq \prod_{k=1}^{\infty} \max_i p_{ik} = 0, \ \forall \omega \in \Omega,$$

і μ є неперервною.

Якщо $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \max\limits_i p_{ik} > 0$, то розглянемо множину $A_+ = \{\omega : \mu(\omega) > 0\}$. Множина A_+ складається з точок $\omega^* = (\omega_1^*, \omega_2^*, \ ..., \ \omega_k^*, \ ...)$ таких, що $p_{\omega_k^* k} = \max\limits_i p_{ik}$. Легко бачити, що для всіх точок $\omega \in A_+$ умова $p_{\omega_k k} \neq \max\limits_i p_{ik}$ виконується лише для скінченної кількості значень k. Отже, A_+ є зчисленною і подія "$\omega \in A_+$" не залежить від довільної скінченної кількості координат точки ω. Тому, застосувавши закон 0 та 1 А.М. Колмогорова, отримуємо висновок, що $\mu(A_+) = 0$ або $\mu(A_+) = 1$. Оскільки $\mu(A_+) \geq \mu(\omega^*) > 0$, то $\mu(A_+) = 1$, що й доводить дискретність міри μ. □

Зауваження 2. *Інший підхід до знаходження критеріїв абсолютної неперервності та сингулярності міри μ_ξ можна знайти в* [**7**].

Наслідок 2. *Якщо ξ_k—незалежні і однаково розподілені, то*
1) μ_ξ дискретна, тоді і тільки тоді коли існує таке i_0, що $p_{i_0} = 1$;
2) μ_ξ абсолютно неперервна, тоді і тільки тоді коли $p_i = q_i$ для довільного $i \in N$;
3) μ_ξ сингулярно неперервна у всіх інших випадках.

У випадку сингулярності дослідимо спектральну структуру розподілу випадкової величини з незалежними $Q_\infty-$ символами.

Означення 3. Сингулярно неперервна ймовірнісна міра μ називається мірою чистого GS-типу, якщо існує послідовність (неперекривних) відрізків $\{[a_i, b_i]\}$ таких, що

$$\begin{cases} [a_i, b_i] \subset S_\mu, \\ \mu\left(\bigcup\limits_i [a_i, b_i]\right) = 1. \end{cases}$$

Означення 4. Сингулярно неперервна ймовірнісна міра μ на R^1 називається мірою чистого GC-типу (узагальненого канторівського типу), якщо існує ніде не щільна множина E така, що

$$\begin{cases} E \subset S_\mu, \\ \mu(E) = 1, \\ \forall x \in E \ \exists \varepsilon(x) > 0 : \ [x - \varepsilon(x), x + \varepsilon(x)] \cap S_\mu \text{ — множина нульової міри Лебега.} \end{cases}$$

Означення 5. Сингулярно неперервна ймовірнісна міра μ називається мірою чистого GP-типу, якщо існує ніде не щільна множина E така, що

$$\begin{cases} E \subset S_\mu, \\ \mu(E) = 1, \\ \forall x \in E \ \ \forall \varepsilon > 0 : \quad [x-\varepsilon, x+\varepsilon] \cap S_\mu \text{ — множина додатної міри Лебега.} \end{cases}$$

Сингулярно неперервні міри GC-, GP- та GS- типів утворюють неперетинні сімейства. Об'єднання цих сімейств не співпадає з сімейством всіх сингулярно неперервних ймовірнісних мір на R^1, оскільки існують сингулярно неперервні ймовірнісні міри на R^1, які не належать до жодного з вищеназваних класів, але має місце наступна теорема.

Теорема 7. *(*[**13**]*) Довільна сингулярно неперервна ймовірнісна міра μ на R^1 може бути представлена у вигляді*

$$\mu = \alpha_1 \mu^{GS} + \alpha_2 \mu^{GC} + \alpha_3 \mu^{GP}, \tag{19}$$

де $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_3 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$; μ^{GS}, μ^{GC} і μ^{GP} — сингулярно неперервні ймовірнісні міри GS, GC та GP-типу відповідно.

З метою дослідження тополого-метричних властивостей розподілу випадкової величини з незалежними $Q_\infty-$ символами вивчимо властивості одного класу множин. Нехай $\mathbf{V} := \{\mathbf{V}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\mathbf{V}_k \subseteq \{0, 1, 2, \ldots\}$. Означимо

$$C[Q_\infty, \{V_k\}] = \{x \in [0,1] : \quad x = \Delta_{i_1 i_2 \ldots i_k \ldots}, \ i_k \in \mathbf{V}_k\}, \tag{20}$$

тобто, $C[Q_\infty, \{V_k\}$ складається з точок, які можуть бути $Q_\infty-$представленими з використанням лише символів i_k з множини $\mathbf{V}_k$ на k-й позиції їх $Q_\infty-$представлення.

Якщо $\mathbf{V}_k \neq \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ для щонайменше одного $k < k_0$, і $\mathbf{V}_k = \{0, 1, 2, \ldots\}$ для всіх $k \geq k_0$ (при деякому $k_0 > 1$), то $C[Q_\infty, \{V_k\}$ є об'єднанням відрізків. У цьому випадку множина $C[Q_\infty, \{V_k\}$ отримується шляхом вилучення з $[0, 1)$ всіх інтервалів $\dot{\Delta}_{i_1 \ldots i_k}$, $k < k_0$ з $i_k \notin \mathbf{V}_k$ (де точка над Δ означає, що $\dot{\Delta}_{i_1 \ldots i_k}$, є відкритим). Якщо умова $\mathbf{V}_k \neq \{0, 1, 2, \ldots\}$ виконується для нескінченної кількості значень k, то, очевидно, $C[Q_\infty, \{V_k\}$ є ніде не щільною множиною.

Вивчимо метричні властивості множини $C[Q_\infty, \{V_k\}]$. Нехай $S_k(\mathbf{V})$ означає суму всіх елементів q_i таких, що $i_k \in \mathbf{V}_k$, тобто, $S_k(\mathbf{V}) := \sum\limits_{i \in \mathbf{V}_k} q_i$. Зауважимо, що $0 < S_k(\mathbf{V}) \leq 1$.

Лема 1. *Міра Лебега множини $C[Q_\infty, \{V_k\}$ дорівнює*

$$\lambda(C[Q_\infty, \{V_k\}]) = \prod_{k=1}^{\infty} S_k(\mathbf{V}). \tag{21}$$

Доведення. Нехай $C_n := \bigcup_{i_k \in \mathbf{V}_k} \Delta_{i_1 \ldots i_n}$. Легко бачити, що $C_n \subseteq C_{n-1}$ і $C[Q_\infty, \{V_k\}] = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$. З означення множин C_n і з (1) випливає, що $\lambda(C_n) = \prod_{k=1}^{n} S_k(\mathbf{V})$, і, отже, $\lambda(C[Q_\infty, \{V_k\}]) = \lim_{n \longrightarrow \infty} \lambda(C_n) = \prod_{k=1}^{\infty} S_k(\mathbf{V})$. □

Наслідок 3. *Нехай $W_k(\mathbf{V}) = 1 - S_k(\mathbf{V}) \geq 0$. Множина $C[Q_\infty, \{V_k\}]$ має нульову міру Лебега тоді і тільки тоді, коли*

$$\sum_{k=1}^{\infty} W_k(\mathbf{V}) = \infty\ . \tag{22}$$

Наступна теорема встановлює необхідні та достатні умови належності μ_ξ до кожного з чистих тополого-метричних (GS-, GC-, GP-) типів.

Теорема 8. *Сингулярно неперервно розподілена випадкова величина з незалежними $Q_\infty-$ символами має чистий тополого-метричний тип, причому*

1) μ_ξ має чистий GS-тип тоді і тільки тоді, коли матриця P містить лише скінченну кількість стовпчиків, що містять нульові елементи.

2) μ_ξ має чистий GC-тип тоді і тільки тоді, коли матриця P містить нескінченну кількість стовпчиків, що містять нульові елементи, і

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{i: p_{ik}=0} q_i\Big) = \infty\ . \tag{23}$$

3) μ_ξ має чистий GP–тип тоді і тільки тоді, коли матриця P містить нескінченну кількість стовпчиків, що містять нульові елементи і

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\sum_{i: p_{ik}=0} q_i\Big) < \infty. \tag{24}$$

Доведення. Розглянемо множину $C[Q_\infty, \{V_k\}]$, де послідовність $\mathbf{V} = \{\mathbf{V}_k\}_{k=1}^{\infty}$ визначається матрицею P наступним чином: $\mathbf{V}_k = \{i :\ p_{ik} \neq 0\}$. Спектр міри μ_ξ співпадає з замиканням множини $C[Q_\infty, \{V_k\}]$ (у цьому випадку різниця $(C[Q_\infty, \{V_k\}])^{cl} \setminus C[Q_\infty, \{V_k\}]$ є не більш як зчисленною). Тому для встановлення тополого-метричної структури множини S_ξ можемо застосувати вищенаведені результати.

Отже, якщо матриця P містить лише скінченну кількість стовпчиків, що містять нульові елементи, то $\mathbf{V}_k = \{0, 1, 2 \ldots\},\ k > k_0$ для деякого $k_0 > 0$. У цьому випадку $C[Q_\infty, \{V_k\}]$ є об'єднанням не більш як зчисленної кількості відрізків. Тому міра μ_ξ має GS-тип.

У протилежному випадку матриця P містить нескінченну кількість стовпчиків, що містять нульові елементи, і, отже, $C[Q_\infty, \{V_k\}]$ є ніде не щільною множиною. За попередньою лемою міра Лебега множини $C[Q_\infty, \{V_k\}]$ дорівнює

$$\lambda(C[Q_\infty, \{V_k\}]) = \prod_{k=1}^{\infty} S_k(\mathbf{V}) = \prod_{k=1}^{\infty} (\sum_{i \in \mathbf{V}_k} q_i) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \sum_{i: p_{ik}=0} q_i).$$

Отже, або $\lambda(C[Q_\infty, \{V_k\}]) = 0$ (при умові, що виконується умова (23)), або $\lambda(C[Q_\infty, \{V_k\}]) > 0$, (при умові, що виконується умова (24)). Тому у цьому випадку μ_ξ є або чистого GC-типу, або чистого GP-типу.

Оскільки умови 1), 2) і 3) теореми є взаємно виключаючими і одна з них завжди виконується, то розподіл випадкової величини ξ з незалежними Q_∞-символами завжди має чистий тополого-метричний тип. □

Зауваження 3. *Використовуючи останню теорему і теорему 6, легко конструювати сингулярно неперервні ймовірнісні міри довільного тополого-метричного типу.*

Приклад 1. Нехай μ — ймовірнісна міра з незалежними однаково розподіленими Q_∞–символами, яка визначається матрицею

$$Q_\infty = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots \right)$$

і матрицею P, k-тий стовпчик P_k якої визначається рівністю

$$P_k^T = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{9}, \frac{2}{27}, \dots \right).$$

Міра μ буде сингулярно неперервною за наслідком з теореми 6. Спектр міри співпадає з інтервалом $[0, 1)$. Ця міра має GS–тип.

Приклад 2. Нехай μ — ймовірнісна міра з незалежними однаково розподіленими Q_∞–символами, яка задається матрицею

$$Q_\infty = (q_0, q_1, q_2, q_3, \dots)$$

і матрицею P, k-тий стовпчик P_k якої визначається рівністю

$$P_k^T = (p_0, 0, p_2, p_3, \dots),$$

де P_k^T містить принаймні два ненульових елементи. Тоді міра μ буде сингулярно неперервною за наслідком теореми 6. Множина E буде складатись з таких $x \in [0, 1)$, в Q_∞–представленні яких відсутня цифра 1, тобто,

$$E = \left\{ x : \ x = \Delta_{i_1(x) i_2(x) \dots}, i_k(x) \neq 1, \forall k \in N \right\}.$$

Ця множина є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега і співпадає з спектром S_μ. Міра μ має GC–тип.

Приклад 3. Нехай μ— ймовірнісна міра з незалежними Q_∞–символами, яка визначається матрицею

$$Q_\infty = \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3^2}, \ldots, \frac{2}{3^{k-1}}, \frac{2}{3^k}, \frac{2}{3^{k+1}} \ldots\right)$$

матрицею P, k-тий стовпчик P_k якої визначається рівністю

$$P_k^T = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \ldots, \frac{1}{2^{k-1}}, 0, \frac{1}{2^k}, \ldots\right).$$

Міра μ буде сингулярно неперервною мірою за (16). Ця міра має GP–типу.

Зауваження 4. *Якщо μ — ймовірнісна міра з незалежними однаково розподіленими Q_∞–символами, то μ не може бути мірою $GP-$типу.*

Зауваження 5. *З виконання умови 24 ще не випливає, що відповідна ймовірнісна міра буде сингулярно неперервною мірою $GP-$типу. Потрібно додатково пересвідчитись в сингулярності розподілу.*

Приклад 4. Нехай μ — ймовірнісна міра з незалежними Q_∞–символами, яка визначається матрицею

$$Q_\infty = (q_0, q_1, q_2, \ldots)$$

і матрицею P, k-тий стовпчик P_k якої визначається рівністю

$$P_k^T = (p_{0k}, p_{1k}, p_{2k}, \ldots), k \in N,$$

де

$$p_{ik} = \begin{cases} 0, & \text{якщо } i = k-1, \\ \frac{q_i}{1-q_{k-1}}, & \text{якщо } i \neq k-1. \end{cases}$$

У цьому разі умова (24) виконується, але міра μ буде абсолютно неперервною мірою, спектр якої є ніде не щільною множиною додатної міри Лебега.

4. Розмірність Хаусдорфа міри з незалежними однаково розподіленими Q_∞-символами

Основною метою даного розділу є вивчення тонких фрактальних властивостей ймовірнісних мір з незалежними однаково розподіленими Q_∞-символами. З цією метою нагадаємо необхідні означення (див. [**17**]).

Означення 6. *Хаусдорфовою розмірністю міри μ* називається число

$$\dim_H \mu = \inf_{A \in \mathcal{A}_\mu} \{\dim_H(A)\},$$

де $\mathcal{A}_\mu = \{A : A \in \mathcal{B},\ \mu(A) = 1\}$ — множина всеможливих борелівських носіїв міри μ.

Означення 7. *Локальною розмірністю міри μ в точці x_0* називається число

$$\dim_H(\mu, x_0) = \lim_{\varepsilon\to 0}\Big[\inf_{A\in\mathcal{A}_\mu}\big\{\dim_H(A\cap(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon))\big\}\Big].$$

Означення 8. Міра μ називається *мірою внутрішньо точної розмірності α*, якщо

$$\dim_H(\mu, x) = \underline{\lim}_{\delta\to 0}\frac{\ln\mu(x-\delta, x+\delta)}{\ln\delta} = \alpha$$

виконується для μ-майже всіх $x\in\mathbb{R}$.

Нехай ν — неперервна ймовірнісна міра на борелівських підмножинах з $[0,1]$. Нагадаємо, що $\nu-\alpha$-мірою Хаусдорфа-Біллінгслі множини M відносно сімейства покриттів Φ називається число

$$L_\nu(M,\alpha,\Phi) = \lim_{\varepsilon\to 0}\left\{\inf_{\nu(E_j)\le\varepsilon}\sum_j \nu^\alpha(E_j)\right\} = \lim_{\varepsilon\to 0} L_\nu(M,\alpha,\varepsilon,\Phi),$$

де $E_j\in\Phi$, $\bigcup\limits_j E_j\supset M$.

Означення 9. Число $\alpha_\nu(M,\Phi) = \sup\{\alpha:\quad L_\nu(M,\alpha,\Phi)=\infty\}$ називається ν-розмірністю Хаусдорфа-Біллінгслі множини M відносно сімейства Φ (або розмірністю Хаусдорфа-Безиковича множини M відносно даної міри ν і даного сімейства покриттів Φ).

Якщо ν — міра Лебега на $[0,1]$, то $\alpha_\nu(M,\Phi) = \dim_H(M,\Phi)$.

Нехай ν і μ — дві неперервні ймовірнісні міри на борелівській σ-алгебрі $\mathcal{B}$, $\Delta_n(x) = \Delta^{Q_\infty}_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}$ — відрізок n-го рангу Q_∞-представлення точки x.

Теорема 9. *Нехай*

$$B = \left\{x:\quad \underline{\lim}_{n\to\infty}\frac{\ln\nu(\Delta_n(x))}{\ln\mu(\Delta_n(x))}\le\delta\right\},$$

$\mathcal{A}$ — сімейство рангових відрізків Q_∞-розбиття. Тоді для довільного $\delta\ge 0$ має місце нерівність:

$$\alpha_\mu(B,\mathcal{A})\le\delta.$$

Доведення. Позначимо

$$A = \big\{x:\quad \forall\varepsilon>0 \text{ умова } \nu(\Delta_n(x))\ge\mu(\Delta_n(x))^{\delta+\varepsilon}$$
$$\text{виконується для нескінченної кількості індексів } n\big\}.$$

Очевидно, що $B\subset A$. Крім того, якщо $\forall x\in[0,1)$ і $\forall n\in N$, $\mu(\Delta_n(x))>0$, то $B\equiv A$. Доведемо, що $\alpha_\mu(A,\mathcal{A})\le\delta$.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$ і $\rho > 0$. Нехай U_A — множина всеможливих рангових відрізків, які мають властивості:

$$\begin{cases} \mu(\Delta_n(x)) < \rho; \\ \nu(\Delta_n(x)) \geq \mu(\Delta_n(x))^{\delta+\varepsilon}; \\ x \in A. \end{cases}$$

Тоді сімейство U_A покриває множину A (для кожної точки $x \in A$ існує безліч індексів n, для яких виконується перші дві нерівності системи).

Нехай V_A містить всі ті елементи з U_A, які не є підмножинами інших елементів з U_A. Очевидно, що сімейство V_A покриває множину A і циліндричні множини, які входять до V_A, не мають спільних внутрішніх точок.

Тоді

$$1 \geq \sum_{\Delta \in V_A} \nu(\Delta) \geq \sum_{\Delta \in V_A} [\mu(\Delta)]^{\delta+\varepsilon} \geq L_\mu(A, \delta+\varepsilon, \rho) = \inf_{\mu(E_i) \leq \rho} \sum_i [\mu(E_i)]^{\delta+\varepsilon}.$$

Оскільки $\rho > 0$ вибиралось довільним, то

$$\lim_{\rho \to 0} L_\mu(A, \delta+\varepsilon, \rho) = L_\mu(A, \delta+\varepsilon) \leq 1.$$

Отже, $\forall \varepsilon > 0$ $L_\mu(A, \delta+\varepsilon) \leq 1$. Тому розмірність Хаусдорфа-Безиковича множини A відносно міри μ задовольняє умову:

$$\alpha_\mu(A, \mathcal{A}) \leq \delta + \varepsilon.$$

Оскільки $\varepsilon > 0$ вибиралось довільним, то $\alpha_\mu(A, \mathcal{A}) \leq \delta$. Оскільки $B \subset A$, то $\alpha_\mu(B, \mathcal{A}) \leq \alpha_\mu(A, \mathcal{A}) \leq \delta$. Теорему доведено. □

Нехай $\Delta_n(x)$ — циліндричний відрізок n-го рангу Q_∞-розбиття, який містить точку x і $\delta \geq 0$, ν і μ — неатомарні міри на борелівських підмножинах відрізка $[0, 1)$.

Наступна теорема є узагальненням теореми 2.2 з [?], але доводиться цілком аналогічно.

Теорема 10. *Якщо*

$$M \subset \left\{ x : \quad \varliminf_{n \to \infty} \frac{\ln \nu(\Delta_n(x))}{\ln \mu(\Delta_n(x))} \geq \delta \right\}, \tag{25}$$

то

$$\alpha_\mu(M, \mathcal{A}) \geq \delta \cdot \alpha_\nu(M, \mathcal{A}). \tag{26}$$

Нехай

$$\xi = \Delta_{\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_{\ldots}}$$

— випадкова величина з незалежними однаково розподіленими Q_∞–знаками ξ_1, ξ_2, $\ldots$, ξ_k, $\ldots$, які набувають значень $0, 1, 2, \ldots$ з ймовірностями $p_0, p_1, p_2, \ldots$.Наступна теорема присвячена обчисленню розмірності Хаусдорфа ймовірнісної міри μ_ξ, що відповідає випадковій величині ξ з незалежними Q_∞-знаками.

Лема 2 (Нерівність Гіббса). *Нехай* $Q_\infty = (q_0, q_1, \ldots, q_n, \ldots)$ — *стохастичний вектор з додатними координатами. Тоді для довільного стохастичного вектора* $P_\infty = (p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots)$ *має місце нерівність*

$$-\sum_{i=0}^{\infty} p_i \ln p_i \le -\sum_{i=0}^{\infty} p_i \ln q_i, \tag{27}$$

причому рівність має місце тоді і тільки тоді, коли $p_i = q_i, \quad \forall i \in N \cup \{0\}$.

Доведення. Пряма, яка задана рівнянням $y = x - 1$, є дотичною до графіка функції $y = \ln x$ в точці $x_0 = 1$. Тому, очевидно, що

$$\ln x \le x - 1, \quad \forall x \in (0, +\infty), \tag{28}$$

причому рівність має місце тоді і тільки тоді, коли $x = 1$.

Нехай $A_+ = \{i : \ i \in N \cup \{0\}, \ p_i > 0\}$. Тоді, беручи до уваги (28), маємо

$$-\sum_{i \in A_+} p_i \ln \frac{q_i}{p_i} \ge -\sum_{i \in A_+} p_i (\frac{q_i}{p_i} - 1) = 1 - \sum_{i \in A_+} q_i \ge 0. \tag{29}$$

Нерівність $-\sum\limits_{i \in A_+} p_i \frac{q_i}{p_i} \ge 0$ рівносильна нерівності

$$-\sum_{i \in A_+} p_i \ln q_i \ge -\sum_{i \in A_+} p_i \ln p_i.$$

Покладаючи за означенням $0 \cdot \ln 0 = 0$, отримаємо

$$-\sum_{i=0}^{\infty} p_i \ln p_i \le -\sum_{i=0}^{\infty} p_i \ln q_i,$$

що й треба було довести.

Знайдемо умови, при яких в (27) можлива рівність. З (28) та (29) слідує, що рівність має місце тоді і тільки тоді, коли

$$\begin{cases} \frac{q_i}{p_i} = 1, \forall i \in A_+, \\ \sum\limits_{i \in A_+} q_i = 1, \end{cases}$$

тобто, коли $q_i = p_i > 0, \forall i \in N \cup \{0\}$. □

Теорема 11 (Колмогорова). *Якщо* $\xi_1, \xi_2, \ldots$ — *послідовність незалежних однаково розподілених випадкових величин таких, що*

$$M(\xi_1) < \infty,$$

то
$$\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - nM(\xi_1)}{n} \to 0 \quad (P\text{-майже напевно}).$$

Позначимо
$$h = -\sum_{i=0}^{\infty} p_i \ln p_i,$$
$$b = -\sum_{i=0}^{\infty} p_i \ln q_i.$$

Теорема 12. *Якщо μ_ξ — міра з незалежними однаково розподіленими Q_∞-символами і*
$$-\sum_{i=0}^{\infty} p_i \ln q_i < +\infty, \tag{30}$$
то міра μ_ξ є мірою внутрішньо точної розмірності
$$\alpha = \frac{h}{b}.$$

Доведення. Нехай $\Delta_n(x) = \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)}$ — циліндричний відрізок n-го рангу Q_∞-розбиття, який містить точку x, μ — ймовірнісна міра, яка відповідає розподілу випадкової величини ξ, тобто $\forall E \in \mathcal{B}$: $\mu(E) = P\{\xi \in E\}$, λ — міра Лебега на $[0, 1)$.

Тоді
$$\mu(\Delta_n(x)) = p_{\alpha_1(x)} \cdot p_{\alpha_2(x)} \cdot \ldots \cdot p_{\alpha_n(x)},$$
$$\lambda(\Delta_n(x)) = q_{\alpha_1(x)} \cdot q_{\alpha_2(x)} \cdot \ldots \cdot q_{\alpha_n(x)}.$$

Розглянемо відношення
$$\frac{\ln \mu(\Delta_n(x))}{\ln \lambda(\Delta_n(x))} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n} \ln p_{\alpha_j(x)}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \ln q_{\alpha_j(x)}}.$$

Якщо $x = \Delta_{\alpha_1(x)\alpha_2(x)\ldots\alpha_n(x)\ldots}$ вибирається випадково так, що $P(\alpha_j(x) = i) = p_i$ (тобто розподіл випадкової величини x описується мірою μ), то $\{\eta_j\} = \{\eta_j(x)\} = \{\ln p_{\alpha_j(x)}\}$ і $\{\psi_j\} = \{\psi_j(x)\} = \{\ln q_{\alpha_j(x)}\}$ є послідовностями незалежних однаково розподілених випадкових величин з наступними розподілами:

η_j	$\ln p_0$	$\ln p_1$	...	$\ln p_k$	$\ldots$
	p_0	p_1	...	p_k	$\ldots$

ψ_j	$\ln q_0$	$\ln q_1$	...	$\ln q_k$	$\ldots$
	p_0	p_1	...	p_k	$\ldots$

Оскільки за (30) для випадкової величини η_1 математичне сподівання
$$M(\eta_1) = h = -\sum_{i=0}^{\infty} p_i \ln p_i < +\infty,$$

то, за теоремою 11, для μ-майже всіх точок $x \in [0,1)$ має місце рівність

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\eta_1+\eta_2+...+\eta_n)-nh}{n} = 0. \tag{31}$$

За нерівністю Гіббса (27) та умовою (30) отримаємо, що для випадкової величини ψ_1 математичне сподівання

$$M(\psi_1) = b = -\sum_{i=0}^{\infty} p_i \ln q_i < +\infty.$$

Тому можемо застосувати теорему Колмогорова 11: для μ-майже всіх $x \in [0,1)$:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(\psi_1+\psi_2+...+\psi_n)-nb}{n} = 0. \tag{32}$$

Розглянемо множину

$$A = \left\{x: \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+...+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+...+\psi_n(x)} - \frac{h}{b}\right) = 0\right\} =$$

$$\left\{x: \lim_{n\to\infty} \frac{(\eta_1(x)+...+\eta_n(x)) - \frac{h}{b}(\psi_1(x)+...+\psi_n(x))}{\psi_1(x)+...+\psi_n(x)} = 0\right\}$$

$$= \left\{x: \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\eta_1(x)+...+\eta_n(x)}{n} - h\right) - \frac{h}{b}\left(\frac{\psi_1(x)+...+\psi_n(x)}{n} - b\right)}{\frac{\psi_1(x)+...+\psi_n(x)}{n}} = 0\right\}.$$

З (31) та (32) випливає, що для μ-майже всіх $x \in [0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{\eta_1(x)+...+\eta_n(x)}{n} - h\right) - \frac{h}{b}\left(\frac{\psi_1(x)+...+\psi_n(x)}{n} - b\right)}{\frac{\psi_1(x)+...+\psi_n(x)}{n}} = 0.$$

Тому $\mu(A) = 1$ і, отже, $\alpha_\mu(A, \mathcal{A}) = 1$.

Розглянемо наступні множини

$$A_1 = \left\{x: \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+...+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+...+\psi_n(x)} - \frac{h}{b}\right) = 0\right\};$$

$$A_2 = \left\{x: \underline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+...+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+...+\psi_n(x)}\right) \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{h}{b}\right\} =$$

$$= \left\{x: \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\mu(\Delta_n(x))}{\ln\lambda(\Delta_n(x))} \le \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{h}{b}\right\};$$

$$A_3 = \left\{x: \underline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+...+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+...+\psi_n(x)}\right) \ge \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{h}{b}\right\} =$$

$$= \left\{x: \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{\ln\nu(\Delta_n(x))}{\ln\mu(\Delta_n(x))} \ge \underline{\lim_{n\to\infty}}\frac{h}{b}\right\}.$$

Очевидно, що $A \subset A_1$. Доведемо включення $A_1 \subset A_3$ and $A \subset A_2$. Використаємо для цього відому нерівність

$$\varliminf_{n\to\infty}(x_n - y_n) \leq \varliminf_{n\to\infty}(x_n) - \varliminf_{n\to\infty}(y_n),$$

яка виконується для довільних послідовностей $\{x_n\}$ та $\{y_n\}$ дійсних чисел.

Якщо $x \in A_1$, то

$$\varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+...+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+...+\psi_n(x)}\right) - \varliminf_{n\to\infty}\frac{h}{b} \geq \varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+...+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+...+\psi_n(x)} - \frac{h}{b}\right) = 0.$$

Отже, $x \in A_3$

Якщо $x \in A$, то
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+...+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+...+\psi_n(x)} - \frac{h}{b}\right) = 0$, і

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{h}{b} - \varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+...+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+...+\psi_n(x)}\right) \geq \varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{h}{b} - \frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+...+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+...+\psi_n(x)}\right) =$$

$$= \varliminf_{n\to\infty}\left(\frac{\eta_1(x)+\eta_2(x)+...+\eta_n(x)}{\psi_1(x)+\psi_2(x)+...+\psi_n(x)} - \frac{h}{b}\right) = 0$$

Отже, $x \in A_2$.

За теоремою 9:

$$\alpha_\lambda(A_2, \mathcal{A}) \leq D.$$

Оскільки $A \subset A_1 \subset A_2$, то $\alpha_\lambda(A, \mathcal{A}) \leq D$.

Оскільки

$$A \subset A_3 = \left\{x: \quad \varliminf_{n\to\infty}\frac{\ln\mu(\Delta_n(x)}{\ln\lambda(\Delta_n(x))} \geq D\right\},$$

то за теоремою 10:

$$\alpha_\lambda(A, \mathcal{A}) \geq D \cdot \alpha_\mu(A, \mathcal{A}) = D \cdot 1 = D.$$

Отже, $\alpha_\lambda(A, \mathcal{A}) = D$. Оскільки λ — міра Лебега на $[0,1)$, то $\dim_H(A, \mathcal{A}) = \alpha_\lambda(A, \mathcal{A}) = D$. За теоремою 9: $\dim_H(A, \mathcal{A}) = \dim_H A$. Отже, $\dim_H A = D$.

Доведемо тепер, що побудована вище множина A є "найекономнішим" носієм міри μ в смислі розмірності Хаусдорфа-Безиковича.

Нехай C — деякий носій міри μ, тобто $\mu(C) = 1$. Очевидно, що $C_1 = C \cap A$ — теж носій міри μ і $C_1 \subset C$. Тому $\dim_H C_1 \leq \dim_H C$ і $C_1 \subset A$. Доведемо, що $\dim_H C_1 = \dim_H A$.

Оскільки $C_1 \subset A$, то $\dim_H C_1 \leq \dim_H A = D$.

З іншого боку,

$$C_1 \subset A \subset A_3 = \left\{x: \quad \varliminf_{n\to\infty}\frac{\ln\mu(\Delta_n(x))}{\ln\lambda(\Delta_n(x))} \geq D\right\}.$$

Тому за теоремою 10:

$$\dim_H C_1 = \alpha_\lambda(C_1, \mathcal{A}) \geq D \cdot \alpha_\mu(C_1, \mathcal{A}) = D \cdot 1 = D.$$

Отже, $\dim_H C_1 = D = \dim_H A$. Теорему доведено. $\square$

Література

[1] *Albeverio S., Koshmanenko V., Pratsiovytyi M., Torbin G.* On fine structure of singularly continuous probability measures and random variables with independent $\widetilde{Q}$-symbols //submitted to J. Funct. Anal., Preprint SFB-611, Bonn (http://front.math.ucdavis.edu/0308.5007).

[2] *Albeverio S., Torbin G.* Image measures of infinite product measures and generalized Bernoulli convolutions // Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Серія 1. Фізико-математичні науки. — 2004. — № 5. — С. 248-264.

[3] *Albeverio S., Torbin G.* Fractal properties of singularly continuous probability distributions with independent Q^*-digits // Bull. Sci. Math., **129** (2005), no.4, P.356-367.

[4] *Billingsley P.* Ergodic theory and information, John Willey and Sons, New York, 1965.

[5] *Billingsley P.* Hausdorff dimension in probability theory II // Ill. J. Math., **5** (1961), P.291-198.

[6] *Cooper M.* Dimension, measure and infinite Bernoulli convolutions // Math. Proc. Cambr. Phil. Soc., **124**(1998), P.135-149.

[7] *Falconer K.J.* Fractal geometry, John Wiley & Sons, 1990.

[8] *Іваненко Г., Нікіфоров Р., Торбін Г.* Ергодичний підхід у дослідженні сингулярних імовірнісних мір // Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. Фізико-математичні науки. — 2006. — **7**. — С. 126 - 142.

[9] *Kakutani S.* Equivalence of infinite product measures // Ann. of Math., **49**(1948), P.214-224.

[10] *Lévy P.* Sur les séries dont les termes sont des variables indépendantes // Studia Math., **3**(1931), P.119-155.

[11] *Працьовитий М. В.* Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. —Київ: Вид–во НПУ імені М.П.Драгоманова, 1998.

[12] *Працьовитий М. В.* Фрактальні властивості спектра розподілу випадкової величини, Q_∞-знаки якої утворюють однорідний ланцюг Маркова // Фрактальний аналіз та суміжні питання.— Київ: ІМ НАН України – НПУ імені М.П.Драгоманова.— 1998. — **2**. — С. 36 – 48.

[13] *Працьовитий М., Торбін Г.* Про різні підходи до класифікації сингулярно неперервних ймовірнісних мір// Науковий часопис НПУ імені М.П.Драгоманова. Фізико-математичні науки. — 2006. — **7**. — С. 95 – 104.

[14] *Працьовитий М. В., Лещинський О. Л.* Властивості випадкових величин, заданих розподілами елементів свого $\tilde{Q}_\infty$-зображення // Теорія ймовірностей та мат. статистика. — 1997.— **57**.— С. 134 – 140.

[15] F. Schweiger, *Ergodic Theory of Fibred Systems and Metric Number Theory.* — Oxford: Clarendon Press, 1995.

[16] *Торбін Г.М.* Фрактальні властивості розподілів випадкових величин з незалежними Q^*-знаками // Наукові записки НПУ імені М.П.Драгоманова. Фізико-математичні науки. — № 3, 2002. — С. 363-375.

[17] *Торбін Г.М.* Мультифрактальний аналіз сингулярно неперервних ймовірнісних мір // Український математичний журнал, **57** (2005), no. 5, P.837–857.