УДК 378

Н. В. Кугай
м. Київ, Україна

РОЗШИРЕННЯ ДОСВІДУ ПІЗНАННЯ СТУДЕНТІВ У ПРОЦЕСІ НАВЧАННЯ ЛІНІЙНОЇ АЛГЕБРИ

Постановка проблеми. На сучасному етапі розвитку суспільства тип «закінченої» освіти, за якого отримані людиною одного разу знання зберігали свою цінність протягом всієї її професійної діяльності, втратив своє суспільне значення. У сучасних умовах темпи оновлення техніки і технологій, форми організації праці перевершують темпи зміни поколінь людей. У цих нових умовах найбільше освітнє значення мають не стільки знання, отримані під час навчання певному навчальному предмету, зокрема, і математиці, скільки досвід пізнання в математиці і засобами математики. А це, в свою чергу, вимагає підсиленої уваги до методологічних аспектів математики, зокрема, до формування методологічних знань з математики.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. На сьогоднішній день зусиллями вчених-філософів, психологів, педагогів (В. Бажановим, В. Давидовим, Л. Зоріною, Т. Куном, М. Полані, Г.Саранцевим, М. Холодною, І. Якиманською та ін.) вже достатньою мірою розроблені питання, пов'язані з з’ясуванням специфіки становлення, розвитку та функціонування методологічних знань як в науковому, так і в навчальному (математичному) пізнанні. Накопичено багатий досвід розв’язання проблем, пов'язаних з формуванням окремих видів методологічних знань під час вивчення різних дисциплін у школі та ВНЗ (Л. Зоріна, Н. Кочергіна, Є. Лященко, В. Мадер, А. Столяр, Н. Терешин, Є. Плотникова, Г. Голин, Н. Пастернак, Б. Спаський, І. Лернер, О. Бугайов, Б. Будний, С. Раков та ін.).

Методологічні знання складаються з декількох структурних рівнів. На сьогодні найпоширенішою є структурна модель методологічних знань, в якій виокремлено чотири рівні: філософський; загальнонауковий; конкретно науковий; рівень процедур і технік дослідження. Зупинимося детальніше на методологічних знаннях конкретно наукового рівня з лінійної алгебри.

Мета статті – виокремити методологічні знання конкретно наукового рівня з лінійної алгебри майбутнього вчителя математики.

Виклад основного матеріалу. До методологічних знань конкретно наукового рівня будемо відносити знання про: *предмет навчальної дисципліни; конкретнонаукові методи навчальної дисципліни; фундаментальні поняття; фундаментальні відношення між поняттями; фундаментальні теоретичні факти (означення, аксіоми, теореми); зв'язок з іншими навчальними дисциплінами; межі застосовності знань; історію розвитку.*

Формування методологічних знань не може відбуватися відірвано від формування предметних знань, а тому важливим фактором є кількість кредитів (і відповідно годин), відведених на вивчення навчального предмету.

На вивчення навчальної дисципліна «Лінійна алгебра» відведено 6 кредитів ECTS (ОПП підготовки бакалавра за напрямом підготовки 6.040201 Математика* (Київ, 2009 рік)).

З аналізу навчальних планів польських ВНЗ, у яких готують вчителів математики, слідує, що на вивчення лінійної алгебри відведена така кількість кредитів ECTS:

- 12 кредитів (Поморська академія в Слупську);
- 8 кредитів (Університет імені Марії Кюрі-Склодовської в Любліні);
- 14 кредитів (Педагогічний університет ім. Комісії національної освіти в Кракові).

Як бачимо, вивченню лінійної алгебри у польських ВНЗ приділено значно більше часу. У той же час змістове наповнення курсу практично однакове, що в Україні, що в Польщі ([7], [8], [9], [10]).

Предметом вивчення лінійної алгебри є, в основному, лінійні скінченновимірні простори та лінійні відображення (або лінійні оператори) в цих просторах. ***Основними методами*** дослідження є матричний та векторний методи. Крім названих методів, курс лінійної алгебри має у своєму арсеналі чимало конкретно наукових методів. Наприклад, під час вивчення розділу «Системи лінійних рівнянь» розглядаються метод Гауса, метод Жордана-Гауса, метод Крамера, метод оберненої матриці (матричний метод). Для зведення квадратичних форм до суми квадратів використовуються метод Лагранжа, метод Якобі. Знайшов своє явне відображення під час вивчення цього курсу аксіоматичний метод (відноситься до методів загальнонаукової методології).

Лінійна алгебра, абстрагуючись від сутності об’єктів, на перше місце висуває операції (відношення), задані на об’єктах, і властивості цих операцій. Так, розглядаючи лінійний простір X ми абстрагуємося від природи об’єктів множини X (це можуть бути числа, n- вимірні вектори, матриці, функції тощо), головне – це алгебраїчні операції над об’єктами цієї множини та їх властивості, описані в аксіомах лінійного простору.

З аналізу змісту навчальної дисципліни «Лінійна алгебра» випливає, що у лінійній алгебрі вивчаються об'єкти трьох родів: матриці, простори і алгебраїчні форми. Теорії цих об'єктів тісно пов'язані між собою, незважаючи на зовнішні відмінності. Практично кожна задача лінійної алгебри може бути сформульована «мовою» кожної з трьох названих теорій.

Як показують дослідження, для проведення обчислень найзручніше сформулювати (або перевести) певну задачу лінійної алгебри у матричній формі. З іншого боку, для багатьох задач, які виникають у геометрії та механіці, ефективною математичною моделлю є алгебраїчна форма. Проте найвиразніше розуміння внутрішніх зв'язків між різними задачами лінійної алгебри досягається лише при розгляді відповідних лінійних просторів.

О. Кострикін вбачає зміст лінійної алгебри у «… розробці математичної мови для вираження однієї з найзагальніших природничих ідей – ідеї лінійності. …майже всякий природній процес майже всюди в малому лінійний» [4, с. 5]. Тому можна вважати лінійну алгебру мовою сучасної математики (і не тільки математики).

Як було зазначено вище, основним предметом вивчення лінійної алгебри є лінійні простори, а останні будуються над такими алгебраїчними структурами як поля і кільця, то доцільно було б розпочинати вивчення цієї навчальної дисципліни з вивчення відповідних алгебраїчних структур.

Але цей матеріал є достатньо абстрактним і важким для розуміння і засвоєння першокурсниками. Тому доцільно розпочинати курс лінійної алгебри з вивчення систем лінійних рівнянь (матеріал цього змістового модуля є менш абстрактним, та й системи лінійних рівнянь вивчаються у шкільному курсі математики). Крім того, історично першою задачею лінійної алгебри вважають розв'язання лінійного рівняння $ax = b$. Хоча ця задача і не викликає труднощів, але її розв'язання та властивості відповідної лінійної функції $y = ax + b$ можна вважати класичними зразками ідей і методів всієї лінійної алгебри.

Не варто забувати, і про це треба кожного разу підкреслювати студентам, що такі елементарні на сьогоднішній погляд досягнення математики як число, додавання, множення, розв'язування того ж самого лінійного рівняння були у свій час великими відкриттями. І на питання студентів (а вони останнім часом звучать все частіше), для чого вивчати досить абстрактні питання математики, у тому числі і лінійної алгебри, варто навести слова П. Дірака: «Сучасна фізика вимагає все більше абстрактної математики і розвитку її основ. Так, неевклідова геометрія і некомутативна алгебра, які вважалися певний час плодом уяви чи захопленням логічними міркуваннями, тепер визнані необхідними для опису загальної картини фізичного світу» (цитата за [2, с. 13]).

До ***фундаментальних понять*** лінійної алгебри віднесемо такі: система лінійних рівнянь (СЛАР), розв'язок СЛАР, сумісна та несумісна, визначена та невизначена, еквівалентна СЛАР, перестановка парна і непарна, визначник, порядок визначника, матриця, її розмірність, сума, різниця, добуток матриць, добуток матриці на число, транспонована, обернена, одинична, трикутна матриця, алгебраїчне доповнення, мінор, ранг матриці, невироджена матриця;

відношення на множині, алгебраїчна операція, алгебраїчна структура, група, кільце, поле, комплексне число, поле комплексних чисел, арифметичний *n*-вимірний простір, лінійна залежність векторів, базис і ранг системи векторів, координати вектора, лінійний (векторний) простір, лінійна залежність векторів, базис і ранг системи векторів, розмірність лінійного простору, координати вектора, ізоморфізм, підпростір лінійного простору, скалярний добуток, евклідів простір, унітарний простір, ортогональний базис, лінійний оператор, його область значень і ядро, матриця, власні значення і власні вектори лінійного оператора, спряжений, самоспряжений, унітарний лінійний оператор, спектр оператора, квадратична форма.

До ***фундаментальних фактів*** віднесемо: властивості визначників, властивості алгебраїчних операцій над матрицями, критерій оборотності матриці, сутність методу Гауса, формули Крамера, теорему Кронекера – Капеллі, теорему про структуру загального розв’язку однорідної та неоднорідної СЛАР, властивості відношення, властивості алгебраїчних операцій: комутативність, асоціативність, дистрибутивність, аксіоми групи, кільця, поля, критерій лінійної залежності векторів, аксіоми лінійного простору, аксіоми скалярного добутку, нерівність Коші – Буняковського, властивості власних векторів лінійного оператора, теорема про еквівалентність квадратичної форми діагональній формі, метод Лагранжа, метод Якобі, закон інерції для квадратичних форм.

Зупинимося на основних ***зв’язках*** лінійної алгебри з іншими ***навчальними дисциплінами***, оскільки міжпредметні зв’язки є частиною методологічних знань конкретно наукового рівня і реалізація міжпредметних зв’язків сприяє формуванню методологічних знань. А з іншої сторони, загальнонаукові методологічні знання є основою міжпредметних зв’язків (детальніше про це у [5]).

Варто зазначити, що курс лінійної алгебри тісно пов'язаний майже з усіма математичними курсами. Для розуміння курсу лінійної алгебри необхідні знання шкільного курсу математики.

Глибокі зв'язки пов'язують курс лінійної алгебри з курсом аналітичної геометрії. О. Кострикін назвав ці дисципліни «сестрами-близнюками» [3, с. 8]. Вчений підкреслив, що з курсу аналітичної геометрії на площині і в тривимірному просторі відомо багато прикладів геометричної інтерпретації алгебраїчних співвідношень для двох і трьох змінних. Істотним, на його думку, є те, що термінологія та ідеї лінійної алгебри, що спираються на геометричну інтуїцію, відносяться до довільного n- вимірного простору. Важливо, на нашу думку, підкреслити, що теорія квадратичних форм є засобом для дослідження ліній і поверхонь другого порядку. У свою чергу, розв'язки систем лінійних рівнянь отримують наочне тлумачення саме у курсі аналітичної геометрії.

Застосовуються квадратичні форми і в диференціальних рівняннях під час зведення ДРЧП 2-го порядку від трьох незалежних змінних. У цьому ж курсі для розв'язування систем лінійних диференціальних рівнянь застосовується метод Гауса; для встановлення лінійної незалежності функцій використовується визначник Вронського; метод Лагранжа (метод варіації довільної змінної) дозволяє звести розв'язування неоднорідного диференціального рівняння до СЛАР і до подальшого інтегрування.

Знайшла своє відображення ідея лінійності і в математичному аналізі. Диференційовна функція, гладке поле, диференційовне відображення в малому лінійні, і їх локальне вивчення вимагає застосування методів лінійної алгебри. Так, одне з фундаментальних понять математичного аналізу – диференціал – означається як *лінійна* частина повного приросту функції. Крім того, необхідною складовою інтегрування раціональних функцій є розв'язування систем лінійних рівнянь. Під час вивчення кратних інтегралів використовується поняття визначника – якобіана переходу.

Вивчення алгебраїчних структур (груп, кілець, полів тощо), розпочате у лінійній алгебрі, продовжується у курсі «Алгебра і теорія чисел».

Функціональний аналіз виник на основі застосування методів математичного аналізу і лінійної алгебри до нескінченновимірних лінійних просторів. Ця дисципліна ґрунтується на методах лінійної алгебри і їх подальших узагальненнях на нескінченновимірні простори.

Широко застосовується лінійна алгебра і в багатьох інших дисциплінах. Зокрема, у лінійному програмуванні (ця галузь математики присвячена теорії і методам розв'язання екстремальних задач на множинах *n*-вимірного векторного простору, які задаються системами лінійних рівнянь і нерівностей); економіці (випуск продукції - множення матриць; потоки певного товару від постачальника до споживача у торгівельних мережах – системи ЛАР); криптографії (афінні шифри базуються на лінійній алгебрі над скінченними полями та кільцями); в квантовій механіці (рівняння Ліндблада — рівняння для матриці густини, широко використовується поняття оператора – наприклад, у цьому ж рівнянні H — оператор Гамільтона) тощо.

Важливим фактором для формування методологічних знань є ознайомлення студентів з ***історією розвитку*** певної галузі математики, її основних понять та фактів. Детально історію виникнення і розвитку лінійної алгебри студенти вивчатимуть у курсі «Історія математики» (або «Історія і методологія математики»). Можна також запропонувати студентам ознайомитися з цим матеріал самостійно, наприклад, за ([1], [2], [6]).

Але під час вивчення лінійної алгебри необхідно ознайомити студентів з основними етапами становлення цієї галузі математики (детальніше про це у наших подальших дослідженнях, а зараз обмежимося перерахунком історичних періодів та відповідних відкриттів).

4000 до н. е. - вавилоняни складали задачі, які розв'язувалися за допомогою системи 2 на 2.

200 до н. е. - китайці розв'язували системи 3 на 3, використовуючи лише значення їхні числові коефіцієнти (зародження ідеї матриці і методу Гауса).

Східна цивілізація середніх віків - алгебраїчні рівняння 1-го та 2-го степеня. Виникнення терміну «алгебра».

Епоха Відродження - розв'язування алгебраїчних рівнянь 3-го і 4-го степеня. Створення сучасної алгебраїчної символіки.

XVII – XVIII ст. - розвиток алгебри многочленів. Початок теорії визначників.

XIX – XX ст. - доведення основної теореми про існування коренів рівняння з числовими коефіцієнтами. Пошук методів наближеного розв'язування рівнянь. Розв'язання проблеми про нерозв'язність рівнянь степеня $n \geq 5$ в радикалах. Створення теорії Галуа. Інтенсивний розвиток методів лінійної алгебри, відкриття кватерніонів, теорії гіперкомплексних систем. Формулювання у явному вигляді аксіом лінійного простору. Перехід алгебри на аксіоматичний і абстрактний шлях розвитку.

Висновки. Як бачимо, масив фундаментальних понять та фактів лінійної алгебри достатньо широкий. Кожне із цих понять має свою історію розвитку. Ознайомлення майбутнього вчителя математики з методологічними знаннями конкретно наукового рівня з лінійної алгебри показує шляхи відкриття нових фактів, озброює методами отримання нових знань. А це сприяє розширенню досвіду пізнання студентів.

Перспективи подальших розвідок у даному напрямку полягають у з'ясуванні шляхів формування системи методологічних знань і вмінь з лінійної алгебри майбутнього вчителя математики.

Література

1. Бевз В. Г. Історія математики / Валентина Бевз. — Х.: Вид. гр. «Основа», 2006. — 176 с.
2. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть I. Основы алгебры. Учебник для вузов. – 3-е изд. / А.И. Кострикин. – М. : ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 272 с.
3. Кострикин А. И. Введение в алгебру. Часть II. Линейная алгебра: Учебник для вузов. — М.: Физико-математическая литература, 2000. — 368 с.

4. Кострикин А.И. Линейная алгебра и геометрия. Учеб. пособие для студентов мех.-мат. спец. вузов. / А.И. Кострикин, Ю.И. Манин— 2-е изд., перераб. — М.: Наука, 1986. – 304 с.

5. *Кугай Н. В*. Методологічні знання та міжпредметні зв'язки / Н. В. Кугай, Л. Ф.Сухойваненко // Science and Education a New Dimension. Pedagogy and Psychology, II(16), Issue: 33, 2014. – С. 49-52.

6. Лінійна алгебра та аналітична геометрія: Навч. посібник / За ред. проф. В. В. Булдигіна. — К. : ТВіМС, 2011. — 224 с.

7. Akademia Pomorska w Słupsku, Instytut Matematyki [Електронний ресурс]. – Режим доступу:http://matematyka.apsl.edu.pl/dydaktyka.

8. Jurlewicz T., Skoczylas Z. Algebra liniowa 1. Definicje, twierdzenia, wzory. — Wrocław: Oficyna Wydawnicza GiS, 2003. — 163 str. — ISBN 83-89020-14-9.

9. Uniwersytet Marii Curie-Skłodowskiej w Lublinie [Електронний ресурс]. Режим доступу: http://syjon.umcs.lublin.pl/merovingian/course/studies_plan/2762

10. Uniwersytet Pedagogiczny im. Komisji Edukacji Narodowej, Instytut Matematyki. [Електронний ресурс]. – Режим доступу: http://matematyka. up.krakow.pl/1st.php

Анотація. *Стаття присвячена проблемі розширення досвіду пізнання студентів у процесі навчання лінійної алгебри. Для цього у роботі розглянуто методологічні знання конкретно наукового рівня з лінійної алгебри, зокрема: предмет, методи, фундаментальні поняття, факти лінійної алгебри, історія розвитку. Виокремлено конкретно наукові методи лінійної алгебри: метод Гауса, метод Жордана-Гауса, метод Крамера, метод оберненої матриці, метод Лагранжа, метод Якобі тощо. З'ясовано зв'язок лінійної алгебри з навчальними дисциплінами математичного циклу. Проведено короткий порівняльний аналіз різних програм вивчення лінійної алгебри в Україні і в Польщі.*

Ключові слова: *лінійна алгебра, методологічні знання, рівні методологічних знань, досвід пізнання, майбутні вчителі математики.*

Кугай Н. В. РАСШИРЕНИЕ ОПЫТА ПОЗНАНИЯ СТУДЕНТОВ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

Аннотация. *Статья посвящена проблеме расширения опыта познания студентов в процессе обучения линейной алгебры. Для этого в работе рассмотрены методологические знания конкретно научного уровня по линейной алгебре, в частности: предмет, методы, фундаментальные понятия, факты линейной алгебры, история развития. Выделены конкретно научные методы линейной алгебры: метод Гаусса, метод Жордана-Гаусса, метод Крамера, метод обратной матрицы, метод Лагранжа, метод Якоби и др. Выяснена связь линейной алгебры с учебными дисциплинами математического цикла. Проведен краткий сравнительный анализ различных программ изучения линейной алгебры в Украине и в Польше.*

Ключевые слова*: линейная алгебра, методологические знания, уровни методологических знаний, опыт познания, будущие учителя математики.*

Kuhai N. THE EXPANSION OF EXPERIENCE OF COGNITION OF THE STUDENTS IN THE LEARNING PROCESS LINEAR ALGEBRA.

Abstract. The article deals with the problem of the experience expansion of knowledge of students in learning linear algebra. The article considers methodological knowledge of specific scientific level in linear algebra, in particular: the subject, methods, fundamental concepts, facts of linear algebra, history of development. Were allocated specific scientific methods of linear algebra: Gauss method, Gauss-Jordan method, method of Cramer, the method of the inverse matrix, the Lagrange method, Jacobi method, and others. It was determined the relationship between linear algebra and other academic disciplines of mathematical cycle. It was held a brief comparative analysis of the different programs to study linear algebra in Ukraine and Poland.

Keywords: linear algebra, methodological knowledge, levels of methodological knowledge, experience of cognition, future math teacher.