

УДК 519.21

## Властивості розподілу випадкової неповної суми заданого знакозмінного ряду Люрота з незалежними коефіцієнтами

М. В. Працьовитий, Ю. В. Хворостіна

(Національний педагогічний університет імені М.П.Драгоманова)

**АНОТАЦІЯ.** У роботі досліджується випадкова величина  $\tau$ , яка є випадковою неповною сумою знакозмінного ряду Люрота з незалежними коефіцієнтами. Доведено критерії належності її розподілу кожному з трьох чистих лебегівських типів (чисто дискретному, чисто абсолютно неперервному і чисто сингулярно неперервному). Досліджено поведінку модуля характеристичної функції випадкової величини  $\tau$  на нескінченості. Знайдено умову, при якій функція розподілу  $\tau$  зберігає фрактальну розмірність Хаусдорфа-Безиковича.

**Ключові слова:** знакозмінний ряд Люрота, випадкова неповна сума (підсума) знакозмінного ряду Люрота, нескінченні згортки Бернуллі, модуль характеристичної функції випадкової величини, лебегівська структура розподілу, розмірність Хаусдорфа-Безиковича.

**АБСТРАКТ.** In the paper we study the random variable  $\tau$ , which is a random partial sum of the alternating Luroth series with independent coefficients. We derive necessary and sufficient conditions for distribution of random variable  $\tau$  to belong to each of the three pure Lebeg's types (pure discrete, pure absolutely continuous or a pure singularly continuous). We study the behavior module characteristic function of the random variable  $\tau$  to infinity. The conditions of preserving the fractal Hausdorff-Besicovitch dimension of the probability distribution function of the random variable  $\tau$  are also found.

**Keywords:** alternating Luroth series, random incomplete sum (subsum) of alternating Luroth series, infinite Bernoulli convolutions, module characteristic function of the random variable, Lebesgue structure of probability distribution, Hausdorff-Besicovitch dimension.

ВСТУП

Нехай  $(a_k)$  – задана послідовність натуральних чисел,

$$s_k = a_k(a_k + 1), \quad A_k = s_1 s_2 \dots s_{k-1} a_k.$$

Тоді  $A_{k+1} = A_k(a_k + 1)a_{k+1}$ . Числовий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{A_k}, \tag{1}$$

називається знакозмінним рядом Люрота, при цьому  $a_k$  називається його  $k$ -тим натуральним елементом. Відомо [11], що будь-яке ірраціональне число  $x \in (0; 1]$  розкладається єдиним чином у знакозмінний ряд Люрота, одні раціональні числа розкладаються в ряд з періодичною послідовністю натуральних елементів, а інші – представляються частинною сумою знакозмінного ряду Люрота двома різними способами.

Розглядається випадкова величина (в.в.)

$$\tau = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \tau_k}{A_k}, \tag{2}$$

де  $(\tau_k)$  – послідовність незалежних випадкових величин, які набувають значень 0 і 1 з ймовірностями  $p_{0k}, p_{1k}$  відповідно, причому  $p_{0k} + p_{1k} = 1$ . Розподіл в.в.  $\tau$  є нескінченною згорткою Бернуллі, керованою рядом (1). Згідно з теоремою Джессена-Вінтнера [9] випадкова величина  $\tau$  має чистий лебегівський тип розподілу: чисто дискретний, чисто абсолютно неперервний або чисто сингулярний, причому критерій дискретності є наслідком відомої теореми П. Леві [12]: розподіл  $\tau$  є дискретним тоді і тільки тоді, коли

$$M \equiv \prod_{k=1}^{\infty} \max\{p_{0k}, p_{1k}\} > 0.$$

Множина всіх неповних сум  $E(a_n) = \{x : x = \sum_{k \in K \subset \mathbb{N}} \frac{(-1)^{k-1}}{A_k}, K \in 2^{\mathbb{N}}\}$  ряду Люрота, визначеного послідовністю  $(a_n)$ , є ніде не щільною множиною нульової міри Лебега, якщо нерівність  $a_n \neq 1$  виконується нескінченну кількість разів ([5]). Тому абсолютно неперервний розподіл можливий лише за умови  $a_n = 1$  для всіх  $n$ , більших деякого  $n_0$ . Саме по цій причині даний випадок заслуговує на окрему увагу.

У цій роботі ми шукаємо вичерпну відповідь на питання про лебегівську структуру (лебегівський тип) розподілу  $\tau$ , тополого-метричні та фрактальні властивості спектра розподілу (мінімального замкнутого носія), а також поведінку модуля характеристичної функції  $f_{\tau}(t) = M e^{it\tau}$  на нескінченності.

## 1. НЕГА-ДВІЙКОВЕ ЗОБРАЖЕННЯ ТА ЙОГО ГЕОМЕТРІЯ

Випадок  $a_n = 1$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ , для якого множина неповних сум  $E(a_n)$  ряду Люрота є відрізком, потребує окремого розгляду.

Відомо, що для довільного  $x \in [-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}]$  існує послідовність  $(\alpha_n)$ ,  $\alpha_n \in \{0; 1\}$ , така, що

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n}{(-2)^{n-1}} = \frac{\alpha_1}{2^0} - \frac{\alpha_2}{2^1} + \frac{\alpha_3}{2^2} - \frac{\alpha_4}{2^3} + \dots \equiv \bar{\Delta}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^2.$$

Символічний (скорочений) запис  $\bar{\Delta}_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k \dots}^2$  називається *нега-двійковим зображенням*. Раціональні числа відрізка  $[-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}]$  мають періодичне нега-двійкове зображення, а деякі з них мають два формально різних зображення  $\bar{\Delta}_{\alpha_1 \dots \alpha_m 0(01)}^2$  і  $\bar{\Delta}_{\alpha_1 \dots \alpha_m 1(10)}^2$ .

Це зображення має геометрію, яка відмінна від геометрії класичного двійкового зображення:

$$x = \frac{\alpha_1}{2} + \frac{\alpha_2}{2^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{2^n} + \dots \equiv \Delta_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots}^2.$$

Вона відображається у властивостях циліндричних множин.

Нехай  $(c_1, c_2, \dots, c_m)$  — фіксований набір нулів та одиниць. Циліндром рангу  $m$  з основою  $c_1 c_2 \dots c_m$ , що відповідає нега-двійковому зображенню, називається множиною  $\bar{\Delta}_{c_1 \dots c_m}^2$  всіх чисел, які мають зображення  $\bar{\Delta}_{c_1 \dots c_m \alpha_{m+1} \dots \alpha_{m+j} \dots}^2$ ,  $\alpha_{m+j} \in \{0, 1\}$ ,  $j \in \mathbb{N}$ .

Циліндри мають властивості:

1.  $\bar{\Delta}_{c_1 \dots c_m}^2 = \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_m 0}^2 \cup \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_m 1}^2$ .
2. Циліндр  $\bar{\Delta}_{c_1 \dots c_m}^2$  є відрізком, причому
 
$$\bar{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_{2k-1}}^2 = \left[ \sum_{n=1}^{2k-1} \frac{(-1)^{n-1} c_n}{2^{n-1}} - \frac{1}{3 \cdot 2^{2k-3}}; \sum_{n=1}^{2k-1} \frac{(-1)^{n-1} c_n}{2^{n-1}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{2k-2}} \right];$$

$$\bar{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_{2k}}^2 = \left[ \sum_{n=1}^{2k} \frac{(-1)^{n-1} c_n}{2^{n-1}} - \frac{1}{3 \cdot 2^{2k-1}}; \sum_{n=1}^{2k} \frac{(-1)^{n-1} c_n}{2^{n-1}} + \frac{1}{3 \cdot 2^{2k-2}} \right].$$
3.  $\max \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{2k-2} 0}^2 = \min \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{2k-2} 1}^2$ ;  
 $\min \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{2k-1} 0}^2 = \max \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{2k-1} 1}^2$ .
4.  $\text{diam} \bar{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^2 = |\bar{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^2| = \frac{1}{2^{m-1}}$ .
5. Основне метричне відношення:
 
$$\frac{|\bar{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m i}^2|}{|\bar{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^2|} = \frac{1}{2}.$$

6. Для будь-якої послідовності  $(c_n)$  має місце рівність

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} \bar{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m}^2 = \bar{\Delta}_{c_1 c_2 \dots c_m \dots}^2.$$

**Лема 1.** *Строго зростаюча функція*

$$y = f(x) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x,$$

яка відображає відрізок  $[-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}]$  на  $[0; 1]$ , коректно визначається рівністю

$$f(\bar{\Delta}_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^2) = \Delta_{a_1[1-a_2]a_3[1-a_4]a_5 \dots}^2. \quad (3)$$

*Доведення.* Справді, якщо  $x = \bar{\Delta}_{a_1 a_2 \dots a_n \dots}^2$ , то

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} + \frac{1}{2}x &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k-1}}{2^{2k-2}} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k}}{2^{2k-1}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k-1}}{2^{2k-1}} + \left( \frac{1}{3} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k}}{2^{2k}} \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{2k-1}}{2^{2k-1}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-a_{2k}}{2^{2k}} = \Delta_{a_1[1-a_2]a_3[1-a_4]a_5 \dots}^2. \end{aligned}$$

Коректність означення функції  $f$  рівністю (3) могла б бути порушеною, якщо для двох різних нега-двійкових зображень числа

$$x = \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_m 0(01)}^2 = \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_m 1(10)}^2$$

рівність (3) давала б різні результати (значення). Але

$$\begin{aligned} f(\bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{2k-1} 0(01)}^2) &= \Delta_{c_1[1-c_2] \dots [1-c_{2k-2}]c_{2k-1} 1(00)}^2, \\ f(\bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{2k-1} 1(10)}^2) &= \Delta_{c_1[1-c_2] \dots [1-c_{2k-2}]c_{2k-1} 0(11)}^2 = \Delta_{c_1[1-c_2] \dots [1-c_{2k-2}]c_{2k-1} 1(00)}^2, \\ f(\bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{2k} 0(01)}^2) &= \Delta_{c_1[1-c_2] \dots [1-c_{2k}] 1(00)}^2, \\ f(\bar{\Delta}_{c_1 \dots c_{2k} 1(10)}^2) &= \Delta_{c_1[1-c_2] \dots [1-c_{2k}] 0(11)}^2 = \Delta_{c_1[1-c_2] \dots [1-c_{2k}] 1(00)}^2. \end{aligned}$$

Тому  $f(\bar{\Delta}_{c_1 \dots c_m 0(01)}^2) = f(\bar{\Delta}_{c_1 \dots c_m 1(10)}^2)$  для будь-якого набору  $(c_1, c_2, \dots, c_m)$  цифр двійкового алфавіту.  $\square$

## 2. ЛЕБЕГІВСЬКА СТРУКТУРА РОЗПОДІЛУ

**Лема 2.** *Випадкова величина*

$$\psi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \psi_n}{2^n},$$

де  $\psi_n$  – незалежні в. в. такі, що  $P\{\psi_k = 0\} = \frac{1}{2} = P\{\psi_k = 1\}$ , має рівномірний на відріжку  $[-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}]$  розподіл.

*Доведення.* Для доведення цього факту досить показати, що для довільного циліндра  $\bar{\Delta}_{c_1 \dots c_m}^2$  має місце рівність

$$P\{\psi \in \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_m}^2\} = \frac{1}{2} |\bar{\Delta}_{c_1 \dots c_m}^2| = \frac{1}{2^m}.$$

Оскільки випадкові величини  $\psi_k$  незалежні і мають вказані розподіли, то

$$P\{\psi_1 = c_1, \psi_2 = c_2, \dots, \psi_n = c_n, \dots\} = \prod_{k=1}^{\infty} p_{c_k k} = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{2^m} = 0.$$

Враховуючи геометрію знакозмінного ряду Люрота (властивості циліндричних множин неповних сум ряду), маємо

$$P\{\psi \in \bar{\Delta}_{c_1 \dots c_m}^2\} = P\{\psi_1 = c_1, \psi_2 = c_2, \dots, \psi_m = c_m\} = \prod_{k=1}^m p_{c_k k} = \frac{1}{2^m},$$

що й вимагалось довести.  $\square$

**Наслідок 1.** Якщо існує  $n_0 \in \mathbb{N}$  таке, що при  $n \geq n_0$  для послідовності незалежних випадкових величин  $\psi'_n$  виконуються рівності  $P\{\psi'_n = 0\} = \frac{1}{2} = P\{\psi'_n = 1\}$ , то розподіл випадкової величини

$$\psi' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \psi'_n}{2^n}$$

є кусково рівномірним.

Справді, випадкову величину  $\psi'$  можна подати у вигляді:

$$\psi' = \hat{\psi} + \frac{1}{2^{n_0}} \psi,$$

де  $\hat{\psi} = \sum_{k=0}^{n_0-1} \frac{(-1)^k \psi_n}{2^k}$ , а  $\psi$  – рівномірно розподілена випадкова величина за лемою 2.

Враховуючи геометрію циліндричних зображень точок множини неповних сум даного ряду, в.в.  $\psi'$  є рівномірно розподіленою на всіх циліндричних відрізках  $n_0$ -го рангу таких, що  $\Delta_{j_1 j_2 \dots j_{n_0}}, p_{j_k k} > 0, k = \overline{1, n_0}$ .  $\square$

Нехай

$$\delta_k(x) = \delta_k(\bar{\Delta}_{a_1(x) a_2(x) \dots a_n(x) \dots}^2) = \begin{cases} a_k(x), & \text{якщо } k \text{ – непарне,} \\ 1 - a_k(x), & \text{якщо } k \text{ – парне.} \end{cases}$$

**Теорема 1.** 1. Неперервно розподілена випадкова величина

$$\tau_0 = \bar{\Delta}_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_k \dots}^2,$$

нега-двійкові цифри  $\tau_k$  якої є незалежними і мають розподіли:

$$P\{\tau_k = i\} = p_{ik}, \quad i \in \{0; 1\},$$

має: 1.1 абсолютно неперервний розподіл, якщо

$$L \equiv \sum_{k=1}^{\infty} (1 - 2p_{\delta_k k})^2 < \infty,$$

причому експоненціальний розподіл зі щільністю  $f(x) = \frac{\beta}{e^{\beta-1}} \cdot e^{\beta x}, -\infty < \beta < \infty$ , якщо

$$p_{0k} = \begin{cases} (1 + e^{\frac{\beta}{2^k}})^{-1} & \text{при непарних } k, \\ 1 - (1 + e^{\frac{\beta}{2^k}})^{-1} & \text{при парних } k; \end{cases}$$

1.2 сингулярний, якщо  $L = \infty$ .

2. Її функція розподілу зберігає фрактальну розмірність Хаусдорфа-Безиковича тоді і тільки тоді, коли у матриці  $\|p_{ik}\|$  відсутні нулі і

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{0k} = \frac{1}{2}.$$

*Доведення.* З леми 1 випливає, що випадкові величини

$$\tau_0 = \bar{\Delta}_{\tau_1 \tau_2 \dots \tau_n \dots}^2 \quad \text{і} \quad \bar{\tau} = \Delta_{\tau_1 [1-\tau_2] \tau_3 [1-\tau_4] \dots}^2$$

де  $\tau_n$  – незалежні випадкові величини, що мають розподіл  $P\{\tau_k = i\} = p_{ik}$ ,  $i = \{0; 1\}$ , мають еквівалентні розподіли.

З незалежності членів послідовності  $(\tau_n)$  випливає незалежність членів послідовності  $(\tau'_n)$

$$\tau'_n = \begin{cases} \tau_n & \text{при непарних } n, \\ 1 - \tau_n & \text{при парних } n. \end{cases}$$

Оскільки властивості розподілу випадкової величини

$$\bar{\tau} = \Delta_{\tau'_1 \tau'_2 \dots \tau'_n \dots}^2$$

вивчались у роботах [3, 13, 14], то, проінтерпретувавши відомі факти для  $\bar{\tau}$  у термінах означення в.в.  $\tau$ , ми отримуємо перше твердження з використанням результатів статей [13, 14], а друге – роботи [3].  $\square$

**Наслідок 2.** Якщо  $p_{0k} = p_0 = \text{const} \neq \frac{1}{2}$ , причому  $0 < p_0 < 1$ , то функція розподілу в.в.  $\tau$  є строго зростаючою сингулярною функцією ( $\lambda\{x : F'(x) \neq 0\} = 0$ ), причому для її математичного сподівання та дисперсії мають місце рівності:

$$M\tau = \frac{2}{3}p_1; \quad D\tau = \frac{3}{4}p_0p_1.$$

Справді, оскільки

$$\tau = \tau_1 - \frac{1}{2} \left( \tau_2 - \frac{\tau_3}{2} + \dots \right) = \tau_1 - \frac{1}{2} \hat{\tau},$$

де випадкові величини  $\tau$ ,  $\hat{\tau}$  мають однаковий розподіл, то, враховуючи властивості математичного сподівання, маємо

$$M\tau = M\tau_1 - \frac{1}{2}M\hat{\tau}.$$

Звідси

$$M\tau = \frac{2}{3}p_1.$$

За означенням та властивостями дисперсії маємо

$$D\tau = M(\tau - M\tau)^2 = M\tau^2 - (M\tau)^2.$$

$$D\tau = D\left(\tau_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)\hat{\tau}\right) = D\tau_1 + \frac{1}{4}D\hat{\tau}.$$

Звідси

$$D\tau = \frac{3}{4}D\tau_1 = \frac{3}{4}(M\tau_1^2 - (M\tau_1)^2) = \frac{3}{4}(p_1 - p_1^2) = \frac{3}{4}p_0p_1. \quad \square$$

Наступне твердження узагальнює попередні результати про лебегівські властивості розподілу в.в.т.

**Теорема 2.** *Неперервний розподіл випадкової величина  $\tau$  є:*

- 1) абсолютно неперервним, якщо існує  $n_0 \in \mathbb{N}$  таке, що для всіх  $n \geq n_0$  має місце рівність  $a_n = 1$ , і виконується умова:

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left( \sqrt{p_{0k} \cdot \frac{1}{2}} + \sqrt{p_{1k} \cdot \frac{1}{2}} \right) > 0 \sim L \equiv \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{1}{2} - p_{0k} \right)^2 < \infty; \quad (4)$$

- 2) чисто сингулярним в решті випадків, тобто  $L = \infty$  або  $a_n \neq 1$  нескінченну кількість разів.

*Доведення.* Нехай  $M = 0$  і елементи знакозмінного ряду Люрота  $a_n = 1$  для всіх  $n$  більших деякого  $n_0$ . При  $n_0 > 1$  представимо випадкову величину  $\tau$  у вигляді

$$\tau = \tau^{(1)} + \tau^{(2)},$$

$$\text{де } \tau^{(1)} = \sum_{j=1}^{n_0-1} \frac{\tau_j (-1)^{j+1}}{A_j} \quad \text{і} \quad \tau^{(2)} = \frac{(-1)^{n_0-1}}{A_{n_0-1}(a_{n_0-1} + 1)} \sum_{k=n_0}^{\infty} \frac{\tau_k (-1)^k}{2^k}.$$

Випадкові величини  $\tau^{(1)}$  і  $\tau^{(2)}$  є незалежними, бо незалежними є випадкові величини  $\tau_n$ . Випадкова величина  $\tau^{(1)}$  має дискретний розподіл, а тому випадкові величини  $\tau$  і  $\tau^{(2)}$  мають одночасно абсолютно неперервний чи сингулярно неперервний розподіли.

Тому, не порушуючи загальності, вважатимемо  $n_0 = 1$ .

Нехай  $\{(\Omega_k, B_k, \mu_k)\}$  і  $\{(\Omega_k, B_k, \nu_k)\}$  дві послідовності ймовірнісних просторів такі, що для довільного  $k \in \mathbb{N}$

$$\Omega_k = \{0; 1\}, \quad B_k - \sigma\text{-алгебра всіх підмножин } \Omega_k,$$

$$\mu_k(0) = p_{0k}, \quad \mu_k(1) = p_{1k}, \quad \nu_k(0) = \frac{1}{2} = \nu_k(1).$$

Очевидно, що  $\mu_k \ll \nu_k$  для всіх  $k \in \mathbb{N}$ . Розглянемо нескінченні добутки ймовірнісних просторів:

$$(\Omega, B, \mu) = \prod_{k=1}^{\infty} (\Omega_k, B_k, \mu_k), \quad (\Omega, B, \nu) = \prod_{k=1}^{\infty} (\Omega_k, B_k, \nu_k).$$

З теореми Какутані [10] випливає, що  $\mu \ll \nu$  тоді і тільки тоді, коли

$$\prod_{k=1}^{\infty} \rho(\mu_k, \nu_k) > 0, \quad \text{де } \rho(\mu_k, \nu_k) = \int_{\Omega_k} \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\nu_k}} d\nu_k - \text{інтеграл Хелінгера.}$$

У даному випадку

$$\prod_{k=1}^{\infty} \int_{\Omega_k} \sqrt{\frac{d\mu_k}{d\nu_k}} d\nu_k > 0 \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{\infty} \left( \sqrt{p_{0k} \cdot \frac{1}{2}} + \sqrt{p_{1k} \cdot \frac{1}{2}} \right) > 0.$$

Використавши розклад Тейлора функції  $y = \sqrt{1+x}$ , отримаємо, що останній добуток збіжний тоді і тільки тоді, коли збіжним є ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} [(1 - 2p_{0k})^2 + (1 - 2p_{1k})^2] < \infty. \quad (5)$$

Оскільки  $(1 - 2p_{0k})^2 + (1 - 2p_{1k})^2 = 2(1 - 2p_{0k})^2$ , то ряди (5) і  $L$  збігаються одночасно.

Отже, з умови (4) випливає умова абсолютної неперервності міри  $\mu$  відносно міри  $\nu$ .

Розглянемо вимірне відображення  $\Omega \xrightarrow{f} [-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}]$ , яке визначене рівністю:

$$\forall \omega = (\omega_1, \dots, \omega_k, \dots) \in \Omega : f(\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \omega_k}{2^k}.$$

Для довільної борелівської множини  $E$  визначимо образи  $\mu^*$  і  $\nu^*$  мір  $\mu$  і  $\nu$  під дією відображення  $f$  наступним чином:

$$\mu^*(E) = \mu(f^{-1}(E)), \quad \nu^*(E) = \nu(f^{-1}(E)).$$

Міра  $\mu^*$  співпадає з ймовірнісною мірою  $P_\tau$ , а міра  $\nu^*$  – з ймовірнісною мірою  $P_\psi$ . За лемою 2 ймовірнісна міра  $P_\psi$  еквівалентна мірі Лебега  $\lambda$ . З абсолютної неперервності міри  $\mu$  відносно міри  $\nu$  випливає абсолютна неперервність міри  $\mu^*$  відносно міри  $\nu^*$ . Оскільки міра  $\nu^*$  еквівалентна мірі  $\lambda$ , то з умови (4) випливає абсолютна неперервність розподілу випадкової величини  $\tau$ .

Отже, для неперервно розподіленої в.в.  $\tau$ , якщо  $a_n = 1$  для всіх натуральних  $n$  більших деякого  $n_0$  і деяка підпоследовність  $p_{\tau_k k}$  досить швидко збігається до  $\frac{1}{2}$ , то розподіл випадкової величини  $\tau$  буде абсолютно неперервним, а якщо підпоследовність  $p_{\tau_k k}$  збігається до значення, відмінного від  $\frac{1}{2}$ , або  $a_n \neq 1$  для нескінченної множини значень, то розподіл  $\tau$  буде сингулярним, в останньому випадку – канторівського типу.  $\square$



### 3. АСИМПТОТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ МОДУЛЯ ХАРАКТЕРИСТИЧНОЇ ФУНКЦІЇ

Характеристичною функцією  $f_X(t)$  випадкової величини  $X$  називається математичне сподівання комплекснозначної випадкової величини  $e^{itX}$ , тобто

$$f_X(t) = Me^{itX}.$$

Апарат характеристичних функцій зручний для дослідження структури і властивостей розподілів дійснозначних випадкових величин [10]. Зокрема, відомо [2], що величина

$$L_X = \limsup_{|t| \rightarrow \infty} |f_X(t)|$$

дорівнює:

- 1) 1 для дискретно розподіленої випадкової величини  $X$ ;
- 2) 0 для абсолютно неперервно розподіленої випадкової величини  $X$ .

Для сингулярних розподілів  $L_X$  може набувати всіх значень з  $[0; 1]$ . Сингулярні розподіли з  $L_X = 1$  близькі до дискретних, а з  $L_X = 0$  — до абсолютно неперервних. Тому величина  $L_X$  характеризує близькість за властивостями сингулярного розподілу до дискретного чи абсолютно неперервного.

**Лема 3.** *Характеристична функція випадкової величини  $\tau$ , визначеної рівністю (2), має вигляд*

$$f_\tau(t) = \prod_{k=1}^{\infty} \left( p_{0k} + p_{1k} \exp \frac{(-1)^{k-1} it}{A_k} \right), \quad (6)$$

а її модуль – вираз і оцінку

$$|f_\tau(t)| = \prod_{k=1}^{\infty} |f_k(t)| \geq \prod_{k=1}^{\infty} \left| \cos \frac{t}{2A_k} \right|, \quad (7)$$

$$\text{де } |f_k(t)| = \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k} \sin^2 \frac{t}{2A_k}}.$$

*Доведення.* Використовуючи означення характеристичної функції та властивості математичного сподівання, отримуємо

$$\begin{aligned} f_\tau(t) &= M(e^{it\tau}) = M\left(\exp\left(it \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \tau_k}{A_k}\right)\right) = \\ &= M\left(\exp \frac{it\tau_1}{A_1} \cdot \exp \frac{-it\tau_2}{A_2} \cdot \dots \cdot \exp \frac{(-1)^{k-1} it\tau_k}{A_k} \cdot \dots\right) = \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} M\left(\exp \frac{(-1)^{k-1} it\tau_k}{A_k}\right) = \prod_{k=1}^{\infty} \left(p_{0k} + p_{1k} \exp \frac{(-1)^{k-1} it}{A_k}\right) = \\ &= \prod_{k=1}^{\infty} \left(\left(p_{0k} + p_{1k} \cos \frac{(-1)^{k-1} t}{A_k}\right) + i(p_{1k} \sin \frac{(-1)^{k-1} t}{A_k})\right) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(t), \end{aligned}$$

i

$$|f_k(t)| = \sqrt{p_{0k}^2 + 2p_{0k}p_{1k} \cos \frac{t}{A_k} + p_{1k}^2} = \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k} \sin^2 \frac{t}{2A_k}}.$$

Оскільки  $4p_{0k}p_{1k} = 4p_{0k}(1 - p_{0k}) \leq 1$ , то

$$|f_\tau(t)| = \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - 4p_{0k}p_{1k} \sin^2 \frac{t}{2A_k}} \geq \prod_{k=1}^{\infty} \sqrt{1 - \sin^2 \frac{t}{2A_k}} = \prod_{k=1}^{\infty} \left| \cos \frac{t}{2A_k} \right|.$$

□

**Наслідок 3.** Якщо  $p_{0k} = \frac{1}{2} = p_{1k}$  для будь-якого  $k \in \mathbb{N}$ , то має місце рівність

$$|f_\tau(t)| = \prod_{k=1}^{\infty} \left| \cos \frac{t}{2A_k} \right|.$$

**Наслідок 4.** Для будь-якої послідовності  $(t_n)$  такої, що  $|t_n| \rightarrow \infty$  ( $n \rightarrow \infty$ ) має місце нерівність

$$L_\tau \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{\infty} \left| \cos \frac{t_n}{2A_k} \right|. \quad (8)$$

Справді,

$$L_\tau \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |f_\tau(t_n)| = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{\infty} |f_k(t_n)| \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{\infty} \left| \cos \frac{t_n}{2A_k} \right|.$$

Дослідимо поведінку модуля характеристичної функції випадкової величини  $\tau$  на нескінченності.

**Теорема 3.**

1. Якщо  $a_n = 1$  для всіх  $n > n_0$ , то рівність  $L_\tau = 0$  має місце тоді і тільки тоді, коли  $\lim_{k \rightarrow \infty} p_{1k} = \frac{1}{2}$ .
2. Якщо  $a_n \neq 1$  для нескінченної множини значень  $n$ , то  $L_\tau > 0$ .

*Доведення. 1.* Перше твердження є наслідком відомого факту, доведеного у роботі [1], який стосується характеристичної функції випадкової величини  $X$  з незалежними однаково розподіленими випадковими двійковими цифрами.

Справді, оскільки: 1) випадкову величину  $\tau$  можна подати у вигляді

$$\tau = \tau^{(1)} + \tau^{(2)},$$

$$\text{де } \tau^{(1)} = \sum_{j=1}^{n_0} \frac{\tau_j (-1)^{j+1}}{A_j} \quad \text{і} \quad \tau^{(2)} = \frac{(-1)^{n_0}}{A_{n_0}(a_{n_0} + 1)} \sum_{k=n_0+1}^{\infty} \frac{\tau_k (-1)^k}{2^k}$$

є незалежними випадковими величинами, а тому  $f_\tau(t) = f_{\tau^{(1)}}(t) f_{\tau^{(2)}}(t)$ ; і

2)  $L_{\tau^{(1)}} = 1$  (бо в.в.  $\tau^{(1)}$  має дискретний розподіл), то величина  $L_\tau$  визначається  $L_{\tau^{(2)}}$  і тому можна, не порушуючи загальності, вважати  $n_0 = 0$ .

У даному випадку вираз характеристичної функції випадкової величини  $\tau$

$$|f_\tau(t)| = \prod_{k=1}^{\infty} \left| \cos \frac{t}{2^k} \right|$$

співпадає з виразом характеристичної функції випадкової величини  $X$ .

**2.** Нехай нерівність  $a_n \neq 1$  виконується нескінченну кількість разів, а саме:

$$a_{n_m} > 1, \quad m = 1, 2, \dots$$

Розглянемо послідовність  $t_m = 2\pi A_{n_m}$ , яка очевидно прямує до нескінченності при  $m \rightarrow \infty$ . Для неї

$$|f_\tau(t_m)| \geq \prod_{k=1}^{\infty} \left| \cos \frac{2\pi A_{n_m}}{2A_k} \right|,$$

Розглянемо окремо множник нескінченного добутку

$$\left| \cos \frac{\pi A_{n_m}}{A_k} \right| = \begin{cases} 1, & \text{якщо } k \leq n_m, \\ \cos \frac{\pi}{(a_{n_m}+1)a_{n_m+1}(a_{n_m+1}+1)\dots(a_{k-1}+1)a_k}, & \text{якщо } k > n_m. \end{cases}$$

Якщо  $k > n_m$ , то

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{(a_{n_m}+1)a_{n_m+1}(a_{n_m+1}+1)\dots(a_{k-1}+1)a_k} &\geq \cos \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k-n_m-1}} = \\ &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k-n_m}} > 1 - 2 \left( \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k-n_m}} \right)^2. \end{aligned}$$

Тоді

$$|f_\tau(t_m)| \geq \prod_{k=n_m+1}^{\infty} \left| \cos \frac{\pi A_{n_m}}{A_k} \right| > \prod_{k=n_m+1}^{\infty} \left( 1 - \left( \frac{\pi^2}{9 \cdot 2^{2(k-n_m)-1}} \right) \right). \quad (9)$$

Із збіжності ряду

$$\sum_{k=n_m+1}^{\infty} \frac{\pi^2}{9 \cdot 2^{2(k-n_m)-1}}$$

впливає збіжність останнього добутку нерівності (9) за ознакою збіжності нескінченних добутків [6]: нескінченний добуток  $\prod_{k=1}^{\infty} (1 - u_k)$  збігається тоді і тільки тоді,

коли збігається ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ .

Отже, згідно наслідку 4

$$L_\tau = \overline{\lim}_{|t| \rightarrow \infty} |f_\tau(t)| > 0.$$

Що і вимагалось довести. □

**Теорема 4.** Якщо для  $n \geq n_0$  і всіх  $k > n$  виконується нерівність

$$\frac{k!}{n!} \leq (a_n + 1)a_{n+1}(a_{n+1} + 1) \dots (a_{k-1} + 1)a_k, \quad (10)$$

то має місце рівність  $L_\tau = 1$ .

*Доведення.* Розглянемо послідовність  $t_n = 2\pi A_n$ , де  $(A_n)$  – послідовність натуральних чисел, яка визначає знакозмінний ряд Люрота.

Тоді за наслідком 4

$$L_\tau \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^{\infty} \left| \cos \frac{t_n}{2A_k} \right|.$$

Але

$$\left| \cos \frac{t_n}{2A_k} \right| = \begin{cases} 1, & \text{якщо } k \leq n, \\ \cos \frac{\pi}{(a_n+1)a_{n+1}(a_{n+1}+1)\dots(a_{k-1}+1)a_k}, & \text{якщо } k > n. \end{cases}$$

Тому

$$\prod_{k=1}^{\infty} |f_k(t_n)| \geq \prod_{k=n+1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{(a_n+1)a_{n+1}(a_{n+1}+1)\dots(a_{k-1}+1)a_k}.$$

Але при  $k > n$  і виконанні нерівності (10)

$$\begin{aligned} \cos \frac{\pi}{(a_n+1)a_{n+1}(a_{n+1}+1)\dots(a_{k-1}+1)a_k} &\geq \cos \frac{\pi n!}{k!} = \\ &= 1 - 2 \sin^2 \frac{\pi n!}{2k!} > 1 - 2 \left( \frac{\pi n!}{2k!} \right)^2 = 1 - \left( \frac{\pi n!}{\sqrt{2}k!} \right)^2. \end{aligned}$$

Тоді

$$\prod_{k=n+1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{(a_n+1)a_{n+1}(a_{n+1}+1)\dots(a_{k-1}+1)a_k} \geq \prod_{k=n+1}^{\infty} \left( 1 - \left( \frac{\pi n!}{\sqrt{2}k!} \right)^2 \right).$$

Згідно з ознакою збіжності нескінченних добутків останній добуток є збіжним, бо ряд  $\sum_{k=n+1}^{\infty} \left( \frac{\pi n!}{\sqrt{2}k!} \right)^2$  є збіжним. А отже,

$$\prod_{k=n+1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{(a_n+1)a_{n+1}(a_{n+1}+1)\dots(a_{k-1}+1)a_k} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Тому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=n+1}^{\infty} \cos \frac{\pi}{(a_n+1)a_{n+1}(a_{n+1}+1)\dots(a_{k-1}+1)a_k} = 1.$$

Отже,  $L_\tau \geq 1$ . Але величина  $L_\tau \in [0; 1]$ . Тому  $L_\tau = 1$ . □

**Зауваження 1.** Теорема 4 свідчить про близькість сингулярно неперервного розподілу випадкової величини  $\tau$  при умові (10) до дискретного.

**Наслідок 5.** Якщо  $a_{n+1} > a_n$  для всіх  $n \in \mathbb{N}$ , то має місце рівність  $L_\tau = 1$ .

Справді, з умови  $a_{n+1} > a_n$  випливає нерівність (10) для всіх  $k > n$ .

**Зауваження 2.** Умови наслідку 5 більш обмежливі ніж умови теореми 4, про що свідчить наступний приклад.

**Приклад.** Нехай  $a_{2m-1} = 2m - 1$  і  $a_{2m} = a_{2m-1}$  для всіх  $m \in \mathbb{N}$ . Тоді очевидно умови наслідку 5 виконуються не для всіх  $n \in \mathbb{N}$ . Але для довільних  $n$  і  $k$  натуральних таких, що  $k > n$ , справедливі нерівності

$$\begin{aligned} (a_n + 1)a_{n+1}(a_{n+1} + 1) \dots (a_{k-1} + 1)a_k &\geq n(n+1)(n+2) \dots k \geq \\ &\geq (n+1)(n+2)(n+3) \dots (n - (k - n)) = \frac{k!}{n!}, \end{aligned}$$

тобто виконуються умови теореми 4.

#### ЛІТЕРАТУРА

- [1] Гончаренко Я.В. Асимптотичні властивості характеристичної функції випадкової величини з незалежними двійковими цифрами та згортки сингулярних розподілів ймовірностей // Наук. записки НПУ ім. М.П. Драгоманова. Фізико-математичні науки. – 2002. – №3. – С. 376–390.
- [2] Лукач Е. Характеристические функции. – Москва: Наука, 1979. – 424 с.
- [3] Працьовитий М. В., Торбін Г. М. Фрактальна геометрія та перетворення, що зберігають розмірність Хаусдорфа-Безиковича // Динамічні системи: Праці Українського математичного конгресу–2001. – Київ: Ін-т математики НАН України, 2003. – С. 77–93.
- [4] Працьовитий М. В. Фрактальний підхід у дослідженнях сингулярних розподілів. – Київ: Вид-во НПУ імені М. П. Драгоманова, 1998. – 296 с.
- [5] Працьовитий М.В., Хворостіна Ю.В. Множина неповних сум знакозмінного ряду Лյурота та розподіли ймовірностей на ній // Наук. час. НПУ ім. М.П. Драгоманова. Серія 1. Фіз-мат. науки. – К.: НПУ ім. М.П. Драгоманова, 2009. – №10.—С.14–28.
- [6] Титчмарш Е. Теория функций: Пер. с англ. – 2-е изд. перераб. – М.: Наука, 1980. – 464 с.
- [7] Albeverio S., Pratsiovytyi M., Torbin G. Fractal probability distributions and transformations preserving the Hausdorff–Besicovitch dimension // Ergodic Theory Dynam. Systems. – 2004. – Vol. 24, no. 1. – P. 1–16.
- [8] Billingsley P. Ergodic theory and information. – New York: John Willey and Sons, 1965.
- [9] Jessen B., Wintner A. Distribution functions and the Riemann zeta function // Trans. Amer. Math. Soc. – 1935. – Vol. 38, no. 1. – P. 48–88.
- [10] Kakutani S. Equivalence of infinite product measures // Ann. of Math. – 1948. – Vol. 49. – P. 214–224.
- [11] Kalpazidou S., Knopfmacher A., Knopfmacher J., Lüroth-type alternating series representations for real numbers, Acta Arith **55** (1990), 311–322.
- [12] Lévy P. Sur les séries dont les termes sont des variables éventuelles indépendantes // Studia Math. – 1931. – Vol. 3. – P. 119–155.
- [13] Marsaglia G. Random variables with independent binary digits. – Ann. Math. Statist. – 1971. – Vol. 12, no. 6. – P. 1922–1929.
- [14] Salem R. On some singular monotonic functions which are strictly increasing // Trans. Amer. Math. Soc. – 1943. – Vol. 53, no. 3. – P. 427–439.