КИЕВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ им. А. М. ГОРЬКОГО

Я. В. ХРОМОЙ

Теория неравенств как один из узловых разделов школьного курса математики, ее значение для развития логического мышления.

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени кандидата
педагогических наук по методике математики

Научный руководитель — член-корреспондент Академии наук
УССР, доктор физико-математических наук
профессор Е. Я. Ремез

Киев, 1956 год.

145. рукописи. Дисс - 100030172

Слово «неравенство» при буквальном его истолковании обозначает как будто лишь отрицательное понятие — отрицание равенства. Однако математическое понимание этого слова — существенно иное. Математика, приписывая неравенству определенный *смысл*—«больше» или «меньше»,—превращает понятие неравенства в орудие активного, *дифференцированного* изучения объективной действительности на основе количественного или более общего — логического метода упорядочения различных изучаемых совокупностей объектов. Такого рода *уточненное* понятие неравенства сознательно или бессознательно применяется человеком буквально на каждом шагу в его многообразной деятельности, направленной к познанию реального мира и к изысканию рациональных способов целесообразного воздействия на него.

В планировании нашей социалистической экономики, в социалистических обязательствах постоянно встречаются формулировки в терминах «больше», «меньше», «не меньше», «не больше». В тех же терминах формулируются технические расчеты и всевозможные практические нормы, относящиеся как к области производства, так и к области культурного строительства, здравоохранения и т. д.

Не меньшая роль принадлежит неравенствам и в области абстрактно-теоретических построений, выявляющих общие закономерности существующего независимо от нашего сознания материального мира.

Неравенства как средство упорядочивания системы значений любой *скалярной величины* и, в частности — множества действительных чисел, призваны играть фундаментальную роль в измерении величин. Приближенный характер результатов измерения, получаемых на практике, еще раз выявляет весьма важное принципиальное значение неравенств — уже в несколько ином аспекте. Такую же роль играют неравенства и в *приближенном вычислении*. Конечной целью приближенного измерения или вычисления является заключение искомого результата между двумя более или менее близкими границами ($a < x < A$).

В *теории пределов*, являющейся, в некотором смысле, как бы дальнейшей теоретической надстройкой над теорией приближений, четкое выражение основных определяющих соотношений (часто формулируемых в терминах «$\varepsilon - \delta$ соотношений») осуществляется, естественно, опять-таки посредством неравенств.

В другой важнейшей и, пожалуй, наиболее непосредственной теоретической надстройке над теорией численных приближений — *учении о действительном числе* — роль неравенств выявляется не менее фундаментально, независимо от того, каким способом определяется действительное число.

Неравенства также являются одним из основных орудий при исследовании *функциональных зависимостей:* здесь мы имеем в виду не только изучение направления изменения функций, но и столь важные с точки зрения жизненной практики и научной теории вопросы о *наибольших* и *наименьших* значениях функций, теснейшая связь которых с теорией неравенств была глубоко вскрыта, например, в статье академика С. Н. Бернштейна «О роли неравенств и экстремальных проблем в математическом анализе» (Юбилейный сборник, посвященный 30-летию Великой Октябрьской социалистической революции, Академия наук СССР, 1947 г., ст. 114—133).

Вышеизложенное делает достаточно очевидной ту весьма важную роль, которая в действительности принадлежит понятию неравенства не только в одном из отделов элементарной алгебры, именуемом теорией неравенств, но и в построении целого ряда наиболее важных в методическом отношении учений элементарной математики (измерение величин, приближенные вычисления, развитие понятия числа, теория пределов, функциональная зависимость). Вместе с тем мы отмечали, как велико значение неравенств в сфере наиболее непосредственных приложений математических понятий в жизни, в практике социалистического строительства.

Из сказанного вытекает важность методической задачи такого построения преподавания элементарной теории неравенств и ряда базирующихся на ней разделов школьного курса математики, при котором четко выявляются разносторонние связи учения о неравенствах с вопросами жизненной практики и с идейным содержанием других весьма важных разделов курса.

Приведенные соображения позволяют наперед предвидеть, что изучению неравенств должна принадлежать не последняя роль и в плане реализации общих задач *воспитывающего обучения.*

Известно вообще, что математика является не только арсеналом алгорифмических орудий для познания законов объективной действительности и для научно обоснованного активного воздействия на нее, но и весьма важной школой выработки диалектико-материалистического мировоззрения. Этим последним положением, в частности, учитывается тот давно известный факт, что изучение математики служит прекрасной школой для развития логического мышления.

Но это — лишь одна сторона существенно важного вопроса связи математики с логикой. Другая сторона вопроса определяется тем, что логическое осмысление математических методов, несомненно, является одним из первейших условий их подлинного усвоения и безошибочного применения на практике.

С любой из указанных двух точек зрения логический анализ элементарных математических соотношений и методов *в сфере арифметико-алгебраической,* в частности, имеет особо важное значение в виду их наибольшей общности и применимости в самых разнообразных областях теоретического мышления и жизненной практики.

Указанные здесь два аспекта изучения двусторонней взаимной связи элементарно-математических рассмотрений и их логического анализа играли руководящую роль в проведении излагаемых в данной работе методико-математических изысканий, относящихся к одному из узловых разделов элементарной математики.

Вопросы логического анализа материала школьного курса алгебры (да и вообще вопросы, касающиеся логической стороны преподавания математики) в литературе освещены сравнительно мало. Специалисты — логики в своих учебниках обычно приводят немалое число примеров из области математики, однако эти примеры отрывочны, разрознены и, к тому же, не всегда безупречны в математическом отношении. В литературе же по методике математики, преимущественно, либо даются лишь общие указания, которые нужно как-то применить к отдельным вопросам, либо попросту включаются как бы отдельные главы из курса логики.

Часто, говоря об элементарной математике как школе логического мышления, имеют в виду, главным образом, геометрию и лишь в гораздо меньшей степени — арифметику и алгебру. О принципиальной необоснованности такой недооценки значения негеометрических разделов курса элементарной математики, с точки зрения важности выяснения их логической структуры, нами уже было сказано. Ближайшее рассмотрение фактического содержания этих разделов показывает, что в действительности изучение некоторых вопросов арифметико-алгебраической части элементарной математики может, при соответствующей постановке преподавания, доставить очень много не менее поучительного материала и для целей развития логического мышления. Это в наибольшей мере оказывается справедливым в отношении элементарного учения о неравенствах.

Автор ставит своей ближайшей целью выделить основные вопросы элементарной теории неравенств и показать на конкретном материале преподавания этой теории, как можно, привлекая соответствующее внимание к логической стороне дела, с одной стороны, добиться более глубокого усвоения ряда методически трудных вопросов школьного курса математики и, с другой стороны, значительно способствовать развитию логического мышления учащихся.

При этом в задачу развития логического мышления входит не только формально-логическое развитие учащихся, но и подготовка их к высшей ступени — к диалектическому мышлению — в полном соответствии с известными основоположными указаниями В. И. Ленина, данными в его работе «Еще раз о профсоюзах» (В. И. Ленин, том XXXII, 4 издание, ст. 72).

Следующие обстоятельства обусловливают особое значение *теории неравенств* в плане логического развития учащихся.

1. Соотношения неравенства — одно из простейших конкретных истолкований скалярного упорядочения множеств. Это, в первую очередь, отношения расположения поля действительных чисел, которые лежат в основе ряда свойств этого поля. В силу *простоты* этих соотношений на них рельефно выступают *основные* законы логического мышления и категории логики.

2. Теория неравенств *менее формализована,* чем, к примеру, теория уравнений, оставляя больше простора для развития содержательного мышления учащихся. При изучении этого раздела элементарной математики сравнительно реже встречаются упражнения, выполняемые почти автоматически по готовым образцам, здесь бо́льшую роль играют самостоятельные логические рассуждения.

3. Можно, пожалуй, утверждать, что всюду, где появляется потребность *исследования* какого-либо вопроса элементарной математики, приходится в той или иной степени пользоваться неравенствами. Еще Н. И. Лобачевский писал: «Всякое суждение в математике останавливается, как скоро перестаем понимать под знаком то, что он собственно собой представляет» (Лобачевский, Наставление учителям математики в гимназиях. Труды института истории естествознания, т. II, ст. 556). Понимание содержания математической формулы требует исследования множества допустимых значений букв, входящих в данную формулу. А это исследование, как правило, требует применения неравенств. Отсюда, между прочим, следует, что большее внедрение неравенств в школьный курс математики представляет одно из действенных средств борьбы против формализма в преподавании.

Следует особо подчеркнуть, что в то же самое время роль неравенств в школьном преподавании, несомненно, возрастает в связи с потребностью *политехнизации школы;* достаточно лишь напомнить тесную связь неравенств с приближенными вычислениями, оценками функций, экстремальными задачами, исследованием функций с последующим построением графиков.

Автор считает нужным отметить, что рекомендуемое в работе усиленное внимание к логической стороне вопросов не требует в общем и целом дополнительной затраты времени. Ибо приучая учащихся сопоставлять, сравнивать, анализировать, преподаватель добивается более сознательного усвоения, при котором связываются в единое целое ранее разобщенные знания, и это в окончательном итоге обеспечивает на практике определенную экономию времени, затрачиваемого на проработку и повторение соответствующих вопросов программы.

Кроме того, следует также заметить, что значительная часть рассмотренного в данной работе материала может быть использована, как показывает опыт, в частности, 92 средней школы г. Киева, и на занятиях школьного математического кружка.

Излагаемые здесь методико-математические изыскания возникли на основе многолетнего опыта работы автора в средней школе и на первых курсах физико-математического факультета Киевского Педагогического Института им. Горького, а также проверены при проведении педагогической практики студентов института, в частности, в киевской средней школе № 92.

Диссертация состоит из общего введения и двух основных глав.

В первой главе на ряде отдельных конкретных вопросов программы выясняются некоторые общие принципы методического применения элементов логического анализа (преподавания рассматриваемых разделов школьной математики) — под углом зрения указанных выше двух основных педагогических задач.

Уже при введении соотношений неравенства в X классе представляется целесообразным, прежде всего, дать иллюстрацию трех *основных законов* формальной логики: закона тождества, закона противоречия и закона исключенного третьего и в связи с этим четко провести грань между *противными* и *противоречащими* суждениями: «a больше b» и «a меньше b», «a больше b» и «a не больше b», где a и b — фиксированные действительные числа. Таким путем естественно приходим к обобщенным или *альтернативным* неравенствам $a \leqslant b$, $a \geqslant b$ как к логическому отрицанию неравенств определенного смысла $a > b$, $a < b$.

Вместе с тем, уже при конкретном рассмотрении простейших вопросов вроде «что больше: x или x^2» выясняется необходимость анализа области изменения x, ограниченность и *недостаточность формального подхода*. Здесь на простейшем материале применяется диалектико-материалистический принцип конкретности истины (Абстрактных истин нет, истина всегда конкретна, Ленин, т. XXXII, ст. 72).

Альтернативные неравенства, рассматриваемые, с одной стороны, как совокупность двух разных логических возможностей и, с другой стороны, как отрицание неравенства определенного смысла, доставляют поучительный материал для логического развития учащихся.

Оперирование альтернативными неравенствами приводит к толкованию равенства как частного, предельного случая неравенства. Так получается типичный для математики, по существу диалектический процесс *обобщения понятия* (например, постоянная величина рассматривается как частный случай обобщенной переменной величины и т. д.).

Известно, какую роль в логико-математическом развитии играет умение правильно образовать *логическое отрицание* данного высказывания. На разных ступенях изучения математики неоднократно приходится применять это умение (при доказательстве от противного или при доказательстве теоремы, обратно-противоположной, взамен данной и т. д.).

На материале элементарной теории неравенств понятие логического отрицания можно выделить перед учащимися наиболее отчетливо и довести до их сознания, начиная от самых простых случаев (отрицание неравенства $a>b$, где a и b—фиксированные действительные числа) и переходя постепенно к более сложным (например, отрицание неравенства $A>B$, где A и B — функции).

Не меньшее значение для логико-математического развития учащихся имеют понятия *«необходимое условие»*, *«достаточное условие»*. В тесной связи с этими понятиями находится важнейший вопрос об *обратимости* рассуждений и выкладок. Опыт работы свидетельствует о том, что учащиеся средних школ и ВУЗ'ов часто допускают ошибки, связанные с недостаточным осознанием понятий «необходимое условие», «достаточное условие», «обратимость (рассуждений или предложений)». Авторы работ, в которых анализируются знания абитуриентов средних школ, выявленные во время приемных экзаменов в ВУЗ'ы, неизменно отмечают недостаточное усвоение учащимися указанных понятий.

В предлагаемой работе показано, как в процессе изучения учащимися *неравенств* можно и должно на сравнительно простом, доступном и в то же время достаточно разнообразном материале сделать ряд важных шагов по пути *постепенного* усвоения понятий «необходимое условие», «достаточное условие», «необходимое и достаточное условие» и т. д.

Изучение основных свойств неравенств проводится на основе *сопоставления* с основными свойствами равенств. При этом выясняются и *аналогия* и существенное *различие* в этой аналогии. Таким путем учащиеся систематически приучаются сопоставлять, сравнивать, анализировать.

В частности, изучение транзитивного свойства неравенств приводит к новым важным соотносительным понятиям: «более точное (более узкое) неравенство» и «менее точное (более широкое) неравенство».

Первое по отношению ко второму может рассматриваться, как неравенство — (логическое) основание, второе по отношению к первому, как неравенство — следствие. Здесь достаточно отчетливо выделяется *взаимоотношение основания и следствия*.

Сопоставление основных свойств *неравенств* и *равенств* приводит к важным выводам. Обстоятельство, совершенно несущественное в одном случае, может стать весьма существенным, и даже решающим, в другом случае. Например, знак числа или, более общо, аналитического выражения m, на которое множатся обе части уравнения в процессе его решения, совершенно несущественен, существенно лишь, чтобы m не могло быть равно нулю (при этом всегда получится уравнение эквивалентное исходному) — в то время как знак числа, на которое умножаются обе части неравенства, весьма существенен: он определяет изменение или неизменение смысла полученного неравенства.

Такой систематически проводимый *сравнительный анализ* простых фактов приучает отличать существенное от несущественного, что является весьма важной чертой логического мышления.

Разбор и опровержение специально подобранных математических *софизмов* приносит существенную пользу для логико-математического развития, приучая к *критическому подходу*, к внимательному логическому анализу проводимых рассуждений, способствует сознательному усвоению и применению соответствующих теоретических положений. В работе специально рассмотрен ряд математических софизмов, связанных с неравенствами, и проведен анализ *логической природы ошибок*, на которых построены эти софизмы.

В первой главе отдельному рассмотрению подвергнуты также вопросы, связанные с понятием *абсолютной величины* действительного числа, имеющие тесную связь с неравенствами и представляющие особенный интерес в рассматриваемом плане. Для преодоления методических трудностей, возникающих при изучении этих вопросов, необходимо уделить надлежащее внимание логической стороне (анализ различных взаимоисключающих возможностей, различие между внешним и истинным знаком числа и т. д.). При этом рассуждениям, связанным с *неравенствами*, здесь принадлежит решающая роль. При рассмотрении неравенств с абсолютной величиной, имеющих особо важное значение, выдвигаются новые вопросы, в частности, анализ существенного качественного различия между числовыми областями, определяемыми при помощи неравенств типа $|x-a|<m$ и $|x-a|>m$.

Во второй главе проведено систематическое рассмотрение, в указанном общем плане, трех основных частных задач элементарной теории неравенств: решение неравенств, доказательство неравенств и выяснение знака неравенства.

При решении неравенств первой степени с одним неизвестным уже выделяется ряд существенно важных с логической стороны вопросов: аналогия с решением уравнения первой степени и существенное различие в этой аналогии, конкретное уяснение учащимися области решений неравенства, интерпретируемой как бесконечное множество точек, сходство и различие в вопросе о проверке решения уравнения и неравенства: проверка решения уравнения всегда дает возможность установить факт правильности или неправильности решения, каждая частная проверка решения неравенства может дать лишь необходимые, отнюдь недостаточные условия правильности решения.

Привлечение внимания к логической стороне дела здесь, как и в других рассматриваемых вопросах, помогает учащимся разобраться в самой сути задачи и тем самым избежать ряда часто встречающихся типичных ошибок.

Системы неравенств первой степени с одним неизвестным не имеют аналога в теории уравнений. В то же время в ряде вопросов (нахождение области допустимых значений аргумента функции, заданной формулой, решение дробных неравенств и т. д.) учащимся приходится составлять неравенства, выражающие различные условия задачи, и затем, в том или ином смысле, комбинировать эти неравенства.

Многолетний опыт автора свидетельствует, что более трудным в методическом отношении моментом является именно комбинирование отдельных неравенств. Дело в том, что при этом необходимо четко различать неравенства, выражающие различные условия в пределах *одной и той же* логической возможности, от неравенств, выражающих *различные* логические возможности. В первом случае справедливость каждого из отдельных неравенств является *необходимым* условием справедливости всей совокупности. Такая и только такая совокупность неравенств является *системой* неравенств. Во втором случае справедливость отдельного неравенства служит *достаточным* условием справедливости всей совокупности. Такую совокупность, по аналогии с соответствующим термином математической логики, будем называть *дизъюнкцией* неравенств.

Почти каждый преподаватель математики знает, как часто встречаются ошибки учащихся, обусловленные нечетким различением системы неравенств от дизъюнкции неравенств.

Логическая суть этой ошибки, если выражаться терминами математической логики, заключается в смешении логического произведения (конъюнкции) высказываний и логической суммы (дизъюнкции) высказываний.

Этим понятиям соответствуют две основные операции теории множеств — пересечение и соединение множеств, допускающие простое геометрическое истолкование. Область решений *системы* неравенств изображается пересечением (общей частью) областей решений каждого из неравенств системы, область решения *дизъюнкции* неравенств представляется как соединение областей решений каждого из неравенств дизъюнкции.

При решении неравенств второй и более высоких степеней типичными являются ошибки учащихся, проистекающие из механической аналогии с решением уравнений. Это сказывается даже на простейшем примере неравенств $x^2<1$, $x^2>1$. (Буквально массовой является, например, ошибка «решения» этих неравенств в виде $x<\pm 1$, $x>\pm 1$).

Для преодоления этих ошибок необходимо провести логический анализ различия двух задач. При этом аналогия между решением неравенств и решением уравнений, конечно, будет играть важную роль, но аналогия не механическая, а включающая анализ как сходства, так и различия. В основе решения уравнений высших степеней в школе лежит метод представления левой части уравнения в виде произведения и использование необходимого и достаточного условия равенства нулю прозведения. Однако последнее условие не переносится механически на неравенства определенного смысла. Взамен его здесь выступает новое необходимое и достаточное условие четности (для неравенства $f(x) > 0$) или нечетности (для неравенства $f(x) < 0$) числа отрицательных сомножителей, которое для уравнений являлось совершенно несущественным.

В аналогичном плане рассмотрены в работе системы неравенств первой степени с двумя неизвестными и задание области при помощи неравенств.

Большое внимание уделено в работе вопросам *доказательства* неравенств.

Прежде всего здесь дается (логический) анализ различия двух основных задач элементарной теории неравенств: решения и доказательства неравенств. В последней задаче требуется лишь установить факт справедливости заданного неравенства в заданной области — безотносительно к тому, имеются ли *вне этой области* значения аргументов, при которых неравенство также удовлетворяется; в то же время при *решении* неравенств пропуск хотя бы одного значения аргумента, при котором неравенство удовлетворяется, делает решение неполноценным.

Отсюда следует, что при решении неравенств последовательным переходом от одного неравенства к другому допусти́м лишь переход от данного неравенства к равносильному ему, а при доказательстве неравенств допусти́м также и переход от более точного (узкого) неравенства к менее точному (более широкому). Таким образом, при доказательстве неравенств, в отличие от решения неравенств, появляется возможность применения так называемого *метода усиления*.

Следует заметить, что применение рассуждений, основанных на методе усиления неравенства, очень мало практикуется в средней школе и представляется узким местом даже для более сильных абитуриентов. Между тем, не говоря уже об эффективности этого метода для доказательства неравенств, он доставляет ценный материал для логико-математического развития учащихся. Дело в том, что при оперировании неравносильными неравенствами на первый план выдвигается отношение между логическим основанием и логическим следствием, отношение, которое остается несколько в тени при операциях с равносильными неравенствами.

Логическая структура доказательства может быть с особенной четкостью и простотой прослежена при доказательстве неравенств, ибо здесь рельефно выступает основное правило логического доказательства — заключение от истинности основания к истинности следствия.

Это правило применяется и в синтетическом и в аналитическом методах доказательства неравенств, однако формы применения различны. При *синтетическом* методе доказательства непосредственно осуществляется естественный ход заключения от истинности основания к истинности следствия: за основание принимается некоторое заведомо *справедливое* неравенство или равенство и через цепь выводов, сделанных по вышеуказанному правилу, приходят к требуемому неравенству, чем и завершается доказательство.

При *аналитическом* методе доказательства исходят из неравенства, подлежащего доказательству, как из *условного* основания, и через цепь выводов приходят к некоторому заведомо справедливому неравенству, что еще само по себе отнюдь не означает справедливости доказываемого неравенства. Вывод о справедливости такового будет правомерным только после проверки *обратимости* проведенных рассуждений и выкладок, т. е. после того, как можно будет проделать обратный путь от истинности основания (заведомо справедливого неравенства) к истинности следствия (доказываемого неравенства). В связи с этим при пользовании аналитическим методом доказательства недопустимо применять усиление неравенства.

В работе рассматривается и *видоизменение* аналитического метода, при котором доказываемое неравенство, хотя и берется за отправной пункт, но рассматривается как следствие, для которого ищется соответствующее основание и т. д., пока не приходят к заведомо справедливому неравенству или равенству, после чего доказательство завершается по схеме: от истинности основания к истинности следствия. Здесь на *предварительном* этапе, очевидно, можно пользоваться неравносильными неравенствами, не усиливая отправное неравенство, а, наоборот, ослабляя его.

Доказательство неравенств доставляет содержательный материал для применения весьма важных методов математического доказательства: так называемого метода *от противного* (который правильнее было бы назвать «методом от противоречащего») и метода *полной математической индукции.* Для более четкого уяснения логической структуры доказательства от противного ему предпосылается анализ составных частей его: образование логического отрицания, доказательство неверности (опровержение) и заключение о справедливости доказываемого неравенства на основании закона исключенного третьего.

Каждая из этих составных частей имеет самостоятельное значение. Следует особо выделить *доказательство неверности,* на котором перед учащимися раскрывается в ином виде правило логического доказательства — от истинности основания к истинности следствия, а именно как равносильное ему «обратно-противоположное» утверждение: заключение от ложности следствия к ложности основания.

Известно, какое большое значение для логико-математического развития учащихся имеет метод полной математической индукции. Неоднократно отмечалось, что в средней школе этому методу далеко не всегда уделяется должное внимание. Между тем в средней школе имеются широкие возможности разностороннего применения этого метода, в частности, на материале доказательства неравенств. При этом, как показано в работе, перед учащимися на ряде постепенно усложняющихся примеров раскрываются как сущность этого метода (единство дедукции и индукции), так и формы его применения.

В том же плане рассматривается в работе третья частная задача элементарной теории неравенств — *выяснение знака неравенства*. Эта задача ставится перед учащимися, начиная с более ранних ступеней изучения математики при введении соотношений неравенства в каждом данном классе чисел и при изучении каждой новой функции. Надлежащая постановка и подбор отдельных вопросов и задач, значительно способствуя изучению отдельных числовых областей и функциональных зависимостей, в то же время учит связывать и обобщать отдельные факты соотношений неравенства, применять диалектико-материалистический принцип конкретности истины и тем самым развивает мышление учащихся.

Из приведенного общего обзора можно усмотреть, что раздел теории неравенств дает достаточно разнообразный и поучительный материал для логического анализа, заслуживающий внимания с точки зрения реализации указанных выше общих педагогических и методических задач.

БФ 20968 30.XII.55 Друк. КДПІ, Франка, 44, Зам. 5—100