одного і того ж пристрою.

Такий підхід до розробок фронтальних лабораторних робіт з фізики дозволяє значно розширити функціональні можливості одного комплекту, що суттєво зменшує вартість обладнання. Отже, маємо надію на те, що навчальні заклади України найближчим часом матимуть для вивчення фізики повноцінну експериментальну базу.

Використана література:

1. *Здещиц В. М.* Застосування новітніх технологій для проведення лабораторних занять з фізики / В. М. Здещиц // Збірка наукових праць III Всеукраїнської конференції "Сучасні технології в науці та освіті". – Кривий Ріг : Вид-во НМетАУ, 2003. – Т. 2. – С. 67-71.
2. Лабораторный практикум по физике : учебн. пособие для студентов вузов / А. С. Ахматов и др. – М. : Высшая школа, 1980. – 360 с.
3. *Енохович А. С.* Справочник по физике / А. С. Енохович. – М. : Просвещение, 1978. – 415 с., ил. – (Б-ка учителя физики).
4. *Здещиц В. М.* / Розробка фронтальних лабораторних робіт з фізики в умовах кредитно-модульної системи навчання / В. М. Здещиц, В. М. Кадченко, В. П. Ржепецький, І. В. Шелевицький // Теорія та методика навчання математики, фізики, інформатики : зб. наук. пр.– Кривий Ріг : Вид. відділ. НацМетАУ, 2011. – Вип. IX: – С. 280-287.

Аннотация

В статье приведены результаты научно-исследовательской работы по внедрению новой концепции проведения фронтальных лабораторных работ по физики на основе миниатюризации исследовательских установок.

Ключевые слова: *физический эксперимент, лабораторные работы, исследовательские установки, методика обучения.*

Annotation

In the article research job performances are resulted on introduction of new conception of leadthrough of frontal laboratory works to on physicists on the basis of miniature of research options.

Keywords: *physical experiment, laboratory works, research options, teaching method.*

УДК 372.851

Кузьмич В. І.
Херсонський державний університет

МЕТРИЧНИЙ ПІДХІД ДО ВИВЧЕННЯ ОКРЕМИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ФУНКЦІЙ

У статті розглядається специфічний підхід до понять монотонності та випуклості графіка функції, який базується на їх метричному трактуванні. А саме, в означеннях цих понять використовується умова розміщення точки між двома іншими точками. Ця умова слідує із нерівності трикутника – однієї із аксіом віддалі між точками метричного простору.

Ключові слова: *функція, графік, монотонність, випуклість, січна, дотична.*

У курсі математичного аналізу, вивчення функції розпочинається зі знайомства з основними її властивостями, такими як обмеженість, монотонність, періодичність, неперервність, випуклість графіка функції. Зокрема, властивість монотонності функції на деякій множині дійсних чисел традиційно розглядається як властивість порядку слідування значень функції. Якщо для будь-яких двох чисел $x_1 < x_2$ із множини X завжди виконується нерівність $f(x_1) < f(x_2)$, то функцію $f(x)$ називають зростаючою на множині X, якщо ж виконується нерівність $f(x_1) > f(x_2)$, то її називають спадною. І зростаючі і спадні функції називають монотонними. Таке означення дається і в шкільному курсі математики і в курсі математичного аналізу [1, с.21; 2, с.56]. У подальшому воно стає потужним засобом дослідження функцій і широко застосовується при отриманні різноманітних результатів не лише в математичному аналізі.

Однак, таке означення монотонності значною мірою залежить від системи координат, в якій розглядається функція та її графік, оскільки при цьому використовується поняття більше (менше), або, для графіка функції, поняття вище (нижче). Це обмежує можливість використання поняття монотонності при зміні системи координат. Аналогічний висновок можна зробити і для властивості випуклості графіка функції, оскільки така його властивість теж не повинна залежати від зміни системи координат.

У зв'язку зі сказаним вище, виникає потреба у таких означеннях властивостей монотонності та випуклості, які були б інваріантними по відношенню до системи координат. Такі означення наводяться у даній статті.

На властивість монотонності можна поглянути і з іншого боку, як на співвідношення між довільними трьома числами множини, без використання нерівності. Для цього потрібно згадати одну із аксіом метричного простору – нерівність трикутника. Якщо $X(x;\rho)$ – простір з метрикою ρ і елементами x, то рівність $\rho(x_1;x_3) = \rho(x_1;x_2) + \rho(x_2;x_3)$ означає, що точка x_2 лежить між точками x_1 і x_3 (мається на увазі що усі три точки – різні). Тепер можна сформулювати наступне елементарне означення.

Означення 1. Нехай маємо три різні точки (числа) a, b і c множини X. Будемо казати, що точка b лежить між точками a і c, якщо віддаль між точками a і c дорівнює сумі віддалей від точки a до точки b та від точки b до точки c.

Таке означення природне, і легко засвоюється при моделюванні його на числовій осі. Тепер дамо означення монотонності функції яке базується на означенні 1, і відмінне від наведеного вище класичного означення.

Означення 2. Якщо для будь-яких трьох різних точок x_1, x_2, x_3 множини X, таких що точка x_2 лежить між точками x_1 і x_3, значення функції $f(x_2)$ лежить між значеннями $f(x_1)$ і $f(x_3)$, то функцію $f(x)$ будемо називати монотонною.

Отже, монотонною на числовій множині ми будемо називати функцію, яка на цій множині зберігає відношення "між". Це означення, як бачимо, не використовує нерівності, однак в ньому задіяні три різні точки, в той час як класичне означення використовує дві різні точки множини. З іншого боку, в означенні 2 поєднані поняття зростаючої і спадної функції. Як класичне означення монотонності, так і означення 2 мають свої переваги та недоліки, і їх можна використовувати в залежності від потреби. Ці два означення монотонності функції є еквівалентними [3].

При дослідженні випуклості графіка функції використовують як елементарне означення випуклості, що використовує поняття січної, так і означення, що використовує поняття дотичної до графіка функції. В обох випадках використовується нерівність між значенням функції в точці та значенням лінійної функції в цій точці. Порівнюючи ці значення ми попадаємо в залежність до системи координат, в якій розглядається функція.

Однак, чисто інтуїтивно, ми розуміємо, що така властивість для певної лінії не може залежати від вибору системи координат. Для цього теж може бути корисним поняття "між", яке пов'язане з поняттям прямої лінії, однак не залежить від напряму на цій прямій.

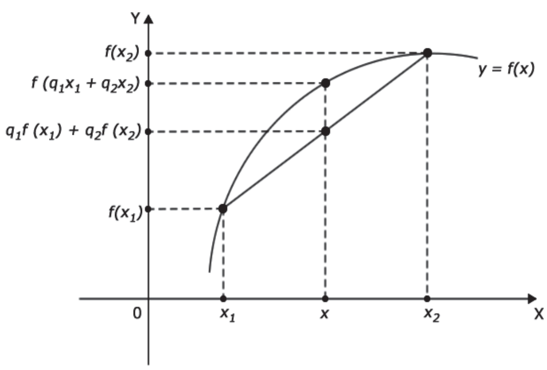
Поняття випуклості графіка функції вперше розглянув Ієнсен [4, с. 295]. Означення цієї властивості, в більш загальній формі, має наступний вигляд.

Означення 3. Функція $f(x)$, визначена і неперервна на проміжку X, називається випуклою вгору (випуклою вниз), якщо для будь-яких точок x_1 і x_2 із X, таких що $x_1 < x_2$, та довільних додатних чисел q_1 і q_2, таких що $q_1 + q_2 = 1$, виконується нерівність $f(q_1x_1 + q_2x_2) > q_1f(x_1) + q_2f(x_2)$ ($f(q_1x_1 + q_2x_2) < q_1f(x_1) + q_2f(x_2)$).

На практиці частіше використовують це означення при $q_1 = q_2 = 1/2$. При цьому випуклість графіка забезпечується за рахунок довільності вибору точок x_1 i x_2.

Означення 3 є цілком аналітичним, однак воно має і зрозумілу геометричну інтерпретацію. Назвемо хордою графіка функції відрізок прямої, що з'єднує дві точки графіка. Тоді у випадку випуклості вгору (вниз) графіка функції на деякому проміжку, усі точки цього графіка завжди знаходяться вище (нижче) відповідних точок довільної хорди, яка з'єднує точки графіка з абсцисами x_1 i x_2. На рис. 1 представлено геометричну ілюстрацію властивості випуклості графіка функції вгору (вниз) з використанням січної (хорди).

Слід відзначити, що вимога випуклості графіка функції на інтервалі є досить жорсткою умовою і забезпечує не лише неперервність функції, а навіть і її диференційованість на цьому інтервалі.



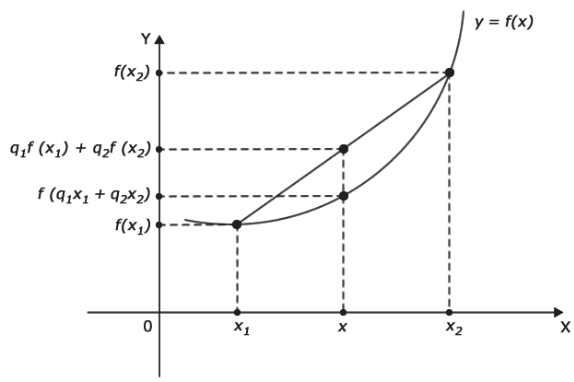
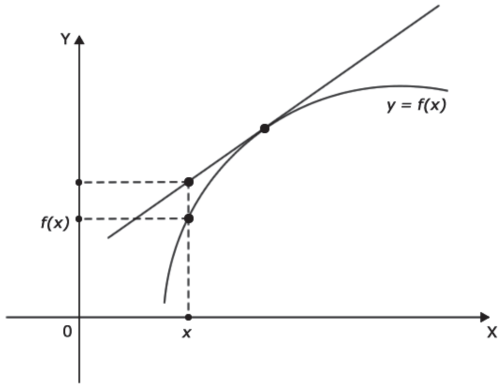


Рис. 1. Випуклість графіка з використанням січної

Інше означення випуклості графіка функції використовує поняття дотичної до цього графіка [1, с. 134].

Означення 4. Нехай функція $f(x)$ диференційована на деякому інтервалі. Крива $y = f(x)$ називається випуклою вгору (випуклою вниз) на цьому інтервалі, якщо вона лежить нижче (вище), ніж будь-яка дотична, проведена в довільній точці цієї кривої.

Цей випадок зображено на рис. 2.



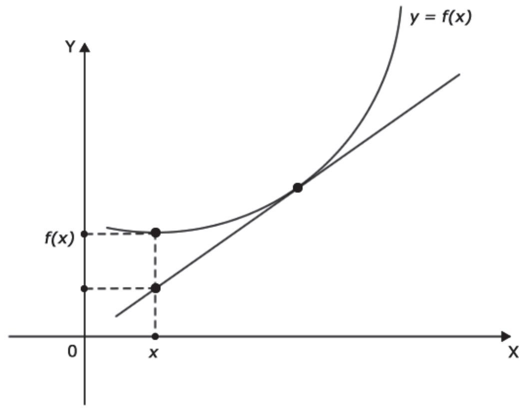


Рис. 2. Випуклість графіка з використанням дотичної

У цих означеннях встановлюється співвідношення порядку між відповідними точками двох елементів: графіка і січної, чи графіка і дотичної. Таким чином, обидва означення залежать від напряму осей координат, і при їх зміні, наприклад при повороті, умови випуклості за умови незмінності вигляду кривої можуть змінитись.

Для того щоб уникнути цієї незручності модифікуємо означення 3, а для цього введемо в розгляд ще один елемент – додаткову січну графіка функції. При цьому не будемо розрізняти випуклість вгору чи вниз, а розглядатимемо цю властивість кривої як інваріанту по відношенню до положення системи координат.

Якщо точка c лежить між точками a і b, то точку з координатами $(c; f(c))$ називатимемо внутрішньою точкою хорди що з'єднує точки $(a; f(a))$ і $(b; f(b))$ графіка функції.

Означення 5. Графік функції $f(x)$ називається випуклим на проміжку X, якщо для довільних точок x_1, x_2, x_3, x_4 із X, таких що $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$, кожна внутрішня точка хорди, що з'єднує точки $(x_3; f(x_3))$ і $(x_4; f(x_4))$, лежить між відповідною точкою хорди, що з'єднує точки $(x_1; f(x_1))$ і $(x_2; f(x_2))$ та відповідною точкою графіка функції.

Відповідність точок хорд та графіка функції слід розуміти у тому сенсі, що вони є точками перетину прямої із хордами та графіком функції. Зокрема, ця пряма не обов'язково повинна бути паралельною осям координат. Суттєвим є те, що вона проходить через внутрішні точки обох хорд. Оскільки поняття „лежить між" не залежить від заданого напряму на прямій, то означення 5, до певної міри, не залежить від системи координат. Причому, якщо точка на прямій лежить між двома точками цієї прямої, то це співвідношення зберігається і між відповідними координатами цих точок.

Нерівність $x_1 < x_3 < x_4 < x_2$ означає, що відрізок $[x_3; x_4]$ міститься у інтервалі $(x_1; x_2)$, і це поняття теж не залежить від напряму прямої. Слід відзначити, що довільність вибору точок є досить суттєвою умовою і, як правило, під цією умовою розуміють можливість їх вибору як завгодно близько одна від одної. У зв'язку з цим інколи говорять про випуклість графіка функції в околі точки.

Якщо позначити через y_{12} та y_{34}, відповідно, ординати внутрішніх точок січних про які іде мова у означенні 5, то геометричну інтерпретацію цього означення можна подати у вигляді рис. 3, а аналітично – у вигляді співвідношення $y_{34} \in (y_{12}; f(x))$, або $y_{34} \in (f(x); y_{12})$.

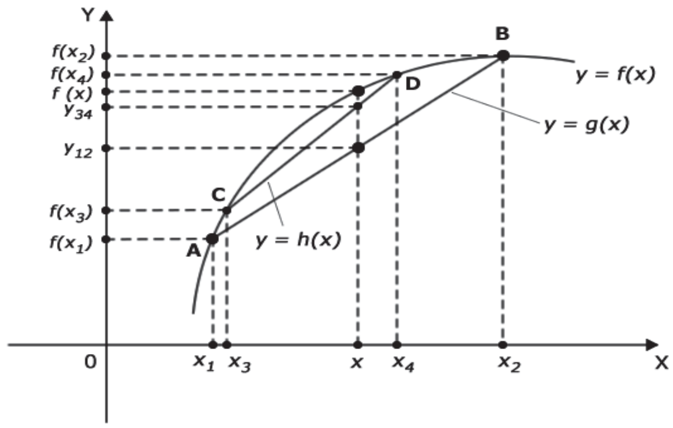


Рис. 3. Випуклість графіка з використанням двох січних

Отже, за означенням 5, характеристикою випуклості кривої є те, що внутрішні точки довільної хорди, яка знаходиться на сегменті утвореному кривою та деякою січною *l* лежать між відповідними точками кривої та цієї січної *l*.

Тепер покажемо, що означення 5 еквівалентне означенню 3. І нехай, для визначеності, графік функції $f(x)$ на проміжку X є випуклим вгору (для випуклості вниз доведення аналогічне).

Припустимо спочатку, що виконується означення 3. Позначимо, для простоти запису, через $g(x)$ функцію, графіком якої є пряма, що з'єднує точки $A(x_1; f(x_1))$ і $B(x_2; f(x_2))$ (див. рис. 3). Тоді для будь якої точки x із інтервалу $(x_1; x_2)$ виконується нерівність

$$f(x) > g(x). \ (1)$$

На інтервалі $(x_1; x_2)$ візьмемо довільний відрізок $[x_3; x_4]$. Позначимо через $h(x)$ функцію, графіком якої є пряма, що з'єднує точки $C(x_3; f(x_3))$ і $D(x_4; f(x_4))$. Внаслідок нерівності (1) матимемо наступні нерівності: $f(x_3) > g(x_3)$ і $f(x_4) > g(x_4)$. Таким чином, всі точки відрізка *CD* лежать вище ніж відповідні точки відрізка *AB*. Тобто, для будь якої точки x із інтервалу $(x_3; x_4)$ виконується нерівність

$$h(x) > g(x). \ (2)$$

Оскільки, за припущенням, графік функції $f(x)$ на проміжку X є випуклим вгору, то за означенням 3 для всіх точок x із інтервалу $(x_3; x_4)$ повинна виконуватись нерівність

$$f(x) > h(x). \ (3)$$

Із нерівностей (2) і (3) слідує подвійна нерівність

$$f(x) > h(x) > g(x) \ (4)$$

для всіх точок x із інтервалу $(x_3; x_4)$. А це означає, що виконується умова означення 5.

Нехай тепер виконується означення 5. За цієї умови обидві точки *C* і *D* лежать по одну сторону від прямої, що з'єднує точки *A* і *B*. В протилежному випадку відрізки *AB* і *CD* мали б точку перетину і ця точка не могла б лежати між відповідною точкою графіка функції та відповідною точкою одного з відрізків. А це суперечило б означенню 5. Нехай, наприклад, виконуються нерівності

$$h(x_3) > g(x_3) \text{ і } h(x_4) > g(x_4). \quad (5)$$

Тоді всі точки відрізка *CD* лежать вище відповідних точок відрізка що з'єднує точки *AB*.

Візьмемо довільну точку x із інтервалу $(x_1;x_2)$. Оскільки, за означенням 5, відрізок $[x_3;x_4]$ можна вибирати на інтервалі $(x_1;x_2)$ довільно, то виберемо його так, щоб виконувались нерівності $x_1 < x_3 < x < x_4 < x_2$. За означенням 5 точка $(x;h(x))$ повинна лежати між точками $(x;g(x))$ і $(x;f(x))$. Тобто повинна виконуватись нерівність (4), а отже і нерівність $f(x) > g(x)$. Із довільності вибору точки x на інтервалі $(x_1;x_2)$ та довільності самого інтервалу слідує, що виконується означення 3, і графік функції $f(x)$ є випуклим вгору на проміжку X.

Якщо замість нерівностей (5) будуть виконуватись нерівності $h(x_3) < g(x_3)$ і $h(x_4) < g(x_4)$, то графік функції $f(x)$ буде випуклим вниз на проміжку X.

Із наведеного вище можна зробити висновок про те, що властивості монотонності та випуклості є інваріантами по відношенню до системи координат, однак при цьому потрібно відмовитись від поняття напряму монотонності чи випуклості.

У подальшому результати цієї роботи можна використати для дослідження конкретних елементарних функції на монотонність і випуклість.

Використана література:

1. *Давидов М. О.* Курс математичного аналізу. – Частина 1 / М. О. Давидов. – К. : Вища школа, 1976. – 367 с.
2. *Шкіль М. І.* Математичний аналіз. Частина 1 / М. І. Шкіль. – К. : Вища школа, 1978. – 383 с.
3. *Кузьмич В. І.* Нестандартні задачі при вивченні властивостей функцій / Валерій Іванович Кузьмич // Інформаційні технології в освіті. Вип. 6. / Міністерство освіти і науки України ; Херсонський державний університет ; редкол. : О. В. Співаковський (гол. ред.), А. М. Гуржій, Б. М. Андрієвський, В. Ю. Биков, Генріх Майр, М. С. Львов, Н. В. Морзе, В. В. Одінцов, Л. Є. Петухова, О. В. Саган, О. М. Спірін, Ю. В. Триус. – Херсон : Вид-во ХДУ. – 2010. – С. 72-75.
4. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. – Том 1 / Г. М. Фихтенгольц. – Москва : Наука, 1966. – 607 с.

Аннотация

В статье рассматривается специфический подход к понятиям монотонности и выпуклости графика функции, который базируется на их метрической трактовке. А именно, в определениях этих понятий используется условие расположения точки между двумя другими точками. Это условие следует из неравенства треугольника – одной из аксиом расстояния между точками метрического пространства.

Ключевые слова: *функция, график, монотонность, выпуклость, секущая, хорда, касательная.*

Annotation

The article deals with a particular approach to the concepts of monotonicity and convexity of the graph of a function, which is based on their interpretation of the metric. Namely, in the definitions of these concepts using the condition of the location of the point between two other points. This condition follows from the triangle inequality – one of the axioms of the distance between the points of a metric space.

Keywords: *function, graph, monotonicity, convexity, secant, chord, tangent.*