

УДК 37.016:[514.745.8+53]

Макаренко Л. Л., Мірзоєва А. Т.  
Національний педагогічний університет  
імені М. П. Драгоманова

### ЗАСТОСУВАННЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ В ШКІЛЬНОМУ КУРСІ ФІЗИКИ

У статті досліджено застосування диференціальних рівнянь в шкільному курсі фізики. Розкрито історію появи та розвитку диференціальних рівнянь, проаналізовано фізичні задачі, в яких використовуються диференціальні рівняння. Диференціальні рівняння використано в задачах на теми з шкільного курсу фізики: "Швидкість прямолінійного руху", "Радіоактивний розпад", "Поглинання світла", "Охолодження тіла", "Найпростіші електричні кола", "Падіння тіл", "Гармонічні коливання". У задачах було розглянуто якісно різноманітні фізичні явища, для дослідження яких необхідно розв'язати аналогічні диференціальні рівняння першого або другого порядку.

**Ключові слова:** диференціальні рівняння, шкільний курс, фізика, задача.

Під час розв'язування багатьох практичних задач доводиться знаходити невідому функцію з рівняння, яке містить поряд з цією невідомою функцією її похідні.

Рівняння, яке містить невідому функцію та її похідні, називається диференціальним. Порядок найвищої похідної, яка входить до диференціального рівняння, називається його *порядком*. Наприклад, рівняння

$y'' + 4y = 0$  є диференціальним рівнянням другого порядку.

Якщо до рівняння входить незалежна змінна, невідома функція і її похідна, то це рівняння називається диференціальним рівнянням першого порядку. Якщо, крім того, в рівняння входить похідна другого порядку від шуканої функції, то рівняння називається диференціальним рівнянням другого порядку і т. д.

Будь-яку функцію, що задовольняє диференціальне рівняння, називають *розв'язком*, або *інтегралом* цього рівняння, а розв'язування диференціального рівняння – *інтегруванням*. Наприклад, функція  $y = e^x$  є розв'язком диференціального рівняння  $y' - y' = 0$ , бо  $(e^x)' = e^x$ .

Функція  $y = \cos x$  є розв'язком диференціального рівняння  $y'' + y = 0$ .

Справді, для функції  $y = \cos x$ , маємо:

$y'' = -\cos x$ . Підставляючи значення  $y''$  в рівняння  $y'' + y = 0$ , дістанемо  $-\cos x + \cos x = 0$ .

Аналогічно можна переконатися, що функція  $y = A \sin x + B \cos x$ , де  $A$  і  $B$  — довільні сталі, також є розв'язком даного рівняння.

Визначення довільних сталих значно звужує множину розв'язків і допомагає знайти один – потрібний для даної задачі.

Загальним розв'язком даного диференціального рівняння називається розв'язок (якщо він існує), у якого число довільних сталих дорівнює порядковому рівняння.

Розв'язок диференціального рівняння при певних значеннях довільних сталих називається *частинним розв'язком* цього диференціального рівняння.

Так, у розглянутому вище прикладі  $y'' + y = 0$  розв'язок  $y = A \sin x + B \cos x$  є загальним, а розв'язок  $y = \cos x$  – частинним.

На практиці здебільшого частинний розв'язок конкретного диференціального рівняння знаходять із загального розв'язку, виходячи з деяких умов, яким має задовольняти шуканий частинний розв'язок. Умови, яким має задовольняти окремий розв'язок даного диференціального рівняння, називають *початковими умовами*.

Задача відшукування конкретного частинного розв'язку даного диференціального рівняння за початковими умовами називається, *задачею Коші*.

Оскільки кожний окремий розв'язок даного рівняння є деякою функцією однієї змінної, то в прямокутній системі координат на площині цьому розв'язку відповідає деяка лінія. Ця лінія називається *інтегральною кривою* даного диференціального рівняння. Загальному розв'язку диференціального рівняння відповідає множина всіх інтегральних кривих цього рівняння, яка називається *сім'єю інтегральних кривих* диференціального рівняння.

Багато фізичних законів мають вигляд диференціальних рівнянь. Інтегрування цих рівнянь – складна справа. Одні диференціальні рівняння вдається розв'язати в явному вигляді, тобто записати шукану функцію у вигляді формули. Для інших ще й досі не знайдено зручних формул. У цих випадках знаходять наближені розв'язки за допомогою ЕОМ. Диференціальні рівняння досить просто і повно описують виробничі процеси. Тому важливо не лише вміти їх розв'язувати, а й складати.

### Історична довідка

У кінці XVII – на початку XVIII ст. різноманітні практичні і наукові проблеми привели до появи диференціальних рівнянь. Насамперед це були диференціальні рівняння першого порядку, інтегрування яких намагалися здійснити за допомогою функцій, що виражають скінченне число алгебраїчних дій.

Найпростіші диференціальні рівняння з'явилися вже в працях Ісаака Ньютона (1643–1727) і Готфріда Лейбніца (1646–1716). Саме Лейбніцу і належить термін “диференціальне рівняння”. Диференціальні рівняння мають велике прикладне значення, вони є знаряддям дослідження багатьох задач природознавства і техніки, їх широко використовують в механіці, астрономії, фізиці, у багатьох задачах хімії, біології. Це пояснюється тим, що досить часто об'єктивні закони, яким підпорядковуються певні явища (процеси), записують у формі диференціальних рівнянь, а самі ці рівняння є засобом для кількісного представлення цих законів.

Наприклад, фізичні закони описують деякі співвідношення між величинами, що характеризують певний процес, і швидкістю зміни цих величин. Іншими словами, ці закони виражаються рівностями, в яких є невідомі функції та їх похідні.

У XVIII ст. теорія диференціальних рівнянь відокремилася з математичного аналізу в самостійну математичну дисципліну, її успіхи пов'язані з іменами швейцарського вченого Іоганна Бернуллі (1667–1748), французького математика Жозефа Лагранжа (1736–1813) і особливо Леонарда Ейлера (1707 – 1783).

Перший період розвитку диференціальних рівнянь був пов'язаний з успішним розв'язуванням деяких важливих прикладних задач, що приводять до диференціальних рівнянь, розробкою методів інтегрування різних типів диференціальних рівнянь і пошуком класів рівнянь, розв'язки яких можна подати у вигляді елементарних функцій або їх первісних. Проте дуже швидко виявилось, що інтегрованих диференціальних рівнянь зовсім небагато. Це привело до розвитку власне теорії диференціальних рівнянь, яка займається розробкою методів, що дають змогу за властивостями диференціального рівняння визначити властивості і характер його розв'язку.

У зв'язку з потребами практики поступово розроблялися і способи наближеного інтегрування диференціальних рівнянь. Ці методи дають зручні алгоритми обчислень з ефективними оцінками точності, а сучасна обчислювальна техніка дає змогу економічно і швидко звести розв'язування кожної такої задачі до числового результату. Розглянемо деякі фізичні задачі, в яких використовуються диференціальні рівняння.

Диференціальні рівняння в задачах на тему “Швидкість прямиолінійного руху”

З другого закону Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad (1)$$

де  $\vec{a}$  – це прискорення руху матеріальної точки маси  $m$ ,  $\vec{F}$  – рівнодійна всіх сил, що діють на матеріальну точку.

Швидкість руху  $\mathcal{V}(t)$  і прискорення  $a(t)$  являються функціями від часу  $t$ , також, як відомо  $\mathcal{V}'(t) = a(t)$ . Помітимо, що дії над векторами, які проведені вздовж однієї прямої, на якій вибрано додатній напрям можна замінити на дії над їхніми проекціями на цю ж саму пряму. Таким чином, у випадку руху матеріальної точки вздовж осі  $Ox$  рівність (1) може бути замінена рівністю

$$m\mathcal{V}'(t) = F, \quad (2)$$

де через  $\mathcal{V}'(t)$  і  $F$  позначені відповідно проекції векторів  $\vec{\mathcal{V}}$  і  $\vec{F}$  на цю вісь. Рівняння (2) описує також і поступальний рух тіла. Такий рух можна розглядати як рух матеріальної точки, яка розташована в центрі мас тіла, під дією сил, прикладених до центру мас.

**Задача.** Моторний човен рухається в стоячій воді зі швидкістю 5 м/с. На повному ході її двигун був вимкнений; через 4 с її швидкість стала рівною 1 м/с. Вважаючи, що сила опору води пропорційна швидкості руху човна, визначити, через скільки секунд після вимкнення двигуна швидкість зменшиться до 4 см/с?

**Розв'язання.** Будемо вважати, що човен рухається прямолінійно. Направимо вісь  $Ox$  вздовж руху човна. Позначимо через  $\mathcal{V}(t)$  швидкість руху човна в момент часу  $t$  після вимкнення двигуна. В момент вимкнення двигуна ( $t=0$ ) швидкість, за умовою, дорівнює 5 м/с, або

$$\mathcal{V}(0) = 5. \quad (3)$$

Це – початкова умова задачі. Складемо диференціальне рівняння. Нехай маса човна дорівнює  $m$ . За умовою, на човен, що рухається, діє сила  $F = -k_1 \mathcal{V}(t)$ , де  $k_1 > 0$  (знак мінус вказує на те, що сила опору води направлена проти швидкості руху човна). Підставивши це значення  $F$  в рівняння (2) і позначивши  $m k_1 = k$ , отримаємо диференціальне рівняння

$$\mathcal{V}'(t) = -k\mathcal{V}(t), \quad k > 0.$$

Знайдемо його розв'язок при початковій умові (3):

$$v(t) = 5e^{-kt} = 5e^{-\frac{k_1}{m}t}.$$

Використовуючи додаткову умову  $v(4) = 1$  м/с, знайдемо

$$e^{-k} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{1}{4}};$$

ось чому  $\mathcal{V}(t) = 5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{t}{4}}$  – це закон зміни швидкості руху човна після зупинки

двигуна. Для відповіді на питання потрібно розв'язати рівняння  $\mathcal{V}(t) = 0,04$  відносно  $t$ . Розв'язавши його отримаємо, що  $t = 12$  с.

**Диференціальні рівняння в задачах на тему “Радіоактивний розпад”**

З фізики відомо, що кількість атомів радіоактивної речовини, що розпадаються за одиницю часу, становить сталу частину від кількості атомів, що не розпалися. Для кожного вигляду радіоактивної речовини ця стала частина своя, вона називається сталою розпаду і позначається через  $\lambda$ . Іншими словами: швидкість розпаду атомів радіоактивної речовини пропорційна кількості атомів, що не розпалися, а саме

$$N'(t) = -\lambda N(t), \quad \lambda > 0 \quad (4)$$

де  $N(t)$  – кількість радіоактивних атомів речовини, що не розпалися, в момент часу  $t$ ,

$N'(t)$  – швидкість їхнього розпаду. Оскільки з часом кількість таких атомів зменшується, то похідна  $N'(t)$  від’ємна. Рівняння (4) є диференціальним рівнянням. Враховуючи зв’язок між числом ядер і масою радіоактивної речовини, будемо говорити просто про розпад радіоактивної речовини.

*Задача. Початкова кількість радіоактивної речовини  $M_0$ . Якщо за 30 років розпадається її 50%, то через скільки часу залишиться 25% від початкової кількості?*

*Розв’язання.* Позначимо через  $M(t)$  кількість радіоактивної речовини в момент часу  $t$ . Тоді

$$M(0) = M_0 \quad (5)$$

Це – початкова умова задачі. Розв’язавши рівняння (4) при початковій умові (5) отримаємо

$$M(t) = M_0 e^{-\lambda t} \quad (6)$$

Прийнявши до уваги, що  $M(30) = M_0/2$ , з формули (6) знайдемо

$$e^{-\lambda} = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/30}$$

За допомогою нескладних обчислень отримаємо відповідь: 60 років.

Диференціальні рівняння в задачах на тему “Поглинання світла”

При проходженні світла через воду (або скло) деяка його частина поглинається. Нехай на поверхню води перпендикулярно до неї падає світло з яскравістю  $A_0$ , яскравість світла на глибині  $x$  позначимо через  $A(x)$ . Похідна  $A'(x)$  – швидкість поглинання світла на глибині  $x$ . З оптики відомо, що для таких середовищ, як вода або скло, швидкість поглинання світла на глибині  $x$  пропорційна яскравості світла на цій глибині, а саме

$$A'(x) = -kA(x), k > 0 \quad (7)$$

Оскільки яскравість світла  $A(x)$  з збільшенням глибини  $x$  зменшується, то похідна  $A'(x)$  від’ємна. Рівняння (7) є диференціальним рівнянням відносно функції  $A(x)$ .

*Задача. Десятиметровий шар води поглинає 40% світла, що падає на її поверхню. На якій глибині денне світло буде за яскравістю таким же, як місячне світло на поверхні води, якщо яскравість місячного світла складає  $\frac{1}{3} \cdot 10^{-5}$  яскравості денного світла?*

*Розв’язання.* Початкова умова задачі має вигляд

$$A(0) = A_0 \quad (8)$$

Записавши розв’язок рівняння (7) при початковій умові (8) отримаємо  $A(x) = A_0 e^{-kx}$ , звідки, використовуючи додаткову умову  $A(10) = 0,6A_0$ , знайдемо

$$e^{-k} = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{1}{10}}$$

Закон поглинання світла матиме вигляд

$$A(x) = A_0 \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{x}{10}}$$

Для визначення глибини  $x$  з умови задачі отримаємо рівняння

$$\frac{A_0}{3} \cdot 10^{-5} = A_0 \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{x}{10}},$$

звідки  $x \approx 247$  м.

Диференціальні рівняння в задачах на тему “Охолодження тіла”

Нагріте тіло, що знаходиться в середовищі з нижчою температурою, буде охолоджуватися, при цьому швидкість охолодження з часом зменшується. Як відомо, швидкість охолодження поверхні тіла в будь-якій її точці пропорційна різниці температур

поверхні тіла і навколишнього середовища.

*Задача. Металева деталь, нагріта до  $500^{\circ}\text{C}$ , охолоджується в повітрі при температурі  $20^{\circ}\text{C}$ . Через 10 хвилин після початку охолодження температура на поверхні деталі понизилася до  $100^{\circ}\text{C}$ . Якою буде температура на поверхні деталі через 20 хвилин?*

*Розв'язання.* Позначимо через  $U(t)$  температуру на поверхні деталі в момент часу  $t$  після початку охолодження. За умовою

$$U(0)=500 \quad (9)$$

Це – початкова умова задачі. Швидкість охолодження поверхні деталі в момент часу  $t$  дорівнює  $U'(t)$ . Вважаючи температуру повітря постійною, отримаємо:

$$U'(t) = -k(U(t)-20), k>0.$$

Похідна від'ємна, бо температура на поверхні деталі зменшується. Звідси для  $U(t)$  отримаємо лінійне диференціальне рівняння:

$$U'(t)+kU(t)=20k$$

Розв'язуючи його з початковою умовою (9), отримаємо

$$U(t)=480e^{-kt}+20$$

Використовуючи додаткову умову  $U(10)=100$ , знайдемо  $e^{-k}=\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{1}{10}}$  і, відповідно,

$$U(t)=480\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{t}{10}}+20. \text{ Для часу } t=20 \text{ отримаємо } U(20)=33\frac{1}{3}.$$

Диференціальні рівняння в задачах на тему “Найпростіші електричні кола”

Якщо в замкнуте електричне коло послідовно ввімкнено джерело струму з електрорушійною силою (ЕРС)  $E$ , активним опором  $R$  Ом, котушкою з індуктивністю  $L$  і конденсатором ємністю  $C$ , то, як відомо з електротехніки, між ЕРС і напругами на активному опорі, котушці індуктивності і конденсаторі в будь-який момент часу  $t$  існує така залежність:

$$E=U_R+U_C+U_L. \quad (10)$$

Тут  $U_R=RI(t)$  – напруга на активному опорі,  $U_C=q(t)/C$  – напруга на конденсаторі і  $U_L=LI'(t)$  – напруга на котушці індуктивності;  $I(t)$  – сила струму в колі в момент часу  $t$ , яка вимірюється в амперах,  $q(t)$  – заряд конденсатора в момент часу  $t$ , який вимірюється в кулонах.

Використовуючи співвідношення (10) і знаючи, що  $q'(t)=I(t)$ , можна знайти силу струму в колі в залежності від заданої ЕРС джерела струму.

*Задача. Послідовно ввімкнені джерело струму з ЕРС  $E$ , котушка з індуктивністю  $L, (L \neq 0)$  і активний опір  $R$ , Ом. Знайти закон зміни сили струму  $I(t)$  в колі, вважаючи, що в початковий момент часу ( $t=0$ ) вона дорівнює нулю. Розглянути випадок коли ЕРС постійна –  $E(t)=E$ ;*

*Розв'язання.* Використовуючи (10), після відповідних підстановок отримаємо співвідношення

$$I(t)R+I'(t)L=E(t),$$

яке при заданих  $R, L$  і  $E(t)$  можна розглядати як лінійне диференціальне рівняння

$$I'(t)+\frac{R}{L}I(t)=\frac{E(t)}{L} \quad (11)$$

з початковою умовою

$$I(0)=0. \quad (12)$$

При сталій ЕРС  $E(t)=E$  рівняння (11) з початковою умовою (12) має розв'язок:



$$I(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (13)$$

З (13) маємо, що з зростанням часу  $t$  сила струму  $I(t)$  наближається до постійного значення  $E/R$ . Таким чином, у встановленому режимі при сталій ЕРС джерела, струм, що виникає в електричному колі “не зважає” на індуктивність і підпорядковується закону Ома для замкнутої ділянки кола постійного струму.

Диференціальні рівняння в задачах на тему “Падіння тіл”

При падінні тіл в порожнечі рух відбувається прямолінійно під дією сили тяжіння. При падінні тіл в повітрі рух можна вважати також прямолінійним, що відбувається під дією сили тяжіння і сили опору повітря, направленої вгору.

*Задача. Знайти швидкість  $\mathcal{V}(t)$  руху тіла, що падає в повітрі на Землю, вважаючи силу опору повітря прямо пропорційною швидкості руху і початкову швидкість рівною  $\mathcal{V}_0$  м/с.*

*Розв’язання.* Направимо вісь  $Oy$  вертикально вниз вздовж траєкторії падіння тіла. На тіло будуть діяти дві сили: сила тяжіння і сила опору повітря. Проекція сили тяжіння на вісь  $Oy$  дорівнює  $mg$ , де  $m$  – маса тіла; проекція сили опору повітря на вісь  $Oy$ , згідно умові задачі, дорівнює  $-k\mathcal{V}(t)$ , де  $k$  – коефіцієнт пропорційності. Проекція прискорення руху тіла на ту ж вісь дорівнює похідній  $\mathcal{V}'(t)$ . На підставі другого закону Ньютона будемо мати

$$\begin{aligned} m \mathcal{V}'(t) &= mg - k \mathcal{V}(t), \\ \text{або} \\ \mathcal{V}'(t) + k_1 \mathcal{V}(t) &= g, \end{aligned} \quad (14)$$

де  $k_1 = k/m$ .

Рівняння (14) – лінійне диференціальне рівняння з початковою умовою  $\mathcal{V}(0) = \mathcal{V}_0$ . Запишемо розв’язок:

$$\mathcal{V}(t) = \left(\mathcal{V}_0 - \frac{mg}{k}\right)e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}.$$

З цієї формули бачимо, що з зростанням часу  $t$  швидкість падіння  $\mathcal{V}(t)$  буде наближатися до значення  $\frac{mg}{k}$ . При чому якщо  $\mathcal{V}_0 < \frac{mg}{k}$ , то швидкість  $\mathcal{V}(t)$  буде наближатися до значення  $\frac{mg}{k}$  зростаючи, а при  $\mathcal{V}_0 > \frac{mg}{k}$  – спадаючи. Наприклад, при зтяжному стрибку парашутиста після розкриття парашуту швидкість з часом, спадаючи, буде наближатися до значення  $\frac{mg}{k}$ . Величина  $k$  залежить від діаметру куполу парашуту. Це дозволяє (при відомому значенні  $mg$ ) зробити розрахунок так, щоб швидкість спуску парашутиста була безпечною для приземлення. Звичайно така швидкість рівна 5-7 м/с.

*Задача. Знайти швидкість  $\mathcal{V}(t)$  руху тіла, що падає в порожнечі на землю, вважаючи початкову швидкість руху рівною  $\mathcal{V}_0$ .*

*Розв’язання.* В цьому випадку опір повітря буде відсутнім і рівняння (14) видозмінюється

$$\mathcal{V}'(t) = g. \quad (15)$$

В результаті інтегрування отримаємо безліч розв’язків  $\mathcal{V}(t) = gt + C$ , з якого знайдемо розв’язок рівняння (15), що задовольнить задану початкову умову  $\mathcal{V}(0) = \mathcal{V}_0$ :  $\mathcal{V}(t) = \mathcal{V}_0 + gt$  - результат, добре відомий з шкільного курсу фізики.

Диференціальні рівняння в задачах на тему “Гармонічні коливання”

Розглянемо рівняння:

$$x'' + \omega^2 x = 0, \quad (16)$$

де  $\omega$  – деяке додатне число.

Безпосередньою підстановкою перевіряємо, що функція

$$x = A \cos(\omega t + \alpha) \quad (17)$$

для будь-яких сталих  $A$  і  $\alpha$  є розв’язком рівняння (16). Можна показати, що інших розв’язків рівняння (16) не має. Таким чином, функція (17) задає загальний розв’язок рівняння (16).

Функція (17) для будь-яких заданих  $A$ ,  $\omega$  і  $\alpha$  описує гармонічний коливальний процес. Число  $|A|$  називається амплітудою, а число  $\alpha$  – початковою фазою коливання (17). Рівняння (16) називають рівнянням гармонічних коливань. Додатне число  $\omega$  називають циклічною (коловою) частотою коливання.

Число коливань за одиницю часу визначають за формулою  $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ .

Як бачимо, загальний розв’язок (17) рівняння (16) містить дві довільні сталі: амплітуду  $A$  і початкову фазу  $\alpha$ . Для їх визначення слід задати дві умови, наприклад,

$$x(t_0) = x_0, \quad x'(t_0) = v_0. \quad (18)$$

Тоді для визначення сталих  $A$  і  $\alpha$  дістанемо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} A \cos(\omega t_0 + \alpha) = x_0, \\ A \omega \sin(\omega t_0 + \alpha) = v_0, \end{cases} \quad (19)$$

$$\text{Звідки } A^2 \cos^2(\omega t_0 + \alpha) + A^2 \sin^2(\omega t_0 + \alpha) = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2},$$

$$A^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}.$$

$$\text{Можна вважати, що } A > 0, \text{ тоді } A = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}.$$

Знаючи амплітуду  $A$ , з системи (19) за формулами тригонометрії визначають початкову фазу  $\alpha$ .

З формули (17) можна дістати інший вигляд загального розв’язку рівняння (16).

Справді,  $x = A(\cos \omega t \cdot \cos \alpha - \sin \omega t \cdot \sin \alpha) = A \cos \alpha \cdot \cos \omega t - A \sin \alpha \cdot \sin \omega t$ . Поклавши,

що  $C_1 = A \cos \alpha$ ,  $C_2 = -A \sin \alpha$ , дістанемо:

$$x_1 = C_1 A \cos \omega t + C_2 A \sin \omega t,$$

До такого диференціального рівняння приводять, наприклад, дві різні, на перший погляд, задачі фізики – коливання вантажу на пружині і розряд конденсатора через котушку.

Зазначимо, що рівняння гармонічних коливань розглянуто нами за умов, які реально не виконуються. Так, для описання коливання пружини треба враховувати тертя (опір повітря), а для описання розряду конденсатора – активний опір котушки. При цьому в рівнянні коливань з’являється доданок, що залежить від першої похідної (швидкості).

Ми розглянули якісно різноманітні фізичні явища, при дослідженні яких припадає розв’язувати аналогічні диференціальні рівняння першого або другого порядку. Ця обставина має не тільки філософське значення, підтверджуючи єдність природи, і не тільки природно наукове значення, підкреслюючи чинність математичних засобів в природознавстві. Воно має і велике практичне значення. Аналогічність диференціальних рівнянь, застосованих до різноманітних явищ життя, призвела до виникнення важливого

засобу розв'язування практичних задач – засобу математичного моделювання. Диференціальне рівняння технічної задачі моделює, наприклад, електричним приладом, а саме конструює такий електроприлад, робота якого описується *тим же* диференціальним рівнянням, що і технічний об'єкт. Спостерігаючи за роботою електроприладу, ми зуміємо судити про поведінку цієї функції. Наприклад, нехай деяка механічна система складається з валу, що через пружину і маховик, повантажений в в'язку рідину, передає обертання іншому валу, жорстко зв'язану з маховиком. Для вивчення роботи цієї системи конструюється інша система – електрична, що складається з джерела ЕРС, з'єданого через котушку індуктивності, конденсатор і активний опір із лічильником електричної енергії. При цьому можна так підібрати значення індуктивності, ємності і опору, щоб вони певним чином відповідали пружності пружини, інерції маховика і тертю рідини. При такій відповідності обидві системи будуть описуватися *одним і тим же* диференціальним рівнянням. В результаті, вимірюючи силу струму і величину напруги, можна судити про роботу першої (механічної) системи.

### Використана література:

1. Вигодський М. Я. Довідник з математики / М. Я. Вигодський. – Москва, 1991.
2. Журнал “Математика в школі”, “Усилить связь с физикой”. – 1979. – № 5. – С. 23.
3. Мясников Б. М. Навчальні допоміжні матеріали з фізики / Б. М. Мясников. – Москва, 1985.
4. Шкіль М. І. Алгебра і початки аналізу: підручник для 10-11 класів середніх закладів освіти. / М. І. Шкіль. – Київ, 1998.
5. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения: примеры и задачи: учеб. пособие. – 2-е изд. / А. М. Самойленко, С. А. Кривошей, Н. А. Перестюк. – М.: Высш. Шк., 1989. – 383 с.: ил.
6. Гудименко Ф. С. Збірник задач з диференціальних рівнянь / Ф. С. Гудименко, І. А. Павлюк, В. О. Волкова. – К.: “Вища школа”, 1972.
7. Еругин Н. П. и др. Курс обыкновенных дифференциальных уравнений / Н. П. Еругин и др. – Киев: Вища школа, 1974.
8. Пономарев К. К. Составление дифференциальных уравнений / К. К. Пономарев. – Минск: Высшая школа, 1973.

### **Макаренко Л. Л., Мірзоєва А. Т. Применение дифференциальных уравнений в школьном курсе физики.**

В статье исследовано применение дифференциальных уравнений в школьном курсе физики. Раскрыта история появления и развития дифференциальных уравнений, проанализированы физические задачи, в которых используются дифференциальные уравнения. Дифференциальные уравнения использованы в задачах на темы из школьного курса физики: “Скорость прямолинейного движения”, “Радиоактивный распад”, “Поглощение света”, “Охлаждение тела”, “Самые простые электрические цепи”, “Падения тел”, “Гармонические колебания”. В задачах были рассмотрены качественно разнообразные физические явления, для исследования которых необходимо решить аналогичные дифференциальные уравнения первого или второго порядка.

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения, школьный курс, физика, задача.

### **Makarenko L. L., Mirzojeva A. T. Application of differential equations in the school course of physics.**

In the article application of differential equations in the school course of physics is investigated. History of appearance and development of differential equations is exposed, problems in physics with differential equations are analyzed. Differential equations are used in problems on school course themes of physics: “Rate of straight motion”, “Radioactive disintegration”, “Light absorption”, “Cooling of body”, “Simplest electric circuits”, “Falling of bodies”, “Harmonic oscillations”. The various physical phenomena for investigation of which it is necessary to solve analogical differential equations of the first or second order are considered in problems in physics.

**Keywords:** differential equations, school course, physics, problem in physics.